

EEL 510247 - Métodos Numéricos de Otimização I

1ª Lista de Exercícios

Agosto, 2018

Exercício 1 Considere o problema

$$\min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} f(x_1, x_2) = (x_1 - 2, 4)^2 + 0,5x_2^4 + 2x_2^3 - 20x_2^2$$

1. Quantas soluções possui este problema? Quais são elas?
2. As soluções são mínimos globais ou locais? Justifique.
3. Com base nos resultados anteriores responda: $f(x_1, x_2)$ é convexa? Justifique.

Exercício 2 Considere o seguinte problema:

$$\min f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 8$$

1. Dê uma iteração do método de Newton para resolvê-lo. Tome como ponto inicial $\mathbf{x}^0 = (2, 2)$ e use como passo de busca unidimensional $\alpha = 1$. Ao final da iteração, calcule o novo erro na condição para convergência e o novo valor de f .
2. Partindo do mesmo ponto iniciado anteriormente, dê uma iteração do método do gradiente para resolver o problema usando o valor ótimo do passo da busca unidimensional. Ao final calcule o erro na condição de convergência e o novo valor de f .
3. Compare o progresso dos dois algoritmos. Suas ordens de convergência foram as previstas pela teoria? Justifique.

Exercício 3 : Encontre o ponto estacionário \mathbf{x}^* da função

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeito a

$$c_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 = 0$$

$$c_2(\mathbf{x}) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0$$

e determine a sua natureza (se é ponto de mínimo, de máximo ou ponto de sela). Verifique se o vetor gradiente de $f(\mathbf{x})$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores gradientes das restrições $c_1(\mathbf{x})$ e $c_2(\mathbf{x})$.

Exercício 4 : Mostre que $\mathbf{x} = (1, 0; 1, 0; 1, 0)$ é um ponto estacionário da função

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 5x_1x_2$$

sujeito as restrições

$$c_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2^2 + 3x_2x_3 - 5 = 0$$

$$c_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_3^2 - 9 = 0$$

e determine a sua natureza.

Exercício 5 : Verifique que a função

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeito a

$$\begin{aligned}c_1(\mathbf{x}) &= x_1^2 - 4x_2 = 0 \\c_2(\mathbf{x}) &= x_1 - x_2 - 1 = 0\end{aligned}$$

tem um mínimo em $\mathbf{x}^* = (2, 0; 1, 0; 0, 0)$, porém o gradiente da função objetivo não pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores gradientes das restrições.

Exercício 6 : (*) Obtenha os pontos estacionários do problema:

$$\begin{aligned}\min \quad & f(x_1, x_2) = x_1^4 - \frac{1}{6}x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 \\s. \quad & a \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{1}$$

Responda às questões a seguir e indique as justificativas para a suas respostas:

1. O problema tem mínimos locais ou globais?
2. A função f possui pontos de máximo?
3. A função f é convexa?

Exercício 7 : (*) Partindo do ponto $\mathbf{x} = (2, -2)$, dê 1 iteração do método do gradiente para resolver o problema:

$$\begin{aligned}\min \quad & f = 0,85(x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2)^3 - (x_1 - 2)^2 + x_1 + x_2^2 \\s. \quad & a \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{2}$$

- Trabalhe com o gradiente sem normalização.
- Use o método de Newton para encontrar o tamanho do passo de busca unidimensional, α . Parta do ponto $\alpha^0 = 1$ e dê apenas 1 iteração para encontrar α .
- Ao final da iteração, calcule o novo valor do erro usado para verificar a convergência do método.

Exercício 8 : Encontre os dois pontos em uma elipse expressa por $x_1^2 + 4x_2^2 = 4$ que estão à mínima distância do ponto $(1, 0)$. Formule o problema como um problema de minimização e encontre sua solução resolvendo as condições de estacionariedade do seu lagrangeano. [Dica: Para minimizar a distância d entre dois pontos, pode-se também minimizar d^2 . A expressão da distância entre dois pontos (x_1, x_2) and (y_1, y_2) é $d^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$]

Exercício 9 : Considere que a, b e c sejam escalares positivos. Calcule a alteração no valor ótimo do problema de otimização a seguir quando o lado direito da restrição é aumentado em 5%, isto é, a é alterado para $a + \frac{5}{100}a$. Dê a resposta em termos de a, b e c .

$$\begin{aligned}\min_{x,y} \quad & by - x^4 \\s.a \quad & x^2 + cy = a\end{aligned}$$

Exercício 10 : Resolva o problema

$$\begin{aligned} \max \quad & x + y \\ \text{s.a} \quad & x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \\ & x + y + z = 1 \end{aligned}$$

Exercício 11 : Considere o problema

$$\begin{aligned} \max_x \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{p}^t \mathbf{x} = c \end{aligned}$$

onde f é côncava, $x = [x_1, \dots, x_n]^t$, $p = [p_1, \dots, p_n]^t$ com $p_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ e c é um escalar.

- Escreva as condições de primeira ordem para uma solução deste problema.
- Qual é a relação entre uma solução das condições de primeira ordem e a solução do problema?

Aplicação a Sistemas Elétricos de Potência 1 (*) Um sistema possui três usinas termelétricas, cujos custos de geração são funções quadráticas das potências fornecidas:

$$C_1(P_1) = 300 + 7,3P_1 + 0,001P_1^2$$

$$C_2(P_2) = 150 + 7,8P_2 + 0,002P_2^2$$

$$C_3(P_3) = 75 + 7,5P_3 + 0,005P_3^2$$

não havendo restrição na geração de potência. Para responder os itens a seguir suponha que as perdas de transmissão no sistema sejam desprezíveis.

1. Determine a potência de saída de três geradores, que resulta no mínimo custo de geração de potência ativa, quando uma carga de 1200 MW é suprida.
2. Considere agora a operação do sistema por um dia dividido em 8 períodos de 3h. A demanda do sistema em cada período e a hora correspondente são indicados na tabela abaixo. Supondo que: (i) a carga do sistema seja atendida em todos os períodos a

Carga Total (MW)								
hora	0	3	6	9	12	15	18	21
carga	886	992	1273	1366	1040	786	1295	1356

um mínimo custo de geração e (ii) os produtores sejam remunerados e acordo com o custo marginal do sistema (isto é, cada gerador recebe o valor do custo marginal vezes a potência que fornece), responda:

- Qual a receita, a despesa e o lucro de cada produtor em cada período do dia considerado?
- A regra de remuneração adotada é vantajosa para todos os produtores? Justifique.