



Luiz Felipe Nobili França

**Estabilidade e Densidade dos Difeomorfismos
Morse-Smale do Círculo**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Flavio Erthal Abdenur

Rio de Janeiro
Março de 2008



Luiz Felipe Nobili França

**Estabilidade e Densidade dos Difeomorfismos
Morse-Smale do Círculo**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão examinadora abaixo assinada.

Prof. Flavio Erthal Abdenur

Orientador
Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Jairo da Silva Bochi

PUC-Rio

Prof. Lorenzo Justiniano Días Casado

PUC-Rio

Prof. Sérgio Bernardo Volchan

PUC-Rio

Rio de Janeiro, 15 de Março de 2008

Todos os direitos reservados. proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Luiz Felipe Nobili França

Graduou-se em Matemática (Bacharelado) pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ).

Ficha Catalográfica

Nobili, Felipe

Estabilidade e Densidade dos Difeomorfismos Morse-Smale do Círculo / Luiz Felipe Nobili França; orientador: Flavio Erthal Abdenur. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2008.

v., 60 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese.
2. Morse-Smale. 3. Estabilidade estrutural. 4. Densidade. 5. Difeomorfismos do círculo. 6. Hiperbolicidade. I. Abdenur, Flavio. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Ao meu orientador Flavio Abdenur pelo incentivo e dedicação prestados ao longo destes anos.

Aos professores e funcionarios do departamento de Matemática pela assistência e boa vontade.

À CAPES e FAPERJ pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos colegas da PUC que me acompanharam nesta jornada e tornaram o ambiente de trabalho mais agradável.

Resumo

Nobili, Felipe; Abdenur, Flavio. **Estabilidade e Densidade dos Difeomorfismos Morse-Smale do Círculo**. Rio de Janeiro, 2008. 60p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho tem como objetivo demonstrar que um difeomorfismo do círculo é Morse-Smale se, e somente se, ele é estruturalmente estável sob C^1 -perturbações, e que o conjunto dos difeomorfismos Morse-Smale é denso no conjunto de todos os difeomorfismos C^1 do círculo. Uma das preocupações presentes neste trabalho é a de apresentar as demonstrações e os conceitos da forma mais acessível possível, tendo como pré-requisitos apenas análise Real e noções básicas de topologia.

Palavras-chave

Morse-Smale. Estabilidade estrutural. Densidade. Difeomorfismos do círculo. Hiperbolicidade.

Abstract

Nobili, Felipe; Abdenur, Flavio. **Structural Stability and Density of Morse-Smale Circle Diffeomorphisms**. Rio de Janeiro, 2008. 60p. MsC Thesis — Department of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The main goal of this dissertation is to provide a self-contained proof that circle diffeomorphisms are Morse-Smale if and only if they are structurally stable in the C^1 topology. Another interesting result proved here is that the set of Morse-Smale diffeomorphisms is dense in the set of all C^1 diffeomorphisms of the circle. The presentation of the subject and proofs requires no more background than real analysis of functions of one variable and elementary topology.

Keywords

Morse-Smale. Structural stability. Density. Circle diffeomorphisms. Hiperbolicity.

Sumário

| | | |
|-----|---|----|
| 1 | Introdução | 8 |
| 1.1 | Noções básicas | 8 |
| 1.2 | O círculo | 11 |
| 2 | Hiperbolicidade e estabilidade | 21 |
| 3 | Estabilidade dos Difeomorfismos Morse-Smale | 30 |
| 4 | Difeomorfismos estáveis são Morse-Smale | 37 |
| 5 | Densidade dos difeomorfismos Morse-Smale | 47 |
| 6 | Inversão de orientação | 57 |
| 7 | Considerações finais | 59 |

1

Introdução

Neste capítulo vamos abordar os principais conceitos que envolvem as dinâmicas no círculo e enunciar os principais resultados que serão usados em seqüência. Começaremos introduzindo algumas definições básicas no estudo de dinâmica.

1.1

Noções básicas

O contexto em que estamos trabalhando é o de sistemas dinâmicos discretos. Dada uma aplicação contínua de um espaço topológico X nele mesmo, digamos $f : X \rightarrow X$, e um ponto $x \in X$, podemos nos perguntar quem é a imagem do ponto $f(x) \in X$. Analogamente, podemos nos perguntar quem é a imagem de $f(f(x)) \in X$, e assim sucessivamente. Este processo é chamado de iteração da função f no ponto x .

Ao iterarmos uma função, é usual atribuímos a este processo a idéia de tempo, como se cada iteração de f correspondesse à passagem de uma unidade de tempo. Sendo assim, temos um sistema em que o tempo evolui de forma discreta. Estamos interessados em entender o comportamento “futuro” do sistema, isto é, quando o tempo tende a infinito. Veremos logo a seguir um exemplo de como isso funciona na prática.

Por simplicidade, denotaremos $f^n(x) = \overbrace{(f \circ f \circ f \dots \circ f)}^{n \text{ vezes}}(x)$. No caso de f ser invertível, podemos iterar x por f^{-1} , e denotaremos $f^{-n}(x) = \overbrace{(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1} \dots \circ f^{-1})}^{n \text{ vezes}}(x)$. Denotaremos $f^{(n)}$ a n -ésima derivada de f , e portanto o uso dos parênteses deve ser bem observado de modo a não criar confusões.

Como exemplo de dinâmica, vamos considerar as iterações da função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Tomemos o ponto $x_0 = 0,5$ e $x_1 = 1,5$. Assim, teremos:

$$f(x_0) = 0,707\dots ; f^2(x_0) = 0,840\dots ; f^3(x_0) = 0,917\dots ; f^4(x_0) = 0,957\dots$$

$$f(x_1) = 1,224\dots ; f^2(x_1) = 1,106\dots ; f^3(x_1) = 1,051\dots ; f^4(x_1) = 1,025\dots$$

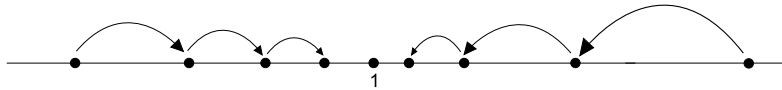


Figura 1.1: Iterações da função \sqrt{x} para um ponto a direita e a esquerda de 1 em \mathbb{R}^+

Um estudo mais cuidadoso nos mostra que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_1) = 1$. Se escolhermos o ponto inicial $x = 0$ teremos $f^n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escolhendo $x = 1$, teremos $f^n(x) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De forma geral, pode-se dizer que se $0 < x < 1$ ou $x > 1$ teremos uma convergência para 1. Esta breve análise feita aqui caracteriza o comportamento de todos os pontos do domínio sob iterações da função f . Em geral, é isso que entendemos como estudar a dinâmica de uma função. Porém, estaremos interessados não apenas em convergências, mas também em diversas outras propriedades topológicas que serão especificadas ao longo do nosso estudo.

Definição 1.1 Dizemos que um ponto $x \in X$ é um ponto fixo de $f : X \rightarrow X$ se $f(x) = x$. Se $x \in X$ é um ponto fixo de f^n (isto é, se $f^n(x) = x$) para algum $n \in \mathbb{N}$, então dizemos que x é um ponto periódico. Ao menor valor natural de n satisfazendo esta propriedade chamamos período do ponto x . Denotamos $\text{Fix}(f)$ o conjunto de pontos fixos da função f e denotamos $\text{Per}(f)$ o conjunto de pontos periódicos de f .

Para difeomorfismos crescentes da reta, é de fácil verificação que não existem pontos periódicos de período maior que 1 (pontos fixos). Para difeomorfismos decrescentes o maior período possível é 2 (por exemplo $f(x) = -x$, onde todos os pontos são periódicos de período 2). No entanto essa patologia não acontece para as dinâmicas no círculo, onde é possível termos qualquer tipo de periodicidade, mesmo para difeomorfismos.

Definição 1.2 Dado $f : X \rightarrow X$ e $x \in X$, a órbita positiva de x é o conjunto $O^+(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Se f for invertível, chamaremos de órbita negativa o conjunto $O^-(x) = \{f^{-n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$, e simplesmente órbita de x o conjunto $O(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Em muitos casos $O^+(x)$ é, por abuso de notação, entendido não como um conjunto, e sim como uma seqüência: $O^+(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Analogamente para $O^-(x) = \{f^{-n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$. No entanto, na grande maioria das vezes fica bem claro qual das duas idéias estamos usando pelo contexto em que ela aparece.

Definição 1.3 *Seja (X, d) um espaço métrico. Dada uma aplicação $f : X \rightarrow X$, dizemos que um ponto $x \in X$ converge no futuro para $a \in X$ com respeito a função f se $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a$. A convergência é dita exponencial se existe $0 < \lambda < 1$ tal que $d(f^n(x), a) \leq \lambda d(f^{n-1}(x), a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (conseqüentemente teremos $d(f^n(x), a) \leq \lambda^n d(x, a)$). Dizemos que um ponto x converge (exponencialmente) no passado para $a \in X$ se, com respeito a aplicação f^{-1} , x converge (exponencialmente) para a no futuro.*

Aqui as expressões “no futuro” e “no passado” reforçam a idéia de que as iterações podem ser vistas como a passagem discreta do tempo. Essa analogia é emprestada de outras disciplinas (física, biologia, meteorologia e etc), onde os sistemas dinâmicos modelam fenômenos que evoluem com o tempo.

Definição 1.4 *O ω -limite de um ponto $x \in X$ é o conjunto $\omega(x) = \{y \in X \mid f^{n_i}(x) \rightarrow y \text{ para alguma seqüência crescente de naturais } \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}\}$. Isto é, $\omega(x)$ é o conjunto dos pontos de acumulação da seqüência $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se f for invertível, podemos definir α -limite de um ponto x como $\alpha(x) = \{y \in X \mid f^{-n_i}(x) \rightarrow y \text{ para alguma seqüência crescente de naturais } \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}\}$.*

Esta definição já aponta as primeiras intenções de estudarmos a topologia das órbitas. Em seguida, queremos saber que “tipos” de ω -limite (do ponto de vista topológico) uma determinada função pode ter.

Definição 1.5 *Dizemos que uma função $f : X \rightarrow X$ é topologicamente transitiva se existe $x \in X$ com $\overline{O^+(x)} = X$ (Isto é, existe um ponto cuja órbita é densa em X). Se para todo $x \in X$ tivermos $\overline{O^+(x)} = X$, então dizemos que f é minimal.*

Se o espaço X não possui pontos isolados, então podemos concluir que a definição de transitividade topológica é equivalente a existência de um ponto cujo ω -limite é todo o contradomínio. Com os resultados apresentados nas próximas seções veremos que o ω -limite de uma transformação do círculo ou admite uma estrutura muito simples (uma órbita periódica ou o círculo todo) ou uma estrutura bastante rica (veja proposição 1.23 e a definição 1.22 sobre conjunto de Cantor).

Veremos na próxima seção os principais conceitos envolvidos quando a dinâmica ocorre no círculo.

1.2

O círculo

Nos referimos ao círculo unitário como o conjunto $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. No entanto, é conveniente ao nosso estudo trabalharmos com outra representação de S^1 dada por:

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad (\text{os Reais modulo } 1)$$

Uma maneira bastante prática de trabalharmos com este conjunto é pensá-lo como sendo o intervalo $[0, 1]$, mas com os pontos 0 e 1 identificados. Isso nos leva a uma representação bem simples para o gráfico de funções de $S^1 \rightarrow S^1$.

Graficamente, as funções de S^1 em S^1 são representadas em um quadrado de lado 1 ($\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$), onde identificamos, em cada coordenada, os valores 0 e 1 (isto é, eles representam o mesmo ponto). Portanto, para que tenhamos continuidade, o gráfico da função deve intersectar o eixo vertical $x = 0$ na mesma coordenada horizontal na qual intersecta o eixo vertical $x = 1$, e intersectar o eixo horizontal $y = 0$ na mesma coordenada vertical na qual intersecta o eixo horizontal $y = 1$. Veja alguns exemplos na figura 1.2. Nestes exemplos as linhas sólidas são os gráficos das funções e as tracejadas são linhas auxiliares que indicam a continuidade nos pontos.

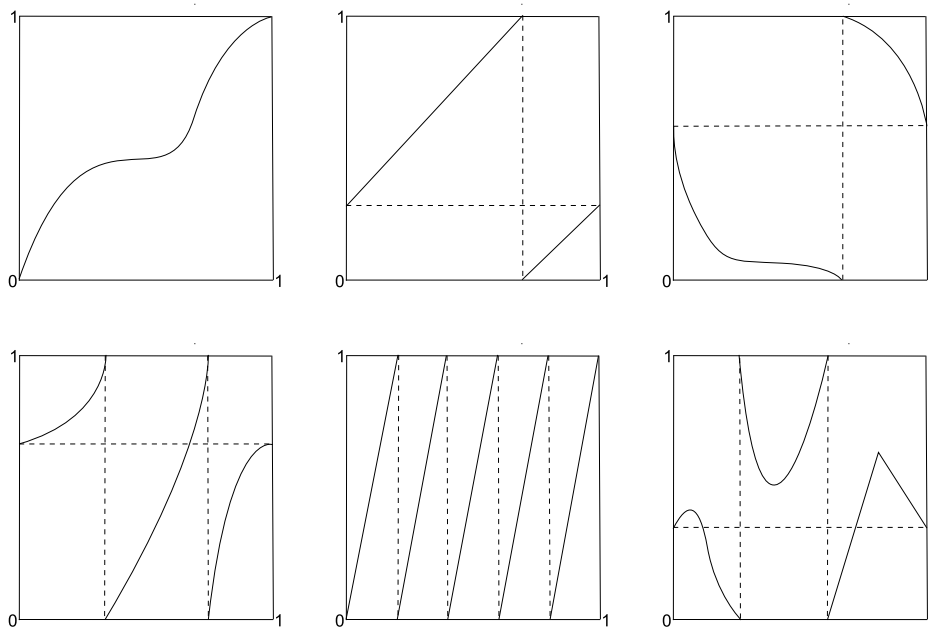


Figura 1.2: Exemplos de funções contínuas do círculo

Um dos fatores que torna interessante trabalhar com dinâmicas no

círculo é a possibilidade de introduzir de forma simples e intuitiva diversos conceitos de dinâmica que aparecem em contextos bem mais complicados (tais como minimalidade, transitividade, hiperbolicidade, estabilidade etc). Neste trabalho estaremos focados em caracterizar a dinâmica dos difeomorfismos estáveis de S^1 (num certo sentido de estabilidade que veremos mais adiante no texto).

Queremos atribuir a S^1 uma estrutura de espaço métrico. Para isso, temos que definir uma distância em S^1 . Definimos $d_0 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por:

$$d_0(x, y) = \min\{[x - y + 1], [y - x + 1]\}$$

Onde $[a]$ significa a parte fracionária de a (por exemplo $[1, 123] = 0, 123$). Considerando S^1 como o intervalo $[0, 1]$, com os pontos 0 e 1 identificados, a função d_0 induz uma aplicação $d : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$. Esta aplicação está bem definida já que $d_0(0, y) = d_0(1, y)$ e $d_0(x, 0) = d_0(x, 1)$ para todo $x, y \in [0, 1]$.

É de fácil verificação que, para todo $x, y \in S^1$, a aplicação d obedece as seguintes propriedades:

1. $d(x, y) \geq 0$, valendo a igualdade $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $z \in S^1$.

Esta última desigualdade segue dos seguintes fatos: $[a + 1] = [a + 2]$ e $[a + b] \leq [a] + [b]$. Um conjunto X quando munido de uma aplicação $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfazendo as 3 propriedades acima é chamado *espaço métrico*, e a aplicação d é chamada *métrica*. Assim, S^1 com a métrica d definida acima é um espaço métrico.

Se pensarmos em S^1 como o conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ de circunferência 1 (isto é, $2\pi r = 1$), resgatamos a intuição geométrica e teremos que d representa o comprimento do menor arco que liga dois pontos.

Definição 1.6 *Um conjunto $I \subset S^1$ será chamada de intervalo do círculo se I for um conjunto conexo de S^1 . Este intervalo será dito próprio se $I \neq S^1$.*

Pela identificação que fizemos de S^1 com o intervalo $[0, 1]$ (com os pontos 0 e 1 identificados), é fácil perceber que os únicos intervalos de S^1 são da forma: $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ ou $(a, b]$ se não contém o zero, e $[0, a] \cup [b, 1]$, $[0, a) \cup (b, 1]$, $[0, a] \cup (b, 1)$ ou $(a, b] \cup [0, 1]$ se contém o zero, onde $0 < a \leq b < 1$. Para simplificar a notação, se $b > a$ representaremos estes últimos casos respectivamente como: $[b, a]$, (b, a) , $[b, a)$ ou $(b, a]$.

Chamamos *comprimento* de um intervalo (a, b) (analogamente para $[a, b), (a, b]$ ou $[a, b]$) o número dado por $b - a$ (se $b > a$) ou $1 - (a - b)$ (se $a > b$). Se A é uma união disjunta (finita ou não) de intervalos de S^1 , chamamos de *medida* de A a soma de todos os comprimentos dos intervalos que constituem A . Pode-se verificar facilmente que se B é uma união disjunta de intervalos tal que $B \subset A$, então a medida de B é menor ou igual a medida de A . Assim, a medida de um conjunto do círculo não pode exceder o valor 1 (que é a medida de S^1). Podemos ainda definir a medida de A^c (o complementar de A) como sendo 1 menos a medida de A , que será um valor não negativo menor que 1. Vale observar ainda que o conceito de medida pode ser estendido para conjuntos que não são uniões disjuntas de intervalos nem complementares destes conjuntos, mas não trataremos desse assunto neste texto. Para maiores detalhes a respeito de teoria de medidas veja a referência (5).

O resultado a seguir vale em contextos mais gerais (aplicações em espaços métricos localmente compactos e separáveis) com apenas pequenos ajustes na demonstração. Porém consideraremos o domínio como sendo S^1 , o que torna a demonstração mais acessível.

Proposição 1.7 $f : S^1 \rightarrow S^1$ é topologicamente transitiva se, e somente se, para todo par de abertos não vazios $U, V \subset S^1$ existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Prova. Primeiramente vamos supor f transitiva. Sendo assim, existe um ponto $x \in S^1$ com órbita densa. Dados dois abertos não vazios $U, V \subset S^1$, pela densidade da órbita de x existem $n, m \in \mathbb{N}$ com $f^n(x) \in U$ e $f^m(x) \in V$. Podemos supor $m > n$, pois em cada aberto existe uma infinidade de pontos da órbita de x . Logo, temos que $f^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Reciprocamente, vamos admitir que todo par de abertos não vazios $U, V \subset S^1$ satisfaz a condição do enunciado. Vamos considerar a seguinte cobertura de S^1 : $\mathcal{B} = \{(x - y, x + y) \subset S^1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$. Uma vez que esta cobertura é enumerável, podemos escrevê-la como $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, \dots\}$.

A seguir, será usada a notação $f^{-n}(A)$ significando a n -ésima pré-imagem do conjunto A (f não é necessariamente invertível). Se A for aberto, temos que $f^{-n}(A)$ será aberto (pela continuidade de f). Além disso, é bom lembrar que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Daí segue que se $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$ então $A \cap f^{-n}(B) \neq \emptyset$.

Pela hipótese, sendo B_1 e B_2 dois abertos de S^1 , existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_1}(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$. Defina $U_1 = B_1 \cap f^{-n_1}(B_2)$, que é um aberto não vazio. Tomemos um aberto $V_1 \subset U_1$ satisfazendo $\overline{V_1} \subset U_1$.

Sendo V_1 e B_3 dois abertos de S^1 , existe (pela hipótese) $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_2}(V_1) \cap B_3 \neq \emptyset$. Defina $U_2 = V_1 \cap f^{-n_2}(B_3)$, que é um aberto não vazio

e $U_2 \subset V_1$. Tomemos um aberto $V_2 \subset U_2$ satisfazendo $\overline{V_2} \subset U_2$. Observe que $\overline{V_2} \subset \overline{V_1}$.

Novamente, para os abertos V_2 e B_4 , existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_3}(V_2) \cap B_4 \neq \emptyset$. Defina $U_3 = V_2 \cap f^{-n_3}(B_4)$, que é um aberto não vazio e $U_3 \subset V_2$. Tomemos um aberto $V_3 \subset U_3$ satisfazendo $\overline{V_3} \subset U_3$. Observe que $\overline{V_3} \subset \overline{V_2}$.

Seguimos o mesmo raciocínio repetidas vezes obtendo uma seqüência de compactos não vazios: $\overline{V_1} \supset \overline{V_2} \supset \overline{V_3} \supset \dots$. Então o conjunto $M = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{V_i}$ é um compacto não vazio. Basta agora verificar que um ponto $x \in M$ tem órbita densa. Por construção, a órbita de tal x intersecta todos os B_i 's, que constituem uma base de abertos de S^1 . Em particular, dado qualquer aberto $A \subset S^1$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B_j \subset A$. Portanto $O^+(x) \cap A \supset O^+(x) \cap B_j \neq \emptyset$.

Corolário 1.8 *Se $f : S^1 \rightarrow S^1$ é topologicamente transitiva e invertível, então f^{-1} é topologicamente transitiva.*

Prova. Dados $U, V \in S^1$ temos que mostrar que existe um $n \in \mathbb{N}$ com $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. Mas considerando V, U e a transitividade de f , existe $n \in \mathbb{N}$ com $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$ e consequentemente $V \cap f^{-n}(U) \neq \emptyset$.

Assim, a definição de transitividade pode ser tomada com $O(x)$ no lugar de $O^+(x)$ quando estamos falando de aplicações invertíveis, sem perdas conceituais.

Definição 1.9 *Dada uma aplicação do círculo f , um conjunto $A \subset S^1$ é dito invariante por f se $f(A) = A$.*

Exemplos simples de dinâmicas no círculo são as rotações. Uma rotação é uma aplicação $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$. Assim, a n -ésima iteração de uma rotação será a aplicação $R_\alpha^n(x) = x + n.\alpha \pmod{1}$. Se α é racional (digamos $\alpha = p/q$) então $R_\alpha^q(x) = x$, e portanto todo ponto de S^1 será um ponto periódico. Algo mais interessante ocorre quando temos α irracional.

Proposição 1.10 *Dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $O^+(x) = \{R_\alpha^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ é denso em S^1 para todo $x \in S^1$. Em outras palavras, rotações irracionais são minimais.*

Prova. Primeiramente observe que uma rotação irracional não pode ter pontos periódicos, pois do contrário teríamos: $R_\alpha^n(x) = x + n.\alpha \pmod{1} = x$. Logo $n.\alpha = 0 \pmod{1}$ e portanto $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Por contradição, vamos supor que $O^+(x)$ não é denso em S^1 . Sendo assim o conjunto $K = S^1 \setminus \overline{O^+(x)}$ é um aberto não vazio. Observe que $\overline{O^+(x)}$ é um conjunto invariante por R_α (e portanto por R_α^{-1}). Segue então que $R_\alpha(K) = K$.

Vamos escolher uma componente conexa I de $K \subset S^1$. Isto é, $I \subset K$ é um aberto (relativo a K) e conexo que não pode estar contido propriamente em nenhum outro aberto conexo de K . Podemos afirmar que $R_\alpha^n(I) \cap I = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois do contrário teríamos duas possibilidades:

1. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R_\alpha^n(I) = I$. Colocando $I = (a, b)$, temos $R_\alpha^n(I) = (a + n.\alpha \pmod{1}, b + n.\alpha \pmod{1}) = (a, b)$. Logo $a = a + n.\alpha \pmod{1}$, e portanto a é periódico. Absurdo.
2. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R_\alpha^n(I) \neq I$ e $R_\alpha^n(I) \cap I \neq \emptyset$. Portanto $R_\alpha^n(I) \cup I$ é um aberto conexo de K que contém propriamente I . Absurdo.

Se $R_\alpha^m(I) \cap R_\alpha^n(I) \neq \emptyset$, digamos com $m > n$, então teremos $R_\alpha^{m-n}(I) \cap I \neq \emptyset$. Segue então que $R_\alpha^m(I) \cap R_\alpha^n(I) = \emptyset$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Rotações não alteram o comprimento da componente conexa. Sendo as iterações $R_\alpha^n(I)$ mutuamente disjuntas, chegamos a um absurdo, já que a soma dos comprimentos destes conjuntos disjuntos excede (tende a infinito) o comprimento de S^1 , que é igual a 1 (veja os comentários a respeito de medidas e comprimentos de conjuntos do círculo que antecedem a proposição 1.7).

Para entendermos melhor a dinâmica do círculo, um artifício muito comum é usarmos uma função correspondente à aplicação do círculo, porém definida em \mathbb{R} . Intuitivamente, essa função é a representação de f em cada intervalo de \mathbb{R} , colocada de forma contínua, tal como esboçado na figura 1.4. Rigorosamente, temos a seguinte definição.

Definição 1.11 *Dada uma aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow S^1$, um levantamento de f é uma função contínua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\pi \circ F = f \circ \pi$, onde $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é a projeção de \mathbb{R} em S^1 dada por $\pi(x) = x \pmod{1}$.*

Proposição 1.12 *Principais propriedades do levantamento:*

1. *Dados dois levantamentos F_1 e F_2 de uma aplicação contínua f , existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $(F_1 - F_2)(x) = k$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Se F é um levantamento da aplicação contínua f , então existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $F(x+1) = F(x) + d$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O número d é chamado grau de f e denotado por $\deg f$.*
3. *Se F e G são levantamentos de f e g respectivamente, então $F \circ G$ é um levantamento de $f \circ g$. Consequentemente F^n é um levantamento de f^n para todo $n \in \mathbb{N}$.*

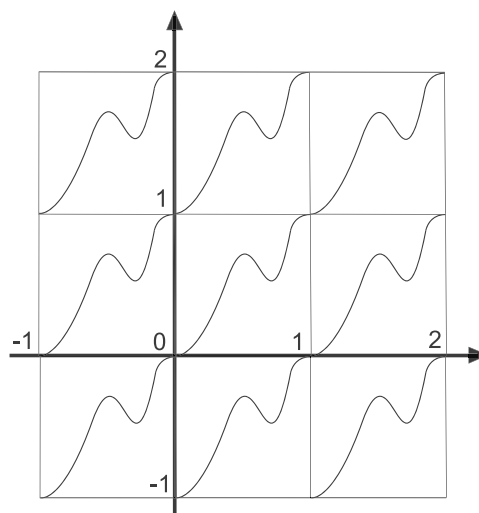
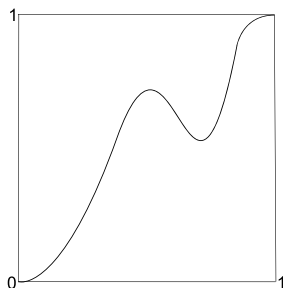


Figura 1.3: $f : S^1 \rightarrow S^1$. Figura 1.4: Possíveis levantamentos para f .

4. $\deg(f \circ g) = (\deg f) \cdot (\deg g)$. Consequentemente $\deg f^n = (\deg f)^n$.
5. Se f é invertível então $\deg f^{-1} = \deg f = \pm 1$.

Prova.

1. $\pi \circ F_1 = f \circ \pi = \pi \circ F_2$. Logo $\pi \circ F_1 - \pi \circ F_2 = 0$ e portanto $(F_1 - F_2)(x) \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in S^1$. Como $(F_1 - F_2)$ é contínua, a imagem de \mathbb{R} (que é conexo) possui apenas uma componente conexa, e portanto $(F_1 - F_2)(x) = k \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in S^1$.
2. $\pi \circ F(x+1) - \pi \circ F(x) = f \circ \pi(x+1) - f \circ \pi(x) = f \circ \pi(x) - f \circ \pi(x) = 0$. Logo a imagem de $F(x+1) - F(x)$ pertence a \mathbb{Z} . Pelos mesmos argumentos do item 1, temos que $F(x+1) - F(x) = d \in \mathbb{Z}$. Este valor não depende do levantamento escolhido, pois $F_1(x+1) - F_2(x+1) = k$ e $F_1(x) - F_2(x) = k$. Portanto $(F_1(x+1) - F_1(x)) - (F_2(x+1) - F_2(x)) = 0$.
3. $\pi \circ F \circ G = f \circ \pi \circ G = f \circ g \circ \pi$.
4. Primeiramente vamos provar que $F(x+n) = F(x) + n \cdot (\deg f)$. De fato, isso vale para $n = 1$. Vamos supor que vale para m , então: $F(x+m+1) = F(x+m) + (\deg f) = F(x) + m \cdot (\deg f) + (\deg f) = F(x) + (m+1)d$. Por indução, vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $(F \circ G)(x+1) = F(G(x+1)) = F(G(x) + (\deg g)) = F(G(x)) + (\deg g) \cdot (\deg f) = (F \circ G)(x) + (\deg g) \cdot (\deg f)$. Pelo item anterior $F \circ G$ é um levantamento de $f \circ g$, e portanto o resultado segue da definição de grau.

5. Considere a função identidade $Id : S^1 \rightarrow S^1$ ($Id(x) = x$). Claramente temos $deg Id = 1$. Pelo item 3 segue que $1 = deg Id = deg(f^{-1} \circ f) = (deg f^{-1}) \cdot (deg f)$, e portanto $deg f^{-1} = (deg f) = \pm 1$.

Definição 1.13 *Uma aplicação do círculo f é dita derivável no ponto a se algum (e portanto todo) levantamento F de f é derivável em algum ponto (e portanto todos) do conjunto $\pi^{-1}(a)$. Definimos a derivada de f no ponto a como $f'(a) = F'(b)$, onde $\pi(b) = a$. Observe que f' está bem definida, pois F é uma função periódica, e portanto tal definição independe da escolha de b satisfazendo $\pi(b) = a$. Além disso a escolha do levantamento não interfere no resultado, já que todo levantamento difere por uma constante. Se f possui derivada em todos os pontos do círculo, dizemos que f é uma aplicação diferenciável. Se F é uma função de classe C^r da reta, então dizemos que f é uma aplicação de classe C^r do círculo.*

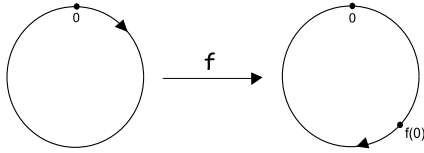
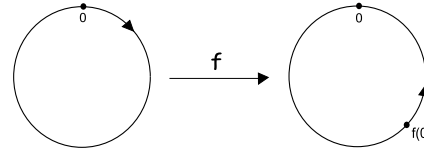
Definição 1.14 *Um homeomorfismo do círculo é uma bijeção (de S^1 em S^1) contínua e com inversa contínua. Um homeomorfismo diferenciável com inversa diferenciável é denominado difeomorfismo.*

O grau de uma função contínua nos diz quantas “voltas líquidas” a imagem desta função dá ao redor do círculo. Sendo assim, no caso de termos um homeomorfismo f , teremos $deg f = \pm 1$ (por ser invertível). Da proposição anterior, segue que para toda função contínua de grau 1, sendo F um levantamento de f , vale:

1. $F(x + 1) = F(x) + 1$.
2. $F^n(x + 1) = F^n(x) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por indução sobre o item 1).
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ a função $F^n(x) - x$ é periódica de período 1 (o que se verifica facilmente diminuindo $(x + 1)$ na igualdade do item 2).

Definição 1.15 *Dizemos que um homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ preserva orientação se os levantamentos de f são funções não decrescentes. No caso de serem não crescentes, dizemos que o homeomorfismo inverte orientação.*

Estes nomes sugerem como a imagem da função se comporta ao percorrermos o círculo. Para funções que preservam orientação é fácil percebermos que a imagem é percorrida no mesmo sentido (horário ou anti-horário) em que percorrermos o domínio (o que justifica o nome dado).

Figura 1.5: f preserva orientaçãoFigura 1.6: f inverte orientação

Definição 1.16 Denotamos o conjunto de difeomorfismos de classe C^r de S^1 por $\text{Diff}^r(S^1)$. Usamos $\text{Diff}_+^r(S^1)$ para denotar o subconjunto de $\text{Diff}^r(S^1)$ que preserva orientação e $\text{Diff}_-^r(S^1)$ para o que inverte orientação.

Observe que todo intervalo da reta da forma $(a-2, a]$ possui exatamente dois inteiros. Se f é um homeomorfismo que inverte orientação e F um levantamento de f , então a função $F(x) - x$ é uma função não crescente que leva o intervalo $[0, 1)$ em $(F(1) - 1, F(0)] = [F(0) - 2, F(0))$. Logo, $F(x) - x$ possui exatamente dois pontos no intervalo $[0, 1)$ cujas imagens são valores inteiros, e consequentemente f possui exatamente dois pontos fixos. Além disso, se $a < b$ então $F(b) < F(a)$ e portanto $F(F(a)) < F(F(b))$. Assim, F^2 é uma função não decrescente e f^2 preserva orientação.

A principal motivação para a definição de levantamento é o conceito de número de rotação. Este conceito é extremamente importante no estudo de dinâmica do círculo e, como veremos, diz muito a respeito da dinâmica da aplicação estudada. Serão omitidas as demonstrações das proposições a respeito do número de rotação, que podem ser encontradas em (2) ou (3).

Definição 1.17 Dado um ponto $x \in S^1$ e f um homeomorfismo que preserva orientação, chamamos o número $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$, caso exista, de número de rotação do ponto x com relação a F e denotamos por $\bar{\rho}(F, x)$.

A idéia por trás desta definição é comparar a trajetória que um ponto sofre ao percorrer sua órbita com a trajetória dada por uma rotação. Isto é, queremos saber qual a rotação média que está sendo atribuída ao iterarmos a função no ponto x . A proposição a seguir nos permite redefinir o conceito de número de rotação de forma a torná-lo intrínseco à aplicação f (isto é, independente da escolha do levantamento F e do ponto x).

Proposição 1.18 Dado um homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ que preserva orientação, vale:

1. O limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$ existe para todo $x \in S^1$.
2. Este limite independe do valor x , e portanto podemos denotar apenas $\bar{\rho}(F)$.

3. Se F_1 e F_2 são dois levantamentos de f , então $\bar{\rho}(F_1) - \bar{\rho}(F_2) = k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Sendo assim, definimos $\rho(f) = \bar{\rho}(F)(\text{mod } 1)$, que independe da escolha do levantamento F , e é chamado número de rotação de f .
4. $\rho(f)$ depende continuamente de f .

Pela definição, é fácil perceber que o número de rotação de uma rotação R_α nada mais é que o valor α . Em geral, o número de rotação de um homeomorfismo tem uma relação muito forte com o comportamento das órbitas. Ele diz, entre outras coisas, sobre a existência de pontos periódicos e seus períodos.

Proposição 1.19 $\rho(f) = 0$ se, e somente se, f possui algum ponto fixo.

Proposição 1.20 $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ se, e somente se, f possui algum ponto periódico. Além disso, todo ponto de S^1 converge assintoticamente (tanto no passado quanto no futuro) para a órbita de algum ponto periódico de f . Se $\rho(f) = p/q$ com $p, q \in \mathbb{N}$ e p/q irredutível, então todo ponto periódico de f possui o mesmo período, e este vale q .

Apesar do número de rotação estar definido somente para homeomorfismos que preservam orientação, se tivermos um homeomorfismo f que inverte orientação podemos aplicar esta última proposição à f^2 (lembrando que f^2 é um homeomorfismo que preserva orientação e possui pontos fixos) e concluímos que os pontos periódicos de f tem período no máximo 2.

Assim, a dinâmica dos homeomorfismos do círculo com número de rotação racional é bem simples. O ω -limite de qualquer ponto será uma órbita de um ponto periódico. Para homeomorfismos com número de rotação irracional a dinâmica se torna bem mais complicada, e o ω -limite pode assumir características bem mais interessantes.

Definição 1.21 Dizemos que um ponto $x \in S^1$ de $f : S^1 \rightarrow S^1$ é recorrente se, para toda vizinhança V de x , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in V$.

É fácil perceber que todo ponto periódico é recorrente. O interessante, e não tão intuitivo, é que a existência de pontos recorrentes também é uma característica inerente às aplicações com número de rotação irracional.

Definição 1.22 Dizemos que um conjunto $K \subset S^1$ é um conjunto de Cantor se satisfaz:

1. K é compacto.

2. K não possui pontos isolados.
3. K tem interior vazio.

Proposição 1.23 Dado um homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ que preserva orientação, se $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, vale:

1. $\omega(x) = \omega(y)$ para todo $x, y \in S^1$. E portanto podemos definir $\omega(f) = \omega(x)$.
2. $\omega(f)$ é minimal.
3. $\omega(f)$ é S^1 ou é um conjunto de Cantor.

Corolário 1.24 Se f é tal que $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então f possui ponto recorrente.

Prova. Segundo a proposição 1.23 acima, todo ponto em $\omega(f)$ é acumulado pela órbita de qualquer ponto. Assim, escolhendo $x \in \omega(f)$ temos em particular que x é acumulado por sua própria órbita.

Sejam f e g duas aplicações contínuas tais que existem levantamentos F e G , respectivamente de f e g , e um intervalo $I \subset S^1$ satisfazendo $|F(w) - G(w)| < 1/2$ para todo $w \in \pi^{-1}(I)$. Dado um ponto $x \in I$, faremos as seguintes convenções:

Seja $x_0 \in \pi^{-1}(x)$. Diremos que $f(x) - g(x) > 0$ se $F(x_0) - G(x_0) > 0$. O mesmo valendo para $<$, \leq , $=$ ou \geq . Assim, na maioria das demonstrações trabalharemos com as aplicações, e não com seus levantamentos, evitando sobrecarregar as notações. As aplicações f e g podem ser a identidade, uma função constante ou qualquer outra aplicação contínua do círculo, desde que estejam suficientemente próximas. Assim, faz sentido falar em $f(x) - a > 0$, $a - b < 0$, $|x - a| < b$, $f(a) \geq b$ etc. Usualmente falaremos sobre pequenas perturbações de um difeomorfismo em um intervalo pequeno de S^1 (definiremos mais adiante formalmente o que isso significa). Podemos pensar em f sendo localmente seu levantamento, e esta notação se tornará muito útil, evitando ter que falar toda hora da função π , π^{-1} , tomar levantamentos apropriados etc. No que se segue, sempre que falarmos em difeomorfismos do círculo assumiremos sem mencionar que o difeomorfismo é de classe C^1 .

2

Hiperbolicidade e estabilidade

Neste capítulo serão apresentados dois novos conceitos que são centrais neste trabalho: Estabilidade estrutural e difeomorfismos Morse-Smale. Para isso, será necessário introduzir dois ingredientes fundamentais: Hiperbolicidade e conjugação topológica.

Iniciaremos com uma breve análise do que acontece com as iterações de uma aplicação numa vizinhança de um ponto fixo ou ponto periódico. Estes pontos podem ser de dois tipos : hiperbólicos ou não-hiperbólicos. Veremos mais adiante que a estabilidade de um difeomorfismo está muito relacionada a hiperbolicidade de seus pontos fixos ou periódicos.

Definição 2.1 *Seja f um difeomorfismo e x um ponto fixo de f . Dizemos que x é um ponto fixo hiperbólico se $|f'(x)| \neq 1$. Se $|f'(x)| < 1$ dizemos que este ponto fixo é um atrator, e se $|f'(x)| > 1$ dizemos que é um ponto fixo repulsor. Se x é um ponto periódico de período n , dizemos que x é ponto periódico hiperbólico (atrator ou repulsor) se x é ponto fixo hiperbólico (atrator ou repulsor) de f^n . Um ponto fixo (ou periódico) com derivada igual a 1 ou -1 é dito não-hiperbólico.*

Definição 2.2 *Usualmente falaremos sobre pontos periódicos isolados. Estará sempre subentendido nesta denominação que este ponto é isolado relativo ao conjunto $Per(f)$.*

Assim como classificamos os pontos fixos hiperbólicos em dois tipos (repulsores e atratores), podemos também classificar os pontos fixos não-hiperbólicos isolados de maneira semelhante.

Definição 2.3 *Dizemos que um ponto fixo p não-hiperbólico de um difeomorfismo f que preserva orientação é atrator fraco se existe uma vizinhança V de p tal que, para todo $x \in V$, temos: $f(x) > x$ se $x < p$, e $f(x) < x$ se $x > p$. Se p é um atrator fraco de f^{-1} dizemos que p é um repulsor fraco de f .*

Pode acontecer também de numa vizinhança do ponto fixo p termos $f(x) < f(p)$ para todo x nesta vizinhança (exceto em p). Isso significa que o

gráfico de f está localmente todo (exceto em p) abaixo do gráfico da identidade. Neste caso o ponto p é chamado repulsor-atrator fraco. Outra possibilidade é existir uma vizinhança do ponto p onde o gráfico fique todo acima do gráfico da identidade (exceto em p). Neste caso p é chamado atrator-repulsor fraco.

Para um difeomorfismo que inverte orientação, chamamos um ponto fixo não-hiperbólico p de atrator (repulsor, atrator-repulsor ou repulsor-atrator) fraco se p o for para f^2 .

Observe que nem todo ponto fixo não-hiperbólico é isolado (tome como exemplo a identidade). Assim, podemos ter pontos que não se enquadram em nenhuma das quatro descrições acima.

Os nomes “atrator” e “repulsor” atribuídos aparentemente sem nenhum motivo nas definições acima, são justificados pelas proposições seguintes. Estes nomes já prenunciam como deve ser o comportamento da aplicação numa vizinhança próxima de um ponto fixo isolado.

Proposição 2.4 *Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ um homeomorfismo de um intervalo da reta nele mesmo, tal que os únicos pontos fixos são a e b . Suponha que $f(x) - x > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então dado qualquer ponto $x \in (a, b)$ vale:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = b \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x) = a$$

Prova. Como $f(z) > z$ para todo $z \in (a, b)$, dado $x \in (a, b)$ a seqüência $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e limitada por b . Portanto tal seqüência converge para algum ponto q em $[a, b]$. Porém, por continuidade de f o ponto q tem que ser um ponto fixo. Como $f^n(x) > x > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o ponto fixo q só pode ser b . Um argumento análogo mostra que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x) = a$.

No caso de termos $f(x) < x$ para todo ponto $x \in (a, b)$, segue que $f^{-1}(x) > x$, e basta aplicar o mesmo raciocínio anterior à função f^{-1} para obtermos:

Corolário 2.5 *Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ um homeomorfismo de um intervalo da reta nele mesmo, tal que os únicos pontos fixos são a e b . Suponha que $f(x) - x < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então dado qualquer ponto $x \in (a, b)$ vale:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x) = b$$

A diferença entre os nomes atrator fraco e atrator se dá ao fato que atratores atraem em velocidade exponencial (como mostra a próxima proposição),

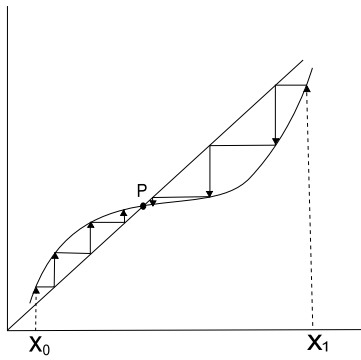


Figura 2.1: P é ponto hiperbólico atra-

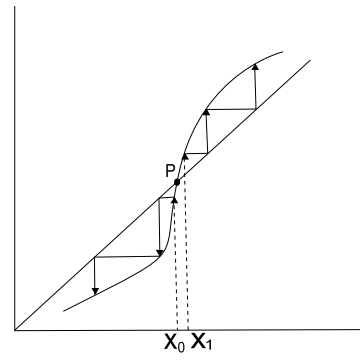


Figura 2.2: P é ponto hiperbólico repul-

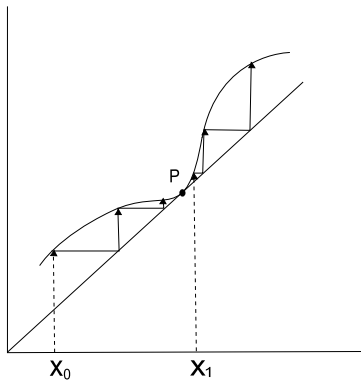


Figura 2.3: P é ponto atrator-repulsor

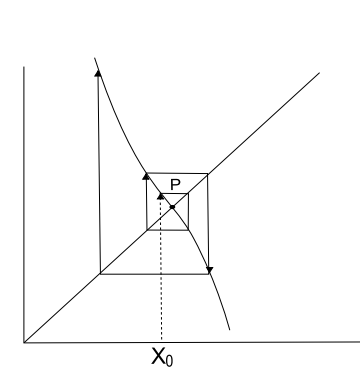


Figura 2.4: P é ponto repulsor de uma função que inverte orientação

enquanto que atratores fracos em geral podem atrair de forma muito mais lenta para o ponto fixo.

No caso em que a função inverte orientação, a propriedade de atração e repulsão local se mantém. No entanto a dinâmica é um pouco mais complicada, já que a órbita do ponto oscila entre o lado direito e esquerdo de uma vizinhança do ponto fixo. Uma forma de avaliar mais facilmente este caso é considerar f^2 , que preserva orientação, e ao qual se aplica o que foi dito até aqui.

Proposição 2.6 *Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ um difeomorfismo C^1 , e x um ponto fixo atrator de f com $|f'(x)| < \lambda < 1$. Dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança U_ϵ de x tal que $f(U_\epsilon) \subset U_\epsilon$ e $d(f^n(y), x) < (\lambda + \epsilon)^n \cdot d(x, y)$ para todo $y \in U_\epsilon$.*

Prova. Basta mostrar para $0 < \epsilon < 1 - \lambda$. Pela continuidade de f' podemos tomar um intervalo U_ϵ pequeno suficiente de forma a termos $|f'(z)| < \lambda + \epsilon < 1$ para todo $z \in U_\epsilon$. Dado $y \in U_\epsilon$, pelo Teorema do Valor Médio existe algum

c entre x e y satisfazendo:

$$d(f(x), f(y)) = |f'(c)| d(x, y) < (\lambda + \epsilon) d(x, y)$$

Como $\lambda + \epsilon < 1$, temos que $f(U_\epsilon) \subset U_\epsilon$. Como x é um ponto fixo, aplicando n vezes a desigualdade acima obtemos:

$$d(f^n(y), x) = d(f^n(y), f^n(x)) < (\lambda + \epsilon)^n d(x, y)$$

Observe que esta proposição nos dá uma convergência exponencial. Apesar de não termos uma velocidade de decaimento exatamente igual a λ , podemos aproximar tanto quanto se queira de λ esta velocidade (aproximação pela direita).

Corolário 2.7 *Todo ponto periódico hiperbólico de um homeomorfismo de S^1 é isolado.*

Prova. Se f preserva orientação e possui um ponto fixo atrator x , o corolário anterior nos diz que existe uma vizinhança de x que é toda atraída para x , e portanto não pode haver outro ponto fixo nesta vizinhança. Se x for ponto repulsor, então x é ponto atrator de f^{-1} e portanto também não pode haver outro ponto fixo em uma vizinhança pequena de x . Neste caso $Per(f) = Fix(f)$ e segue que todo ponto periódico hiperbólico é isolado.

Para os homeomorfismos que possuem pontos periódicos de período n temos $Per(f) = Fix(f^n)$ (isso vale tanto para os que preservam quanto para os que invertem orientação, estes últimos com $n = 2$) e aplicamos o mesmo raciocínio anterior à aplicação f^n .

Proposição 2.8 *Se um difeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ possui uma quantidade infinita de pontos periódicos, então existe ao menos um ponto periódico não-hiperbólico.*

Prova. Pela continuidade da função f^n , se um ponto x_0 é acumulado por pontos fixos de f^n , então x_0 é também um ponto fixo de f^n . De fato, considere a função contínua $f^n(x) - x$. Tomando o limite desta função para $x \rightarrow x_0$ por pontos fixos de f^n , segue da continuidade em x_0 que $f^n(x_0) - x_0 = 0$.

O teorema de Bolzano-Weierstrass nos garante que toda seqüência de pontos em um conjunto compacto se acumula em pelo menos um ponto. Assim, o conjunto de pontos fixos terá que se acumular em pelo menos algum ponto fixo, que pelo corolário anterior não pode ser hiperbólico.

Para introduzir o conceito de estabilidade é preciso antes discutir o conceito de distância entre transformações do círculo. A idéia intuitiva que

temos de uma dinâmica estável é a de que as principais características são mantidas ao se modificar levemente o nosso objeto de estudo. Dentro de nossos objetivos, estas características a serem mantidas são do ponto de vista topológico e “modificar levemente” tem um sentido bem preciso que é dado por uma distância no espaço de funções.

Definição 2.9 A distância C^r entre duas funções $f : X \rightarrow X$ e $g : X \rightarrow X$ (onde $X = \mathbb{R}$ ou $X = S^1$ com sua métrica usual d) é dada por:

$$d_r(f, g) = \sup_{x \in X} \max\{d(f(x), g(x)), |f'(x) - g'(x)|, \dots, |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|\}$$

Dizemos que f é C^r - ϵ -próxima a g se $d_r(f, g) < \epsilon$. Neste contexto, a função g é usualmente chamada de uma perturbação da função f .

Observe que no caso de $X = \mathbb{R}$, d_r não é propriamente uma métrica no espaço de funções contínuas, já que $d(f(x), g(x))$ pode assumir valores arbitrariamente grandes ao variarmos $x \in X$. Porém, para o uso ao qual faremos (especialmente para a noção de C^r - ϵ -proximidade) esta definição é satisfatória.

O que entendemos por duas aplicações f e g possuir a mesma dinâmica do ponto de vista topológico, de maneira informal, é as propriedades da dinâmica de f , tais como: transitividade, minimalidade, número de rotação, quantidade de pontos fixos e periódicos (e seus períodos), assim como a estrutura topológica do conjunto $Fix(f)$ ou $Per(f)$ etc, serem idênticas às respectivas propriedades da dinâmica de g . Formalmente, o conceito que estabelece esta identificação entre duas dinâmicas do círculo é o conceito de conjugação topológica.

Definição 2.10 Duas aplicações contínuas $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ são ditas topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ satisfazendo $h \circ f = g \circ h$. Em outras palavras, queremos que o diagrama da figura 2.5 comute.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Figura 2.5: Diagrama comutativo

Como veremos a seguir, duas aplicações topologicamente conjugadas possuem a “mesma dinâmica” do ponto de vista topológico.

Por exemplo, se x é ponto fixo de uma função f conjugada a g por h , então: $h(x) = h \circ f(x) = g \circ h(x)$. Logo $h(x)$ é um ponto fixo de g . Assim, h leva o conjunto de pontos fixos de f no conjunto de pontos fixos de g . Como h é homeomorfismo, ele preserva todas as propriedades topológicas do conjunto $Fix(f)$ para $Fix(g)$. O mesmo vale para o conjunto $Per(f)$, como conseqüência da seguinte proposição.

Proposição 2.11 *Se f é topologicamente conjugado a g pelo homeomorfismo h , então f^n é conjugado a g^n pelo homeomorfismo h para todo $n \in \mathbb{N}$ (e para todo $n \in \mathbb{Z}$ caso f seja invertível).*

Prova. Basta observar que $h \circ f^n \circ h^{-1} = (h \circ f \circ h^{-1}) \circ \dots \circ (h \circ f \circ h^{-1})$ e $h \circ f \circ h^{-1} = g$. Portanto $h \circ f^n \circ h^{-1} = g^n$.

Além disso, se f e g são invertíveis então $f = h \circ g \circ h^{-1}$. Tomando a inversa temos $f^{-1} = h \circ g^{-1} \circ h^{-1}$, e portanto a proposição vale para $n \in \mathbb{Z}$.

No entanto, a recíproca desta proposição não é verdadeira. Podemos ter dois homeomorfismos f e g tais que f^n é conjugado a g^n , mas f e g não são conjugados. Por exemplo, $f(x) = x + 1/2 \pmod{1}$ e $g(x) = x$ são tais que $f^2(x) = g^2(x)$ (e portanto são conjugados pela identidade). Porém, g possui uma infinidade de pontos fixos e f não possui pontos fixos.

Veremos mais adiante que, sob certas condições adicionais, a recíproca passa a ser verdadeira. Para isso, faremos uso do seguinte resultado.

Proposição 2.12 *Dado um homeomorfismo f de S^1 com $\rho(f) = p/q$ irredutível, existe $\epsilon > 0$ tal que se g é ϵ -próximo de f e $\rho(g^q) = 0$, então $\rho(g) = p/q$.*

Prova. Sendo $\rho(g^q) = 0$, segue que $\rho(g)$ é racional e o denominador é um divisor de q . A quantidade de frações irredutíveis com denominador menor que q num conjunto limitado é finita, e portanto existe $0 < \delta < 1/q$ tal que se r/s é uma fração irredutível com $|r/s - p/q| < \delta$, então $s \geq q$ (a igualdade só é possível se $r = p$). Pela continuidade de ρ , existe $\epsilon > 0$ tal que se g é ϵ -próximo de f , então $|\rho(g) - \rho(f)| < \delta < 1/q$. Segue que $\rho(g) = r/s$ é tal que $s \geq q$, e s é divisor de q . Logo $s = q$ e conseqüentemente $r = p$.

Proposição 2.13 *Seja h um homeomorfismo que conjuga f e g , e sejam G e H os levantamentos de g e h respectivamente. Então $H \circ G \circ H^{-1}$ é um levantamento de f .*

Prova. Temos que $f(y) = h \circ g \circ h^{-1}(y)$ para todo $y \in S^1$. Segue que:

$$\begin{aligned} f(\pi(x)) &= h \circ g \circ h^{-1}(\pi(x)) \\ &= h \circ g \circ (\pi \circ H^{-1}(x)) = h \circ \pi \circ G \circ H^{-1}(x) \\ &= \pi \circ (H \circ G \circ H^{-1})(x) \end{aligned}$$

Pela definição de levantamento, segue que $(H \circ G \circ H^{-1})$ é um levantamento de f .

Proposição 2.14 *Sejam f, g e h homeomorfismos que preservam orientação, tais que $f = h \circ g \circ h^{-1}$. Então $\rho(f) = \rho(g)$.*

Prova. Basta mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(y) - y}{n}$ para alguma escolha de F, G, x e y .

Considerando F o levantamento de f dado pela proposição anterior e fixado $x \in S^1$ segue que $F^n(x) = H \circ G^n \circ H^{-1}(x)$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} F^n(x) - x &= H \circ G^n \circ H^{-1}(x) - x = \\ &= (H \circ G^n \circ H^{-1}(x) - G^n \circ H^{-1}(x)) + (G^n \circ H^{-1}(x) - H^{-1}(x)) + (H^{-1}(x) - x) \end{aligned}$$

Da proposição 1.12 (e suas consequências para o caso de aplicações de grau 1) sabemos que $H(z) - z$ e $H^{-1}(w) - w$ são funções periódicas (portanto limitadas), e ao dividirmos esta última expressão por n e passarmos o limite para $n \rightarrow \infty$, a primeira e última parcela resultarão em zero. Isto é:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n \circ H^{-1}(x) - H^{-1}(x)}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(y) - y}{n} \quad , \text{ onde } y = H^{-1}(x) \end{aligned}$$

Proposição 2.15 *Se $f : X \rightarrow X$ é conjugada a $g : Y \rightarrow Y$ e f é transitiva (sendo x um ponto de órbita densa em X), então g é transitiva tendo $h(x)$ com órbita densa em Y (onde h é o homeomorfismo conjugante: $h \circ f = g \circ h$). Conseqüentemente, se f é minimal então g é minimal.*

Prova. Primeiramente vamos mostrar que o homeomorfismo h leva conjuntos densos em conjuntos densos.

De fato, seja D um conjunto denso em X . Então, dado qualquer $a \in X$, existe uma sequência $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset D$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = a$. Por continuidade de h , temos $\lim_{i \rightarrow \infty} h(u_i) = h(a)$.

Dado $b \in Y$ arbitrário, considere $a = h^{-1}(b) \in X$. Pelo o que acabamos de ver, existe uma seqüência em $h(D)$ convergindo para $h(a) = b$. Da arbitrariedade da escolha de b , temos que $h(D)$ é denso em Y .

Uma vez que o conjunto $O(x)$ é denso em X , segue que:

$$h(O(x)) = \{h(f^n(x)) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{g^n(h(x)) \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ é denso em } Y.$$

Portanto $h(x)$ é um ponto de órbita densa para g .

Conjugação topológica é uma relação de equivalência. De fato, a reflexividade e simetria são imediatas. É transitiva, pois se $f = h \circ g \circ h^{-1}$ e $g = l \circ j \circ l^{-1}$ temos $f = h \circ (l \circ j \circ l^{-1}) \circ h^{-1} = (hl) \circ j \circ (hl)^{-1}$ e portanto hl conjuga f e j .

Com a noção de distância entre aplicações de S^1 e conjugação topológica, estamos munidos de conceitos suficientes para estabelecermos nosso critério de estabilidade.

Definição 2.16 Dizemos que uma função $f : X \rightarrow X$ é C^r -estruturalmente estável se existe $\epsilon > 0$ tal que toda $g : X \rightarrow X$ C^r - ϵ -próxima de f é topologicamente conjugada a f .

Será mostrado nos próximos capítulos que os difeomorfismos estruturalmente estáveis do círculo possuem propriedades muito bem definidas e que caracterizam o que chamamos de sistemas Morse-Smale.

Definição 2.17 Dizemos que um difeomorfismo de S^1 é Morse-Smale se satisfaz:

1. f possui pontos periódicos.
2. Todo ponto periódico de f é hiperbólico.

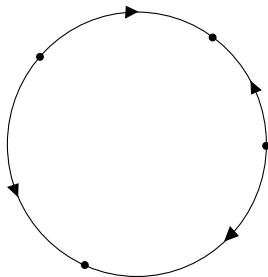


Figura 2.6: Exemplo de difeomorfismo Morse-Smale com pontos fixos.

Nesta figura, as bolinhas pretas representam os pontos fixos, e as setas mostram as direções em que os pontos de cada intervalo estão sendo levados pelo difeomorfismo.

Um difeomorfismo Morse-Smale tem uma quantidade finita de pontos periódicos (em decorrência da proposição 2.8). Este tipo de dinâmica é bem simples, e portanto o fato de podermos aproximar qualquer outro sistema por um sistema Morse-Smale é, além de surpreendente, muito valioso. A estabilidade dos difeomorfismos Morse-Smale será demonstrada no próximo capítulo.

3

Estabilidade dos Difeomorfismos Morse-Smale

No último capítulo foi apresentado o nosso objeto de estudo (os difeomorfismos Morse-Smale) e a propriedade que estamos interessados em observar (Estabilidade Estrutural). Neste capítulo começaremos a demonstrar que estes dois estão fortemente relacionados. Provaremos que todo difeomorfismo Morse-Smale é estruturalmente estável. No capítulo 4 será demonstrado que todo difeomorfismo C^1 -estruturalmente estável de S^1 é Morse-Smale.

As duas próximas proposições dizem respeito à robustez dos pontos fixos hiperbólicos. Dizemos que uma propriedade de um sistema é *robusta* quando ela se mantém após qualquer perturbação suficientemente pequena do sistema.

Proposição 3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um difeomorfismo com um ponto fixo hiperbólico p . Então existe $\epsilon > 0$ e uma vizinhança U de p tais que se g é um difeomorfismo C^1 - ϵ -próximo de f , então g possui um único ponto fixo (hiperbólico) p_g em U .*

Prova. Vamos supor que $f'(p) > 1$. Pela continuidade de f' , existe $U = (a, b) \ni p$ satisfazendo:

1. $f'(x) > 1$ para todo $x \in (a, b)$.
2. $f(a) - a < 0$ e $f(b) - b > 0$.

Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para, dado g C^1 - ϵ -próxima de f , termos $g'(x) > 1$ para todo $x \in (a, b)$. Assuma ainda que $\epsilon < \min\{|f(a) - a|, |f(b) - b|\}$, de forma a termos:

$$g(a) - a = (g(a) - f(a)) + (f(a) - a) < 0$$

$$g(b) - b = (g(b) - f(b)) + (f(b) - b) > 0$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário (aplicado à função $h(x) = g(x) - x$) existe $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$ (isto é, $g(c) = c$). Este c é o único ponto fixo em (a, b) pois se $g(d) = d$ com $c \neq d \in (a, b)$ teríamos, em decorrência do Teorema do Valor Médio, $g'(k) = 1$ para algum k entre c e d . Absurdo.

Para $f'(p) < 1$ a demonstração segue de forma análoga.

Agora vamos focar nossa atenção nos Morse-Smale que preservam orientação e possuem pontos fixos. Provaremos a estabilidade para este caso específico e estenderemos mais adiante para o caso de Morse-Smale com pontos periódicos de período arbitrário e o caso de inversão de orientação.

Proposição 3.2 *Seja f um difeomorfismo Morse-Smale de S^1 que preserva orientação e com pontos fixos. Existe $\epsilon > 0$ tal que se g é C^1 - ϵ -próxima de f , então g é um difeomorfismo Morse-Smale com o mesmo número de pontos fixos que f . Além disso, a cada par de pontos fixos consecutivos p_i e p_{i+1} de F corresponde um par de pontos fixos consecutivos q_i e q_{i+1} de G tal que o sinal de $(F(x) - x)$ em (p_i, p_{i+1}) é igual ao sinal de $(G(x) - x)$ em (q_i, q_{i+1}) (onde F e G são os levantamentos de f e g que possuem pontos fixos).*

Prova. Seja k o número de pontos fixos de f . Considere o levantamento F de f tal que $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ são pontos fixos consecutivos de F em ordem crescente. Então existem $U_i = (a_i, b_i) \ni p_i, i = 1, 2, \dots, k$ (tomemos todos disjuntos, o que é possível pela arbitrariedade do tamanho de cada intervalo na demonstração da proposição 3.1) e $\epsilon_i > 0, i = 1, 2, \dots, k$ tais que : Se g é C^1 - ϵ' -próxima de f com $\epsilon' = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k\}$, então existe um levantamento G de g que é C^1 - ϵ' -próximo de F , e G possui um único ponto fixo q_i em cada U_i .

Como $f(x) - x \neq 0$ no compacto $S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$, podemos então escolher ϵ'' pequeno suficiente para termos $g(x) - x \neq 0$ em $S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$ para qualquer perturbação g ϵ'' -próxima de f . Tomemos $\epsilon = \min\{\epsilon', \epsilon''\}$ de forma que se g é C^1 - ϵ -próxima de f então os únicos pontos fixos de g são os q_i 's descritos acima.

Como todo ponto fixo de F é da forma $p_i + n, i = 1, \dots, k$ e $n \in \mathbb{N}$, segue que todo ponto fixo de G é da forma $q_i + n$, e portanto g tem k pontos fixos. Se $F'(p_i) > 1$, então o sinal de $F(x) - x$ em (p_i, p_{i+1}) é positivo numa vizinhança à direita de p_i e portanto positivo entre p_i e p_{i+1} , já que não existe nenhum ponto fixo neste intervalo. Como $q_i \in U_i$, temos $G'(q_i) > 1$. Segue que $G(x) - x$ em (q_i, q_{i+1}) tem também sinal positivo. Se $F'(p_i) < 1$ temos, por motivos análogos, que $F(x) - x$ em (p_i, p_{i+1}) e $G(x) - x$ em (q_i, q_{i+1}) têm ambos sinal negativo. Pela periodicidade da função $F(x) - x$ e $G(x) - x$, aos intervalos da forma $(p_i + n, p_{i+1} + n), n \in \mathbb{N}$, correspondem os intervalos da forma $(q_i + n, q_{i+1} + n)$ onde respectivamente $F(x) - x$ e $G(x) - x$ possuem o mesmo sinal.

Observe que os pontos fixos dos difeomorfismos Morse-Smale particionam o círculo em intervalos invariantes por f . Para construirmos uma

conjugação entre dois difeomorfismos Morse-Smale suficientemente próximos (na topologia C^1), é conveniente primeiro construirmos conjugações para as funções restritas a estes intervalos invariantes, conforme detalhado nas proposições 3.3 e 3.4 a seguir.

Proposição 3.3 *Sejam $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ e $g : [c, d] \rightarrow [c, d]$ homeomorfismos tais que $f(x) > x$ para $x \in (a, b)$ e $g(x) > x$ para $x \in (c, d)$. Então f e g são topologicamente conjugados.*

Prova. Tome $\alpha \in (a, b)$ e $\beta \in (c, d)$ arbitrariamente. Por hipótese temos $f(x) > x$, e portanto $f^n(x)$ é crescente com relação a $n \in \mathbb{Z}$. Além disso, essa condição nos garante que a e b são os únicos pontos fixos, já que f e g são bijeções. Como o contradomínio é compacto, $f^n(x)$ se acumula a esquerda de algum ponto para $n \rightarrow \infty$, e a direita em outro ponto para $n \rightarrow -\infty$. Por continuidade de f , estes pontos têm que ser pontos fixos, e portanto são respectivamente a e b . De forma análoga, o mesmo vale para a função g , sendo que a órbita de qualquer ponto converge para c no passado e para d no futuro.

Sendo assim podemos representar (a, b) e (c, d) como união de intervalos disjuntos:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [f^n(\alpha), f^{(n+1)}(\alpha)] = (a, b) \quad e \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [g^n(\beta), g^{(n+1)}(\beta)] = (c, d)$$

A imagem de cada intervalo é um intervalo adjacente, e portanto para todo $x \in (a, b)$ temos que a órbita de x por f passa uma única vez em cada intervalo desta união disjunta. Isto é, dado $x \in (a, b)$ existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x) \in [\alpha, f(\alpha)]$. Por motivos idênticos, o mesmo vale para $y \in (c, d)$, em relação a g e $[\beta, f(\beta)]$. Conjuntos que satisfazem esta propriedade são chamados de *domínio fundamental*. Assim, $[\alpha, f(\alpha)]$ e $[\beta, f(\beta)]$ são os domínios fundamentais de f e g respectivamente.

Seja H um homeomorfismo entre os intervalos $[\alpha, f(\alpha)]$ e $[\beta, g(\beta)]$, com $H(\alpha) = \beta$. Definimos então $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ como: $h(x) = g^{-n} \circ H \circ f^n(x)$ para $f^n(x) \in [\alpha, f(\alpha)]$, $h(a) = c$ e $h(b) = d$ (de forma a termos continuidade em a e b). Claramente, h é contínua em $[f^n(\alpha), f^{(n+1)}(\alpha)]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Queremos mostrar que h é contínua em todo $[a, b]$, e portanto basta verificar que h é contínua na fronteira de cada intervalo desta união disjunta.

Considere as seqüências $\{x_n\} \rightarrow f^k(\alpha)_+$ e $\{y_n\} \rightarrow f^k(\alpha)_-$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g^k \circ H \circ f^{-k}(x_n) = \\ &= g^k \circ H(\alpha) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^k(\beta) &= \\
g^{k-1}(g(\beta)) &= \\
\lim_{n \rightarrow \infty} g^{k-1} \circ H \circ f^{-k+1}(y_n) &= \\
\lim_{n \rightarrow \infty} h(y_n) &
\end{aligned}$$

A função h é uma bijeção contínua entre os compactos $[a, b]$ e $[c, d]$, logo é um homeomorfismo.

Queremos verificar ainda que h conjugua f a g . De fato, dado x com $f^k(x) \in [\alpha, f(\alpha)]$ temos:

$$\begin{aligned}
h \circ f(x) &= g^{-k+1} \circ H \circ f^{k-1}(f(x)) = \\
g \circ (g^{-k} \circ H \circ f^k)(x) &= g \circ h(x)
\end{aligned}$$

Se tivermos $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ e $g : [c, d] \rightarrow [c, d]$ homeomorfismos com $f(x) < x$ e $g(y) < y$, então f^{-1} e g^{-1} são tais que $g^{-1}(y) > y$ e $f^{-1}(x) > x$. A proposição anterior nos dá que f^{-1} e g^{-1} são conjugadas e conseqüentemente f e g também o são. Assim, a proposição vale tanto para funções que estão acima da identidade como para as que estão abaixo.

Proposição 3.4 *Difeomorfismos Morse-Smale em $\text{Diff}_+^1(S^1)$ com número de rotação zero (isto é, com pontos fixos) são C^1 -estruturalmente estáveis.*

Prova. Seja f um difeomorfismo de S^1 que preserva orientação. Seja $\{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}\}$ um conjunto de pontos fixos consecutivos de F (levantamento de f) com $p_{k+1} = 1 + p_1$. Chamemos $I_i = [p_i, p_{i+1}]$ para cada $i = 1, \dots, k$. Pela proposição 3.2, existe $\epsilon > 0$ tal que, se g é uma função C^1 - ϵ -próxima de f , então existe um levantamento G de g que possui k pontos fixos consecutivos $\{q_1, \dots, q_k, q_{k+1}\}$ com $q_{k+1} = 1 + q_k$ satisfazendo (em conseqüência da proposição 3.3): Se $L_i = [q_i, q_{i+1}]$, então F restrita a I_i é conjugada a G restrita a L_i para cada $i = 1, \dots, k$.

Chamemos h_i a conjugação referente ao intervalo I_i . Definimos então $H : [p_1, p_{k+1}] \rightarrow [q_1, q_{k+1}]$ como $H(x) = h_i(x)$ se $x \in I_i$. Não existe ambigüidade nesta definição, pois se x estiver em mais de um intervalo (digamos I_i e I_{i+1}) então x é da forma p_i e teremos $h_i(p_i) = q_i = h_{i+1}(p_i)$ pela forma como foram construídas as conjugações (ver demonstração da proposição 3.3). Isso mostra também que H é contínua em sua fronteira. Claramente, H é uma bijeção e sua inversa, dada por $H^{-1}(y) = h_i^{-1}(y)$ para $y \in L_i$, é contínua por argumento análogo ao feito para H .

Por construção, H é um homeomorfismo que conjugua F restrita a $[p_1, p_{k+1}]$ a G restrita a $[q_1, q_{k+1}]$. Seja $h : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $h(\pi(x)) =$

$\pi \circ H(x)$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} h \circ f(\pi(x)) &= h \circ \pi \circ F(x) = \\ \pi \circ H \circ F(x) &= \pi \circ G \circ H(x) = \\ g \circ \pi \circ H(x) &= g \circ h(\pi(x)) \end{aligned}$$

Corolário 3.5 *Se f é um difeomorfismo Morse-Smale em $\text{Diff}_+^1(S^1)$ com t pontos periódicos de período n , e g é um difeomorfismo suficientemente próximo de f (na métrica C^1), então g possui t pontos periódicos de período n .*

Prova. Observe que f^n é uma função Morse-Smale com pontos fixos. Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para que toda função C^1 - ϵ -próxima de f^n seja conjugada a f^n , tomemos ϵ' pequeno suficiente para que, dado uma função g C^1 - ϵ' -próxima a f termos g^n C^1 - ϵ -próxima de f^n (essa escolha é possível devido às continuidades de f , g e suas derivadas). Portanto f^n e g^n serão conjugadas. Podemos então afirmar que f e g possuem o mesmo número de pontos periódicos e que $\rho(g^n) = 0$. Pela proposição 2.12, se escolhermos ϵ suficientemente pequeno teremos também que $\rho(f) = \rho(g)$. Concluimos então que o período dos pontos periódicos de f e g é o mesmo.

Observação: A relevância deste corolário reside no fato de que se f^n e g^n são conjugados, não podemos garantir que f e g sejam conjugados. Por exemplo, se f tem dois pontos periódicos de período 2 e $g = f^2$, então f^2 e g^2 são conjugados, porém f e g não são. Mas esta inconveniência só acontece pois, apesar de f e g terem o mesmo número de pontos periódicos, seus períodos são diferentes. Este corolário impede este tipo de situação, tornando possível construir uma conjugação entre f e g , desde que g esteja suficientemente próxima de f , como veremos a seguir.

Agora vamos generalizar a proposição 3.4, que vale para Morse-Smale com pontos fixos, para o caso de Morse-Smale qualquer.

Proposição 3.6 *Difeomorfismos Morse-Smale C^1 de S^1 são C^1 -estruturalmente estáveis.*

Prova. Seja f um difeomorfismo Morse-Smale que preserva orientação, onde o período dos pontos periódicos é $n > 1$. Tomemos ϵ suficientemente pequeno (tal como no corolário anterior) e g C^1 - ϵ -próxima a f de forma a termos f^n e g^n conjugadas, e os pontos periódicos de f e g com o mesmo período.

Nas proposições anteriores mostramos como construir um homeomorfismo que conjuga f^n e g^n . Observe que nesta construção tínhamos a liberdade de escolher arbitrariamente para cada intervalo invariante um domínio fundamental. O que vamos fazer agora é reconstruir a conjugação entre f^n e g^n escolhendo esses domínios fundamentais de forma conveniente, com o propósito de obter um homeomorfismo que conjuga não apenas f^n e g^n , mas também f e g .

Seja t o número de pontos fixos de f^n e $\{p_1, p_2, \dots, p_t, p_{t+1} = p_1\}$ os pontos fixos de f indexados de forma consecutiva. Pelo conjugação entre f^n e g^n , a cada intervalo $[p_i, p_{i+1})$ corresponde um intervalo $[q_i, q_{i+1})$ de g , onde $\{q_1, q_2, \dots, q_t, q_{t+1} = q_1\}$ são pontos fixos de g indexados de forma consecutiva. Sabemos que a imagem por f ou g de um ponto periódico é também um ponto periódico. Assim, para cada $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ temos que $f^k([p_i, p_{i+1})) = [p_j, p_{j+1})$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$. Em virtude do corolário anterior, cada intervalo $[p_i, p_{i+1})$ ao ser iterado por f percorre exatamente o mesmo número de intervalos invariantes que a iteração de $[q_i, q_{i+1})$ por g . Assim, existe $A \subset \{1, 2, \dots, t\}$ tal que a seqüência de intervalos $\{[p_i, p_{i+1})\}_{i \in A}$ e intervalos correspondentes $\{[q_i, q_{i+1})\}_{i \in A}$ são tais que:

1. $S^1 = \bigcup_{i=1}^t \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k([p_i, p_{i+1}))$.
2. $S^1 = \bigcup_{i=1}^t \bigcup_{k=0}^{n-1} g^k([q_i, q_{i+1}))$.
3. Dados $i, j \in A$ com $i \neq j$, então os iterados por f de $[p_i, p_{i+1})$ não intersectam nenhum iterado de $[p_j, p_{j+1})$.
4. Dados $i, j \in A$ com $i \neq j$, então os iterados por g de $[q_i, q_{i+1})$ não intersectam nenhum iterado de $[q_j, q_{j+1})$.

Lembremos que nas proposições anteriores escolhemos arbitrariamente um domínio fundamental para cada intervalo de pontos fixos consecutivos $[p_i, p_{i+1})$ de f^n . Agora nossa escolha não será tão arbitrária. Primeiramente escolhemos um intervalo $[p_i, p_{i+1})$ ($i \in A$ fixado) e um domínio fundamental $[\alpha_i, f^n(\alpha_i))$. A escolha do domínio fundamental de $f^k([p_i, p_{i+1}))$ será $f^k([\alpha_i, f^n(\alpha_i)))$, para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Analogamente, ao intervalo $[q_i, q_{i+1})$ de g , escolhemos um domínio fundamental $[\beta_i, g^n(\beta_i))$ e escolha os domínios fundamentais de $g^k([q_i, q_{i+1}))$ como sendo $g^k([\beta_i, f^n(\beta_i)))$, para $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Repetimos o mesmo procedimento para cada $i \in A$, de forma a termos uma escolha de domínio fundamental para cada intervalo invariante de f^n e g^n .

Antes, usávamos uma função linear H_i que levava cada $[\alpha_i, f^n(\alpha_i))$ em $[\beta_i, g^n(\beta_i))$ correspondente. Agora escolhemos uma função linear H_i para levar

$[\alpha_i, f^n(\alpha_i)]$ em $[\beta_i, g^n(\beta_i)]$ para $i \in A$, e defina $H_{k,i} = g^k \circ H_i \circ f^{-k}$ para levar $f^k([\alpha_i, f^n(\alpha_i)])$ no intervalo correspondente $g^k([\beta_i, g^n(\beta_i)])$ ($i \in A$). Graças ao corolário anterior, as funções $H_{k,i}$ ($i \in A$ e $k \in \{0, \dots, n-1\}$) não pecam por omissão nem excesso. Isto é, para cada domínio fundamental escolhido em g , existe um único homeomorfismo dentre os $H_{k,i}$'s cuja imagem é este domínio fundamental.

Obtidos estes domínios fundamentais e seus homeomorfismos correspondentes $H_{k,i}$'s podemos construir o homeomorfismo h que conjuga f^n e g^n tal como feito nas proposições anteriores. Só nos resta verificar que h conjuga também f e g .

Dado $x \in f^k([p_i, p_{i+1}])$ ($i \in A$), se m é tal que $f^{m.n}(x)$ pertence ao domínio fundamental de $f^k([p_i, p_{i+1}])$, então $f^{m.n}(f(x))$ pertence ao domínio fundamental de $f^{k+1}([p_i, p_{i+1}])$. Observe ainda que neste caso $H_{k+1,i} = g \circ H_{k,i} \circ f^{-1}$. Sendo $h(x) = g^{-m.n} \circ H_{k,i} \circ f^{m.n}(x)$, então:

$$h \circ f(x) = g^{-m.n} \circ H_{k+1,i} \circ f^{m.n}(f(x)) =$$

$$g^{-m.n} \circ (g \circ H_{k,i} \circ f^{-1}) \circ f^{m.n}(f(x)) =$$

$$g \circ (g^{-m.n} \circ H_{k,i} \circ f^{m.n})(x) = g \circ h(x)$$

Para um difeomorfismos Morse-Smale f que inverte orientação, considere a aplicação f^2 , que é um difeomorfismo que preserva orientação. Dado $\epsilon > 0$, existe $\epsilon' > 0$ tal que se g é C^1 - ϵ' -próximo de f , então g^2 é C^1 - ϵ -próximo de f^2 . Podemos então conjugar g^2 e f^2 . Usando o mesmo artifício acima, podemos fazer com que o homeomorfismo também conjugue f e g .

4

Difeomorfismos estáveis são Morse-Smale

A demonstração de que todo difeomorfismo estável do círculo é Morse-Smale será dada via contra-positiva. Isto é, queremos mostrar que se um difeomorfismo não é Morse-Smale então ele não pode ser estável. Existem duas possibilidades para um difeomorfismo do círculo não ser Morse-Smale. A primeira é ter número de rotação irracional. A segunda, possuir um ponto fixo (ou periódico) não-hiperbólico. O *Closing Lemma* (provado a seguir) nos garante que toda função com número de rotação irracional não pode ser estável, portanto restará avaliar os casos em que o difeomorfismo f possui um ponto não-hiperbólico.

Vale observar que este problema poderia ser tratado com menos esforços se utilizarmos ferramentas mais sofisticadas como o teorema de Thom, transversalidade ou o teorema de Weierstrass sobre aproximações polinomiais adaptado às aplicações do círculo. No entanto um dos objetivos neste trabalho é apresentar as demonstrações da forma mais acessível possível, e portanto evitaremos o uso de ferramentas que fogem do domínio das matérias mais elementares.

O principal artifício utilizado neste capítulo é a construção de uma perturbação de f (que não é Morse-Smale) de forma a criar uma função que não é topologicamente conjugada a f , porém é tão próxima de f quanto se queira (na métrica C^1). Para construirmos tais perturbações utilizaremos uma função auxiliar denominada “bump function”, que possibilita alterar uma função apenas numa vizinhança de um ponto e ainda manter a suavidade da função (isto é, se f é C^r , a perturbação de f será C^r). Podemos fazer ainda com que esta perturbação seja localmente uma pequena translação. Isto é, para algum intervalo I , a função perturbada restrita a I será da forma $f + \epsilon$, onde ϵ é uma constante positiva. A seguir veremos passo a passo como fazer isto.

Consideremos a função $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$B(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Observe que $B'(0) = 0$, e $B^{(n)}(0) = 0$ (o que pode ser verificado

facilmente por indução). Portanto B é uma função de classe C^∞ . Essa é uma propriedade muito útil, já que a soma de funções C^r é também C^r , e portanto podemos usar a bump function para perturbar as funções sem nos preocuparmos com a perda de suavidade. Observe também que B é uma função limitada: $0 \leq B(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Dado um intervalo (a, b) , considere a função $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $C(x) = B(x-a)B(b-x)$. Esta função é claramente C^∞ e tal que $C(x) = 0$ se $x \leq a$ ou $x \geq b$, e $0 < C(x) < 1$ para $x \in (a, b)$. Seu gráfico está ilustrado na figura 4.2, onde foi considerado $a = 0$ e $b = 1$. Esta função está bem próxima do que queremos. Ela permite alterar localmente qualquer função sem perder suavidade. Mas para criar uma pequena translação local é preciso alguns passos a mais.

Seja $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como:

$$D(x) = \frac{\int_{-\infty}^x C(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} C(t) dt}$$

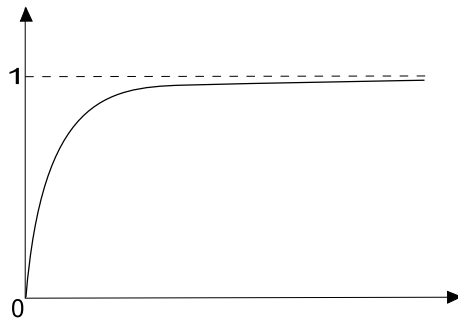
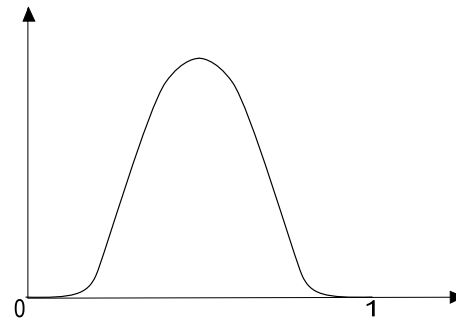
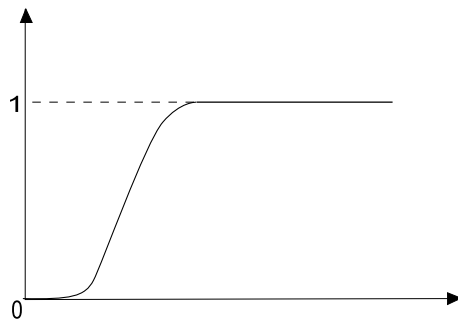
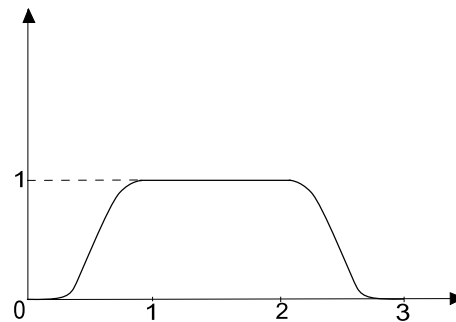
Sendo assim, $D(x) = 0$ para $x \leq a$ e $D(x) = 1$ para $x \geq b$ (veja figura 4.3). Repare que o denominador é uma constante, e portanto a função ao ser derivada resulta nesta constante multiplicada por $C(x)$. Isso nos mostra que D é uma função C^∞ tal que $D^{(r)}(a) = D^{(r)}(b) = 0$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Este fato nos permite “emendar” uma função com uma função constante, como será mostrado a seguir.

Dado $c > b$, considere a função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\phi(x) = \begin{cases} D(x) & \text{se } x < b \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c \\ D(k+b-x) & \text{se } x > c \end{cases}$$

A função ϕ (figura 4.4) permite alterar um difeomorfismo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ apenas no intervalo $(a, a+c)$ colocando-se $f_\epsilon(x) = f(x) + \epsilon \cdot \phi(x)$. Em (b, c) a perturbação corresponde a uma translação. Observe que a função ϕ tal como foi definida é uma função C^∞ .

Se f é um difeomorfismo de S^1 , então seu levantamento F é um difeomorfismo de \mathbb{R} . Como $F'(x)$ é uma função periódica de período 1, $F'(x)$ atinge seu valor mínimo e máximo em $[0, 1]$. Sendo assim podemos tomar ϵ suficientemente pequeno de forma que, se $F'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $F'_\epsilon(x) = F'(x) + \epsilon \cdot \phi'(x) > 0$, e portanto F_ϵ será ainda um difeomorfismo de \mathbb{R} (de forma análoga se $F'(x) < 0$). Daqui em diante sempre que falarmos em C^1 - ϵ -proximidade ficará subentendido que ϵ é suficientemente pequeno para que a perturbação seja ainda um difeomorfismo.

Figura 4.1: $B(x)$ Figura 4.2: $C(x)$ Figura 4.3: $D(x)$ Figura 4.4: $\phi(x)$

Observação: Não definimos bump functions no conjunto S^1 . Mas sua construção é análoga à construção de funções na reta. Basta considerar um levantamento F de f , construir uma bump function no levantamento F de forma idêntica em cada intervalo de $\pi^{-1}([a, b])$, e depois voltar para f pela projeção π .

Proposição 4.1 (Closing Lemma) *Dado $\epsilon > 0$ e uma aplicação $f \in \text{Diff}_+^k(S^1)$, existe um difeomorfismo C^r - ϵ -próximo de f com número de rotação racional (isto é, que possui pelo menos um ponto periódico).*

Prova. Se f tem número de rotação racional a proposição é trivial, já que o difeomorfismo a que se refere o enunciado pode ser a própria f . O caso interessante é tomando a hipótese do número de rotação irracional.

Neste caso, podemos escolher um ponto recorrente $\theta \in S^1$ de f (veja corolário 1.24). Pela recorrência de θ , sabemos que $O^+(\theta)$ se acumula em θ pela direita ou pela esquerda (possivelmente ambos). Vamos supor que ela se acumule pela esquerda (o outro caso segue de forma semelhante) e tomemos uma seqüência $f^{n_i}(\theta) \rightarrow \theta_-$.

Escolhamos um levantamento F de f de forma a termos $F(x) > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é, o levantamento F está estritamente acima da identidade.

Queremos alterar a nossa função de forma que a órbita de um ponto x_0 (onde $\pi(x_0) = \theta$) seja uma órbita periódica.

Considere a perturbação $G_\epsilon(x) = F(x) + \epsilon$ dada por uma pequena translação do gráfico de F por um valor positivo ϵ . Ou seja, G_ϵ é o levantamento de uma função g_ϵ dada pela composição de f com uma rotação. Assim, temos:

$$\begin{aligned} G_\epsilon(x_0) &= F(x_0) + \epsilon \\ G_\epsilon^2(x_0) &= F(F(x_0) + \epsilon) + \epsilon > F^2(x_0) + \epsilon \\ G_\epsilon^3(x_0) &> F(F^2(x_0) + \epsilon) + \epsilon > F^3(x_0) + \epsilon \\ &\vdots \\ G_\epsilon^n(x_0) &> F^n(x_0) + \epsilon \end{aligned}$$

Pela recorrência do ponto θ , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que: $0 < \theta - f^{n_k}(\theta) < \epsilon$. Conseqüentemente, existe um inteiro m tal que $0 < (x_0 + m) - F^{n_k}(x_0) < \epsilon$. Segue então:

$$G_\epsilon^{n_k}(x_0) > F^{n_k}(x_0) + \epsilon > x_0 + m$$

De forma resumida, temos:

$$G_\epsilon^{n_k}(x_0) > x_0 + m > F^{n_k}(x_0) = G_0^{n_k}(x_0)$$

Este n_k está fixo, e a função G_ϵ (e conseqüentemente $G_\epsilon^{n_k}$) depende continuamente de ϵ . Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, existe algum $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ com $G_{\epsilon_0}^{n_k}(x_0) = x_0 + m$. Assim, teremos que G_{ϵ_0} é o levantamento de uma função g_{ϵ_0} C^r - ϵ -próxima de f com $g_{\epsilon_0}^{n_k}(\theta) = \theta$.

O *Closing-Lemma* mostra que apenas transformações com número de rotação racional podem ser estruturalmente estáveis. Logo, toda transformação estruturalmente estável terá que ter pontos fixos ou periódicos. Para concluirmos que estas transformações são de fato Morse-Smale temos que mostrar que todo ponto fixo ou periódico é hiperbólico. Vamos então considerar a partir de agora apenas transformações f que possuem pelo menos um ponto fixo ou periódico não-hiperbólico e construiremos perturbações arbitrariamente pequenas que não são conjugadas a f . Isso é suficiente para concluirmos que a existência de pontos não-hiperbólicos impossibilita a estabilidade estrutural, e portanto apenas os Morse-Smale poderão ser estruturalmente estáveis.

A primeira possibilidade a ser considerada é o caso de f ser localmente igual a identidade. Isto é, existe um intervalo $I \subset S^1$ tal que $f(x) = x$ se $x \in I$.

Proposição 4.2 *Seja $f \in \text{Diff}^1(S^1)$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in J = (a, b)$. Dado $\epsilon > 0$ existe uma perturbação \tilde{f} C^1 - ϵ -próxima de f , tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in J$ e $\tilde{f}(x) = f(x)$ se $x \notin J$.*

Prova. Seja $\phi : S^1 \rightarrow S^1$ uma bump function tal que $0 < \phi(x) < 1$ para $x \in J$, e $\phi(x) = 0$ se $x \notin J$. Seja M tal que $|\phi'(x)| \leq M$ para todo $x \in S^1$. Podemos assumir que $M > 1$. Defina $\tilde{f} : S^1 \rightarrow S^1$ dada por:

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \frac{\epsilon \cdot \phi(x)}{M}$$

Logo:

$$|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \left| \frac{\epsilon \cdot \phi(x)}{M} \right| \leq \frac{\epsilon}{M} \leq \epsilon$$

$$|\tilde{f}'(x) - f'(x)| \leq \left| \frac{\epsilon \cdot \phi'(x)}{M} \right| \leq \epsilon$$

Se $x \notin J$ temos $\phi(x) = 0$, e portanto $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Se $x \in J$ temos $\phi(x) > 0$ e $f(x) = x$. Logo $\tilde{f}(x) = x + \frac{\phi(x)}{M} \neq x$.

Proposição 4.3 *Seja $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$. Dado $\epsilon > 0$, Existe uma perturbação \tilde{f} C^1 - ϵ -próxima de f , tal que \tilde{f} não possui nenhum intervalo de pontos fixos.*

Prova. Se f não possui intervalos de pontos fixos nada há para demonstrar. Observe que na proposição anterior consideramos um intervalo $J \subset S^1$ com $f|_J = id$. Porém essa condição pode ocorrer em vários outros intervalos de S^1 . Seja M o conjunto de intervalos de pontos fixos não degenerados mutuamente disjuntos da aplicação f . Como podemos associar a cada intervalo de pontos fixos um racional em seu interior, isso induz uma injeção entre M e \mathbb{Q} . Na pior das hipóteses teremos então uma quantidade enumerável de intervalos de pontos fixos, digamos $M = \{I_1, I_2, I_3, \dots\}$. Queremos alterar nossa aplicação original em todos os intervalos de M e obter no final uma aplicação C^1 - ϵ -próxima de f . Se alterarmos passo a passo cada intervalo I_k usando a C^1 - ϵ -proximidade dada pela proposição anterior, teremos uma convergência pontual para uma função a qual não podemos garantir ser C^1 . Portanto, usaremos um artifício adicional para garantir uma convergência uniforme.

Seja f_1 uma aplicação C^1 - ϵ -próxima à f dada pela proposição anterior, onde alteramos apenas no intervalo I_1 . Seja f_2 uma aplicação C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima à f_1 dada pela proposição anterior, onde alteramos apenas no intervalo I_2 (observe que f_2 será ainda C^1 - ϵ -próxima à f , pois I_1 e I_2 são disjuntos). Seja f_3 uma função C^1 - $(\epsilon/3)$ -próxima à f_2 dada pela proposição anterior, onde

alteramos apenas no intervalo I_3 (observe que f_3 será ainda C^1 - ϵ -próxima à f , pois I_1, I_2 e I_3 são disjuntos).

Continuamos essa construção obtendo uma seqüência de aplicações $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$, de forma que f_k corresponde a alteração C^1 - (ϵ/k) -próxima à f_{k-1} no intervalo I_k dada pela proposição anterior. Observe que para todo ponto $x \in S^1$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_k(x) = f_{k+1}(x)$ para todo $k \geq N$. Portanto temos convergência pontual: isto é, podemos definir $\tilde{f}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ para todo $x \in S^1$. Pela forma como foram definidos os f_k 's, tal convergência é também uniforme na norma C^1 . Sendo assim, \tilde{f} é uma aplicação C^1 e C^1 - ϵ -próxima à f . Claramente, \tilde{f} não possui intervalos de pontos fixos.

Assim como foi possível “destruir” os intervalos de pontos fixos com pequenas perturbações, mostraremos a seguir que para qualquer transformação que possui um ponto fixo não-hiperbólico podemos “criar” intervalos de pontos fixos com pequenas perturbações. Isso nos mostra o quão flexível é a estrutura do conjunto de pontos fixos para transformações que possuem pontos fixos não-hiperbólicos.

Proposição 4.4 *Dado um ponto fixo p não-hiperbólico de um difeomorfismo $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$, podemos perturbar f de forma a termos localmente (numa vizinhança de p) a identidade ($f(x) = x$).*

Prova. Considere os intervalos $I_\alpha = [p - \alpha, p + \alpha] \subset I_\beta = [p - \beta, p + \beta]$. Defina uma bump function $\phi : S^1 \rightarrow S^1$ tal que $\phi(x) = 1$ se $x \in I_\alpha$ e $\phi(x) = 0$ se $x \notin I_\beta$. Seja M tal que $|\phi'(x)| \leq M$ para todo $x \in S^1$. Dado $\delta > 0$, considere o intervalo $I_\delta = [p - \delta, p + \delta]$ e a função linear $L_\delta : I_\delta \rightarrow I_\beta$ dada por:

$$L_\delta(x) = \frac{(x - p) \cdot \beta}{\delta} + p$$

Defina agora $\phi_\delta : I_\delta \rightarrow S^1$ como: $\phi_\delta(x) = \phi \circ L_\delta(x)$.

Esta função satisfaz as seguintes propriedades:

1. $|\phi_\delta(x)| \leq 1$.
2. $|\phi'_\delta(x)| \leq \frac{M \cdot \beta}{\delta}$ para todo $x \in I_\delta$.
3. Para todo $x \in L_\delta^{-1}(I_\alpha)$ teremos $\phi_\delta(x) = 1$.
4. $\phi_\delta(p - \delta) = \phi_\delta(p + \delta) = 0$
5. $\phi'_\delta(p - \delta) = \phi'_\delta(p + \delta) = 0$

Agora usaremos ϕ_δ para criar uma perturbação \tilde{f} de f da seguinte forma:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) + (x - f(x))\phi_\delta(x) & \text{se } x \in I_\delta \\ f(x) & \text{se } x \notin I_\delta \end{cases}$$

Segue das propriedades 4) e 5) que \tilde{f} e \tilde{f}' são contínuas.

Como $f'(p) = 1$ e $f(p) = p$, dado $\epsilon > 0$ podemos escolher δ suficientemente pequeno satisfazendo:

$$|f'(x) - 1| < \epsilon/2 \quad \text{e} \quad |f(x) - x| < \epsilon/2 \quad \text{para todo } x \in I_\delta.$$

Portanto $|\tilde{f}(x) - f(x)| = (x - f(x))\phi_\delta(x) \leq \epsilon/2$ para todo $x \in S^1$.

Da fórmula de Taylor temos que:

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + r(x) = x + r(x) \quad \text{onde} \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{r(x)}{x - p} = 0$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - x}{x - p} = 0$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno teremos ainda:

$$\frac{f(x) - x}{x - p} < \frac{\epsilon}{2M\beta} \quad \text{para todo } x \in I_\delta$$

Pela propriedade 2), para todo $x \in I_\delta$ vale:

$$|(x - f(x))\phi_\delta'(x)| \leq \left| \frac{(x - f(x))M\beta}{\delta} \right| \leq \left| \frac{(x - f(x))M\beta}{x - p} \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (*)$$

Claramente $\tilde{f}'(x) = f'(x)$ para todo $x \notin I_\delta$. Derivando \tilde{f} em I_δ temos:

$$\tilde{f}'(x) = f'(x) + (x - f(x))\phi_\delta'(x) + (1 - f'(x))\phi_\delta(x)$$

Conseqüentemente,

$$|\tilde{f}'(x) - f'(x)| \leq |(x - f(x))\phi_\delta'(x)| + |(1 - f'(x))\phi_\delta(x)| \leq \epsilon$$

Assim, \tilde{f} é uma aplicação C^1 - ϵ -próxima à f .

Como $\phi_\delta(x) = 1$ para todo $x \in L_\delta^{-1}(I_\alpha)$, teremos neste intervalo $\tilde{f}(x) = x$.

Corolário 4.5 *Se $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ possui um ponto fixo não-hiperbólico, então f não é C^1 -estruturalmente estável.*

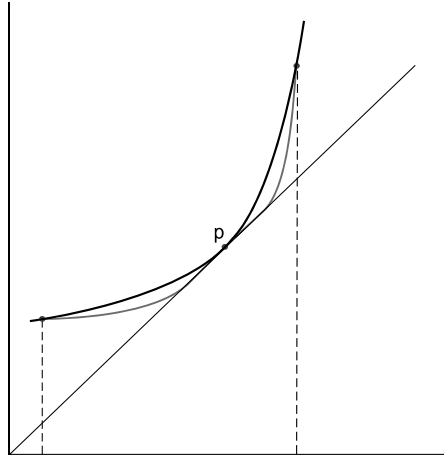


Figura 4.5: Perturbação localmente igual a identidade numa vizinhança de um ponto fixo não-hiperbólico.

Prova. Se $Fix(f)$ tem interior vazio, a proposição anterior nos diz que podemos obter uma aplicação arbitrariamente próxima à f e com um intervalo de pontos fixos. Se $Fix(f)$ não tem interior vazio a proposição 4.3 nos mostra como perturbarmos a f de forma a obtermos uma aplicação sem intervalos de pontos fixos (e portanto seu conjunto de pontos fixos terá interior vazio). Uma vez que conjugação topológica preserva a cardinalidade de $Fix(f)$, vemos que não existe ϵ tal que, para toda aplicação C^1 - ϵ -próxima de f temos conjugação topológica. Isto é, f não é estruturalmente estável.

Isso conclui nosso objetivo para o caso em que f possui pontos fixos e preserva orientação. Agora queremos generalizar este resultado para o caso em que nosso difeomorfismo possui pontos periódicos de período qualquer e preserva orientação. As demonstrações são semelhantes e muito do que já foi feito será aproveitado.

Se p é um ponto periódico de um difeomorfismo f , então $O(p)$ é um conjunto finito. Pela continuidade de f podemos escolher uma vizinhança U de p tal que $\{f^k(U)\}_{k \in \{0, \dots, n-1\}}$ sejam mutuamente disjuntos. Assim, se alterarmos f somente no intervalo $f^{n-1}(U)$ obtendo uma função \tilde{f} , teremos $\tilde{f}^n(x) = \tilde{f}(f^{n-1}(x))$ para todo ponto $x \in U$. Essa será a idéia central em todas as demonstrações, tanto neste capítulo como no capítulo 5, para abordar o caso de pontos periódicos.

Proposição 4.6 *Dado um ponto periódico p não-hiperbólico (de período $n > 1$) de um difeomorfismo $f \in Diff_+^1(S^1)$, podemos perturbar f de forma a*

termos localmente (numa vizinhança de p) um intervalo de pontos periódicos.

Prova. Seja I um intervalo aberto contendo p tal que $I, f(I), \dots, f^{n-1}(I)$ são mutuamente disjuntos. Seja ϕ uma perturbação C^1 de f^n tal que $\phi = f^n$ fora de I e $\phi(x) = x$ numa vizinhança de p (dada pela proposição 4.4).

Seja \tilde{f} definida por:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f^{-n+1} \circ \phi(x) & \text{se } x \in I \\ f(x) & \text{se } x \notin I \end{cases}$$

Dado $\epsilon > 0$, se ϕ for suficientemente próximo a f^n teremos que \tilde{f} é C^1 - ϵ -próximo a f .

Para todo ponto $x \in J$ temos :

$$\tilde{f}^n(x) = \tilde{f}^{n-1}(f^{-n+1}(\phi(x))) = \tilde{f}^{n-1}(f^{-n+1}(x))$$

Mas $f^k(x) \notin I$ para todo $k \in \{-n+1, -n+2, \dots, -1\}$, logo

$$\tilde{f}^{n-1}(f^{-n+1}(x)) = f^{n-1}(f^{-n+1}(x)) = x$$

Portanto J é um intervalo de pontos periódicos de \tilde{f} .

Proposição 4.7 *Se $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ possui um intervalo de pontos periódicos, então para todo $\epsilon > 0$ existe uma aplicação C^1 - ϵ -próxima à f sem intervalos de pontos periódicos.*

Prova. Suponha que f tenha um intervalo não degenerado $[a, b]$ de pontos periódicos de período $n > 1$. Vamos supor que $f([a, b]) \cap [a, b] = \emptyset$. Caso contrário ou $c = f(a) \in [a, b]$ ou $d = f(b) \in [a, b]$. Conforme for o caso tome $[a, c - \epsilon]$ ou $[d + \epsilon, b]$ com um ϵ arbitrariamente pequeno.

Sendo assim, os conjuntos $\{f^k([a, b])\}_{k \in \{0, \dots, n-1\}}$ são mutuamente disjuntos. Como visto anteriormente, podemos acrescentar uma bump function no intervalo $[a, b]$ de forma a obtermos uma nova função f_1 que seja um difeomorfismo C^1 - ϵ -próximo de f . Afirmamos agora que em (a, b) não existe nenhum ponto periódico para f_1 . De fato, dado $x \in (a, b)$ temos $f_1(x) > f(x)$. Observe que fora de (a, b) temos $f_1 = f$. Portanto $f_1^n(x) = f^{n-1}(f_1(x)) = f^{-1}(f_1(x))$ para todo $x \in [a, b]$. Como $f_1 > f$ em (a, b) , segue que $f^{-1}(f_1(x)) \neq x$ (caso contrário, aplicando f dos dois lados teríamos $f_1(x) = f(x)$). Portanto $f_1^n(x) \neq x$ para todo $x \in (a, b)$.

Agora afirmamos que todo intervalo fechado de pontos periódicos de f_1 , digamos I , é tal que $f(I) \cap I = \emptyset$. De fato, caso contrário teríamos $f^{k+1}(I) \cap f^k(I) \neq \emptyset$ para todo $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Logo, o conjunto

$J = \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(I)$ seria um intervalo fechado invariante por f . Mas $J \neq S^1$, pois todo ponto de J é periódico e em (a, b) não existem pontos periódicos. Portanto J é um intervalo próprio de S^1 e conseqüentemente deve existir algum ponto fixo de f em J , absurdo.

Assim, podemos repetir a demonstração para outros intervalos de pontos fixos de f_1 sem alterarmos seu tamanho.

Tal como argumentado para o caso de pontos fixos (veja a proposição 4.3) existe uma quantidade enumerável de intervalos de pontos periódicos não degenerados mutuamente disjuntos. Um argumento idêntico ao feito neste corolário nos permite concluir que existe uma função C^1 - ϵ -próxima à f sem intervalos de pontos periódicos.

Observação: Nesta proposição não apenas eliminamos os intervalos de pontos periódicos como também eliminamos todo ponto periódico em seu interior. Esse fato será importante mais adiante (proposição 5.5), onde queremos garantir que podemos obter uma perturbação que possui apenas uma quantidade finita de pontos periódicos não-hiperbólicos.

Proposição 4.8 *Se $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ é um difeomorfismo estruturalmente estável então f é um difeomorfismo Morse-Smale.*

Prova. Pelo Closing Lemma, f tem que ser conjugado a uma aplicação com número de rotação racional. Portanto f possui pontos periódicos. Suponha que f possua algum ponto periódico não-hiperbólico. Se $\text{Per}(f)$ tem interior não vazio, então a proposição anterior nos diz que arbitrariamente próximo de f existem aplicações cujo conjunto de pontos periódicos tem interior vazio. Se $\text{Per}(f)$ tem interior vazio, a proposição 4.6 nos diz que arbitrariamente próximo de f existem aplicações com conjunto de pontos periódicos com interior não vazio. Qualquer que seja o caso chegamos num absurdo, pois conjugação topológica preserva a estrutura topológica do conjunto $\text{Per}(f)$. Portanto todo ponto periódico de f é hiperbólico. Como pontos hiperbólicos são isolados e S^1 é compacto, concluímos que existe apenas uma quantidade finita (e positiva) de pontos periódicos. Em suma, f é um difeomorfismo Morse-Smale.

5

Densidade dos difeomorfismos Morse-Smale

Neste capítulo será demonstrada a densidade dos difeomorfismos Morse-Smale no conjunto dos difeomorfismos C^1 do círculo que preservam orientação, com relação a topologia dada pela distância C^1 definida no capítulo 2. O caso de inversão de orientação será discutido no capítulo 6. Como os Morse-Smale são estruturalmente estáveis, segue que o conjunto de difeomorfismos Morse-Smale é também um aberto em $\text{Diff}(S^1)$.

Iniciaremos provando que os difeomorfismos Morse-Smale com pontos fixos são densos no conjunto de difeomorfismos C^1 do círculo que possuem pontos fixos. Para isso, teremos que mostrar que próximo a qualquer difeomorfismo do círculo existe um difeomorfismo Morse-Smale. Isto será feito em varias etapas. Primeiramente mostraremos que podemos obter uma perturbação arbitrariamente pequena com apenas uma quantidade finita de pontos fixos não-hiperbólicos. Em seguida, mostraremos que podemos perturbar novamente de forma a garantir a existência de apenas uma quantidade finita de pontos fixos. E finalmente, com mais uma perturbação tornamos todos estes pontos fixos em pontos fixos hiperbólicos. Como todas estas perturbações são arbitrariamente pequenas, obteremos um Morse-Smale tão próximo de nossa função original quanto se queira.

Proposição 5.1 *Seja $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ com uma infinidade de pontos fixos. Dado $\epsilon > 0$ podemos obter uma perturbação C^1 - ϵ -próxima de f possuindo apenas uma quantidade finita de pontos fixos não-hiperbólicos.*

Prova. Seja $S = \{x \in S^1 \mid x \text{ é ponto fixo não-hiperbólico}\}$ e suponha que S é um conjunto infinito. S é um conjunto compacto: É limitado pois está contido em S^1 e é fechado pois todo ponto de acumulação de S tem que ser ponto fixo (pela continuidade de f) e não-hiperbólico (pela continuidade de f'). Para cada ponto $w \in S$ considere o intervalo $I_w = (w - \epsilon_w, w + \epsilon_w)$ onde $\epsilon_w > 0$ é suficientemente pequeno para que f seja C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima da identidade em I_w . Assim, temos uma cobertura de S por abertos, dada por $B = \{I_w \mid w \in S\}$. Como S é compacto, existe uma subcobertura finita. Isto

é, existe $\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\} \subset S$ tal que $S \subset \bigcup_{i=1}^k I_{w_i}$. Podemos escrever esta união como uma união disjunta de abertos:

$$\bigcup_{i=1}^k I_{w_i} = \bigcup_{r=1}^t J_r$$

Onde $J_r = (a_r, b_r)$, $r = 1, \dots, t$, são mutuamente disjuntos.

Para cada $r \in \{1, \dots, t\}$, considere os valores $\alpha_r = \inf\{|w - a_r|, w \in J_r \cap S\}$ e $\beta_r = \inf\{|w - b_r|, w \in J_r \cap S\}$. Pela compacidade do conjunto S , podemos afirmar que estes valores são atingidos em S . Isto é, para cada $r \in \{1, \dots, t\}$, existem $c_r, d_r \in J_r \cap S$ tais que $\alpha_r = |c_r - a_r|$ e $\beta_r = |d_r - a_r|$. Agora defina $\tilde{f} : S^1 \rightarrow S^1$ por:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \bigcup_{r=1}^t [c_r, d_r] \\ f(x) & \text{se } x \notin \bigcup_{r=1}^t [c_r, d_r] \end{cases}$$

Como para cada $r \in \{1, \dots, t\}$ c_r e d_r são pontos fixos não-hiperbólicos, não temos problemas de continuidade para f e nem para f' . Por construção, \tilde{f} será C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima à f , e todo ponto fixo não-hiperbólico estará contido em um dos intervalos de pontos fixos de \tilde{f} . Observe ainda que podemos ter $c_r = d_r$ para algum r , e neste caso c_r é um ponto fixo não-hiperbólico isolado. Agora usamos a proposição 4.2 para cada intervalo não degenerado da forma $[c_r, d_r]$ (existe uma quantidade finita deles), para obtermos uma função C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima à \tilde{f} que possui apenas uma quantidade finita de pontos fixos não-hiperbólicos (que serão os pontos c_r e d_r com $r \in \{1, \dots, t\}$). Tal função será portanto C^1 - ϵ -próxima à f .

Proposição 5.2 *Seja $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ com uma infinidade de pontos fixos. Dado $\epsilon > 0$ podemos obter uma perturbação C^1 - ϵ -próxima de f que possui apenas uma quantidade finita (e positiva) de pontos fixos.*

Demonstração: Pela proposição anterior, existe uma perturbação g C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima de f que possui apenas uma quantidade finita de pontos fixos não-hiperbólicos. Como pontos fixos hiperbólicos são isolados, todo ponto de acumulação de $\text{Fix}(g)$ tem que ser não-hiperbólico. Seja p um ponto de acumulação de $\text{Fix}(g)$ acumulado pela esquerda (o resultado segue de forma análoga para acumulação à direita). Então existe um intervalo não-degenerado $[a, p]$ satisfazendo:

$$|g(x) - x| < \epsilon/8 \quad \text{para todo } x \in [a, p]$$

$$|g'(x) - 1| < \epsilon/8 \quad \text{para todo } x \in [a, p]$$

Podemos assumir $g(a) < a$ e $g'(a) = 1$, pois entre dois pontos fixos consecutivos tem que existir um ponto cuja derivada é 1 (em decorrência do TVM).

Seja $\phi : S^1 \rightarrow S^1$ uma bump function satisfazendo:

1. $0 < \phi(x) \leq \epsilon/4$ para todo $x \in (a, p)$.
2. $\phi(x) = 0$ para todo $x \notin (a, p)$.
3. $\int_a^p \phi(x) dx = a - g(a)$.

Defina $\tilde{g} : S^1 \rightarrow S^1$, dado por:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \notin [a, p] \\ x + g(a) - a + \int_a^x \phi(x) dx & \text{se } x \in [a, p] \end{cases}$$

Observe que não temos problemas de continuidade:

$$\tilde{g}(a) = a + g(a) - a + \int_a^a \phi(x) dx = g(a)$$

$$\tilde{g}(p) = p + g(a) - a + (a - g(a)) = p$$

$$\tilde{g}'(a) = 1 - \phi(a) = 1$$

$$\tilde{g}'(p) = 1 - \phi(p) = 1$$

Resta verificar a C^1 - $(\epsilon/2)$ -proximidade. Vamos verificar apenas no intervalo $[a, p]$, onde alteramos a função:

$$|\tilde{g}(x) - g(x)| = |g(a) - a - g(x) + x + \int_a^x \phi(x) dx|$$

$$\leq |g(a) - a| + |g(x) - x| + |g(a) - a| \leq \epsilon/2$$

$$|\tilde{g}'(x) - g'(x)| = |1 + \phi(x) - g'(x)| \leq |1 - g'(x)| + |\phi(x)| \leq \epsilon/2$$

Sendo \tilde{g} C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima à g , temos que \tilde{g} é C^1 - ϵ -próxima à f . Observe \tilde{g} não tem pontos fixos em (a, p) pois $|\tilde{g}(x) - x| \geq |g(a) - a + \int_a^x \phi(x) dx| > 0$ para todo $x \in (a, p)$. Agora apliquemos este resultado à direita e à esquerda de cada ponto que é acumulado por pontos fixos (sabemos que são finitos, pois são pontos fixos não-hiperbólicos), resultando em uma função com apenas uma quantidade finita (e positiva) de pontos fixos.

Proposição 5.3 *Seja $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ possuindo apenas uma quantidade finita (e positiva) de pontos fixos. Existe um difeomorfismo \tilde{f} , que é C^1 - ϵ -próximo de f , tal que \tilde{f} possui pontos fixos, todos eles hiperbólicos.*

Prova. Se f possui todos os pontos fixos hiperbólicos, nada há para demonstrar. Vamos considerar então que f tem um ponto fixo p com $f'(p) = 1$. Como esse ponto é isolado existem 3 possibilidades: p é um atrator fraco, p é repulsor fraco ou p é atrator por um lado e repulsor pelo outro. Vamos analisar caso a caso:

1. p é atrator fraco:

Existe então $\delta > 0$ tal que se $|x - p| < \delta$ então $|f(x) - p| < |x - p|$. Seja ϕ uma bump function no intervalo $I = (p - \delta, p + \delta)$ com $\phi(p) = 1$. Seja $M > 1$ tal que $|\phi'(x)| \leq M$ para todo $x \in S^1$, e seja $\epsilon' < \epsilon/M$. Definimos então \tilde{f} como:

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \epsilon' \phi(x) \text{sen} \left(\frac{\pi(x - p)}{\delta} \right)$$

Temos então $\tilde{f}(p) = p$. Observe ainda que:

$$\text{sen} \left(\frac{\pi(x - p)}{\delta} \right) < 0 \quad \text{para todo } x \in (p - \delta, p)$$

$$\text{sen} \left(\frac{\pi(x - p)}{\delta} \right) > 0 \quad \text{para todo } x \in (p, p + \delta)$$

Logo,

$$\tilde{f}(x) - x > f(x) - x > 0 \quad \text{para todo } x \in (p - \delta, p)$$

$$\tilde{f}(x) - x < f(x) - x < 0 \quad \text{para todo } x \in (p, p + \delta)$$

Assim, p é o único ponto fixo de \tilde{f} no intervalo I . Além disso, segue da definição de \tilde{f} que $\tilde{f}'(p) = 1 - \frac{\pi\epsilon'}{\delta}$. Portanto, escolhendo ϵ suficientemente pequeno, p é um ponto fixo hiperbólico.

2. p é repulsor fraco:

Neste caso, temos que p é atrator fraco para f^{-1} . Aplicamos o que foi feito no primeiro caso à função $g = f^{-1}$, obtendo uma função \tilde{g} . Tomamos então $\tilde{f} = \tilde{g}^{-1}$.

3. p é atrator por um lado e repulsor pelo outro:

Vamos considerar apenas o caso de repulsão pela esquerda e atração pela direita (o outro segue de forma análoga).

Sendo assim existe $\delta > 0$ tal que $f(x) - x < 0$ para todo $x \in (p - \delta, p + \delta) \setminus \{p\}$.

Considere a função dada por:

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \epsilon' \phi(x)$$

Onde $\phi(x)$ e ϵ' são tais como descritos anteriormente.

Temos então $\tilde{f}(x) - x < 0$ para todo $x \in (p - \delta, p + \delta)$. Logo, \tilde{f} não possui pontos fixos neste intervalo.

O que foi feito até aqui pode ser repetido para cada um dos pontos fixos não-hiperbólicos da função f (que é uma quantidade finita). Observe no entanto que pode acontecer de todos os pontos fixos de f serem atrator-repulsores fracos, e portanto se fizermos um “descolamento” em cada um dos pontos fixos resultaria em uma função sem nenhum ponto fixo. Queremos evitar este caso. Se for este o caso, considere a função $g(x) = f(x) + \alpha$, onde $0 < \alpha < \epsilon/4$ é suficientemente pequeno para que g corte o gráfico da identidade (isto é, existe um levantamento G de g tal que $G(x) - x$ assume valores positivos e negativos). Seja $\epsilon' < \epsilon/4$ suficientemente pequeno para que toda função C^1 - ϵ' -próxima a g também corte a identidade. Pelas proposições anteriores, existe uma função h C^1 - ϵ' -próxima a g com uma quantidade finita (e positiva) de pontos fixos. Agora aplique os artifícios anteriores a aplicação h e com $\epsilon/2$ -proximidade (repare que h possui pontos que se enquadram nos itens 1 e 2 e que h é C^1 - $\epsilon/2$ -próxima a f), obtendo como resultado uma função que é C^1 - $\epsilon/2$ -próxima de h (e portanto C^1 - ϵ -próxima a f) com as propriedades desejadas.

Isso conclui a prova de que os Morse-Smale com pontos fixos são densos no conjunto de difeomorfismos com pontos fixos. Repetiremos agora as mesmas idéias para estender os resultados para o caso de difeomorfismos quaisquer do círculo (que não possuem necessariamente pontos fixos). Observe que precisamos apenas considerar difeomorfismos que possuem pontos periódicos, pois o *Closing-Lemma* nos garante que eles são densos no conjunto de difeomorfismos C^1 de S^1 . Para tanto será útil a seguinte proposição.

Proposição 5.4 *Se p é um ponto periódico não-hiperbólico de período $n > 1$ de um difeomorfismo f , então $f^k(p)$ é um ponto periódico não-hiperbólico (de período n) para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Prova. Seja p um ponto periódico de período n . Basta mostrar que $(f^n)'(f(p)) = (f^n)'(p)$. Pela regra da cadeia, temos:

$$(f^n)'(f(p)) = (f \circ f^{n-1})'(f(p)) = f'(f^{n-1}(f(p))).(f^{n-1})'(f(p))$$

Mas $f^{n-1}(f(p)) = f^n(p) = p$, pois p é periódico de período n . Então:

$$(f^n)'(f(p)) = f'(p).(f^{n-1})'(f(p)) \quad (1)$$

Aplicando agora a regra da cadeia à $(f^n)'(p)$, temos:

$$(f^n)'(p) = (f^{n-1} \circ f)'(p) = (f^{n-1})'(f(p)).f'(p) \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), temos $(f^n)'(f(p)) = (f^n)'(p)$. Portanto $f(p)$ é não-hiperbólico se e somente se p é não-hiperbólico.

Tal como feito no capítulo anterior, repetiremos passo a passo a demonstração feita para pontos fixos, adaptando-as para o caso de pontos periódicos.

Proposição 5.5 *Seja $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ com uma infinidade de pontos periódicos. Dado $\epsilon > 0$ podemos obter uma perturbação C^1 - ϵ -próxima de f que possui apenas uma quantidade finita de pontos periódicos não-hiperbólicos.*

Prova. Seja $S = \{x \in S^1 \mid x \text{ é ponto periódico não-hiperbólico}\}$. S é um conjunto compacto: É limitado pois está contido em S^1 e é fechado pois todo ponto de acumulação de S tem que ser ponto periódico (pela continuidade de f^n) e não-hiperbólico (pela continuidade de $(f^n)'$). Para cada ponto $w \in S$ considere o intervalo $I_w = (w - \epsilon_w, w + \epsilon_w)$ onde $\epsilon_w > 0$ é suficientemente pequeno para que em I_w f^n seja C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima da identidade, f^{-n+1} seja C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima de f e $f^k(I_w)$ com $k \in \{0, \dots, n-1\}$ sejam mutuamente disjuntos. Assim, temos uma cobertura de S por abertos, dada por $B = \{I_w \mid w \in S\}$. Como S é compacto, existe uma subcobertura finita. Isto é, existem $\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\} \subset S$ tal que $S \subset \bigcup_{i=1}^k I_{w_i}$. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ defina $J_i \subset I_{w_i}$ como o menor intervalo contendo todos os pontos não-hiperbólicos de I_{w_i} . Segue da compacidade de S que J_i é um intervalo fechado cujos extremos são pontos não-hiperbólicos, e $S \subset \bigcup_{i=1}^k J_i$.

Defina $f_1 : S^1 \rightarrow S^1$ dado por:

$$f_1(x) = \begin{cases} f^{-n+1}(x) & \text{se } x \in f^{n-1}(J_1) \\ f(x) & \text{se } x \notin f^{n-1}(J_1) \end{cases}$$

Vamos verificar a continuidade de f_1 . Denotando $J_1 = (a_1, b_1)$, sabemos que a_1 e b_1 são pontos periódicos não-hiperbólicos. Logo:

$$f_1(a_1) = f^{-n+1}(a_1) = f(f^{-n}(a_1)) = f(a_1)$$

$$f'(a_1) = (f \circ f^{-n})'(a_1) = f'(f^{-n}(a_1)) \cdot (f^{-n})'(a_1) = f'(a_1)$$

De forma análoga, vale para o ponto b_1 . Por construção temos também que f_1 é C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima de f .

Observe que da forma como definimos J_i , temos que $\{f^k(J_i)\}_{k \in \{0, \dots, n-1\}}$ são mutuamente disjuntos para qualquer escolha de $i \in \{1, \dots, k\}$. Assim, para todo $x \in J_1$:

$$f_1^n(x) = f_1(f^{n-1}(x)) = x$$

Logo J_1 é um intervalo de pontos periódicos de f_1 .

Observe que não criamos nem destruimos nenhum ponto periódico não-hiperbólico fora do conjunto $\bigcup_{i=1}^k f^k(J_1)$, e esta união é constituída somente por pontos periódicos não-hiperbólicos de f_1 (pela proposição 5.4). Sendo assim os pontos periódicos não-hiperbólicos de J_2 (referentes a f) são ainda pontos periódicos não-hiperbólicos de f_1 . Agora defina $f_2 : S^1 \rightarrow S^1$ dado por:

$$f_2(x) = \begin{cases} f^{-n+1}(x) & \text{se } x \in f^{n-1}(J_2 \setminus J_1) \\ f_1(x) & \text{se } x \notin f^{n-1}(J_2 \setminus J_1) \end{cases}$$

Em seguida defina f_3, f_4, \dots, f_k de forma análoga:

$$f_k(x) = \begin{cases} f^{-n+1}(x) & \text{se } x \in f^{n-1}(J_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} J_i) \\ f_{k-1}(x) & \text{se } x \notin f^{n-1}(J_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} J_i) \end{cases}$$

A continuidade e a C^1 - $(\epsilon/2)$ -proximidade à f são verificadas de forma análoga a feita para f_1 . Observe que em cada passo alteramos um intervalo disjunto do anterior, e portanto no final a distância C^1 é ainda $\epsilon/2$.

Da forma como construímos a aplicação f_k , ela possui as seguintes propriedades:

1. f_k possui apenas uma quantidade finita de intervalos de pontos periódicos.
2. Não existem pontos periódicos não-hiperbólicos fora destes intervalos.

3. f_k é C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima à f .

Agora aplicamos a proposição 4.7 e obtemos uma aplicação \tilde{f} C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima à f_k , onde eliminamos todos os pontos periódicos no interior de cada intervalo de pontos periódicos. Tal função será C^1 - ϵ -próxima à f e terá apenas uma quantidade finita de pontos periódicos não-hiperbólicos (os extremos dos intervalos).

Proposição 5.6 *Seja $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ com uma infinidade de pontos periódicos. Dado $\epsilon > 0$ podemos obter uma perturbação C^1 - ϵ -próxima de f que possui uma quantidade finita (e positiva) de pontos periódicos.*

Prova. Pela proposição anterior, existe uma perturbação g C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima de f que possui apenas uma quantidade finita de pontos periódicos não-hiperbólicos. Como pontos periódicos hiperbólicos são isolados, todo ponto de acumulação de $\text{Per}(g)$ tem que ser não-hiperbólico. Seja p é um ponto de acumulação de $\text{Per}(g)$ acumulado pela esquerda (o resultado segue de forma análoga para acumulação à direita). Considere o intervalo $I = [q, p]$, onde q é um ponto periódico de g tal que $\{g^k(I)\}_{k \in \{0, \dots, n-1\}}$ sejam mutuamente disjuntos. Pela proposição 5.2, dado $\epsilon' > 0$, existe um ponto $a \in I$ e uma aplicação G C^1 - ϵ' -próxima à g^n tal que G não possui pontos periódicos em $[a, p]$. Considere a função $\tilde{g} : S^1 \rightarrow S^1$ dada por:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} G(g^{-n+1}(x)) & \text{se } x \in g^{n-1}(I) \\ g(x) & \text{se } x \notin g^{n-1}(I) \end{cases}$$

Observe que fora do intervalo $[a, p]$ temos $G = g^n$. Vamos verificar a continuidade:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(q) &= G(g^{-n+1}(q)) = g^n(g(q)) = g(q) \\ \tilde{g}'(q) &= G'(g^{-n+1}(q))(g^{-n+1})'(q) = G'(g^{-n+1}(q))(g^{-n+1})'(q) \\ &= (g^n)'(g^{-n+1}(q))(g^{-n+1})'(q) = g'(q) \end{aligned}$$

O cálculo é análogo para o ponto p .

Temos ainda para $x \in I$:

$$\tilde{g}^n(x) = \tilde{g}(g^{n-1}(x)) = G(x)$$

Logo em $g^{n-1}(I)$, \tilde{g} não possui pontos periódicos.

Tomando ϵ' suficientemente pequeno teremos $G \circ g^{-n}$ suficientemente próximo da identidade para que $G(g^{-n+1})$ seja C^1 - $(\epsilon/2)$ -próximo de g .

Repetimos para cada ponto de acumulação esta perturbação obtendo uma aplicação C^1 - $(\epsilon/2)$ -próximo à \tilde{g} que possui apenas uma quantidade finita (e positiva) de pontos periódicos. Tal aplicação será portanto C^1 - ϵ -próxima à f .

Proposição 5.7 *Seja $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$. Dado $\epsilon > 0$, existe uma perturbação \tilde{f} C^1 - ϵ -próxima a f cujos pontos periódicos são todos hiperbólicos.*

Prova. Seja f_1 C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima à f e que possui apenas uma quantidade finita (e positiva) de pontos periódicos. Se f_1 não tiver pontos periódicos não-hiperbólicos, nada há para mostrar. Suponha então que p é um ponto periódico não-hiperbólico de f_1 . Seja $I = [p - \delta, p + \delta]$, sendo δ suficientemente pequeno para termos $\{f^k(I)\}_{k \in \{0, \dots, n-1\}}$ mutuamente disjuntos. Sendo p um ponto periódico isolado, existem três casos possíveis: p é atrator fraco, p é repulsor fraco ou p é atrator por um lado e repulsor pelo outro. Para todos os casos, considere ϕ uma bump function em I (isto é, $0 \leq \phi(x) \leq 1$ se $x \in I$, e $\phi(x) = 0$ se $x \notin I$). Seja $M > 1$ tal que $|\phi'(x)| \leq M$ para todo $x \in S^1$, e $\epsilon' < \epsilon/M$. Veremos agora os possíveis casos:

1. p é um atrator fraco:

Neste caso definimos $\tilde{f} : S^1 \rightarrow S^1$ dado por:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f_1(x) - \epsilon' \cdot \phi(f^{n-1}(x)) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi(f^{n-1}(x) - p)}{\delta} \right) & \text{se } x \in f^{n-1}(I) \\ f_1(x) & \text{se } x \notin f^{n-1}(I) \end{cases}$$

Para $x \in I$ temos:

$$\tilde{f}_1^n(x) = \tilde{f}_1(f_1^{n-1}(x)) = f_1^n(x) - \epsilon' \cdot \phi(x) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi(x - p)}{\delta} \right)$$

Segue da proposição 5.3 que \tilde{f} possui apenas um ponto periódico em I , e este é hiperbólico. Escolhendo ϵ' suficientemente pequeno teremos \tilde{f} C^1 - $(\epsilon/2)$ -próximo à f_1 , e portanto C^1 - ϵ -próximo à f .

2. p é repulsor fraco:

Considere f_1^{-1} , é aplique o item 1.

3. p é repulsor por um lado e atrator pelo outro:

Vamos considerar apenas o caso de repulsor-atrator fraco, o outro caso é análogo. Para este caso considere δ suficientemente pequeno para termos $f_1^n(x) - x < 0$ se $x \in I \setminus \{p\}$.

Defina $\tilde{f} : S^1 \rightarrow S^1$ dado por:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f_1(x) - \epsilon' \cdot \phi(f_1^{n-1}(x)) & \text{se } x \in f_1^{n-1}(I) \\ f_1(x) & \text{se } x \notin f_1^{n-1}(I) \end{cases}$$

Teremos então para todo $x \in I$:

$$\tilde{f}^n(x) = \tilde{f}(f_1^{n-1}(x)) = f_1^n(x) - \epsilon' \cdot \phi(f_1^{n-1}(x))$$

Logo $\tilde{f}^n(x) - x < 0$ para todo $x \in I$. Portanto não teremos pontos periódicos neste intervalo. Se acontecer de todos os pontos periódicos de f_1 serem deste tipo, defina:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} f(x) + \epsilon' \cdot \phi(f^{n-1}(x)) & \text{se } x \in f^{n-1}(I) \\ f(x) & \text{se } x \notin f^{n-1}(I) \end{cases}$$

Agora considere g_1 C^1 - $(\epsilon'/2)$ -próxima à g com apenas uma quantidade finita (e positiva) de pontos periódicos. Recairemos então nos dois casos anteriores. Escolhendo ϵ' suficientemente pequeno, obteremos após as perturbações apropriadas uma aplicação C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima à g_1 . Tal aplicação será portanto C^1 - ϵ -próximo à f . Repetimos o mesmo artifício para cada ponto periódico de f_1 , resultando no final em uma aplicação cujos pontos periódicos são todos hiperbólicos.

Corolário 5.8 *O conjunto dos difeomorfismos C^1 Morse-Smale que preservam orientação é denso em $Diff_+^1(S^1)$.*

6

Inversão de orientação

Agora só nos resta considerar o caso de difeomorfismos que invertem orientação. Queremos mostrar que se um difeomorfismo deste tipo é C^1 -estruturalmente-estável então ele é Morse-Smale, e que estes são densos em $\text{Diff}_-^1(S^1)$. Tudo que precisamos mostrar é que podemos tornar os pontos fixos de f em pontos fixos hiperbólicos. Uma vez feito isso, todo o resto se enquadra perfeitamente no que já fizemos até aqui.

Proposição 6.1 *Seja $f \in \text{Diff}_-^1(S^1)$. Dado $\epsilon > 0$, existe uma perturbação C^1 - ϵ -próxima à f cujos pontos fixos são hiperbólicos.*

Prova. f possui necessariamente dois (e únicos) pontos fixos. Observe que a aplicação f não pode tangenciar a identidade, pois suas derivadas são negativas. Logo, os pontos fixos de f são atratores ou repulsores (fracos ou não, dependendo da hiperbolicidade). Como f^2 é um difeomorfismo que preserva orientação e tem pontos fixos, todo ponto periódico (exceto os dois pontos fixos) tem período 2.

Suponha que um dos pontos fixos p é não-hiperbólico. Considere a aplicação: $f_1(x) = f(p - x) - p$. Essa aplicação preserva orientação, e tem um ponto fixo não-hiperbólico em zero. Observe que pelo o que vimos anteriormente, existe uma perturbação local f_2 C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima à f_1 tal que zero é um ponto fixo hiperbólico (veja proposição 5.3 para o caso de pontos atratores ou repulsores fracos). Agora defina $f_3(x) = f_2(p - x) + p$. Logo, f_3 será C^1 - ϵ -próxima à f , e p é um ponto fixo hiperbólico. Repita a mesma coisa para o outro ponto fixo de f caso este seja também não-hiperbólico. Obtemos então uma aplicação que inverte orientação cujos pontos fixos são hiperbólicos e C^1 - ϵ -próxima à f (chamaremos ainda esta aplicação de f_3).

Uma vez que temos f_3 com estas propriedades, as demonstrações se tornam idênticas às vistas anteriormente. Como exemplo, vamos mostrar que existe uma perturbação de f sem nenhum intervalo de pontos periódicos.

Seja $B = \{I_1, I_2, \dots\}$ o conjunto de todos intervalos de pontos periódicos de f_3 , sendo eles mutuamente disjuntos. Como os pontos fixos de f_3 são hiperbólicos, temos que $f_3(I_k) \cap I_k = \emptyset$ para todo $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Do contrário, como os intervalos são mutuamente disjuntos, teríamos que ter

$f(I_k) = (I_k)$, e portanto existiria um ponto fixo em I_k . Mas os pontos fixos de f_3 são hiperbólicos, e portanto não podem estar contido em tal intervalo. Agora um argumento idêntico ao feito na proposição 4.7 nos permite concluir que existe uma perturbação C^1 - ϵ -próxima à f_3 sem nenhum intervalo de pontos de período 2. Relembrando, o que faremos é, para cada I_k , alteramos a função f_3 no intervalo $f(I_k)$ com uma bump function de forma a destruir a periodicidade dos pontos. Podemos fazer isso para cada $k \in \{1, 2, \dots\}$ tomando cada vez uma perturbação C^1 - (ϵ/k) próxima à f_3 de forma a garantirmos uma convergência uniforme. Em suma, conseguimos uma perturbação, digamos \tilde{f} , arbitrariamente próxima à f_3 , e tal que $Per(\tilde{f})$ tem interior vazio.

Vale observar que toda perturbação que precisarmos fazer em f_3 será “longe” dos pontos fixos, já que estes já são hiperbólicos. De forma geral, sempre que quisermos perturbar um ponto periódico não-hiperbólico p (de período 2) de f_3^2 , tomamos uma vizinhança apropriada $U \ni p$ (de forma a não intersectar nenhum ponto fixo, não intersectar seu iterado $f_3(U)$ e que $f_3^2(U)$ seja C^1 -próxima da identidade), e fazemos a perturbação desejada apenas no intervalo $f_3(U)$ usando um dos artifícios vistos para o caso de difeomorfismos que preservam orientação. Não repetiremos tais demonstrações pois elas são essencialmente as mesmas.

7

Considerações finais

Neste trabalho foi demonstrado que o conjunto de difeomorfismos Morse-Smale é aberto e denso nos difeomorfismos C^1 do círculo e que um difeomorfismo é estruturalmente estável se, e somente se, é Morse-Smale. Estes resultados valem ainda na topologia C^r . Isto é, considerando a distância d_r introduzida no capítulo 2 e a topologia por ela induzida no espaço de difeomorfismos C^r de S^1 , podemos afirmar que os Morse-Smale C^r são abertos e densos em $\text{Diff}^r(S^1)$. Além disso um difeomorfismo C^r é C^r -estruturalmente estável se, e somente se, é Morse-Smale.

O conceito de estabilidade estrutural foi introduzido por Andronov e Pontrjagin em 1937. Peixoto demonstrou (1959) que para fluxos em variedades compactas bidimensionais, ser Morse-Smale (numa definição mais ampla, para fluxos) é equivalente a ser estruturalmente estável e que estes são genéricos (isto é, aberto e denso). Smale especulou que o mesmo valeria para dimensões maiores. Mais tarde, Smale e Palis (1970) provaram que todo Morse-Smale é estruturalmente estável, porém Smale (1965) já havia apresentado um contra-exemplo (conhecido como *Ferradura de Smale*) que mostra que a recíproca não é verdadeira. Além disso, em dimensões maiores os sistemas estruturalmente estáveis não são genéricos.

Referências Bibliográficas

- [1] F. Abdenur e L.F. Nobili, *Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão Um*, Publicações matemáticas IMPA , 2007.
- [2] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley 2nd edition, 2003.
- [3] M. Brin e G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.
- [4] A. Katok e B. Hasselblat, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2005.
- [5] C. Isnard, *Introdução à Medida e Integração*, IMPA, 2007.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)