$$\begin{aligned} \text{inclinação} &= \frac{36-4}{6-2} \\ &= \frac{32}{4} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Você pode ver que essa reta secante é uma melhor aproximação da reta tangente do que a primeira secante.

Agora, imagine o que aconteceria se você pegasse o ponto em (6,36) e o deslizasse parábola abaixo em direção a (2,4), arrastando a reta secante ao longo com ele. Você consegue ver que à medida que o ponto se aproxima cada vez mais de (2,4), a reta secante se aproxima mais e mais da reta tangente, e que a inclinação dessa secante se aproxima cada vez mais da inclinação da tangente?

Então, você pode pegar a inclinação da tangente se você pegar o *limite* da inclinação dessa secante móvel. Vamos dar aos pontos móveis as coordenadas (x_2, y_2). À medida que esse ponto (x_2, y_2) se aproxima cada vez mais de (x_1, y_1), a saber, (2,4), a distância – isto é $(x_2 - x_1)$ – se aproxima cada vez mais do zero. Então aqui está o limite que você precisa:

$$\begin{aligned} \text{Inclinação}_{\text{da tangente}} &= \lim_{\substack{\text{à medida que o ponto} \\ \text{desliza em direção a (2,4)}}} (\text{inclinação}_{\text{da secante móvel}}) \\ &= \lim_{\text{distância} \to 0} \frac{\textit{aumento}}{\textit{distância}} \\ &= \lim_{\text{distância} \to 0} \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1} \\ &= \lim_{\text{distância} \to 0} \frac{y^2 - 4}{x^2 - 2} \end{aligned}$$

Veja o que acontece a esse limite quando você insere mais três pontos na parábola que estão cada vez mais perto de (2,4):

Quando o ponto (x_2, y_2) desliza para (2.1, 4.41), a inclinação é 4,1.

Quando o ponto desliza para (2.01, 4.0401), a inclinação é 4,01.

Quando o ponto desliza para (2.001, 4.004001), a inclinação é 4,001.

É claro que parece que a inclinação está caminhando em direção a 4.

Assim como todos os problemas sobre limite, a variável nesse problema, a *distância, se aproxima*, mas nunca realmente chega à zero. Se chegasse a zero – o que aconteceria se você deslizasse o ponto que você pegou ao longo da parábola até que ele realmente ficasse no topo de (2,4) – você teria

uma inclinação de $\frac{0}{0}$, que é indefinida. Mas, é claro, essa é precisamente a inclinação que você quer – a inclinação da reta quando o ponto pousa no topo de (2,4). É nesse fato que está situado a beleza do processo do limite. Com esse limite, você obtém a inclinação *exata* da reta *tangente* mesmo que a função limite, $\frac{y_2 - 4}{x_2 - 2}$, gere inclinações de retas *secantes*.

Aqui está, de novo, a equação para a inclinação de uma reta tangente:

$$inclinação = = \lim_{distância \to 0} \frac{y_2 - 4}{x_2 - 2}$$

E a inclinação da reta tangente é – você adivinhou – a derivada.

A *derivada* de uma função $f(x)$ em algum número $x = c$, escrito como $f'(c)$, é a inclinação da reta tangente à f desenhada em c.

A fração da inclinação $\frac{y_2 - 4}{x_2 - 2}$ é expressa com a terminologia da álgebra. Agora vamos reescrever para dar aquele toque pomposo do cálculo. Mas primeiro, a definição:

Existe um termo sofisticado do cálculo para a fração geral da inclinação, $\frac{aumento}{distância}$ ou $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. A fração é um *quociente*, certo? E tanto $y_2 - y_1$ como $x_2 - x_1$ são *diferenças*, certo? Então, voilà, é chamada de *quociente da diferença*.

Ok, aqui está a maneira mais comum de escrever o quociente da diferença (você talvez se depare com outras maneiras equivalentes). Primeiro, a *distância*, $x_2 - x_1$ (nesse exemplo, $x_2 - 2$), é chamada – não me pergunte o porquê – h. Depois, devido ao fato de $x_1 = 2$ e a *distância* ser igual a h, x_2 é igual a $2 + h$. Você então escreve y_1 como $f(2)$ e y_2 como $f(2 + h)$. Fazendo todas as substituições, você tem a definição da derivada de x^2 em $x = 2$ como o limite do quociente da diferença:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ é apenas o contraído $\frac{aumento}{distância}$ degrau da escada que você pode ver na Figura 9-10 à medida que o ponto desliza parábola abaixo em direção ao ponto (2,4). Dê uma olhada na Figura 9-11.

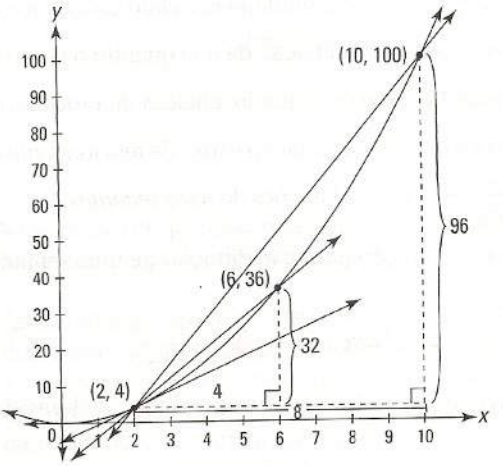

Figura 9-10: O gráfico de $y = x^2$ com a reta tangente e duas retas secantes.

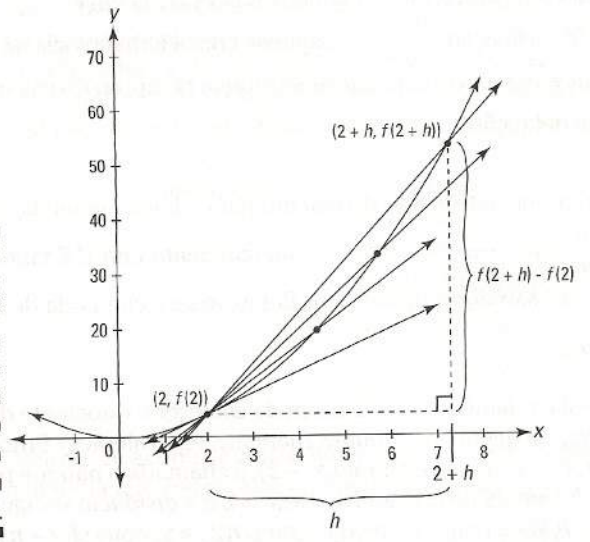

Figura 9-11: O gráfico de $y = x^2$ mostrando como o limite produz a inclinação da reta tangente em (2,4).

Fazendo as contas você tem, pelo menos, a inclinação da reta tangente em (2,4):

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - (2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(4 + 4h + h^2) - 4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h} \end{aligned}$$

A regra da diferença – não faz diferença

Se você tem uma diferença (isto é, uma subtração) em vez de uma soma, não faz diferença. Você ainda acha a derivada de cada termo separadamente. Assim, se $y = 3x^5 - x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 5x$, então $y' = 15x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 5$. Os sinais de adição e subtração não são afetados pela diferenciação.

Achando a derivada de funções trigonométricas

Senhoras e senhores: Eu tenho um grande prazer e um distinto privilégio de introduzir as derivadas de seis funções trigonométricas.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{cosec}x = -\operatorname{cosec}x \operatorname{cotg}x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen}x \qquad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \operatorname{tg}x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg}x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{cotg}x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

Certifique-se de memorizar as duas primeiras – elas são muito fáceis – eu nunca conheci ninguém que as esquecesse. Se você for bom em decoreba, memorize as quatro últimas da mesma maneira. Alternativamente, se você não for louco pela memorização ou tiver medo que esse conhecimento vá desalojar a data da Batalha de Hastings (1066) – que é muito mais provável de aparecer em um jogo de tabuleiro do que as derivadas trigonométricas – você pode descobrir as quatro últimas derivadas pelo começo usando a regra do quociente (veja o tópico "A regra do quociente" mais adiante).

Ou você talvez goste do seguinte truque mnemônico para as quatro últimas derivadas trigonométricas. Imagine que você esteja fazendo uma prova e não consiga lembrar essas derivadas. Você se debruça sobre o aluno sentado próximo a você e sussurra, "psst, qual é a derivada de cosec*x*?". Agora, pegue as três últimas letras de *psst* (sst) – essas são as letras iniciais de sec, sec, tg. Escreva esses três e abaixo deles escreva suas co-funções: cosec, cosec, cotg. Coloque um sinal negativo no cosec do meio. Finalmente, adicione setas como no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{l} \text{sec} \rightarrow \ \text{sec} \ \leftarrow \text{tg} \\ \text{cosec} \rightarrow -\text{cosec} \leftarrow \text{cotg} \end{array}$$

Acredite no que eu digo, você vai se lembrar da palavra *psst*, e depois disso o diagrama será muito fácil de lembrar. Olhe para a fileira de cima: A *sec* da esquerda tem uma seta apontando para *sec tg* – então a derivada de sec*x*

6 não tem nada a ver com o fato de nós termos usado 6 retângulos algumas páginas atrás). Então, você pode substituir essa expressão por $\sum_{i=1}^{n} i^2$ na última linha da solução da notação sigma, e ao mesmo tempo substituir n por $\sum_{i=1}^{n} 1$:

$$R_n = \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{n} \cdot n$$

$$= \frac{27}{n^3} \cdot \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) + 3$$

(Ok, eu admito, eu não mostrei a você todo o meu trabalho)

$$= 9 + \frac{27}{2n} \cdot \frac{9}{2n^2} + 3$$

$$= 12 + \frac{27}{2n} \cdot \frac{9}{2n^2}$$

Fim. Finalmente! Essa é a fórmula para a área de n retângulos direitos entre 0 e 3 sob a função $= x^2 + 1$. Você pode usar essa fórmula para produzir os resultados dados na Tabela 13-2. Mas, uma vez que você tenha tal fórmula, seria um pouco sem sentido produzir uma tabela de áreas aproximadas, porque você pode usar a fórmula para determinar a área *exata*. E é muito fácil. Eu você chegar nisso em um minuto no próximo tópico.

Mas primeiro, aqui estão as fórmulas para n retângulos esquerdos e n pontos médios dos retângulos entre 0 e 3 sob a função $x^2 + 1$. Essas fórmulas produzem as áreas aproximadas nas Tabelas 13-1 e 13-3. A álgebra para derivar essas fórmulas é mais difícil do que o que você fez para a fórmula do retângulo direito, então eu decidi pular. Você se importa? Eu achei que não.

$$L_n = 12 - \frac{27}{2n} \cdot \frac{9}{2n^2}$$

$$M_n = 12 - \frac{9}{4n^2}$$

E agora, o que vocês todos estavam esperando...

Encontrando a área exata com a integral definida

Tendo mostrado todos os fundamentos necessários, você finalmente está pronto para determinar áreas exatas – que é o que faz a integração. Você não precisa do cálculo para fazer todo o negócio da aproximação que você acabou de fazer.

Como você viu com o retângulo esquerdo, direito e o ponto médio nos tópicos de "Área aproximada", quanto mais retângulos você tiver, melhor será a aproximação. Então, "tudo" o que você tem que fazer para obter a área exata sob uma curva é usar um número infinito de retângulos. Agora, na verdade, você não pode usar um número infinito de retângulos, mas com a fantástica invenção dos limites, isso é mais ou menos o que acontece. Aqui está a definição de uma integral definida que é usada para calcular as áreas exatas.

A integral definida (definição "simples"): A área exata sob uma curva entre a e b é dada pela *integral definida*, que é definida como segue:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right) \right]$$

Isso é bonito ou não? O somatório acima é idêntico à fórmula para n retângulos direitos, R_n, que eu mostro algumas páginas atrás. A única diferença aqui é que você acha o limite dessa fórmula como o número de retângulos se aproximando do infinito (∞).

Essa definição de uma integral definida é a versão simples baseada na fórmula do retângulo direito. Eu vou lhe dar a verdadeira definição McCoy mais tarde, mas pelo fato de todas as somas Riemann terem o mesmo limite – em outras palavras, não importa qual tipo de retângulo você usa – é preferível usar a definição do retângulo direito. É o menos complicado e vai sempre ser suficiente.

Vamos fazer soar os tambores! Aqui, finalmente, está a área exata sob o nosso velho amigo $x^2 + 1$ entre 0 e 3:

$$\int_0^3 f(x^2+1)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right) \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(12 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} \right)$$

(Lembre-se, em um problema sobre limite, qualquer número dividido pelo infinito é igual a zero.)

$$= 12 + \frac{27}{2 \cdot \infty} + \frac{9}{2 \cdot \infty^2}$$

$$= 12 + \frac{27}{\infty} + \frac{9}{\infty}$$

$$= 12 + 0 + 0$$

(Isso é o que nós obtivemos no tópico "Escrevendo as somas Riemann com a notação sigma" depois de todos aqueles passos.)

$$= 12$$

Grande surpresa.

Esse resultado é muito incrível se você pensar nele. Usando o processo do limite, você obtém uma resposta *exata* de 12 – que é mais ou menos 12,00000000... até um número infinito de casas decimais – para a área sob a função curva e suave $x^2 + 1$, baseada nas áreas de retângulos de topo plano que vão ao longo da curva no formato de dente de serra recortado. Deixe-me adivinhar – o simples poder dessa beleza matemática traz lágrimas aos seus olhos.

Encontrar a área exata de 12 usando o limite de uma soma de Riemann é

muito trabalho (lembre-se, você teve que primeiro determinar a fórmula para n retângulos direto). Esse método complicado de integração é comparável a determinar a derivada da maneira difícil usando a definição formal que é baseada no quociente da diferença (se você esqueceu e tem vontade de lembrar, veja o Capítulo 9). E assim que você parar de usar a definição formal da derivada depois que você aprender os atalhos da diferenciação, você não terá que usar a definição formal da integral definida baseada na soma de Riemann depois de aprender os métodos de atalho nos Capítulos 14 e 15 – exceto, isto é, para o seu exame final.

Devido ao fato de o limite de todas as somas Riemann ser o mesmo, os limites no infinito de n retângulos esquerdos e n pontos médios dos retângulos – para $x^2 + 1$ entre 0 e 3 – devem nos dar o mesmo resultado como o limite de n retângulos direitos, e eles dão. As expressões depois dos símbolos do limite a seguir são as fórmulas para n retângulos esquerdos e n pontos médios dos retângulos que aparecem no final do tópico "Escrevendo as somas de Riemann com a notação sigma" no começo desse capítulo. Aqui está o limite do retângulo esquerdo:

$$\int_0^3 (x^2+1)\,dx = L_\infty = \lim_{n\to\infty}\left(12 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2}\right)$$
$$= 12 + \frac{27}{2\cdot\infty} + \frac{9}{2\cdot\infty^2}$$
$$= 12 - \frac{27}{\infty} + \frac{9}{\infty}$$
$$= 12 - 0 + 0$$
$$= 12$$

E aqui está o limite do ponto médio do retângulo:

$$\int_0^3 (x^2+1)\,dx = M_\infty = \lim_{n\to\infty}\left(12 - \frac{9}{4n^2}\right)$$
$$= 12 - \frac{9}{4\cdot\infty^2}$$
$$= 12 - \frac{9}{\infty}$$
$$= 12 - 0$$
$$= 12$$

Se você está um tanto incrédulo que esses limites lhe dão a área *exata* sob $x^2 + 1$ entre 0 e 3, você não está sozinho. Afinal de contas, nesses limites, assim como em todos os problemas com limites, o número x (∞ nesse exemplo) é somente *aproximado*; na verdade, não é nunca alcançado. E, além disso, o que significaria alcançar o infinito? Você não pode fazer isso. E sem levar em consideração quantos retângulos você tem, você sempre tem aquele lado de dente de serra recortado. Então como pode tal método lhe dar a área exata?

Olhe para ele dessa maneira. Você pode dizer a partir das Figuras 13-6 e 13-7

que a soma das áreas dos retângulos esquerdos, sem levar em consideração a quantidade, vai sempre ser uma *subestimação* (esse é o caso para as funções que estão aumentando ao longo do intervalo em questão). E a partir da Figura 13-8, você pode ver que a soma das áreas de retângulos direitos, sem levar em consideração a quantidade que você tem, vai sempre ser uma *superestimação* (para funções crescentes). Então, visto que os limites no infinito da subestimação e da superestimação são iguais a 12, essa deve ser a área exata (Um argumento semelhante funciona para funções decrescentes).

Não somente os limites no infinito dos retângulos esquerdos, direitos e dos pontos médios são os mesmos, o limite de qualquer soma de Riemann também lhe dá a mesma resposta. Você pode ter uma série de retângulos com larguras desiguais; você pode ter uma mistura de retângulos esquerdos, direitos e de pontos médios; ou você pode construir retângulos para que eles toquem a curva em algum ponto diferente do canto superior esquerdo ou direito ou nos pontos médios dos seus lados superiores. A única coisa que importa é que, no limite, a largura de todos os retângulos tende para zero. Isso nos traz para a bobagem da integração totalmente extrema e vulgar que leva em conta todas essas possibilidades.

A integral definida (a real definição de McCoy): A integral definida de a até b, $\int_a^b f(x)dx$, é o número para o qual todas as somas de Riemann tendem à medida que o número de retângulos se aproxima do infinito e à medida que a largura de todos os retângulos tende a zero:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

onde Δx_i é a largura de i retângulos e c_i é a coordenada x do ponto onde o i retângulo toca $f(x)$.

Área aproximada com a regra do trapézio e a regra de Simpson

O método da área exata não funciona para certos tipos de funções. Está além do objetivo desse livro explicar porque esse é o caso ou como são exatamente essas funções, então apenas leve em conta o que eu digo. A seguir temos mais duas maneiras para estimar a área – em acréscimo a usar o retângulo esquerdo, direito e os pontos médios – que podem ser úteis caso você obtenha uma dessas funções não cooperativas.

A regra do trapézio

Com a regra do trapézio, em vez de aproximar a área com retângulos, você faz isso com, você consegue adivinhar? – trapézios. Veja a Figura 13-11.

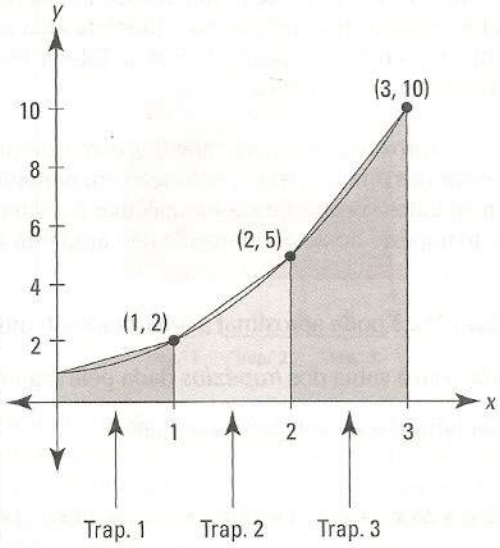

Figura 13-11: Três trapézios aproximam a área sob $f(x) = x^2 + 1$ entre 0 e 3.

Por causa da maneira como os trapézios abraçam a curva, eles lhe dão uma melhor estimativa da área do que o retângulo esquerdo ou o direito. E no fim das contas a aproximação pelo trapézio é a média das aproximações do retângulo esquerdo e do retângulo direito. Você consegue ver o porquê? (Dica: A área do trapézio – digamos o trapézio 2 na Figura 13-11 – é a média das áreas de dois retângulos correspondentes nas somas dos extremos esquerdos e direitos, a saber, o retângulo número 2 na Figura 13-6 e o retângulo 2 na Figura 13-8).

A Tabela 13-4 lista as aproximações usando os trapézios para a área sob $x^2 + 1$ entre 0 e 3.

Tabela 13-4 Estimativas da área sob $f(x) = x^2 + 1$ entre 0 e 3 dadas pelo número de trapézios

Número de trapézios	Área estimada
3	12.5
6	12.125
12	~12.031
24	~12.008
48	~12.002
96	~12.0005
192	~12.0001
384	~12.00003

Ao olhar a Figura 13-11, você talvez espere que uma aproximação usando um trapézio seja melhor do que a estimativa do ponto médio, mas na realidade, como uma regra geral, estimativas usando o ponto médio são mais ou menos duas vezes melhores do que as estimativas usando trapézios. Você pode confirmar isso comparando a Tabela 13-3 e a 13-4. Por exemplo, a Tabela 13-3 lista uma área estimada de 11.990 para 48 retângulos formados pelos pontos médios. Isso difere da área exata de 12 por 0,01. A área estimada com 48 trapézios dados na Tabela 13-4, a saber, 12.002, difere de 12 por duas vezes mais.

Se você já calculou as aproximações dos retângulos com extremos esquerdos e com extremos direitos para uma função em particular e para certo número de retângulos, você pode apenas calcular a média deles para obter a estimativa do trapézio correspondente. Se não, aqui está a fórmula:

A regra do trapézio: Você pode aproximar a área exata sob uma curva entre a e b, $\int_a^b f(x)dx$, com a soma dos *trapézios* dada pela seguinte fórmula. Em geral, quanto mais trapézios, melhor é a estimativa.

$$T_n = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \ldots\ldots + 2f(x_{n-1}) + 2f(x_n)\right]$$

onde n é o número de trapézios, x_0 é igual a a, e x_1 até x_n são as coordenadas x igualmente espaçadas dos lados direitos dos trapézios de 1 até n.

Mesmo que a definição formal da integral definida seja baseada na soma de um número infinito de *retângulos*, eu prefiro pensar na integração como sendo o limite da regra do trapézio no infinito. Quando você usa um número de trapézios cada vez maior e depois amplia no local onde os trapezóides tocam a curva, as partes superiores dos trapézios se aproximam cada vez mais da curva. Se você amplia "infinitamente", as partes superiores dos "infinitamente muitos" trapézios *se tornam* a curva e, assim, a soma das suas áreas lhe dá a área exata sob a curva. Essa é uma boa maneira de pensar sobre por que a integração produz a área exata – e faz sentido conceitualmente – mas, na verdade, não é feita dessa maneira.

A regra de Simpson – isto é, Thomas (1710–1761), e não Homer (1987–)

Agora eu realmente fico mais sofisticado e desenho formas que são parecidas com trapézios, exceto que em vez de ter partes superiores inclinadas, elas têm partes superiores curvas e parabólicas. Veja a Figura 13-12.

Note que com a regra de Simpson cada "trapézio" tem uma distância de dois intervalos em vez de um; em outras palavras, o "trapézio" número 1 vai de x_0

até x_2, o "trapézio" 2 vai de x_2 até x_4, e assim por diante. Por causa disso, o total de intervalos deve sempre ser dividido em um número par de intervalos.

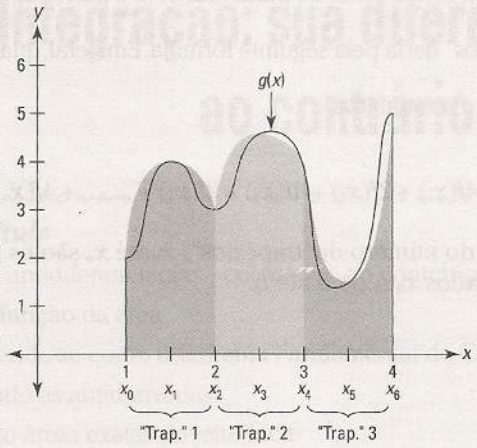

Figura 13-12: Três "trapézios" com parte superior curva aproximam a área sob g(x) entre 1 e 4.

A regra de Simpson é de longe o método de aproximação mais exato discutido nesse capítulo. Na verdade, ele dá a área *exata* para qualquer função polinomial de grau três ou menor. Em geral, a regra de Simpson dá uma estimativa muito melhor do que a regra do ponto médio ou a regra do trapézio.

Uma soma usando a regra de Simpson é um tipo de média ponderada da soma do ponto médio e da soma do trapézio, exceto que você usa a soma do ponto médio duas vezes na média. Então, se você já tem a soma do ponto médio e do trapézio para algum número de retângulos ou trapézios, você pode obter a aproximação pela regra de Simpson com a seguinte média ponderada:

$$S_{2n} = \frac{M_n + M_n + T_n}{3}$$

Note o subscrito $2n$. Isso significa que se você usar, digamos, M_3 ou T_3, você obtém um resultado para S_6. Mas S_6, que tem seis intervalos, tem três "trapézios" curvos porque cada um distancia um do outro em dois intervalos. Assim, a fórmula acima sempre envolve o mesmo número de retângulos, trapézios, e os "trapézios" da regra de Simpson.

Se você não tem a soma do ponto médio e nem do trapézio para o atalho acima, você pode usar a seguinte fórmula para a regra de Simpson.

A regra de Simpson: Você pode aproximar a área exata sob uma curva entre a e b, $\int_a^b f(x)dx$, com a soma de parábolas com a parte superior no formato de "trapézios" dada pela seguinte fórmula. Em geral, quanto mais "trapézios", melhor é a estimativa.

$$S_n = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots\ldots + 4f(x_{n-1}) + 2f(x_n)\right]$$

onde n é o dobro do número de "trapézios", x_0 até x_n são os pontos igualmente espaçados x_{n-1} de a até b.

Capítulo 14

Integração: sua diferenciação ao contrário

Neste capítulo

- Fazendo a antidiferenciação – colocando ao contrário
- Usando a função da área
- Familiarizando-se como o Teorema Fundamental do Cálculo
- Encontrando as antiderivadas
- Calculando áreas exatas do jeito fácil

O Capítulo 13 mostra o jeito difícil de calcular a área sob uma função usando a definição formal da integração – o limite da soma de Riemann. Nesse capítulo, eu faço do jeito fácil, tirando vantagem de uma das mais importantes e maravilhosas descobertas da matemática – que a integração é apenas a diferenciação ao contrário.

Antidiferenciação – isto é, a diferenciação ao contrário

A *antidiferenciação* é apenas a diferenciação ao contrário. A derivada de $\sin x$ é $\cos x$, então a antiderivada de $\cos x$ é $\sin x$; a derivada de x^3 é $3x^2$, então a antiderivada de $3x^2$ é x^3 – você apenas faz o inverso. Há mais um pouco a isso, mas essa é a idéia básica. Mais adiante nesse capítulo eu mostro a você como integrar (encontrar áreas) usando as antiderivadas. Isso é ***muito*** mais fácil do que encontrar áreas com a técnica da soma de Riemann.

Agora considere de novo x^3 e sua derivada $3x^2$. A derivada de $x^3 + 10$ também é $3x^2$, como é a derivada de $x^3 - 5$. Qualquer função na forma $x^3 + C$, onde C é qualquer número, tem uma derivada de $3x^2$. Então, cada semelhante função é uma antiderivada de $3x^2$.

A integral indefinida: A *integral indefinida* de uma função f(x), escrita como $\int f(x)\,dx$, é a família de *todas* as antiderivadas da função. Por exemplo, devido ao fato de a derivada de x^3 ser $3x^2$, a integral indefinida de $3x^2$ é $x^3 + C$, e você escreve:

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

Você provavelmente reconhece esse símbolo de integração, $\int$, da discussão sobre a *integral definida* no Capítulo 13. O símbolo da integral definida, no entanto, apresenta dois números pequenos como $\int_4^{10}$ que diz a você para calcular a área de uma função entre esses dois pontos, chamados de *limites da integração*. A versão básica do símbolo, $\int$, indica uma integral *indefinida* ou uma *antiderivada*. Esse capítulo é todo sobre a conexão íntima entre esses dois símbolos.

A Figura 14-1 mostra a família das antiderivadas de $3x^2$, a saber, $x^3 + C$. Note que essa família de curvas tem um número de curvas infinito. Elas sobem e descem para sempre e são infinitamente densas. A lacuna vertical de 2 unidades entre cada curva na Figura 14-1 é apenas uma ajuda visual.

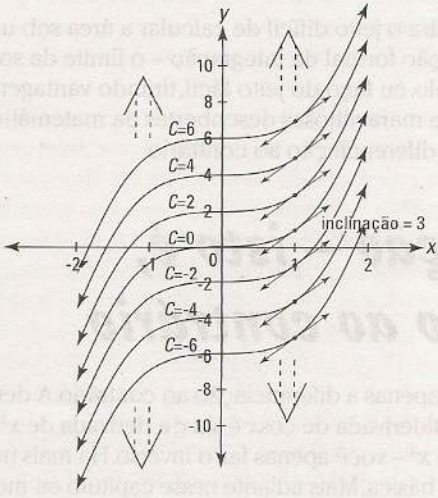

Figura 14-1: A família das curvas $x^3 + C$. Todas essas funções têm a mesma derivada, $3x^2$.

Considere algumas coisas sobre a Figura 14-1. A curva no alto do gráfico é $x^3 + 6$; a debaixo dela é $x^3 + 4$; a da base é $x^3 - 6$. Pela regra da potência, essas três funções, assim como todas as outras nessa família de funções, têm uma derivada de $3x^2$. Agora, considere a inclinação de cada uma das curvas onde x é igual a 1 (veja as retas tangentes desenhadas nas curvas). A derivada de cada curva é $3x^2$, então quando x é igual a 1, a inclinação de cada curva é $3 \cdot 1^2$, ou 3. Dessa forma, todas essas pequenas linhas tangentes são paralelas. Depois, note que todas as funções na Figura 14-1 são idênticas exceto por serem deslizadas para cima ou para baixo (lembra dos deslocamentos verticais do Capítulo 5?). Por que elas diferem somente pelo deslocamento vertical, a inclinação de qualquer valor x, como $x = 1$, é a mesma para todas as curvas. É por isso que todas elas têm a mesma derivada e todas são antiderivadas da mesma função.

é $\sec x \tan x$. A *tg* da direita tem uma seta apontando para *sec sec*, então a derivada de tg$x$ é $\sec^2 x$. A fileira debaixo funciona da mesma maneira, exceto que ambas as derivadas são negativas.

Achando a derivada das funções exponenciais e logarítmicas

Cuidado: decoreba à frente. Que alegria, felicidade pura, maná dos céus...

Funções exponenciais

Se você não conseguir decorar a próxima regra, desligue a sua calculadora.

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Isso mesmo – pode realaxar – a derivada de e^x é ela mesma! Essa é uma função especial. e^x e seus múltiplos, como $5e^x$, são as únicas funções que são suas próprias derivadas. Pense sobre o que isso significa. Olhe o gráfico de $y = e^x$ na Figura 10-1.

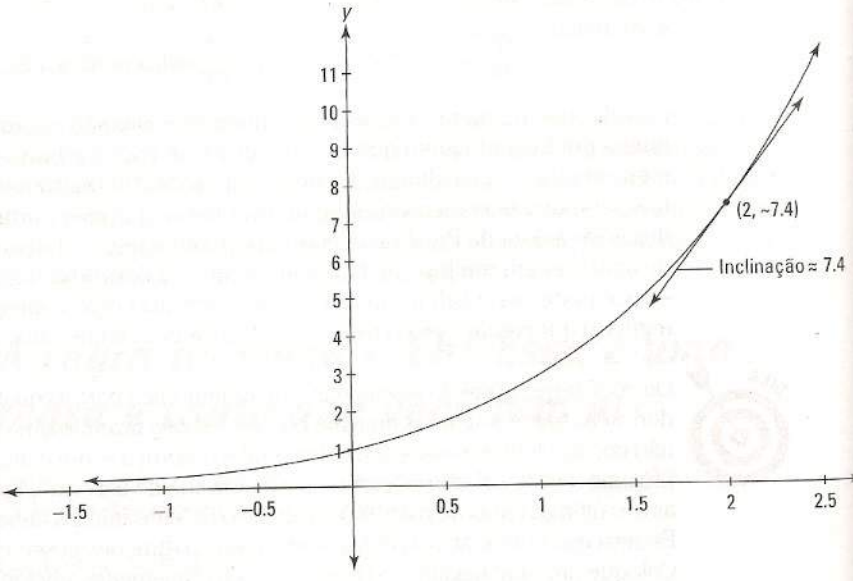

Figura 10-1: O gráfico de $y = e^x$.

Escolha qualquer ponto nessa função, digamos (2, ≈ 7,4) e a altura da função nesse ponto, ≈ 7,4, é igual à inclinação nesse ponto.

Se a base for um número diferente de e, você tem que ajustar a derivada multiplicando-a pelo log natural da base:

Se $y = 2^x$, então $y' = 2^x \ln 2$.
Se $y = 10^x$, então $y' = 10^x \ln 10$.

Vocabulário, Voshmabulário: Que diferença isso faz?

Em geral, definições e vocabulário são muito importantes em matemática, e é uma boa idéia usá-las corretamente. Mas com o tópico atual, eu vou ser um pouco indolente com as terminologias exatas e, com isso, eu lhe dou permissão para fazer a mesma coisa.

Se você for uma pessoa persistente, você deve dizer que *a* integral indefinida de $3x^2$ é $x^3 + C$, que $x^3 + C$ é a família ou o conjunto de *todas* as antiderivadas de $3x^2$ (você não diz que $x^3 + C$ é *a* antiderivada), e que $x^3 + 10$, por exemplo, é *uma* antiderivada de $3x^2$. E em uma prova, você deve definitivamente escrever $\int 3x^2 dx = x^3 + C$. Se você deixar o C de fora, você provavelmente vai perder alguns pontos.

Mas, ao discutir essas questões, ninguém vai se preocupar ou ficar confuso se você cansou de dizer C depois de cada integral indefinida e apenas dizer, por exemplo, que a integral indefinida de $3x^2$ é x^3. E em vez de sempre falar sobre o negócio daquela família de funções, você pode apenas dizer que *a* antiderivada de $3x^2$ é $x^3 + C$ ou que a antiderivada de $3x^2$ é x^3. Todos vão saber o que você quer dizer. Isso pode me custar o meu título de sócio no Conselho Nacional de Professores de Matemática, mas, pelo menos de vez em quando, eu uso essa abordagem flexível.

A irritante função da área

Essa é uma função difícil – se prepare. Digamos que você tenha qualquer função antiga, $f(x)$. Imagine que em algum valor de t, chame de s, você desenhe uma linha vertical fixa. Veja a Figura 14-2.

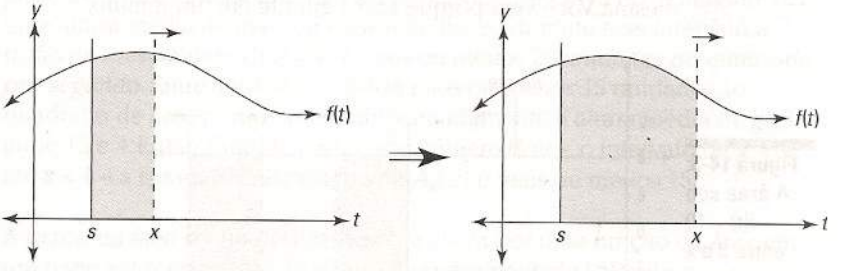

Figura 14-2: A área sob f entre s e x é deslizada movendo a linha em x.

Depois você pega uma linha vertical móvel, começando no mesmo ponto, s ("s" é para ponto de partida), e leva para a direita. À medida que você leva a linha, você desliza cada vez mais a área sob a curva. Essa área é uma função de x, a posição da linha móvel. Em símbolos, você escreve:

$$A_f(x) = \int_s^x f(t)dt$$

Note que t é a variável de entrada em $f(t)$ em vez de x porque x já está sendo usada – é a variável de entrada em $A_f(x)$. O subscrito f em $A_f(x)$ indica que $A_f(x)$ é a função da área para a curva em particular f ou $f(t)$. O dt é um pequeno incremento ao longo do eixo t – na verdade um pequeno incremento infinitesimal.

Aqui está um simples exemplo para certificar que você entendeu como uma função da área funciona. A propósito, não se sinta mal se você achar isso extremamente difícil de compreender – você tem muita companhia. Digamos que você tenha uma função simples, $f(t) = 10$ – isto é, uma linha horizontal em $y = 10$. Se você deslizar a área começando em $s = 3$, você terá função da área a seguir:

$$A_f(x) = \int_3^x 10dt$$

Você pode ver que a área deslizada de 3 para 4 é 10 porque, ao levar a reta de 3 até 4, você desliza um retângulo com largura de 1 e altura de 10, que tem uma área de 1 vezes 10, ou 10. Veja a Figura 14-3.

Então, $A_f(4)$, a área deslizada à medida que você alcança 4, é igual a 10. $A_f(5)$ é igual a 20 porque quando você leva a linha para 5, você aumenta um retângulo com uma largura de 2 e altura de 10, que tem uma área de 2 vezes 10, ou 20. $A_f(6)$ é igual a 30, e assim por diante.

Agora, imagine que você leva a linha para direita a uma razão de *unidade por segundo*. Você começa em $x = 3$, e você alcança 4 em 1 segundo, 5 em 2 segundos, 6 em 3 segundos, e assim sucessivamente. Quanta área você está expandindo por segundo? Dez *unidades ao quadrado por segundo* porque você amplia outro retângulo 1 por 10 a cada segundo. Note – isso é grande – que porque a largura de cada retângulo que você deslizada é 1, a área de cada retângulo – que é dada pela *altura* vezes a *largura* – é a mesma que a sua altura porque qualquer coisa vezes 1 é igual a ela mesma. Você verá porque isso é grande em um minuto.

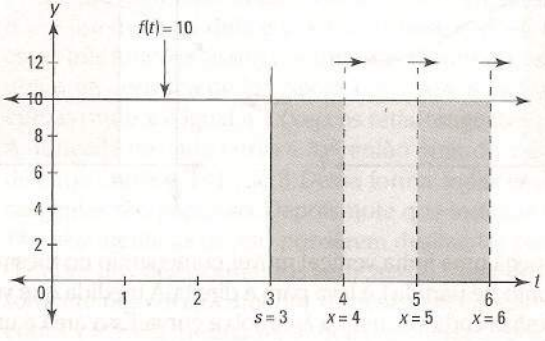

Figura 14-3: A área sob f(t) = 10 entre 3 e x é deslizada movendo a linha vertical em x.

Ok, você está sentado? Você chegou a outro grande momento *Ah ha!* Na história da matemática. Lembre-se que a derivada é uma razão. Então, pelo fato de a razão na qual a função da área anterior aumentar em 10 unidades por segundo ao quadrado, você pode dizer que sua derivada é igual a 10. Assim, você pode escrever –

$$\frac{d}{dx} A_f(x) = 10$$

Novamente, isso apenas diz a você que com cada 1 unidade aumentada em x, A_f (a função da área) aumenta em 10. Agora aqui está a coisa crítica: note que essa razão ou derivada de 10 é a mesma que a altura da função original $f(t) = 10$ porque à medida que você vai ao longo de 1 unidade, você desliza o retângulo que é 1 por 10, que tem uma área de 10, a altura da função.

Isso funciona para qualquer função, não apenas linhas horizontais. Olhe a função $g(t)$ e sua função da área $A_g(x)$ que desliza a área começando em $s = 2$ na Figura 14-4.

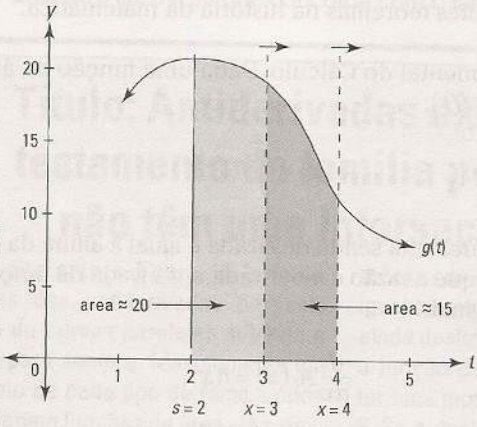

Figura 14-4: A área sob g(t) entre 2 e x é deslizada pela linha vertical em x.

Você pode ver que $A_g(3)$ é mais ou menos 20 porque a área deslizada entre 2 e 3 tem uma largura de 1e a parte superior curva do "retângulo" tem uma altura média de mais ou menos 20. Então, durante esse intervalo, a razão de crescimento de $A_g(x)$ é mais ou menos 20 ***unidades ao quadrado por segundo***. Entre 3 e 4, você desliza mais ou menos 15 unidades ao quadrado de área porque isto é aproximadamente a altura média de $g(t)$ entre 15 e 4. Então, durante o segundo número dois – o intervalo de $x = 3$ até $x = 4$ – a razão de crescimento de $A_g(x)$ é mais ou menos 15.

A *razão* da área sendo deslizada sob a curva por uma função da área em um dado valor de x é igual à *altura* da curva naquele valor de x.

Eu percebo que estou sendo um pouco flexível – na minha discussão na Figura 14-4 – dizendo coisas do tipo "aproximadamente" isso ou "média" daquilo. Mas leve em conta o que eu digo, quando você faz

os cálculos, tudo dá certo. Você viu no Capítulo 13 que a área sob a curva é aproximadamente cada vez melhor quando números crescentes de retângulos cada vez mais finos são somados, e que a área exata é determinada somando as áreas de um número infinito de retângulos finos infinitos. O mesmo tipo de processo envolvendo limite está acontecendo aqui – as áreas e razões que são "aproximadamente" tais e tais se tornam exatas no limite. O importante para observar é que a velocidade de crescimento da área sob a curva é a mesma que a altura da curva.

O poder e a glória do Teorema Fundamental do Cálculo

Soem as trombetas! Agora que você viu a relação entre a razão de crescimento de uma função da área e a altura da curva dada, você está pronto para o Teorema Fundamental do Cálculo – como dizem, é um dos mais importantes teoremas na história da matemática.

O Teorema Fundamental do Cálculo: Dada uma função da área A_f que desliza a área sob $f(t)$,

$$A_f(x) = \int_s^x f(t)dt,$$

a razão na qual a área está sendo deslizada é igual à altura da função original. Então, porque a razão é a derivada, a derivada da função da área é igual à função original:

$$\frac{d}{dx} A_f(x) = f(x),$$

Porque $A_f(x) = \int_s^x f(t)dt$, você também pode escrever a equação acima como a seguir:

$$\frac{d}{dx} \int_s^x f(t)dt = f(x)$$

É hora de comemorar!

Agora, pelo fato de a derivada de $A_f(x)$ ser $f(x)$, $A_f(x)$ será por definição uma antiderivada de $f(x)$. Veja como isso funciona retornando para a função simples do tópico anterior, $f(t) = 10$, e sua função da área, $A_f(x) = \int_s^x 10dt$.

De acordo com o Teorema Fundamental, $\frac{d}{dx} A_f(x) = 10$. Assim A_f deve ser uma antiderivada de 10; em outras palavras, A_f é uma função cuja derivada é 10. Porque qualquer função na forma $10x + C$, onde C é um número, tem uma derivada de 10, a antiderivada de 10 é $10x + C$. O número em particular C depende da sua escolha de s, o ponto onde você começa a deslizar a área. Para essa função, se você começar a deslizar a área em, digamos, $s = 0$, então $C = 0$, e assim, $A_f(x) = \int_0^x 10dt = 10x$. (Note que C não é necessariamente igual a s. Aliás, geralmente não é. A relação entre C e s é explicada no texto complementar "Zero nem sempre é zero" no final desse tópico).

A Figura 14-5 mostra por que $A_f(x) = 10x$ é a função da área correta se você começar a deslizar a área em zero. No primeiro gráfico da figura, a área sob a curva de 0 até 3 é 30, e é dada por $A_f(3) = 10 \cdot 3 = 30$. E você pode ver que a área de 0 até 5 é 50, que concorda com o fato que $A_f(5) = 10 \cdot 5 = 50$.

Título: Antiderivadas excluídas do testamento da família porque elas não têm uma interseção em x

Olhe de volta para a Figura 14-1. Todas as famílias das antiderivadas parecem uma pilha de curvas paralelas subindo e descendo para sempre. Mas somente um subconjunto de cada tipo de família pode ser usado como funções de área – a saber, as antiderivadas que têm pelo menos uma interseção em x (algumas vezes, assim como a Figura 14-1, esse subconjunto é a família completa). Aqui está o porquê: Se uma função da área começa deslizando a área em, digamos, x = 5, $A_f(5)$ deve ser igual a zero porque em 5 nenhuma área foi ainda deslizada. Então a antiderivada para a função da área começando em 5 deve ter uma interseção em x, um zero, em x = 5. Se o deslizamento começar em x = -10 você então usaria a antiderivada com uma interseção em x de -10 e assim por diante. Uma antiderivada sem interseções em x não pode ser usada como função da área. A vergonha, a desgraça!

Se em vez de você começar a deslizar a área em $s = -2$ e definir a nova função da área, $B_f = \int_{-2}^x 10dt$, e definir que C será igual a 20, então $B_f(x)$ será assim $10x + 20$. Essa função da área é 20 mais que $A_f(x)$, que começa em $s = 0$, porque se você começar em $s = -2$, você já vai ter deslizado uma área de 20 até a hora que você chegar ao zero. A Figura 14-5 mostra por que $B_f(3)$ é 20 mais que $A_f(3)$.

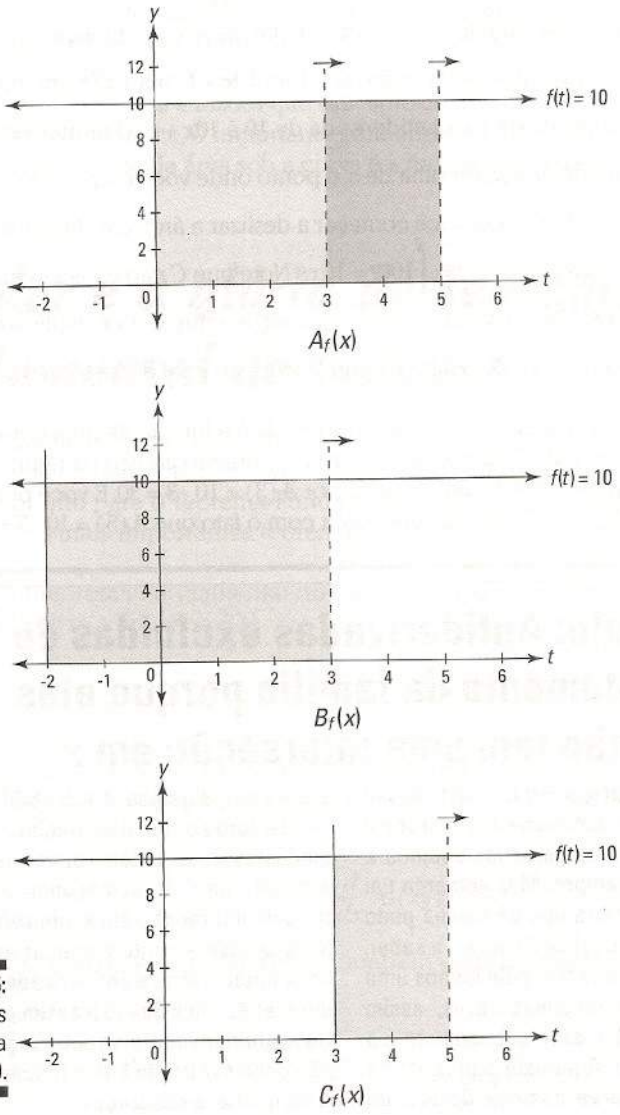

Figura 14-5: Três funções da área para f(t) = 10.

E se você começar a deslizar a área em $s = 3$, a função da área será $C_f = \int_3^x 10dt = 10x - 30$. Essa função é 30 *menos* do que em $A_f(x)$ porque com $C_f(x)$, você perde o retângulo 3 por 10 entre 0 e 3 que $A_f(x)$ tem (veja o último gráfico da Figura 14-5).

A área coberta sob a linha horizontal $f(t) = 10$, de algum número até x, é dada pela antiderivada de 10, a saber, $10x + C$, onde o valor de C

depende de onde você começa a deslizar a área.
Para o próximo exemplo, veja novamente a parábola $x^2 + 1$, nosso amigo do Capítulo 13 e a discussão das somas de Riemann. Volte para a Figura 13-6. Agora você finalmente pode calcular a área exata no gráfico do jeito fácil.

A função da área para deslizar a área sob $x^2 + 1$ é $A_f(x) = \int_s^x (t^2 + 1)$. Pelo Teorema Fundamental, $\frac{d}{dx} A_f(x) = x^2 + 1$, e assim A_f é uma antiderivada de $x^2 + 1$. Qualquer função na forma $\frac{1}{3}x^3 + x + C$ tem uma derivada de $x^2 + 1$ (tente), então essa é a antiderivada. Para essa função da área, assim como o exemplo anterior, quando $s = 0, C = 0$, e assim

$$A_f(x) = \int_0^x (t^2 + 1)\, dt = \frac{1}{3}x^3 + x$$

A área deslizada de 0 até 3 – que nós fizemos do jeito difícil no Capítulo 13 calculando o limite de uma soma de Riemann – é simplesmente $A_f(3)$:

$$A_f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$$

$$A_f(3) = \frac{1}{3}3^3 + 3$$

$$= 9 + 3$$

$$= 12$$

Muito fácil. Esse deu *muito, muito* menos trabalho do que fazer do jeito difícil.

E depois de saber a função da área que começa em zero, $\int_0^x (t^2 + 1)dt = \frac{1}{3}x^3 + x$, fica fácil descobrir a área de outras seções sob a parábola que não começam no zero. Digamos, por exemplo, que você queira a área sob a parábola entre 2 e 3. Você pode calcular a área subtraindo a área entre 0 e 2 da área entre 0 e 3. Você acabou de calcular a área entre 0 e 3 –

Zero nem sempre é zero

Nos dois exemplos f(t) = 10 e f(t) = t^2 + 1, as funções da área que começam em s = 0 têm um valor de 0 para C na antiderivada. Isso é verdade para muitas funções – incluindo todas as funções polinomiais – mas de forma alguma para todas as funções. Para os curiosos, você pode calcular o valor em particular de C dada sua escolha de s igualando a antiderivada a zero, inserindo o valor de s em x, e resolvendo em função de C.

isto é, 12. E a área entre 0 e 2 é $A_f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 = 4^2/_3$. Então a área entre 2 e 3 é $12 - 4^2/_3$., ou $7^1/_3$. Esse método de subtração nos leva para o próximo tópico – a segunda versão do Teorema Fundamental.

O Teorema Fundamental do Cálculo: parte dois

Agora nós finalmente chegamos ao extraordinário atalho do teorema da integração que você vai usar pelo resto dos seus dias – ou pelo menos até o final da sua obrigação com o cálculo. Esse método de atalho é tudo que você precisa para os problemas de integração no Capítulo 16. Mas, primeiro um alerta para ter em mente ao fazer a integração.

Ao usar uma função da área, a primeira versão do Teorema Fundamental do Cálculo ou sua segunda versão, as áreas *abaixo* do eixo x são ditas áreas *negativas*. Veja o Capítulo 13 para mais sobre áreas negativas.

O Teorema Fundamental do Cálculo (versão de atalho): Deixe F ser qualquer antiderivada da função f; assim

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esse teorema lhe dá o maravilhoso atalho para calcular a integral definida como $\int_2^3 (x^2 + 1)dx$, a área sob a parábola $x^2 + 1$ entre 2 e 3. Como eu mostrei no tópico anterior, você pode obter essa área subtraindo a área entre 0 e 2 da área entre 0 e 3, mas para fazer isso você precisa saber que a função da área em particular deslizando a área começando em zero, $\int_0^x (t^2 + 1)\,dt$, é $\frac{1}{3}x^3 + x$ (com C igual a zero).

A beleza do teorema do atalho é que você não tem nem que usar uma função da área como $A_f(x) = \int_0^x (t^2 + 1)dt$. Você apenas acha qualquer antiderivada, $F(x)$, da sua função, e faz a subtração, $F(b) - F(a)$. A antiderivada mais simples para usar é aquela onde $C = 0$. Então aqui está como você usa o teorema pra descobrir a área sob nosso parábola de 2 até 3.

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$ é uma antiderivada de $x^2 + 1$ então, pelo teorema,

$$\int_2^3 (x^2 +)dx = F(3) - F(2)$$

$F(3) - F(2)$ pode ser escrito como $\left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_2^3$, e assim,

$$\int_2^3 (x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_2^3$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 - \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 3\right)$$

$$= 12 - 4^2/_3$$

$$= 7^1/_3$$

Eu concordo, esse é o mesmo cálculo que fiz no tópico anterior usando a função da área com $s = 0$, mas isso é somente porque para a função $x^2 + 1$, onde s é zero, C também é zero. É um tipo de coincidência, e não é verdade para todas as funções. Mas independente da função, o atalho funciona, e você não tem que se preocupar sobre funções da área ou s ou C. Tudo o que você faz é $F(b) - F(a)$.

Aqui está outro exemplo: Qual é a área sob $f(x) = e^x$ entre $x = 3$ e $x = 5$? A derivada de e^x é e^x, então e^x é uma antiderivada de e^x, e assim

$$\int_2^5 e^x\, dx = \left[e^x\right]_3^5$$

$$= e^5 - e^3$$

$$\approx 148.4 - 20.1$$

$$\approx 128.3$$

O que poderia ser mais simples? E se um grande atalho não for o suficiente para fazer o seu dia, a Tabela 14-1 lista alguma regras sobre as integrais definidas que podem fazer sua vida muito mais fácil.

Tabela 14-1 Cinco regras fáceis para integrais definidas

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$ (Bem, é claro – não há área "entre" a e a)

2) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$ (k é uma constante; você pode tirar uma constante da integral)

$$5)\ \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Agora que eu mostrei o atalho, isso não significa que você esteja fora de perigo. Aqui estão três maneiras totalmente diferentes de entender por que a segunda versão do Teorema Fundamental funciona. Isso é coisa difícil – prepare-se.

Por outro lado, você pode pular essas explicações se tudo o que você quer é saber como calcular uma área: esqueça C e apenas subtraia $F(a)$ de $F(b)$. Eu incluo essas explicações porque eu suspeito que algum de vocês esteja doido para aprender matemática extra apenas pelo prazer de aprender – certo? Outros livros apenas dão as regras; eu explico por que elas funcionam e os princípios básicos – é por isso que eles me pagam muito dinheiro.

Na verdade, não pule a terceira explicação, "Por que o teorema funciona: A relação entre integração / diferenciação". É a melhor das três porque mostra a relação ying/yang entre a integração e a diferenciação.

Por que o teorema funciona: 1ª explicação das funções da área

Uma forma de entender o Teorema Fundamental é olhando as funções da área. Como você pode ver na Figura 14-6, a área entre a e b pode ser calculada começando com a área entre s e b, depois subtraindo a área entre s e a. E não importa se você usa o 0 como o lado esquerdo das áreas ou qualquer outro valor de s.

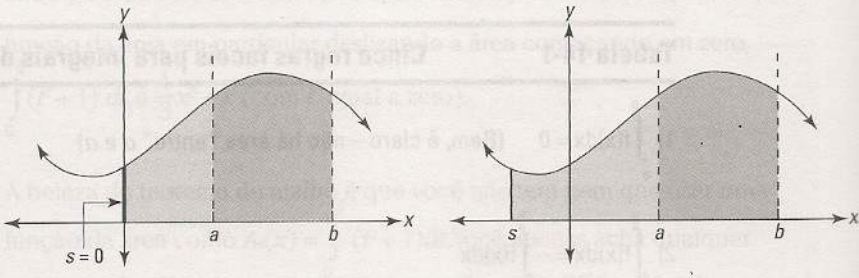

Figura 14-6: Descobrindo a área entre a e b com duas funções da área diferentes.

Funções logarítmicas

E agora – o que todos vocês estavam esperando – as derivadas de funções logarítmicas (Veja o Capítulo 4 se quiser revisar logs). Aqui está a derivada de um log *natural* (ou logaritmo neperiano) – isto é, o log com base *e*:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Se a base do log for um número diferente de *e*, você ajusta essa derivada – assim como funções exponenciais – exceto pelo de você *dividir* pelo log natural da base em vez de multiplicar. Assim,

$$\frac{d}{dx}\log_2 x = \frac{\frac{1}{x}}{\ln 2} = \frac{1}{x \ln 2}, \text{ e}$$

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x \ln 10} \quad \text{(Lembre-se que } \log_{10} x \text{ é escrito sem o 10)}$$

Regras da diferenciação para especialistas – Ah, sim, eu sou um nerd do cálculo.

Agora que você já dominou *totalmente* todas as regras básicas, faça uma pausa e aprecie seu sucesso por um instante... Ok, pronto para um desafio? As regras a seguir, especialmente a regra da cadeia, pode ser difícil. Mas você sabe o que eles dizem: "Quem não arrisca não petisca", "Sem sacrifício, não há recompensa", blá, blá, blá.

A regra do produto

Você usa essa regra para – não perca a calma – o *produto* de duas funções do tipo

$$y = x^3 \cdot \operatorname{sen} x$$

A regra do produto:

Se y = *isso* · *aquilo*,

Então y' = *isso'* · *aquilo* + *isso* · *aquilo'*.

Dê uma olhada em $f(t) = 10$ (veja a Figura 14-7) para tornar essa discussão menos abstrata. Digamos que você queira a área entre 5 e 8 sob a linha horizontal $f(t) = 10$, e você seja forçado a usar o cálculo.

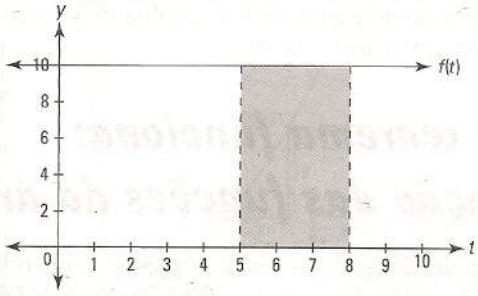

Figura 14-7: A área sombreada é igual a 30 – bem, é claro, é um retângulo 3 por 10.

Dê uma olhada em duas das funções da área para $f(t) = 10$ na Figura 14-5: $A_t(x)$ começando em 0 (no qual $C = 0$) e $B_t(x)$ começando em –2 ($C = 20$):

$$A_t(x) = \int_0^x 10dt = 10x$$

$$B_t(x) = \int_{-2}^x 10dt = 10x + 20$$

Se você usar $A_t(x)$ para calcular a área entre 5 e 8 na Figura 14-7, você obtém o seguinte:

$$\int_5^8 10dt = A_t(8) - A_t(5)$$

$$= 10 \cdot 8 - 10 \cdot 5$$

$$= 80 - 50$$ (80 é a área do retângulo de 0 até 8; 50 é a área do retângulo de 0 até 5)

$$= 30$$

Se, por outro lado, você usa $B_t(x)$ para calcular a mesma área, você obtém o mesmo resultado:

$$\int_5^8 10dt = B_t(8) - B_t(5)$$

$$= 10 \cdot 8 + 20 - (10 \cdot 5 + 20)$$

$$= 80 + 20 - (50 + 20)$$ (isto é 100 – 70, é claro; 100 é a área do retângulo de -2 até 8; 70 é o retângulo de –2 até 5)

$$= 80 + 20 - 50 - 20$$

$$= 80 - 50$$

$$= 30$$

Note que os dois 20 na terceira linha dessa parte de baixo se cancelam. Lembre-se que todas as antiderivadas de $f(t) = 10$ estão na forma $10x +$

C. Apesar do valor de C, ele cancela assim como nesse exemplo. Assim, você pode usar qualquer antiderivada com qualquer valor de C. Por conveniência, todos usam a antiderivada apenas com $C = 0$, então não se meta com C de maneira nenhuma. E a escolha de s (o ponto onde a função da área começa) é irrelevante.

Por que o teorema funciona: 2ª explicação das funções da área

Aqui está outra maneira de ver o que está acontecendo com o Teorema Fundamental quando você subtrai $F(a)$ de $F(b)$. O oposto de $F(a)$ é na verdade o valor de C para a função da área para f que começa em $s = a$. Dê uma olhada em um exemplo: Qual é a área entre 2 e 3 sob $x^2 + 10$?

$$\int_2^3 (x^2 + 10)\,dx = F(3) - F(2)$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + 10x\right]_2^3$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 3^3 + 10\cdot 3 - \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 10\cdot 2\right)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 3^3 + 10\cdot 3 - 22^2/_3$$

Você pode ver que $F(2)$ é $22^2/_3$. Se você usar o oposto disso, $-22^2/_3$, para seu valor de C, você tem a função da área para $x^2 + 10$ que começa a deslizar a área em 2. Em outras palavras,

$$Af(x) = \int_2^x (t^2 + 10)\,dt = \frac{1}{3}x^3 + 10x - 22^2/_3, \text{ e assim}$$
$$Af(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 + 10\cdot 3 - 22^2/_3$$

Isso é idêntico à última linha do cálculo anterior. Assim, encontrar a área entre 2 e 3 subtraindo $F(2)$ de $F(3)$ é matematicamente equivalente a calcular $Af(3)$ para a função da área que começa em $s = 2$.

Por que o teorema funciona: a relação integração / diferenciação

Eu sei, eu sei. Você está perguntando, "Uma terceira explicação?". Ok. Talvez eu tenha ido longe demais com todas essas explicações, mas não pule essa aqui – é a melhor maneira de entender a segunda versão do Teorema Fundamental e por que a integração é o inverso da diferenciação. Aceite o que eu digo – vale a pena o esforço. Considere a Figura 14-8.

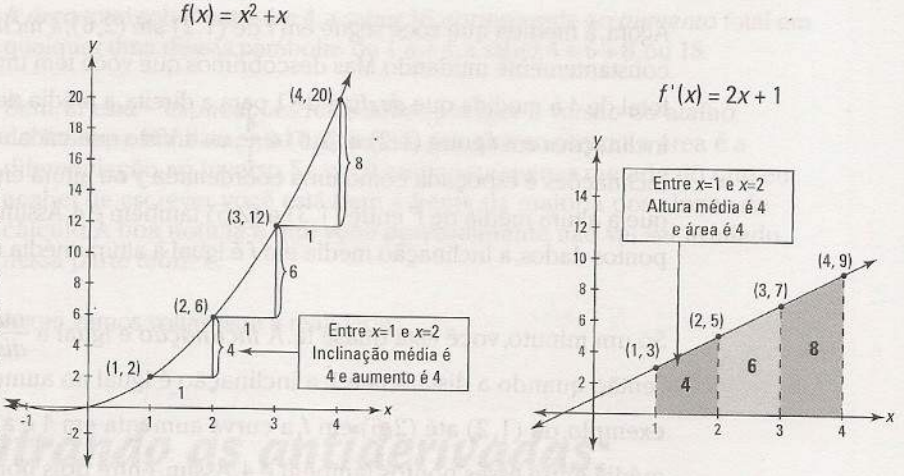

Figura 14-8: A essência da diferenciação e da integração em uma única figura! É um ying/yang.

A Figura 14-8 mostra a função, $x^2 + x$, e sua derivada, $2x + 1$. Olhe com cuidado para os números 4, 6, e 8 em ambos os gráficos. A conexão entre 4, 6, e 8 no gráfico de f – que são os valores de *aumento* entre os pontos subseqüentes na curva – e 4, 6, e 8 no gráfico de f' – que são as *áreas* dos trapézios sob f' – mostra uma relação íntima entre a integração e a diferenciação. A Figura 14-8 é provavelmente a figura mais importante nesse livro. É uma figura que vale por mil símbolos e equações, envolvendo a essência da integração em uma única fotografia. Ela mostra como a segunda versão do Teorema Fundamental funciona porque ela mostra que a área sob $2x + 1$ entre 1 e 4 é igual ao *aumento* total de f entre (1,2) e (4,20), em outras palavras que

$$\int_1^4 f'(x)\,dx = f(4) - f(1)$$

Note que eu chamei as duas funções na Figura 14-8 e na equação f acima e em f' para enfatizar que $2x + 1$ é a *derivada* de $x^2 + x$. Eu poderia ter chamado $x^2 + x$ de F e chamado $2x + 1$ de f, o que enfatizaria que $x^2 + x$ é uma *antiderivada* de $2x + 1$. Nesse caso você escreveria a equação da área anterior na forma padrão,

$$\int_1^4 f(x)\,dx = F(4) - F(1)$$

Qualquer uma das duas maneiras, o significado é o mesmo. Eu uso a versão da derivada para mostrar que encontrar a área é a diferenciação ao contrário. Indo da esquerda para a direita na Figura 14-8 você tem a diferenciação: As alturas em f' lhe dão as inclinações de f. Indo da direita para a esquerda você tem a integração: A mudança entre duas alturas em f lhe dá uma área sob f'.

Ok. Aqui está como funciona. Imagine que você esteja subindo ao longo de f de (1,2) até (2,6). Cada ponto ao longo do caminho tem certo declive, uma inclinação. Essa inclinação é esboçada como a coordenada y, ou altura, no gráfico de f'. O fato de f' subir de (1,3) até (2,5) diz a você que a inclinação de f sobe de 3 para 5 à medida que você viaja entre (1,2) e (2, 6). Isso tudo vem da diferenciação básica.

Agora, à medida que você segue em f de $(1,2)$ até $(2,6)$, a inclinação está constantemente mudando. Mas descobrimos que você tem um *aumento* total de 4 à medida que *desliza* de 1 para a direita, a média de todas as inclinações em f entre $(1,2)$ e $(2,6)$ é $\frac{4}{1}$, ou 4. Visto que cada uma dessas inclinações é esboçada como uma coordenada y ou altura em f', segue que a altura média de f' entre $(1,3)$ e $(2,5)$ também é 4. Assim, entre dois pontos dados, a inclinação média em f é igual à altura média em f'.

Só um minuto, você está quase lá. A *inclinação* é igual a $\frac{aumento}{distância}$, então quando a distância é 1, a inclinação é igual ao aumento. Por exemplo, de $(1,2)$ até $(2,6)$ em f, a curva aumenta em 4 e a inclinação média entre esses pontos também é 4. Assim, entre dois pontos dados em f, a inclinação média *é* o aumento.

A área de um trapézio como os da direta na Figura 14-8 é igual à largura vezes a sua altura média (Isso é verdade sobre qualquer outra forma semelhante que tenha uma base parecida com um retângulo; o topo pode ser qualquer linha deformada ou qualquer curva que você quiser). Então, devido ao fato de a largura de cada trapézio ser 1, e porque qualquer coisa vezes 1 é ela mesma, a altura média de cada trapézio sob f' é a sua área; por exemplo, a área desse primeiro trapézio é 4 e sua altura média também é 4.

Você está pronto para o grand finale? Aqui está o argumento completo em poucas palavras. Em f, *aumento = inclinação média*; indo de f até f', *inclinação média = altura média*; em f', *altura média = área*. Então isso lhe dá *aumento = inclinação = altura = área*, e assim, finalmente, *aumento = área*. E isso é o que a segunda versão do Teorema Fundamental diz:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

Área = aumento

Muito fácil, não é? (Isso é apenas um palpite, mas para a eventualidade de você achar isso não muito claro, eu acho que não vai fazer muita diferença para você que eu esteja satisfeito com o que acabei de escrever). Deixando as brincadeiras de lado, isso é inevitavelmente difícil. Você talvez tenha que ler duas ou três vezes para realmente entender.

Note que não faz diferença para a relação entre a inclinação e a área se você usar qualquer outra função na forma $x^2 + x + C$ em vez de $x^2 + x$. Qualquer parábola do tipo $x^2 + x + 10$ ou $x^2 + x + 5$ é exatamente da mesma forma que $x^2 + x$ – ela acabou de ser deslizada para cima ou para baixo verticalmente. Qualquer parábola desse tipo aumenta entre $x = 1$ e $x = 4$ da mesma forma que a parábola na Figura 14-8. De 1 até 2 essas parábolas correm 1 e sobem 4. De 2 para 3 elas correm 1 sobem 6, e assim por diante. É por isso que qualquer antiderivada pode ser usada para encontrar a área.

A *área* total sob f' entre 1 e 4, a saber, 18, corresponde ao *aumento* total em qualquer uma dessas parábolas de 1 até 4, a saber, 4 + 6 + 8, ou 18.

Bem, aí está – explicações reais sobre por que a versão do atalho do Teorema Fundamental funciona e por que encontrar a área é a diferenciação ao inverso. Se você entendeu apenas metade do que eu acabei de escrever, você está bem a frente da maioria dos alunos de cálculo. A boa notícia é que você provavelmente não vai ser avaliado nessa parte teórica.

Agora vamos voltar para a realidade.

Encontrando as antiderivadas: três técnicas básicas

Eu venho falando um bocado sobre as antiderivadas, mas como é que você as encontra? Nesse tópico, eu mostro a você três técnicas básicas. Depois, no Capítulo 15, eu mostro quatro técnicas avançadas. Se você está curioso, você *vai* ser avaliado nisso.

Regras inversas para as antiderivadas

As regras de antiderivadas mais fáceis são aquelas que são o inverso das regras das derivadas que você já sabe (Você pode revisar as regras das derivadas no Capítulo 10 se precisar). Essas são automáticas, antiderivadas com apenas um passo, com exceção da regra da potência ao inverso que é a única mais ou menos difícil.

Regras inversas óbvias

Você sabe que a derivada do sen$x$ é o cos$x$, então invertendo isso você tem que a antiderivada do cos$x$ é o sen$x$. O que poderia ser mais simples? Mas não esqueça que todas as funções da forma sen$x$ + C são antiderivadas do cos$x$. Em símbolos, você escreve

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = \cos x, \text{ e conseqüentemente}$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen}x + C$$

Tabela 14-2 lista as regras inversas para as antiderivadas.

Tabela 14-2 Basic Atiderivative Formulas

1) $\int dx = x + C$	2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$
3) $\int e^x dx = e^x + C$	4) $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$
5) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$	
6) $\int \text{sen}x\, dx = -\cos x + C$	7) $\int \cos x\, dx = \text{sen}x + C$
8) $\int \sec^2 x\, dx = \text{tg}x + C$	9) $\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\text{cotg}x + C$
10) $\int \sec x\, \text{tg}x\, dx = \sec x + C$	11) $\int \text{cosec}x\, \text{cotg}x\, dx = -\text{cosec}x + C$
12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arcsen}\frac{x}{a} + C$	13) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C$
14) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\text{arcsen}\frac{\lvert x \rvert}{a} + C$	

A mais ou menos difícil regra inversa da potência

Pela regra da potência, você sabe que

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \text{ e conseqüentemente}$$

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

Aqui está o método simples para inverter a regra da potência. Use $5x^4$ para sua função. Lembre que a regra da potência diz para:

1. **Trazer a potência para frente onde vai *multiplicar* o resto da derivada.**
   $5x^4 \rightarrow 4 \cdot 5x^4$

2. **Reduzir a potência em 1 e simplificar.**
   $4 \cdot 5x^4 \rightarrow 4 \cdot 5x^3 = 20x^3$

Para inverter o processo, você inverte a ordem dos dois passos e inverte a conta dentro de cada passo. Aqui está como isso funciona para o problema anterior:

1. ***Aumente* a potência em um.**
   O 3 se torna um 4.
   $20x^3 \rightarrow 20x^4$

2. ***Divida* pela nova potência e simplifique.**
   $20x^4 \rightarrow \frac{20}{4}x^4 = 5x^4$

E assim você escreve $\int 20x^3\,dx = 5x^4 + C$.

Sobretudo quando você é novo em antidiferenciação, é uma boa idéia verificar as suas antiderivadas fazendo a diferenciação delas – você pode ignorar o C. Se você voltar para a sua função original, você sabe que sua antiderivada está correta.

Com a antiderivada encontrada e a segunda versão do Teorema Fundamental, você pode determinar a área sob $20x^3$ entre, digamos, 1 e 2:

$$\int 20x^3\,dx = 5x^4 + C \text{, assim}$$

$$\int_1^2 20x^3\,dx = \left[5x^4\right]_1^2$$

$$= 5 \cdot 2^4 - 5 \cdot 1^4$$

$$= 80 - 5$$

$$= 75$$

Adivinhando e verificando

O método de adivinhar e verificar funciona quando o *integrando* – isto é, a coisa que você quer antidiferenciar (a expressão depois do símbolo da integral não contando o dx) – está perto de uma função da qual você conhece a regra inversa. Por exemplo, digamos que você queira a antiderivada de $\cos(2x)$. Bem, você sabe que a derivada do seno é o cosseno. Invertendo isso você tem que a antiderivada do cosseno é o seno. Então você talvez pense que a antiderivada do $\cos(2x)$ é $\text{sen}(2x)$. Esse é o seu *palpite*. Agora *verifique* isso fazendo a diferenciação para ver se você obteve a função original, $\cos(2x)$:

$$\frac{d}{dx}\text{sen}(2x)$$

$$= \cos(2x) \cdot 2 \quad \text{(regra do seno e regra da cadeia)}$$

$$= 2\cos(2x)$$

Esse resultado é muito perto da função original, exceto pelo coeficiente extra de 2. Em outras palavras, a resposta é 2 vezes tanto quanto o que você quiser.

Pelo fato de você querer um resultado que é metade desse, tente apenas uma

antiderivada que é metade do seu primeiro palpite: $\frac{1}{2}\text{sen}(2x)$. Verifique esse segundo palpite diferenciando-o, e você obterá o resultado desejado.

Aqui está outro exemplo. Qual é a antiderivada de $(3x-2)^4$?

1. Adivinhe a antiderivada.

Esse parece um problema sobre a regra da potência, então tente a regra inversa da potência. A antiderivada de x^4 é $\frac{1}{5}x^5$ pela regra inversa da potência, então seu palpite é $\frac{1}{5}(3x-2)^5$.

2. Verifique o seu palpite fazendo a diferenciação dele.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{5}(3x-2)^5\right]$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{5}(3x-2)^4 \cdot 3 \qquad \text{(regra da potência e regra da cadeia)}$$

$$= 3(3x-2)^4$$

3. Ajuste o seu primeiro palpite.

Seu resultado, $3(3x-2)^4$, é três vezes mais do que o suficiente, então dê o seu segundo palpite um terço do seu primeiro palpite – isto é $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}(3x-2)^5$, ou $\frac{1}{15}(3x-2)^5$.

4. Verifique o seu segundo palpite fazendo a diferenciação dele.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{15}(3x-2)^5\right]$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{15}(3x-2)^4 \cdot 3 \qquad \text{(regra da potência e regra da cadeia)}$$

$$= (3x-2)^4$$

Está certo. Você terminou. A antiderivada de $(3x-2)^4$ é $\frac{1}{15}(3x-2)^5 + C$.

Os dois exemplos anteriores mostram que *adivinhar* e *verificar* funciona bem quando a função que você quer antidiferenciar tem um argumento do tipo $3x$ ou $3x+2$ (onde x é elevado a *primeira* potência) em vez de um x simples (Lembre-se que em uma função como $\sqrt{5x}$, o $5x$ é chamado de *argumento*). Nesse caso, tudo o que você tem que fazer é ajustar o seu palpite pelo *recíproco* do coeficiente de x – o 3 em $3x+2$, por exemplo (o 2 em $3x+$

2 não afeta a sua resposta). Na verdade, para esses problemas fáceis, você não tem que realmente fazer qualquer adivinhação e verificação. Você pode ver imediatamente como ajustar o seu palpite. Ele se torna um tipo de processo de um passo. Se o argumento da função for mais complicado do que $3x + 2$ – como o x^2 em $\cos(x^2)$ – você tem que tentar o próximo método, a substituição.

O método da substituição

Se você voltar a olhar os exemplos sobre o método de adivinhar e verificar no tópico anterior, você poderá ver por que o primeiro palpite em cada caso não funcionou. Quando você diferencia o primeiro palpite, a regra da cadeia produz uma constante extra: 2 no primeiro exemplo, 3 no segundo. Você então ajusta os palpites com $^1/_2$ e $^1/_3$ para recompensar pela constante extra.

Agora digamos que você queira a antiderivada do $\cos(x^2)$ e você palpite que é $\text{sen}(x^2)$. Veja o que acontece quando você diferencia o $\text{sen}(x^2)$ para verificá-lo.

$$\frac{d}{dx}\text{sen}(x^2)$$

$$\text{con}(x^2) \cdot 2x \qquad \text{(regra do seno e regra da cadeia)}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

Aqui a regra da cadeia produz um $2x$ extra – porque a derivada de x^2 é $2x$ – mas se você tentar recompensar isso anexando um $\frac{1}{2x}$ ao seu palpite, não irá funcionar. Tente.

Então, adivinhando e palpitando não funciona para a antidiferenciar o $\cos(x^2)$ – na verdade *nenhum* método funciona para esse integrando de aparência simples (nem todas as funções têm antiderivadas) – mas seu admirável empenho na diferenciação aqui revela uma nova classe de funções que você pode antidiferenciar. Visto que a derivada do $\text{sen}(x^2)$ é $2x\cos(x^2)$, a antiderivada de $2x\cos(x^2)$ deve ser $\text{sen}(x^2)$. Essa função, $2x\cos(x^2)$, é o tipo de função que você pode antidiferenciar com o método da substituição.

O método da substituição funciona quando o integrando contém uma função e a *derivada do argumento da função* – em outras palavras, quando ele contém aquela coisa extra produzida pela regra da cadeia – ou alguma coisa parecida com isso exceto pela constante. E o integrando não deve conter mais nada.

A derivada de e^{x^3} é $e^{x^3} \cdot 3x^2$ pela regra do e^x e pela regra da cadeia. Então, a antiderivada de $e^{x^3} \cdot 3x^2$ é e^{x^3}. E se pedisseem para você achar a antiderivada de $e^{x^3} \cdot 3x^2$, você saberia que o método da substituição funcionaria porque essa expressão contém $3x^2$, que é a derivada do argumento de e^{x^3}, a saber, x^3.

A esta altura, você está provavelmente se perguntando por que isso é chamado de método da substituição. Eu mostro a você o porquê no método passo a passo abaixo. Mas primeiro, eu quero mostrar que você nem sempre tem que usar o método passo a passo. Supondo que você entenda por que a antiderivada de $e^{x^3} \cdot 3x^2$ é e^{x^3}, você pode se deparar com problemas onde você pode apenas ver a antiderivada sem ter nenhum trabalho. Mas se você pode ou não apenas ver as respostas para problemas como o anterior, o método da substituição é uma boa técnica para aprender porque, por um lado, ele tem muita utilidade em cálculo e em outras áreas da matemática, e por outro, seu professor pode exigir que você o saiba e o use. Ok. Aqui está como encontrar a antiderivada de $\int 2x\cos(x^2)\,dx$ com a substituição.

1. **Iguale *u* ao argumento da função principal.**
   O argumento do $\cos(x^2)$ é x^2, então você iguala x^2 a u.

2. **Ache a derivada de *u* em relação à *x*.**
   $u = x^2$ ou $\frac{du}{dx} = 2x$

3. **Resolva em função de *dx*.**
   $\frac{du}{dx} = \frac{2x}{1}$
   $du = 2x\,dx$ (multiplicação cruzada)
   $\frac{du}{2x} = dx$ (divida ambos os lados por $2x$)

4. **Faça as substituições.**
   Em $\int 2x\cos(x^2)dx$, u toma o lugar de x^2 e $\frac{du}{2x}$ toma o lugar de dx. Então agora você tem $\int 2x\cos u\frac{du}{2x}$. Os dois $2x$ se cancelam, dando $\int 2x\cos u\,du$.

5. **Faça a antidiferenciação usando a regra inversa simples.**
   $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

6. **Coloque x^2 de volta no lugar de *u* – fazendo o ciclo completo.**
   u é igual a x^2, então x^2 entra no lugar de u:
   $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u\,(x^2) + C$
   É isso. Então $\int 2x\cos(x^2)\,dx = \operatorname{sen}(x^2) + C$.

Se o problema original tivesse sido $\int 5x\cos(x^2)\,dx$ em vez de $\int 2x\cos(x^2)\,dx$, você seguiria os mesmos passos exceto o passo 4, depois de fazer a substituição, você chega em $\int 5x\cos u\,\frac{du}{2x}$. Os x ainda se cancelam – essa é a coisa importante – mas depois de cancelar você tem $\int \frac{5}{2}\cos u\,du$, que tem um $\frac{5}{2}$ extra. Não se preocupe. Apenas puxe o $\frac{5}{2}$ através do símbolo $\int$, lhe dando $\frac{5}{2}\int \cos u\,du$. Agora você termina esse problema assim

Assim, para $y = x^3 \cdot \sin x$,

$$y' = (x^3)' \cdot \text{sen} + x^3 \cdot (\text{sen}x)$$

$$= 3x^2 \text{sen}x + x^3 \cos x$$

A regra do quociente

Eu tenho a sensação que você pode adivinhar para que serve essa regra – o *quociente* de duas funções do tipo

$$y = \frac{\text{sen}x}{x^4}$$

A regra do quociente:

$$\text{Se } y = \frac{topo}{base},$$
$$\text{então } y' = \frac{topo' \cdot base - topo \cdot base'}{base^2}.$$

Quase todos os livros de cálculo que eu já vi dão essa regra em uma forma um pouco diferente que é mais difícil de lembrar. E alguns livros fornecem um "mnemônico" que envolve as palavras *lodeehi* e *hideelo* ou *hodeehi* e *hideeho*, que é muito fácil se confundir – ótimo, muito obrigado.

Decore a regra do quociente da maneira que eu a escrevi. Você não vai ter problema em se lembrar do que vai no denominador – ninguém nunca esquece isso. O truque é saber a ordem dos termos no numerador. Pense nisso dessa maneira. Você está fazendo a derivada, então a primeira coisa a fazer é achar a derivada. E é mais natural começar no topo ou na base da fração? No topo, é claro. Assim, a regra do quociente começa com a derivada do topo. Se você se lembrar disso, o resto do numerador é quase automático. Concentre-se nesses pontos e você vai se lembrar da regra do quociente daqui a dez anos – ah, é claro.

Então, aqui está a derivada de $y = \frac{\text{sen}x}{x^4}$:

$$y = \frac{(\text{sen}x)' \cdot x^4 - \text{sen}x \cdot (x^4)'}{(x^4)^2}$$

$$= \frac{x^4 \cos x - 4x^3 \text{sen}x}{x^8}$$

$$= \frac{x^3 (x\cos x - 4\text{sen}x)}{x^8}$$

$$= \frac{x\cos x - 4\text{sen}x}{x^5}$$

como fez acima nos passos 5 e 6, exceto pelo $\frac{5}{2}$ extra.

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}\int \cos u\,du &= \frac{5}{2}(\operatorname{sen}u + C)\\ &= \frac{5}{2}\operatorname{sen}u + \frac{5}{2}C\\ &= \frac{5}{2}\operatorname{sen}(x^2) + \frac{5}{2}C\end{aligned}$$

Pelo fato de C ser qualquer velha constante, $\frac{5}{2}C$ ainda é qualquer velha constante, então você pode se livrar do $\frac{5}{2}$ na frente de C. Isso pode parecer um tanto (excessivamente?) não matemático, mas está certo. Assim, a sua resposta final é $\frac{5}{2}\operatorname{sen}(x^2) + C$. Você deve verificar a sua resposta usando a diferenciação.

Aqui estão uns poucos exemplos de antiderivadas que você pode fazer com o método da substituição de modo que você possa aprender como distingui-los.

- $\int 4x^2\cos(x^3)dx$

  A derivada de x^3 é $3x^2$, mas você não tem que prestar nenhuma atenção ao 3 em $3x^2$ ou ao 4 no integrando. Pelo fato de o integrando conter x^2 e não conter qualquer outra coisa extra, a substituição funciona. Tente.

- $\int 10\sec^2 x \cdot e^{\operatorname{tg}x}\,dx$

  O integrando contém uma função, $e^{\operatorname{tg}x}$, e a derivada do seu argumento, $\operatorname{tg}x$ – que é $\sec^2 x$. Pelo fato de o integrando não conter qualquer outra coisa extra (exceto pelo 10, que não importa), a substituição funciona. Faça.

- $\int \frac{2}{3}\cos x\sqrt{\operatorname{sen}x}\,dx$

  Pelo fato de o integrando conter a derivada do $\operatorname{sen}x$, a saber, $\cos x$, e nenhuma outra coisa exceto pelo $^2/_3$, a substituição funciona. Vai nessa.

Ei, eu acabei de ter uma grande idéia (Isso mesmo. Eu ainda estou aprendendo). Você pode fazer os três problemas listados com um método que combina a substituição e o método da adivinhação e da verificação (desde que seu professor não insista para você mostrar os seis passos da solução da substituição). Tente usar esse método de combinação para antidiferenciar o primeiro exemplo, $\int 4x^2\cos(x^3)dx$. Primeiramente, você confirma que a integral se enquadra no padrão para a substituição – ela se enquadra, como mostrado no primeiro item da lista. Essa confirmação é a única parte que a substituição faz no método da combinação. Agora você termina o problema com o método da adivinhação e da verificação.

1. Dê o seu palpite.

A antiderivada do cosseno é o seno, então um bom palpite para a antiderivada de $4x^2\cos(x^3)$ é $\text{sen}(x^3)$. Dê o seu palpite.

2. Verifique o seu palpite fazendo a diferenciação dele.

$$\frac{d}{dx}\text{sen}(x^3) = \cos(x^3) \cdot 3x^2 \text{ (regra do seno e regra da cadeia)}$$

$$= 3x^2\cos(x^3)$$

3. Ajuste o seu palpite.

Seu resultado do passo 2, $3x^2(x^3)$, é $^3/_4$ do que você quer, $4x^2\cos(x^3)$, então dê o seu palpite é $^4/_3$ maior (note que $^4/_3$ é o recíproco de $^3/_4$). Seu segundo palpite é assim $\frac{4}{3}\text{sen}(x^3)$.

4. Verifique esse segundo palpite fazendo a diferenciação dele.

Ah, droga, pule isso – sua resposta tem que funcionar.

Encontrando a área com problemas de substituição

Você pode usar o Teorema Fundamental para calcular a área sob uma função que você integra com o método da substituição. Você pode fazer isso de duas maneiras. No tópico anterior, eu uso a substituição, colocando u igual a x^2, para encontrar a antiderivada doe $2x\cos(x^2)$.

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \text{sen}(x^2) + C$$

Se você quer a área sob essa curva de, digamos, ½ até 1, o Teorema Fundamental faz a mágica:

$$\int_{1/2}^{1} 2x\cos(x^2)\,dx = \left[\text{sen}(x^2)\right]_{1/2}^{1}$$

$$= \text{sen}(1^2) - \text{sen}\left(({}^1/_2)^2\right)$$

$$= \text{sen } 1 - \text{sen } ({}^1/_4)$$

$$\approx 0.841 - 0.247$$

$$\approx 0.594$$

Outro método, que corresponde à mesma coisa, é mudar os limites da integração e fazer o problema todo em relação a u. Consulte a solução de seis passos no tópico "O método da substituição". O que vem a seguir é muito semelhante, exceto que dessa vez você está fazendo a integração

definida no lugar da integração indefinida. De novo, você quer a área dada por $\int_{1/2}^{1} 2x\cos(x^2)\,dx$.

1. Iguale u ao x^2.

2. Ache a derivada de u em relação à x.

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

3. Resolva em função de dx.

$$dx = \frac{du}{2x}$$

4. Determine os novos limites da integração.

$u = x^2$ então quando $x = \frac{1}{2}, u = \frac{1}{4}$

e quando $x = 1, u = 1$

5. Faça as substituições, incluindo os novos limites da integração, e cancele os dois $2x$.

Neste problema somente um dos limites é novo porque quando x=1, u=1

$$\int_{1/2}^{1} 2x\cos(x^2)\,dx$$
$$= \int_{1/4}^{1} 2x\cos u \frac{du}{2x}$$
$$= \int_{1/4}^{1} \cos u\,du$$

6. Use a antiderivada e o Teorema Fundamental para obter a área desejada sem ter que voltar para x^2.

$$\int_{1/4}^{1} \cos u du = [\text{senu}]_{1/4}^{1}$$
$$= \text{sen } 1 - \text{sen}\frac{1}{4}$$
$$\approx 0.594$$

É um caso de seis de um, meia dúzia de outro com os dois métodos. Ambos exigem a mesma quantidade de trabalho. Faça a sua escolha.

Capítulo 15

Técnicas de integração para especialistas

Neste capítulo

- Decompondo as integrais em partes
- Encontrando integrais trigonométricas
- Voltando às origens com *SohCahToa*
- Entendendo os *As*, *Bs*, e *Cxs* das frações parciais
- *LIATE*: Logarítmicas, inversas de trigonométricas, algébricas, trigonométricas, exponenciais

Eu imagino que não doeria lhe dar uma folga do tipo de fundamentação teórica que eu apresentei de forma bem pesada no Capítulo 14, então esse capítulo vai direto ao ponto e mostra apenas os detalhes práticos de muitas técnicas de integração. Você viu três métodos básicos de integração no Capítulo 14: as regras inversas, o método de adivinhar e verificar, e a substituição. Agora você vai se qualificar em quatro técnicas avançadas: integração por partes, integrais trigonométricas, substituição trigonométrica e frações parciais. Você está pronto?

Integração por partes: dividir para conquistas

Integrando por partes é a versão da integração da regra do produto para a diferenciação. Leve o que eu digo em consideração. A idéia básica da integração por partes é transformar uma integral que você *não pode* fazer em um simples produto menos a integral que você *pode* fazer. Aqui está a fórmula:

Integração por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

Não tente entender isso agora. Espere pelos exemplos a seguir.

Note que u e v estão em ordem alfabética em $\int udv$ e uv. Se você se lembrar disso, você pode facilmente lembrar que a integral a direita é justamente igual à integral da esquerda, exceto com o u e v ao inverso.

Aqui está o método em poucas palavras. O que é $\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx$? Primeiramente, você tem que separar o integrando em um u e um dv para que se enquadre na fórmula. Para esse problema, escolha $\ln(x)$ para ser

seu u. Assim todo o resto é o dv, a saber, $\sqrt{x}\,dx$ (Eu mostro a você como escolher o u no próximo tópico – é muito fácil). Depois, você diferencia u para obter o seu Du, e você integra o dv para obter o seu v. Por fim, você insere tudo na fórmula e você terminou o problema.

Para ajudar tudo a ficar certinho, organize os problemas envolvendo a integração por partes com um quadrado como a da Figura 15-1. Desenhe um quadrado 2 por 2 vazio, depois coloque o seu u, $\ln(x)$, no canto superior esquerdo, e o seu dv, $\sqrt{x}\,dx$, no canto inferior direito. Veja a Figura 15-2.

u	v
du	dv

Figura 15-1: A integração por partes em um quadrado.

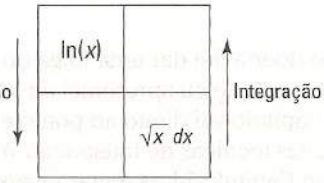

Figura 15-2: Preenchendo o quadrado.

As setas na Figura 15-2 lembram a você de diferenciar à esquerda e a integrar à direita. Pense na diferenciação – a coisa mais fácil – como indo para baixo (como descendo uma colina), e a integração – a coisa mais difícil – como indo para cima (como subindo uma colina).

Agora complete o quadrado:

$$u = \ln(x) \qquad dv = \sqrt{x}\,dx$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \int dv = \int \sqrt{x}\,dx$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{2}{3}x^{3/2} \text{ (regra inversa da potência)}$$

A Figura 15-3 mostra o quadrado completo.

Uma boa maneira de lembrar a fórmula da integração por partes é começar do quadrado superior esquerdo e desenhar um número 7 imaginário – através, depois para baixo à esquerda. Veja a Figura 15-4.

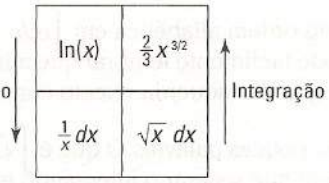

Figura 15-3: O quadrado completo para $\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx$.

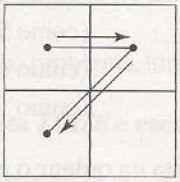

Figura 15-4: Um quadrado com um 7 nele. Quem disse que o cálculo é um bicho-de-sete-cabeças?

Para lembrar como você desenha o 7, olhe de volta para a Figura 15-3. A fórmula da integração por partes diz para você fazer a parte de cima do número 7, a saber, $\ln(x) \cdot \frac{2}{3}x^{3/2}$ menos a integral da parte diagonal do número 7, $\int \frac{2}{3}x^{3/2} \cdot \frac{1}{x}dx$. A propósito, isso é *muito* mais fácil de fazer do que de explicar. Tente. Você vai ver como esse esquema lhe ajuda a aprender a fórmula e a organizar esses problemas.

Pronto para terminar? Insira tudo na fórmula:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx = \ln(x) \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} - \int \frac{2}{3}x^{3/2} \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{2}{3}\int x^{1/2} \cdot dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + C\right) \text{(regra inversa da potência)}$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} - \frac{2}{3}C$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} + C$$

No último passo, você substitui o $-\frac{2}{3}C$ pelo C porque $-\frac{2}{3}$ vezes qualquer número continua sendo qualquer número.

Escolhendo o seu u

Aqui está um ótimo mnemônico para como escolher o u (de novo, uma vez selecionado o u, tudo o mais é automaticamente o dv).

Herbert E. Kasube propôs o anagrama *LIATE* para ajudar você a escolher o u (nerds do cálculo podem dar uma olhada no artigo de Herb na *American Mathematical Monthly* 90, edição de 1983):

L	Logarítmicas	(como $\log(x)$)
I	Inversas de trigonométricas	(como $arctan(x)$)
A	Algébricas	(como $5x^2 + 3$)
T	Trigonométricas	(como $\cos(x)$)
E	Exponenciais	(como 10^x)

Para escolher o seu u, siga essa lista na ordem; o primeiro tipo de função nessa lista que aparece no integrando é o u.

Aqui estão algumas dicas úteis para lembrar o anagrama *LIATE*. O que você acha de *L*ulu *I*gnorava *A*mar *T*iago *E*ternamente? Ou talvez você prefira *L*illiputs *I*ndianos *A*rmavam *T*rair *E*duardo, ou *L*úcia *I*dealizava *A* *T*ropa *E*stelar. Essa última não é muito boa porque também pode ser *A* *T*ropa *E*stelar *I*dealizava *L*úcia. Por Deus! O que eu fiz? Agora você nunca vai se lembrar!

Bem, o que você acha de tentar um exemplo? Integre $\int arctan(x)dx$. Note que algumas vezes a integração por partes funciona para integrandos como esses que contém apenas uma única função.

1. Siga a lista *LIATE* e escolha o *u*.

Você pode ver que não há funções logarítmicas no $arctan(x)dx$, mas há uma função trigonométrica inversa, $arctg(x)dx$. Então esse é o seu u. Todo o resto é o seu dv, a saber, o simples dx.

2. Faça o esquema do quadrado.

Veja a Figura 15-5.

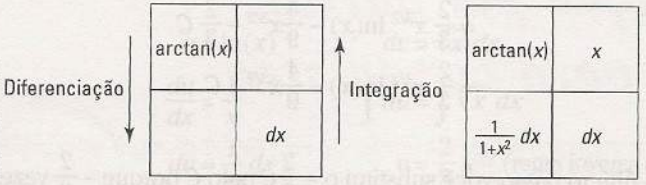

Figura 15-5: O esquema do quadrado.

3. Insira tudo na fórmula da integração por partes ou apenas desenhe o número 7 imaginário no quadrado da direita na Figura 15-5.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int arctan(x)dx = x\,arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Agora você pode terminar o problema integrando $\int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$ com o método da substituição, definindo $u = 1 + x^2$. Tente (veja o Capítulo 14 para mais sobre o método da substituição). Note que o u em $u = 1 + x^2$ não tem

nada a ver com a integração por partes de u. Sua resposta final deve ser $\int arctan(x)dx = x\,arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

Aqui está outro problema. Integre $\int x\,sen(3x)dx$.

1. Siga a lista *LIATE* e escolha o *u*.

Seguindo a lista *LIATE*, o primeiro tipo de função que você encontra em $x\,sin(3x)dx$ é uma função algébrica muito simples, a saber, x, então esse é o seu u.

2. Faça o esquema do quadrado.

Veja a Figura 15-6.

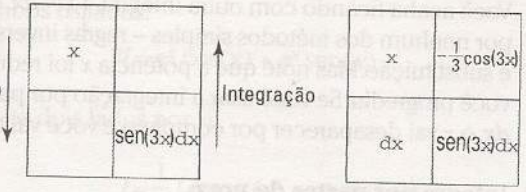

Figura 15-6: Ainda mais quadrados.

Insira tudo na fórmula da integração por partes ou apenas desenhe o número 7 imaginário no quadrado da direita na Figura 15-6.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xsen(3x)dx = -\frac{1}{3}x\cos(3x) - \int -\frac{1}{3}\cos(3x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\,dx$$

Você pode integrar facilmente $\int \cos(3x)\,dx$ com o método da substituição ou da adivinhação e da verificação. Faça. Sua resposta final deve ser $-\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{9}\,sen(3x) + C$.

Integração por partes: segunda vez, igual à primeira

De vez em quando você tem que usar o método da integração por partes mais de uma vez porque a primeira vez apenas o leva a apenas um pedaço da resposta. Aqui está um exemplo. Encontre $\int x^2 e^x\,dx$.

1. Siga a lista *LIATE* e escolha o *u*.

$x^2 e^x\,dx$ contém uma função algébrica, x^2, e uma função exponencial, e^x (é uma função *exponencial* porque há um x no expoente). O primeiro na lista *LIATE* é x^2, então esse é o seu u.

2. Faça o esquema do quadrado.

Veja a Figura 15-7.

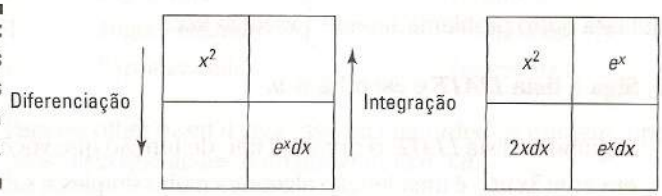

Figura 15-7: Os quadrados para $\int x^2 e^x dx$.

3. Use a fórmula da integração por partes – ou o mnemônico "7".

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x dx$$
$$= x^2 e^x - 2\int x e^x x dx$$

Você acaba ficando com outra integral, $\int x e^x dx$, que não pode ser feita por nenhum dos métodos simples – regras inversas, adivinhar e verificar, e substituição. Mas note que a potência x foi reduzida em um, então você progrediu. Se você usar a integração por partes de novo para $\int x e^x dx$, o x vai desaparecer por completo e você vai ter terminado.

4. Integre por partes de novo.

Eu vou dizer para você fazer isso sozinho.

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$
$$= x e^x - e^x + C$$

5. Pegue o resultado do passo 4 e o substitua pelo da resposta do passo 3 para produzir todo o problema.

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + C)$$
$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2C$$
$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

Andando em círculos

Às vezes se você usar a integração por partes duas vezes, você voltará para onde começou – que, ao contrário de se perder, *não* é uma perda de tempo. Integre $\int e^x \cos(x)\, dx$ e entenda.

Seu u é $\cos(x)$ (é o T em *LIATE*), e $e^x dx$ é o seu dv. Agora avance rapidamente para o passo da fórmula:

$$\int e^x (\cos x) dx = e^x \cos(x) - \int e^x \left(-\operatorname{sen}(x)\right) dx$$
$$= e^x \cos(x) + \int e^x \operatorname{sen}(x)\, dx$$

Integrando por partes $\int e^x \operatorname{sen}(x)\, dx$ de novo, você tem

No tópico "Achando a derivada de funções trigonométricas", eu prometi mostrar a você como encontrar a derivada de quatro funções trigonométricas – *tangente*, *cotangente*, *secante* e *co-secante* – com a regra do quociente. Eu sou um homem de palavra, então aqui vai. Todas as quatro funções podem ser escritas em função do *seno* e *cosseno* – certo? (Veja o Capítulo 6). Por exemplo, $\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$. Agora, se você quer a derivada da tg x, você pode usar a regra do quociente:

$$\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$$

$$(\text{tg}x)' = \frac{(\text{sen}x)'\cos x - \text{sen}x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \text{sen}x \cdot (-\text{sen}x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

(A identidade trigonométrica de Pitágoras diz que $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$. Veja a folha de consulta para esta e outras identidades trigonométricas úteis)

$$= \sec^2 x$$

Reconheço que isso é muito trabalho comparado com apenas decorar a resposta ou usar o mnemônico mostrado algumas páginas atrás, mas é bom saber que você pode achar a resposta dessa maneira em último caso. As outras três funções não são mais difíceis. Tente fazê-las.

A regra da cadeia

A regra da cadeia é de longe a regra da derivada mais complicada, mas não é tão ruim assim se você se concentrar com cuidado em alguns pontos importantes. Comece achando a derivada de $y = \sqrt{4x^3 - 5}$. Você usa a regra da cadeia aqui porque você tem uma função ($4x^3 - 5$) dentro de outra função (a função da raiz quadrada) – em outras palavras, é uma função *composta*.

A propósito, aqui está uma maneira de facilmente reconhecer uma função composta. $y = \sqrt{x}$ *não* é uma função composta porque o *argumento* da raiz quadrada – isto é, a coisa da qual você tira a raiz quadrada – é simplesmente x. Toda vez que o argumento de uma função for algo com exceção do simples e velho x, você tem uma função composta. Tome cuidado ao distinguir uma função composta de algo do tipo $y = \sqrt{x} \cdot \text{sen}\,x$, o que é o *produto* de duas funções, $\sqrt{x}$ e sen x, cada qual contendo apenas um simples e velho x como argumento.

Ok, então você tem essa função composta, $y = \sqrt{4x^3 - 5}$. Aqui está como achar a derivada usando a regra da cadeia.

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

E você está de volta onde começou: $\int e^x \cos(x)\,dx$. Não se preocupe. Primeiramente, substitua o lado direito da equação acima por $\int e^x \operatorname{sin}(x)\,dx$ da solução original:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

Você pode agora resolver essa equação para a integral $\int e^x \cos(x)\,dx$. Use I no lugar dessa integral para fazer essa equação confusa ficar mais fácil aos olhos:

$$I = e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x) - I$$

Some I a ambos os lados:

$$2I = e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x)$$

Multiplique os dois lados por ½:

$$I = \frac{1}{2}\left(e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} e^x \operatorname{sen}(x)$$

Finalmente, coloque o $\int e^x \cos(x)\,dx$ de volta no lugar de I, e não se esqueça do C:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} e^x \operatorname{sen}(x) + C$$

Integrais trigonométricas complicadas

Nesse tópico, você integra potências das seis funções trigonométricas, como $\int \operatorname{sen}^3(x)\,dx$ e $\int \sec^4(x)\,dx$, e produtos ou quocientes de diferentes funções trigonométricas, como $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)\,dx$ e $\int \frac{\operatorname{cosec}^2(x)}{\operatorname{cotg}(x)}\,dx$. Isso é muito entediante – é hora de pedir um expresso duplo.

Para usar as técnicas a seguir, você deve ter um integrando que contenha apenas uma das seis funções trigonométricas como $\int \operatorname{cosec}^3(x)\,dx$ ou um determinado parde funções trigonométricas como $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\,dx$. Se o integrando tiver duas funções trigonométricas, as duas devem ser uma desses três pares: seno com cosseno, secante com tangente, ou co-secante com cotangente. Se você tiver um integrando contendo algo diferente desses

1. **Você começa com uma função *externa*, $\sqrt{\ }$, e acha a derivada disso, IGNORANDO o que está dentro. Para ter certeza de ignorar o que está do lado de dentro, substitua temporariamente a função de dentro pela palavra *coisa*.**

Então você tem $y = \sqrt{coisa}$. Ok, agora ache a derivada de $y = \sqrt{coisa}$ da mesma maneira que você acharia a derivada de $y = \sqrt{x}$. Devido ao fato de $y = \sqrt{x}$ ser o mesmo que $y = x^{1/2}$, a regra da potência lhe dá $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$. Então para esse problema, você começa com $\frac{1}{2}coisa^{-1/2}$.

2. **Multiplique o resultado do Passo 1 pela derivada da função interna, *coisa*'.**

$$y' = \frac{1}{2}coisa^{-1/2} \cdot coisa'$$

Dê uma olhada nisso. *Todos* os problemas básicos envolvendo a regra da cadeia seguem esse formato. Você usa a regra da derivada para a função externa, ignorando a *coisa* interna, depois multiplica isso pela derivada da *coisa*.

3. **Ache a derivada da *coisa* interna.**

A *coisa* interna nesse problema é $4x^3 - 5$ e sua derivada é $12x^2$ pela regra da potência.

4. **Agora coloque a coisa real e sua derivada de volta no lugar de origem.**

$$y' = \frac{1}{2}(4x^3 - 5)^{-1/2} \cdot (12x^2)$$

5. **Simplifique.**

$$y' = 6x^2(4x^3 - 5)^{-1/2}$$

Ou, se você tiver algo contra potências negativas, $y' = \frac{6x^2}{(4x^3 - 5)^{1/2}}$.

Ou, se você tiver algo contra potências fracionarias, $y' = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3 - 5}}$.

Vamos tentar achar a derivada de outra função composta: $y = \text{sen}(x^2)$.

1. **A função externa é a função seno, então você começa aí, tirando a derivada do seno e ignorando a *coisa* interna, x^2. A derivada do sen$x$ é o cos$x$, então para esse problema, você começa com:**

$$\cos(coisa)$$

2. **Multiplique a derivada da função externa pela derivada da *coisa*.**

$$y' = \cos(coisa) \cdot coisa'$$

3. **A *coisa* nesse problema é x^2, então *coisa'* é 2x. Quando você insere esses termos de volta, você obtém:**

$$y' = \cos(x^2) \cdot 2x$$
$$= 2x\cos(x^2)$$

De vez em quando descobrir qual função está dentro de qual pode ser um pouco complicado – especialmente quando a função está dentro de outra e ambas estão dentro de uma *terceira* função (você pode ter quatro ou mais funções aninhadas, mas três é provavelmente o máximo que você verá). Aqui está uma dica.

Reescreva a função composta com um conjunto de parênteses para cada função interna, e reescreva as funções trigonométricas do tipo sen^2x com a potência do lado de fora dos parênteses: $(\text{sen}x)^2$.

Por exemplo – esse é difícil, se prepare – ache a derivada de $y = \text{sen}^3(5x^2 - 4x)$. Primeiro, reescreva a função cúbica do seno: $y = \left(\text{sen}(5x^2 - 4x)\right)^3$. Agora é fácil de ver a ordem na qual as funções estão aninhadas. A função mais interna está dentro dos parênteses mais internos – isto é, $5x^2 - 4x$. Depois, a função seno está dentro do próximo conjunto de parênteses – isto é, sen(*coisa*). Por fim, a função cúbica está do lado de fora de tudo – isto é, $coisa^3$ (Por eu ser um professor de matemática, eu sou obrigado a mostrar que *coisa* em $coisa^3$ é diferente de *coisa* em sen(*coisa*). É totalmente não matemático de minha parte usar o mesmo termo para me referir a coisas diferentes, mas não se preocupe – eu estou apenas usando o termo *coisa* para me referir ao que quer que esteja dentro de qualquer função. O termo técnico para essa *coisa* é o *argumento* da função). Ok, agora que você sabe a ordem das funções, você pode achar a derivada às avessas.

1. **A função mais externa é $coisa^3$ e sua derivada é dada pela regra da potência.**

   $3coisa^2$

2. **Assim como todos os problemas que envolvem a regra da cadeia, você multiplica isso por *coisa*'.**

   $3coisa^2 \cdot coisa'$

3. **Agora coloque a coisa, $\text{sen}(5x^2 - 4x)$, de volta ao seu lugar de origem.**

   $3\left(\text{sen}(5x^2 - 4x)\right)^2 \cdot \left(\text{sen}(5x^2 - 4x)\right)'$

4. **Use a regra da cadeia de novo.**

Você não pode terminar esse problema rápido apenas tirando uma simples derivada porque você tem que achar a derivada de outra função composta, $\text{sen}(5x^2 - 4x)$. Apenas trate $\text{sen}(5x^2 - 4x)$ como se fosse o problema original e ache a sua derivada. A derivada de sen$x$ é cos$x$, então a derivada de sen(*coisa*) começa com cos(*coisa*). Multiplique isso pela *coisa*. Assim, a derivada de sen(*coisa*) é:

$$\cos(coisa) \cdot coisa'$$

5. A *coisa* é $5x^2 - 4x$ e sua derivada é $10x - 4$. Insira essas coisas de volta.

$$\cos(5x^2 - 4x) \cdot (10x - 4)$$

6. Agora que você tem a derivada de sin $(5x^2 - 4x)$, insira esse resultado no resultado do Passo 3, dando a você o grupo todo junto.

$$3\big(\operatorname{sen}(5x^2 - 4x)\big)^2 \cdot \cos(5x^2 - 4x) \cdot (10x - 4)$$

Isso pode ser um pouco simplificado.

$$(30x - 12)\operatorname{sen}^2(5x^2 - 4x)\cos(5x^2 - 4x)$$

Eu disse a você que era um problema difícil.

Você talvez tenha imaginado que pode economizar tempo não mudando para a palavra *coisa* e depois mudando de volta. Isso é verdade, mas as técnicas forçam você a deixar a *coisa* sozinha durante cada passo do problema. Esse é o ponto crítico.

Certifique-se de NÃO TOCAR NA COISA.

Desde que você se lembre disso, você não precisa, na prática, usar a palavra *coisa* ao fazer um problema envolvendo a regra da cadeia. Você só precisa ter certeza de não mudar uma função interna quando estiver achando a derivada de uma função externa. Digamos que você queira achar a derivada de $f(x) = \ln(x^3)$. O argumento dessa função logarítmica básica é x^3. Não toque nele durante o primeiro passo da solução, que é usar a regra do log natural: $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$. Essa regra diz que você coloca o argumento da função no denominador sob o número 1. Então, depois do primeiro passo em diferenciar a derivada de $\ln(x^3)$, você tem $\frac{1}{x^3}$. Você então termina o problema multiplicando isso pela derivada de x^3 que é $3x^2$.

Outra maneira de ter certeza que você entendeu corretamente a regra da cadeia é lembrar que você nunca usa mais do que uma regra da derivada de cada vez.

No exemplo anterior, $\ln(x^3)$, você usa primeiro a regra log natural, depois, como um *passo separado*, você usa a regra da potência para achar a derivada de x^3. Em nenhum ponto, em nenhum problema envolvendo a regra da cadeia, você usa ambas as regras ao mesmo tempo. Por exemplo, com $\ln(x^3)$, você não usa a regra natural do log e a regra da potência ao mesmo tempo para obter $\frac{1}{3x^2}$.

Aqui está a bobagem da regra da cadeia.

A regra da cadeia (para achar a derivada de uma função composta):

$$\text{Se } y = f\big(g(x)\big),$$
$$\text{então } y' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Ou, de forma equivalente,

$$\text{Se } y = f(u),$$
$$\text{e } u = g(x),$$
$$\text{então } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ (note como os } \textit{duas} \text{ se cancelam)}$$

Veja o texto complementar a seguir, "Por que a regra da cadeia funciona?", para uma explicação em português claro de toda essa confusão.

Por que a regra da cadeia funciona?

Você não saberia a partir da difícil matemática nesse tópico ou da bobagem sofisticada da regra da cadeia, mas a regra da cadeia é baseada em uma idéia muito simples. Digamos que uma pessoa esteja andando, outra caminhando lentamente, e uma terceira andando de bicicleta. Se a pessoa que está andando lentamente vai duas vezes mais rápido que a pessoa que está andando, e a pessoa andando de bicicleta vai quatro vezes mais rápido que a que anda lentamente, então a pessoa na bicicleta vai 2 vezes 4, ou 8 vezes mais rápido que a pessoa andando, certo? Essa é a regra da cadeia resumida – você apenas multiplica as razões relativas.

Você se lembra da Figura 9-5 mostrando Laurel e Hardy em uma gangorra? Lembre-se que para cada centímetro que Hardy desce, Laurel sobe em 2 centímetros. Então, a razão do movimento de Laurel é duas vezes a razão de Hardy, e em conseqüência disso $\frac{dL}{dH} = 2$. Agora imagine que Laurel tenha uma língua de sogra na boca – aquela que desenrola quando você assopra, e para cada polegada que ele sobe, ele assopra a língua de sogra em 3 centímetros. A razão do movimento da língua de sogra (S) é assim 3 vezes a razão de movimento de Laurel. Nos símbolos do cálculo, $\frac{dS}{dH} = 3$. Então, qual é a velocidade de movimento da língua de sogra em relação à Hardy? Isso é apenas bom senso. A língua de sogra está se movendo 3 vezes mais rápido do que Laurel, e Laurel está se movendo 2 vezes mais rápido do que Hardy, então a língua de sogra se move 3 vezes 2, ou 6 vezes mais rápido do que Hardy. Aqui está em símbolos (note que isso é o mesmo que a definição formal da regra da cadeia perto do ícone de bobagem matemática):

$$\frac{dN}{dH} = \frac{dN}{dL} \cdot \frac{dL}{dH}$$
$$= 3 \cdot 2$$
$$= 6$$

Apenas uma brincadeira de criança.

Um último exemplo e uma última dica. Ache a derivada de $4x^2 \operatorname{sen}(x^3)$. Esse problema tem uma nova distorção – ele envolve a regra da cadeia *e* a regra do produto. Como você deve começar?

Se você não tiver certeza de onde começar a fazer a diferenciação da expressão complexa, imagine inserir um número no lugar de x e depois avaliar a expressão na sua calculadora um passo de cada vez. Seu *último* cálculo diz a você a *primeira* coisa a se fazer.

Digamos que você tenha inserido o número 5 no lugar de x em $4x^2 \operatorname{sen}(x^3)$. Você avalia $4 \cdot 5^2$ – isto é, 100; assim, depois de achar $5^3 = 125$, você faz o $\operatorname{sen}(125)$, que é mais ou menos -0,616. Finalmente, você multiplica 100 por -0,616. Posto que seu *último* cálculo é uma *multiplicação*, seu *primeiro* passo na diferenciação é usar a regra do *produto* (Se o seu último cálculo fosse algo como sen (125), então você começaria com a regra da cadeia). Você se lembra da regra do produto?

Se $f(x) = isso \cdot aquilo$, então $f'(x) = isso' \cdot aquilo + isso \cdot aquilo'$.

Então para $f(x) = 4x^2 \operatorname{sen}(x^3)$,

$$f'(x) = (4x^2)'\left(\operatorname{sen}(x^3)\right) + (4x^2)(\operatorname{sen}(x^3)'$$

Agora você termina o problema achando a derivada de $4x^2$ com a regra da potência e a derivada de $\operatorname{sin}(x^3)$ com a regra da cadeia:

$$f'(x) = (8x)\left(\operatorname{sen}(x^3)\right) + (4x^2)\left(\cos(x^3) \cdot 3x^2\right)$$

E agora simplifique:

$$f'(x) = 8x \operatorname{sen}(x^3) + 12x^4 \cos(x^3)$$

Diferenciação implícita

Todos os problemas de diferenciação mostrados nos tópicos anteriores desse capítulo são funções do tipo $y = x^2 + 3x^2$ ou $y = \operatorname{sen}x$ (e y era algumas vezes escrito como $f(x)$ como em $f(x) = x^3 - 4x^2$). Nesses tipos de casos, y é escrito *implicitamente* como uma função de x. Isso significa que a equação é resolvida em função de y; em outras palavras, y está sozinho de um lado da equação.

Às vezes, no entanto, pedem para você achar a derivada de uma equação que não é resolvida em função de y, como $y^5 + 3x^2 = \operatorname{sen}x - 4y^3$. Essa equação define y implicitamente como uma função de x, e você não pode escrevê-la como uma função explícita porque não pode ser resolvida em função de y. Para esse tipo de problema, você precisa da *diferenciação implícita*. Ao diferenciar implicitamente, todas as regras da derivada funcionam da mesma maneira com uma exceção: quando você diferencia um termo com um y nele, você usa a regra da cadeia com uma pequena distorção.

Você se lembra de usar a regra da cadeia para achar a derivada de algo do

$$= \lim_{h \to 0} (4 + h)$$

$$= 4 + 0$$

$$= 4$$

Então a inclinação é 4 (A propósito, é uma coincidência absurda que a inclinação em (2,4) seja igual a coordenada *y* do ponto).

Definição da derivada: Se você substitui o ponto $(2, f(2))$ na equação do limite acima pelo ponto geral $(x, f(x))$, você tem uma definição geral da derivada como uma função de *x*:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

A Figura 9-12 mostra essa definição geral graficamente. Note que a Figura 9-12 é virtualmente idêntica à Figura 9-11 exceto pelo fato de os *x*s substituirem os 2s na Figura 9-11 e que o ponto móvel na Figura 9-12 desliza para baixo em direção a qualquer ponto antigo $(x, f(x))$ em vez de em direção ao ponto $(2, f(2))$.

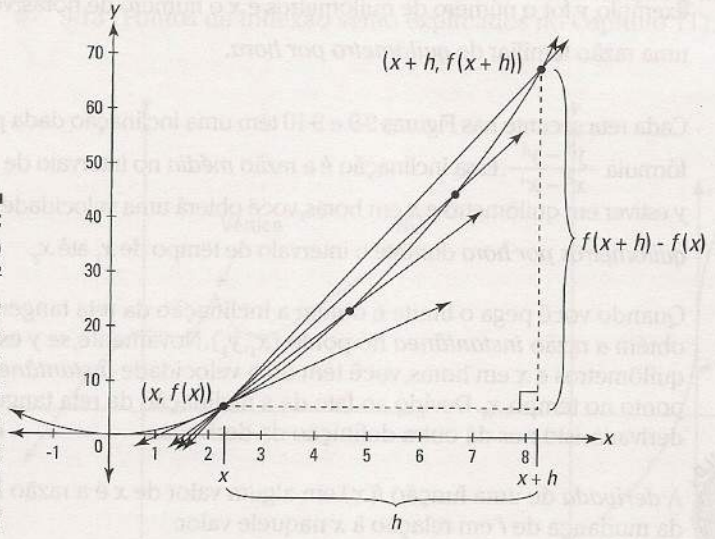

Figura 9-12: O gráfico de $y = x^2$ mostrando como o limite produz uma inclinação da reta da tangente no ponto geral (x, f(x)).

Agora calcule esse limite e obtenha a derivada para a parábola $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - (x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h}$$

tipo sen(x^3) com a técnica da *coisa*? A derivada do seno é o cosseno, então a derivada de sen(*coisa*) é sen(*coisa*) · *coisa'*. Você termina o problema achando a derivada da *coisa*, x^3, que é $3x^2$ e depois fazendo as substituições para obter $\cos(x^3) \cdot 3x^2$. Com a diferenciação implícita, um y funciona exatamente como a palavra *coisa*. Assim, devido ao fato de

$$\big(\text{sen}(\textit{coisa})\big)' = \cos(\textit{coisa}) \cdot \textit{coisa}',$$
$$(\text{sen}\ y)' = \cos y \cdot y'$$

A distorção é que enquanto a palavra coisa está tomando o lugar da função de x (x^3 nesse exemplo) temporariamente, você não sabe a que o y é igual em termos de x. Então o y e o y' – ao contrário de *coisa* e *coisa'* – continuam na resposta final. Contudo, o conceito é exatamente o mesmo e você pode pensar em y como sendo igual a uma função misteriosa e desconhecida de x. Mas como você não sabe qual é a função, você não pode voltar aos xs no final do problema como pode com um problema regular envolvendo a regra da cadeia.

Eu creio que você deva estar pensando se eu vou em algum momento chegar a fazer o problema. Aqui vai. Novamente, ache a derivada de $y^5 + 3x^2 = \text{sen}x - 4y^3$.

1. Ache a derivada de cada termo em *ambos* os lados da equação.

$$5y^4 \cdot y' + 6x = \cos x - 12y^2 \cdot y'$$

Para o primeiro e quarto termo, você usa a regra da potência e a regra da cadeia. Para o segundo termo, você usa a regra regular da potência. E para o terceiro termo, você usa a regra regular da trigonometria.

2. Reúna todos os termos contendo um y' no lado esquerdo da equação e todos os outros termos no lado direito.

$$5y^4 - y' + 12y^2 \cdot y' = \cos x - 6x$$

3. Fatore o y'.

$$y'(5y^4 + 12y^2) = \cos x - 6x$$

4. Divida para a resposta final.

$$y' = \frac{\cos x - 6x}{5y^4 + 12y^2}$$

Note que essa derivada, ao contrário das outras que você fez até agora, é expressa em termos de x e y em vez de apenas x. Então, se você quiser avaliar a derivada para achar a inclinação de um determinado ponto, você precisa ter os valores de x e y para inserir na derivada.

Também note que em muitos livros, o símbolo $\frac{dy}{dx}$ é usado em vez de y' em cada passo das soluções como a solução acima. Eu acho y' mais fácil e menos inconveniente para se trabalhar. Mas $\frac{dy}{dx}$ tem a vantagem de lembrar a você que você está achando a derivada de y em relação a x. Cada uma das maneiras está certa. Faça a sua escolha.

Entrando no ritmo com a diferenciação logarítmica

Digamos que você queira achar a derivada de $f(x) = (x^3 - 5)(3x^4 + 10)(4x^2 - 1)(2x^5 - 5x^2 + 10)$. Agora, você pode multiplicar tudo e depois achar a derivada, mas isso seria um *grande* sofrimento. Ou você pode usar a regra do produto algumas vezes, mas isso também seria muito entediante e demorado. A melhor maneira é usar a diferenciação logarítmica.

1. Tire o log natural de ambos os lados.

$$\ln f(x) = \ln\left((x^3 - 5)(3x^4 + 10)(4x^2 - 1)(2x^5 - 5x^2 + 10)\right)$$

2. Agora use a propriedade do log do produto, que você com certeza se lembra (se não, veja o Capítulo 4).

$$\ln f(x) = \ln(x^3 - 5) + \ln(3x^4 + 10) + \ln(4x^2 - 1) + \ln(2x^5 - 5x^2 + 10)\Big)$$

3. Faça a diferenciação de ambos os lados.

De acordo com a regra da cadeia, a derivada de $\ln f(x)$ é $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$, ou $\frac{f'(x)}{f(x)}$ (O $f(x)$ funciona da mesma maneira que a palavra coisa em um problema regular envolvendo a regra da cadeia ou um y em um problema de diferenciação implícita). Para cada um dos quatro termos do lado direito da equação, você usa a regra da cadeia.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3x^2}{(x^3 + 5)} + \frac{12x^3}{(3x^4 + 10)} + \frac{8x}{(4x^2 - 1)} + \frac{10x^4 - 10x}{(2x^5 - 5x^2 + 10)}$$

4. Multiplique ambos os lados por $f(x)$ e você terminou.

$$f(x)' = \left(\frac{3x^2}{(x^3 + 5)} + \frac{12x^3}{(3x^4 + 10)} + \frac{8x}{(4x^2 - 1)} + \frac{10x^4 - 10x}{(2x^5 - 5x^2 + 10)}\right)$$
$$(x^3 - 5)(3x^4 + 10)(4x^2 - 1)(2x^5 - 5x^2 + 10)$$

Eu admito que essa resposta é bem cabeluda, e o processo de solução não é exatamente um passeio no parque, mas, leve o que eu digo em consideração, esse método é *muito* mais fácil do que as outras alternativas.

Fazendo a diferenciação de funções inversas

Existe uma fórmula difícil envolvendo as derivadas de funções inversas, mas antes de chegarmos nela, olhe a Figura 10-2, que gentilmente resume a idéia toda.

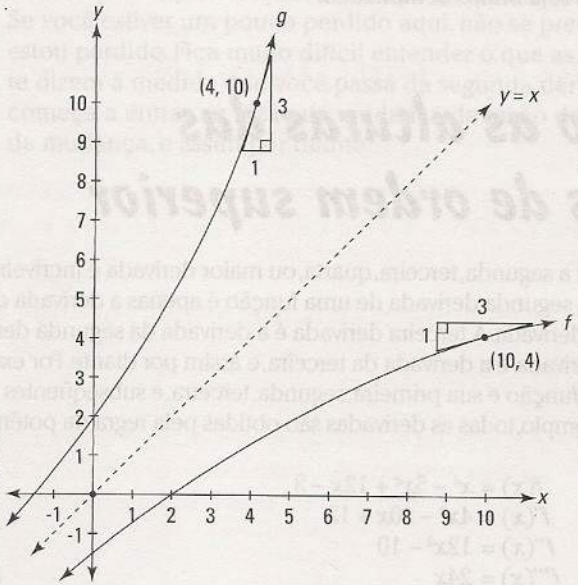

Figura 10-2: Os gráficos de funções inversas, f(x) e g(x).

A Figura 10-2 mostra um par de funções inversas, *f* e *g*. Lembre-se que funções inversas são simétricas em relação à linha, $y = x$. Assim como qualquer par de funções inversas, se o ponto (10,4) estiver em uma função, (4,10) está na sua inversa. E, por causa da simetria dos gráficos, você pode ver que as inclinações nesses pontos são recíprocas: Em (10,4) a inclinação é 1/3 e em (4,10) a inclinação é 3/1. É assim que a idéia funciona graficamente, e se você continua comigo até agora, você aprendeu pelo menos visualmente.

No entanto, a explicação algébrica é um pouco complicada. O ponto (10,4) em *f* pode ser escrito como $(10, f(10))$, e a inclinação nesse ponto – e desse modo a derivada – pode ser expressa como $f'(10)$. O ponto (4,10) em *g* pode ser escrito como $(4, g(4))$. Então, por $f(10) = 4$, você pode substituir os 4s em $(4, g(4))$ por $f(10)$s, dando a você $(f(10), g(f(10)))$. A inclinação e a derivada nesse ponto podem ser expressas como $g'(f(10))$. Essas inclinações são recíprocas, então isso lhe dá a equação:

$$f'(10) = \frac{1}{g'(f(10))}$$

Essa equação difícil expressa nada mais e nada menos do que dois triângulos nas duas funções na Figura 10-2.

Usando x em vez de 10, você tem a fórmula geral:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$$

Em outras palavras, essa fórmula diz que a derivada de uma função, f, em relação à x, é o recíproco da derivada do seu inverso em relação à . Ok. Talvez seja *muito* complicada.

Escalando as alturas das derivadas de ordem superior

Encontrar a segunda, terceira, quarta, ou maior derivada é incrivelmente simples. A segunda derivada de uma função é apenas a derivada da sua primeira derivada. A terceira derivada é a derivada da segunda derivada, a quarta derivada é a derivada da terceira, e assim por diante. Por exemplo, aqui está uma função e sua primeira, segunda, terceira, e subseqüentes derivadas. Nesse exemplo, todas as derivadas são obtidas pela regra da potência.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 5x^2 + 12x - 3 \\
f'(x) &= 4x^3 - 10x + 12 \\
f''(x) &= 12x^2 - 10 \\
f'''(x) &= 24x \\
f^{(4)}(x) &= 24 \\
f^{(5)}(x) &= 0 \\
f^{(6)}(x) &= 0 \\
etc. &= 0 \\
etc. &= 0
\end{aligned}$$

Todas as funções polinomiais como essa vão eventualmente para o zero quando você faz a diferenciação separadamente. Funções racionais do tipo $\frac{x^2-5}{x+8}$, por outro lado, ficam cada vez mais confusas à medida que você vai achando as derivadas superiores. E as derivadas superiores do seno e do cosseno são cíclicas. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
y &= \operatorname{sen} x \\
y' &= \cos x \\
y'' &= -\operatorname{sen} x \\
y''' &= -\cos x \\
y^{(4)} &= \operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

O ciclo se repete indefinidamente com todo múltiplo de quatro.

Nos Capítulos 11 e 12, eu mostro as muitas utilidades das derivadas

superiores – na maioria de segunda ordem (Aqui está uma prévia: A primeira derivada da posição é a velocidade, e a segunda derivada da posição é a aceleração). Mas por enquanto, deixe-me dar a você uma das muitas idéias em poucas palavras. A primeira derivada, como você sabe, diz quão rápido uma função está mudando – quão rápido está subindo ou descendo – isto é, sua inclinação. A segunda derivada diz quão rápida a primeira derivada está mudando – ou, em outras palavras, quão rápido uma inclinação está mudando. Uma terceira derivada diz quão rápida a segunda derivada está mudando, que diz a você quão rápido a razão da mudança da inclinação está mudando. Se você estiver um pouco perdido aqui, não se preocupe – eu também estou perdido. Fica muito difícil entender o que as derivadas superiores te dizem à medida que você passa da segunda derivada, porque você começa a entrar na razão da mudança da razão da mudança da razão da mudança, e assim por diante.

Capítulo 11

Diferenciação e o formato das curvas

Neste capítulo

- Agüentando os altos e baixos das funções mal humoradas
- Localizando os valores extremos
- Usando os testes da derivada primeira e segunda
- Interpretando a concavidade dos pontos de inflexão
- Comparando os gráficos das funções e derivadas
- Apresentando o teorema do valor médio – *GRRRRR*

Se você leu os Capítulos 9 e 10, você é provavelmente um especialista em achar derivadas. O que é uma coisa boa, pois nesse capítulo você usa as derivadas para entender os formatos das funções – onde elas sobem, onde caem, onde atingem o limite máximo e o mínimo, como elas se curvam, e assim por diante. Depois, no Capítulo 12, você usa seu conhecimento sobre o formato das funções para resolver problemas da vida real.

Fazendo uma longa viagem de carro através do cálculo

Considere o gráfico de $f(x)$ na Figura 11-1.

Imagine que você esteja dirigindo ao longo dessa função da esquerda para a direita. Ao longo da sua viagem, existem diversos pontos de interesse entre a e l. Todos eles, com exceção dos pontos de partida e chegada, se relacionam com o declive da estrada – em outras palavras, sua inclinação ou derivada.

Agora, se prepare – eu vou mostrar a você muitos termos e definições novas de uma só vez. Você não deve, no entanto, ter muito trabalho com essas idéias porque elas, na sua maioria, envolvem noções de bom senso como dirigir para cima ou para baixo de uma rampa, ou passar pelo topo de uma colina.

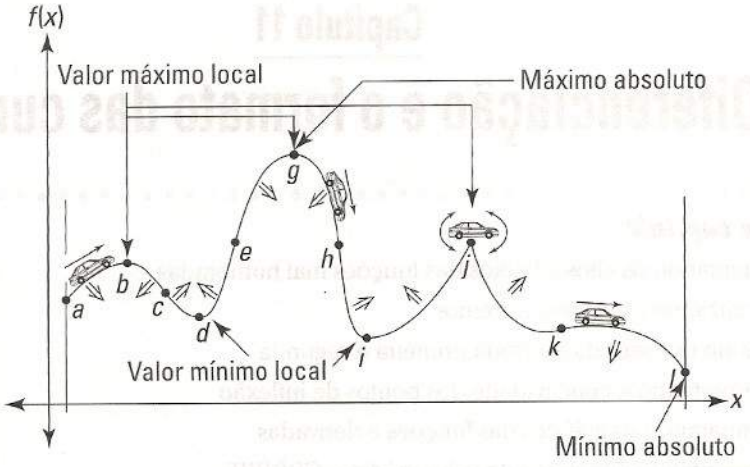

Figura 11-1: O gráfico de f(x) com diversos pontos de interesse.

Escale cada montanha, cruze cada riacho: inclinações positivas e negativas

Primeiro, note que à medida que você começa uma viagem em *a*, você está subindo. Assim a função está *crescendo* e sua inclinação e derivada são conseqüentemente *positivas*. Você escala a colina até chegar ao topo em *b* onde a estrada se torna igual. A estrada está nivelada, então a inclinação e a derivada são iguais a *zero*.

Devido ao fato de a derivada ser zero em *b*, o ponto b é chamado de *ponto crítico* da função. O ponto *b* também é um valor máximo local ou máximo relativo de *f* porque é o topo da colina. Para um valor máximo local, *b* tem que apenas ser o ponto mais alto na sua vizinhança imediata. Não importa que a colina do lado em *g* seja maior.

Depois de alcançar o topo da colina em *b*, você começa a descer – bem, é claro. Então, depois de *b*, a inclinação e a derivada são negativas e a função está *decrescendo*. Para a esquerda de qualquer valor máximo local, a inclinação é positiva; para a direita de um valor máximo local, a inclinação é negativa.

Eu não consigo pensar em uma metáfora sobre viagem para essa seção: concavidade e pontos de inflexão

O próximo ponto de interesse é *c*. Você consegue ver que à medida que desce de *b* para *c*, a estrada fica cada vez mais inclinada, mas depois de c, se bem que você ainda está descendo, a estrada está começando a se curvar gradualmente e ficando menos inclinada? A pequena seta para

baixo entre *b* e *c* na Figura 11-1 indica que essa parte da estrada está curvando para baixo – nesse local, a função é dita ter uma *concavidade voltada para baixo*. Como você pode ver, a estrada também tem uma concavidade voltada para baixo entre *a* e *b*.

Uma porção da função que é côncava para *baixo* se parece com uma *expressão de mau humor*. Onde é côncava para *cima*, como entre *c* e *e*, parece com uma xícara.

Toda vez que a função for côncava para *baixo*, sua derivada está *decrescendo*; toda vez que a função for côncava para *cima*, a sua derivada está *crescendo*.

Assim a estrada é côncava para baixo até *c* onde muda para côncava para cima. Porque a concavidade muda em *c*, ele é um *ponto de inflexão*. O ponto *c* é também o ponto mais inclinado nesse trecho de estrada. Os pontos mais inclinados em uma função – assim como os pontos menos inclinados – sempre ocorrem nos pontos de inflexão.

Tome cuidado com as partes das funções que têm uma inclinação negativa. O ponto *c* é o ponto mais inclinado na sua vizinhança porque ele tem a maior inclinação negativa do que qualquer outro ponto próximo. Mas lembre-se, um número negativo grande é na realidade um número *pequeno*, então a inclinação e a derivada em *c* são na verdade os *menores* de todos os pontos da vizinhança. De *b* para *c* a derivada da função está *decrescendo* (porque está se tornando um número negativo maior). De *c* para *d*, a derivada está *crescendo* (porque está se tornando um número negativo menor).

Esse vale das lágrimas: o valor mínimo local

Vamos voltar à sua viagem. Depois do ponto *c*, você continua a descer a colina até chegar em *d*, a parte final do vale. O ponto *d* é outro ponto crítico porque a estrada está nivelada e a derivada é zero. O ponto *d* é também um valor mínimo relativo ou local porque é o ponto mais baixo da vizinhança imediata.

Uma vista panorâmica: o máximo absoluto

Depois de *d*, você viaja para cima, passando *e*, que é outro ponto de inflexão. É o ponto mais inclinado entre *d* e *g* e o ponto onde a derivada é a maior. Você pára na vista panorâmica em *g*, outro ponto crítico e outro valor máximo local. O ponto *g* também é o *máximo absoluto* no intervalo de *a* até *l* porque é o ponto mais alto da estrada de *a* até *l*.

Problema no carro: preso no vértice

Descendo de *g*, você passa por outro ponto de inflexão, *h*, outro valor local mínimo, *i*, depois você sobe para *j* onde você estupidamente tenta dirigir sobre o pico. Suas rodas da frente conseguem passar, mas o chassi do carro fica preso no precipício, deixando você balançando para cima e para baixo com suas rodas girando. Seu carro balança em *j* porque você não pode desenhar uma reta tangente nesse ponto. Sem reta tangente significa sem inclinação; e sem inclinação significa que não há derivada, ou você pode dizer que a derivada em *j* é *indefinida*. Um ponto de inflexão acentuado como j é chamado de *vértice*.

É uma descida a partir daqui

Depois de remover o seu carro, você segue descendo, a estrada está ficando cada vez menos inclinada até que fica plana por um momento em *k* (Novamente, note que devido ao fato de a inclinação e de a derivada estarem ficando cada vez mais números *negativos* menores a caminho de *k*, elas estão de fato *crescendo*). O ponto *k* é outro ponto crítico porque sua derivada é zero. É também outro ponto de inflexão porque a concavidade muda de virada para cima para virada para baixo em *k*. Depois de passar por *k*, você desce até *l*, seu destino final. Devido ao fato de *l* ser a extremidade do intervalo, não é um valor mínimo local – extremidades nunca são qualificadas como valores locais mínimos ou máximos – mas é o *mínimo absoluto* no intervalo porque é o ponto mais baixo de *a* até *l*.

Espero que você tenha gostado da sua viagem.

Seu diário da viagem

Eu quero revisar a sua viagem e os termos e definições anteriores e ainda introduzir mais alguns termos:

- A função f na Figura 11-1 tem uma derivada igual a zero nos pontos críticos *b, d, g, i,* e *k*. Se você soma o *j* a essa lista – em *j* a derivada é indefinida – você tem uma lista completa dos *pontos críticos* da função. Os pontos críticos estão onde a derivada é zero ou indefinida. Os valores de *x* desses pontos críticos são chamados de *números críticos* da função.
- Todos os valores máximos e mínimos locais – os topos e vales – devem ocorrer em pontos críticos. No entanto, nem todos os pontos críticos são necessariamente valores máximos ou mínimos locais. O ponto k, por exemplo, é um ponto crítico, mas não é nem valor máximo e nem mínimo local. Os valores máximos e mínimos locais – ou *pontos de máximo e mínimo* – são chamados, conjuntamente, de valores *extremos* locais da função. Use muitos desses plurais sofisticados se você quiser soar como professor. Um número máximo ou mínimo local único é um *extremo* local.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h)$$

$$= 2x + 0$$

$$= 2x$$

Assim, para essa parábola, a derivada, isto é, a inclinação da reta tangente, é igual a $2x$. Insira qualquer número no lugar de x e você irá obter a inclinação da parábola naquele valor x! Tente.

Razão média e instantânea

Retornando mais uma vez para a correlação entre inclinações e razões, a inclinação é apenas a descrição visual da razão: a inclinação, $\frac{aumento}{distância}$, apenas diz a você a razão na qual y muda quando comparado com x. Se, por exemplo, y for o número de quilômetros e x o número de horas, você obterá uma razão familiar de *quilômetro por hora*.

Cada reta secante nas Figuras 9-9 e 9-10 têm uma inclinação dada pela fórmula $\frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1}$. Essa inclinação é a razão *média* no intervalo de x_1 até x_2. Se y estiver em quilômetro e x em horas, você obterá uma velocidade *média* em *quilômetros por hora* durante o intervalo de tempo de x_1 até x_2.

Quando você pega o limite e obtém a inclinação da reta tangente, você obtém a razão *instantânea* no ponto (x_1, y_1). Novamente, se y está em quilômetros e x em horas, você tem uma velocidade *instantânea* no ponto no tempo, x_1. Devido ao fato de a inclinação da reta tangente ser a derivada, isto nos dá outra definição da derivada.

A *derivada* de uma função $f(x)$ em algum valor de x é a razão *instantânea* da mudança de f em relação à x naquele valor.

- A função é crescente toda vez que você estiver subindo – onde a derivada for positiva; é decrescente toda vez que você estiver descendo – onde a derivada for negativa. A função também é decrescente no ponto *k*, um ponto de inflexão horizontal, mesmo que a inclinação e a derivada sejam, nesse ponto, igual a zero. Eu percebo que parece um pouco estranho, mas é assim que funciona – acredite na minha palavra. Em todos os pontos de inflexão horizontais, uma função está ou crescendo ou decrescendo. Nos valores extremos *b, d, g, i,* e j, a função não está nem crescendo nem decrescendo.
- A função é côncava para cima toda vez que se parecer com uma xícara ou com um sorriso (alguns dizem que é onde ela "segura água") e côncava para baixo toda vez que se parecer com uma careta (alguns dizem que é onde ela "derrama água"). Os pontos de inflexão *c, e, h,* e *k* estão onde a concavidade muda de côncava para cima para côncava para baixo ou vice versa. Os pontos de inflexão também são os pontos mais ou menos inclinados nas suas vizinhanças imediatas.

Encontrando os valores extremos locais – Minha mãe, ela é assim, totalmente extrema

Agora que você terminou o tópico anterior e sabe o que valores extremos locais são, você precisa saber como fazer os cálculos pra achá-los. Você viu no último tópico que todos os valores extremos locais ocorrem nos pontos críticos de uma função – isto é, onde a derivada é zero ou indefinida (não se esqueça, no entanto, que nem todos os pontos críticos precisam ser valores extremos). O primeiro passo para encontrar os valores extremos locais da função é encontrar os seus números críticos (os valores de x dos pontos críticos).

Escrevendo os números críticos

Encontre os números críticos de $f(x) = 3x^5 - 20x^3$. Veja a Figura 11-2.

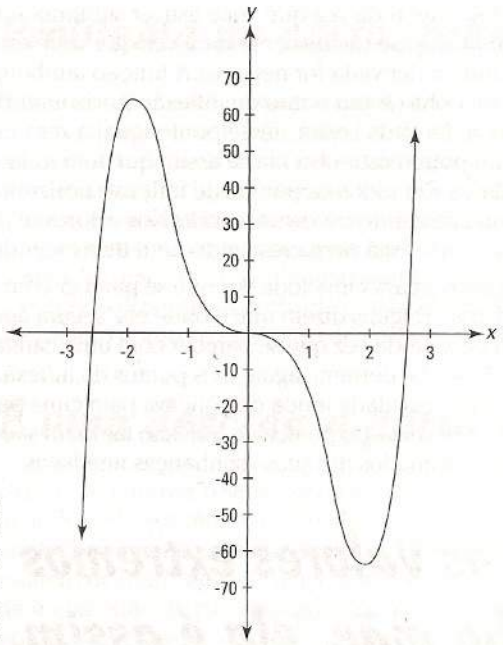

Figura 11-2: O gráfico de $f(x) = 3x^5 - 20x^3$

Aqui está o que você deve fazer.

1. Encontre a primeira derivada de *f* usando a regra da potência.

$$f(x) = 3x^5 - 20x^3$$
$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$$

Coloque a derivada igual a zero e resolva em função de x.

$$15x^4 - 60x^2 = 0$$
$$15x^2(x^2 - 4) = 0$$
$$15x^2(x + 2)(x - 2) = 0$$
$$15x^2 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0$$
$$x = 0, -2, \text{ ou } 2$$

Esses três valores de x são números críticos de f. Números críticos adicionais podem existir se a primeira derivada for indefinida em alguns valores de x, mas devido ao fato de a derivada, $15x^4 - 60x^2$, ser definida para todos os valores de entrada, o conjunto solução acima, 0, -2, e 2, é a lista completa dos números críticos. Visto que a derivada de f é igual a zero nesses números críticos, a curva tem tangentes horizontais nesses números.

Agora que você tem a lista dos números críticos, você precisa determinar se picos e vales ocorrem nesses valores de x. Você pode fazer isso com o teste da derivada primeira ou com o teste da derivada segunda. Eu creio que você talvez esteja se perguntando por que você tem que testar os números críticos quando você pode ver onde os

picos e vales estão apenas olhando no gráfico da Figura 11-2, que você pode, é claro, reproduzir na sua calculadora gráfica. Bem pensado. Ok, então esse problema – sem mencionar outros incontáveis problemas que você fez nos cursos de matemática – é um tanto artificial e impraticável. Que novidade!

O teste da derivada primeira

O teste da derivada primeira é baseado em idéias do calibre do Prêmio Nobel: à medida que você passa sobre o topo de uma colina, primeiro você sobe e depois você desce, e que quando você dirige entrando e saindo de um vale, você desce e depois sobe. Essa matéria de cálculo é muito impressionante, não é?

Aqui está como você usa o teste. Pegue uma linha numerada e coloque os números críticos que você achou acima: 0, -2, e 2. Veja a Figura 11-3.

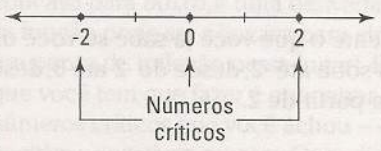

Figura 11-3: Os números críticos de $f(x) = 3x^5 - 20x^3$.

Essa linha numerada é agora dividida em quatro regiões: para a esquerda de -2, de -2 até 0, de 0 até 2, e para a direita de 2. Agora escolha um valor de cada região, insira na derivada primeira, e note se o seu resultado é positivo ou negativo. Vamos usar os números -3, -1, 1, e 3 para testar as regiões.

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= 15(-3)^4 - 60(-3)^2 \\ &= 15 \cdot 81 - 60 \cdot 9 \\ &= 675 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 15(-1)^4 - 60(-1)^2 \\ &= 15 - 60 \\ &= -45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 15(1)^4 - 60(1)^2 \\ &= 15 - 60 \\ &= -45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(3) &= 15(3)^4 - 60(3)^2 \\ &= 15 \cdot 81 - 60 \cdot 9 \\ &= 675 \end{aligned}$$