Embora tenhamos feito a dedução do valor de y para x inteiro, pode-se mostrar que sob condições bastante gerais ela vale para qualquer valor real.

De um modo geral, se tivermos uma grandeza com valor inicial y_0 e que cresça a uma taxa igual a k por unidade de tempo, então, após um tempo x, medido na mesma unidade de k, o valor dessa grandeza y será dado por:

$$y = y_0(1 + k)^x.$$

Tal expressão é conhecida como função exponencial. Ela é válida quando $k > 0$ (crescimento positivo) ou $k < 0$ (crescimento negativo ou decrescimento). O modelo que deu origem à função exponencial é conhecido como modelo de crescimento exponencial.

O padrão gráfico da função exponencial depende fundamentalmente da taxa de crescimento k ser positiva ou negativa. Consideremos, por exemplo, as funções: $f_1(x) = 10 \cdot (2)^x$ (taxa de crescimento igual a 1 = 100%) e $f_2(x) = 10 \cdot (0{,}5)^x$ (taxa de crescimento igual a -0,5 = −50%).

Vamos atribuir a x os valores da tabela abaixo:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
−3	1,25	80
−2	2,5	40
−1	5	20
0	10	10
1	20	5
2	40	2,5
3	80	1,25

Os gráficos dessas funções comparecem na Figura 3.60 (o da Figura 3.60(a) é o de $f_1(x)$ e o da Figura 3.60(b) é o de $f_2(x)$).

Figura 3.60(a): Gráfico da função $f_1(x) = 10 \,.\, 2^x$.

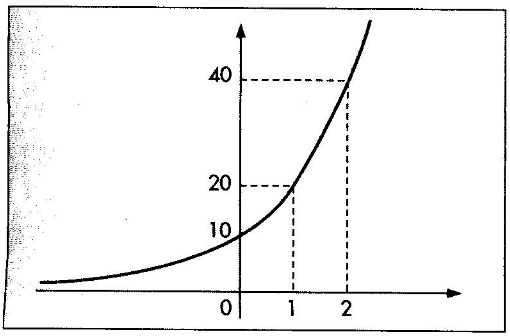
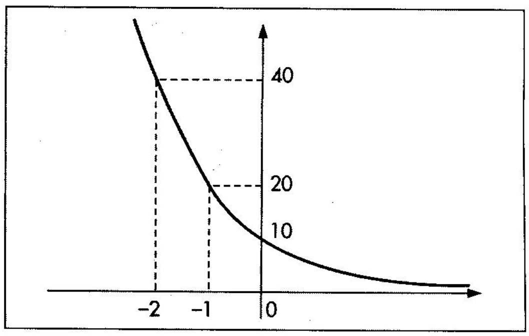


Figura 3.60(b): Gráfico da função $f_2(x) = 10 \,.\, (0{,}5)^x$.



Verifica-se que, quando a base $(1 + k)$ é maior que 1, o padrão gráfico da função exponencial segue o de $f_1(x)$, e que, quando a base $(1 + k)$ está entre 0 e 1, o padrão gráfico da função exponencial segue o de $f_2(x)$.

Exemplo 3.31. Uma cidade tem hoje 20.000 habitantes, e esse número cresce a uma taxa de 3% ao ano. Então:

a) O número de habitantes daqui a 10 anos será $y = 20.000(1{,}03)^{10} = 26.878$.
b) Se daqui a 10 anos o número de habitantes fosse igual a 30.000, a taxa de crescimento anual seria dada por

$$30.000 = 20.000(1 + k)^{10}$$
$$(1 + k)^{10} = 1{,}5;$$

elevando ambos os membros a expoente $\frac{1}{10}$, teremos

$$[(1 + k)^{10}]^{\frac{1}{10}} = [1{,}5]^{\frac{1}{10}}$$
$$(1 + k)^{1} = (1{,}5)^{0{,}1}$$
$$1 + k = 1{,}0414$$
$$k = 0{,}0414 = 4{,}14\%.$$

Portanto a taxa de crescimento procurada seria de 4,14% ao ano.

Exercícios

122. Calcule as potências $\left(\text{lembre-se de que } a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ e } a^0 = 1\right)$:

a) 2^4 *d)* 3^{-2} *g)* $(-5)^{-2}$ *j)* $\left(\frac{-2}{3}\right)^2$ *m)* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

b) $(-3)^4$ *e)* 2^{-3} *h)* $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ *k)* $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

c) 5^0 *f)* $(-2)^{-4}$ *i)* $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ *l)* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

123. Lembrando as propriedades das potências:

a) $a^m . a^n = a^{m+n}$ *c)* $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ *d)* $(a^m)^n = a^{mn}$

calcule ou simplifique:

a) $x^2 \cdot x^3$ *d)* $(xy)^3 \cdot (xy)^4$ *g)* $(16)^{1/2}$

b) $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$ *e)* $(2x)^4(3x)^2$ *h)* $(32)^{-1/5}$

c) $\frac{x^{10}}{x^6}$ *f)* $(8)^{1/3}$ *i)* $[(1 + i)^4]^{1/4}$

124. Lembrando que $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, calcule, se necessário usando uma calculadora:

a) $8^{\frac{1}{3}}$ *c)* $3^{\frac{1}{2}}$ *e)* $6^{\frac{3}{2}}$ *g)* $(1{,}25)^{\frac{1}{12}}$

b) $25^{\frac{1}{2}}$ *d)* $8^{\frac{1}{2}}$ *f)* $10^{\frac{2}{5}}$ *h)* $5^{\frac{3}{8}}$

125. Calcule, sem o uso de calculadora:

a) $8^{\frac{4}{3}}$ b) $36^{\frac{1}{2}}$ c) $27^{\frac{1}{3}}$ d) $4^{\frac{7}{2}}$ e) $8^{-\frac{2}{3}}$

Refaça os cálculos usando uma calculadora.

126. O número de habitantes de uma cidade é hoje igual a 7.000 e cresce a uma taxa de 3% ao ano.

a) Qual o número de habitantes daqui a 8 anos?

b) Qual o número de habitantes daqui a 30 anos?

127. O número de habitantes de uma cidade é hoje igual a 8.000 e cresce exponencialmente a uma taxa k ao ano. Se daqui a 20 anos o número de habitantes for 16.000, qual a taxa de crescimento anual?

128. A que taxa anual deve crescer exponencialmente uma população para que dobre após 25 anos?

129. O PIB (Produto Interno Bruto) de um país este ano é de 600 bilhões de dólares, e cresce exponencialmente a uma taxa de 5% ao ano. Qual o PIB daqui a 5 anos?

PIB: Valor total de bens e serviços finais produzidos dentro de um país.

130. O número de habitantes de uma cidade é hoje igual a 20.000 e cresce exponencialmente a uma taxa de 2% ao ano.

a) Qual o número de habitantes y daqui a x anos?

b) Faça o gráfico de y em função de x.

131. O número de habitantes de uma cidade é hoje 20.000. Sabendo-se que essa população crescerá exponencialmente à taxa de 2% ao ano nos próximos 5 anos e 3% ao ano nos 5 anos seguintes, quantos habitantes terá a população daqui a 10 anos?

132. Uma empresa expande suas vendas em 20% ao ano. Se este ano ela vendeu 1.000 unidades, quantas venderá daqui a 5 anos?

133. Um imóvel vale hoje \$ 150.000,00 e a cada ano sofre uma desvalorização de 3% ao ano.

a) Qual seu valor daqui a 10 anos?

b) Seja y o valor do imóvel daqui a x anos. Qual o gráfico de y em função de x?

134. Um automóvel novo vale \$ 20.000,00. Sabendo-se que ele sofre uma desvalorização de 15% ao ano:

a) Qual seu valor daqui a 5 anos?

b) Seja y o valor do carro daqui a x anos. Faça o gráfico de y em função de x.

135. Um equipamento sofre depreciação exponencial de tal forma que seu valor daqui a t anos será $V = 6.561 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$.

a) Qual seu valor hoje?

b) Qual seu valor daqui a 3 anos?

c) Qual será a depreciação total até essa data?

d) Faça o gráfico de V em função de t.

136. Daqui a t anos o valor de uma máquina (em milhares de dólares) será $V = 50 \cdot (0{,}8)^t$
   a) Qual seu valor hoje?
   b) Faça o gráfico de V em função de t.

137. Uma máquina vale hoje \$ 200.000, e esse valor decresce exponencialmente a uma taxa k por ano. Se daqui a 4 anos seu valor for \$ 180.000,00, qual o valor de k?

138. Uma máquina vale hoje \$ 4.000,00, e seu valor decresce exponencialmente com o tempo. Sabendo-se que daqui a 2 anos seu valor será igual a \$ 3.000,00, qual seu valor daqui a t anos?

139. Um carro 0 km deprecia 20% no 1º ano, 15% no 2º ano, e 10% ao ano do 3º ano em diante.
   a) Se uma pessoa comprou esse carro com 2 anos de uso pagando \$ 17.000,00, qual seu preço quando era 0 km?
   b) Nas condições do item anterior, qual o valor do carro daqui a x anos? ($x \geqslant 2$).

140. Esboce o gráfico, dê o domínio e o conjunto imagem de cada função abaixo:

a) $f(x) = 3^x$	f) $f(x) = (0{,}3)^x + 4$	k) $f(x) = 10 \cdot (1{,}2)^x$
b) $f(x) = 3^x + 1$	g) $f(x) = (1{,}2)^x$	l) $f(x) = 2^{-x}$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	h) $f(x) = (1{,}2)^x - 2$	m) $f(x) = 3^{-x}$
d) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$	i) $f(x) = 2 \cdot (3)^x$	
e) $f(x) = (0{,}3)^x$	j) $f(x) = 4 \cdot (2)^x$	

3.5.13 Logaritmos

Consideremos a equação exponencial (incógnita no expoente) $2^x = 64$. Para resolvê-la podemos notar que 64 é igual à potência 2^6, e então concluirmos que $x = 6$. Analogamente poderíamos resolver a equação $3^x = \frac{1}{81}$, pois notamos que $\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$. E conseqüentemente $x = -4$.

A situação muda porém se tivermos uma equação exponencial em que os dois membros não são potências de mesma base, como a equação $2^x = 5$.

Podemos garantir apenas que $2 < x < 3$, pois $2^2 = 4 < 5$ e $2^3 = 8 > 5$.

Para podermos resolver esse tipo de equação, precisamos de lançar mão de um outro instrumento matemático chamado logaritmo, que passaremos a estudar.

Os logaritmos foram introduzidos no século XVII pelo matemático escocês John Napier (1550–1617) e pelo matemático inglês Henry Briggs (1561–1630) para a execução de complexos cálculos aritméticos.

Chamamos de logaritmo do número N na base a ao expoente y que devemos colocar em a para dar o número N (N e a devem ser positivos e a diferente de 1). Assim, indicamos y por $\log_a N$. Portanto:

$$\log_a N = y \text{ se e somente se } a^y = N.$$

A base mais usada, na prática, é a base 10, e os correspondentes logaritmos são chamados decimais, bem como a base e (número de Euler, que é uma importante constante matemática, cujo valor aproximado é 2,718), e os correspondentes logaritmos são chamados naturais ou neperianos.

Os logaritmos decimais podem ser indicados sem a base ($\log_{10} N = \log N$) e os naturais podem ser indicados por $ln(N)$ ($ln(N) = \log_e N$).

Exemplo 3.32

a) $\log_2 16 = 4$, pois $2^4 = 16$;
b) $\log 100 = 2$, pois $10^2 = 100$;
c) $\log_6 6 = 1$, pois $6^1 = 6$;
d) $\log_7 1 = 0$, pois $7^0 = 1$.

Logaritmos cujos resultados não são imediatos podem ser calculados por desenvolvimento em séries ou por meio do uso de calculadoras (tecla *Log* ou *Ln*) ou computadores.

A partir de algumas propriedades dos logaritmos, veremos como podem ser calculados muitos logaritmos conhecendo-se apenas alguns deles; além disso, veremos como calcular logaritmos em qualquer base desejada.

Propriedades dos Logaritmos

(P1) $\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N$.

(P2) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

(P3) $\log_a M^\alpha = \alpha \cdot \log_a M$.

(P4) $\log_a M = \dfrac{\log_c M}{\log_c a}$ (mudança de base).

Exemplo 3.33. Admitindo que $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, temos:

a) $\log 16 = \log 2^4 = 4 \cdot \log 2 = 4 \cdot (0{,}30) = 1{,}20$;
b) $\log 36 = \log 2^2 \cdot 3^2 = \log 2^2 + \log 3^2 = 2 \log 2 + 2 \log 3 = 2 \cdot (0{,}30) + 2 \cdot (0{,}48) = 1{,}56$;
c) $\log \dfrac{1}{3} = \log 1 - \log 3 = 0 - 0{,}48 = -0{,}48$;
d) $\log_3 2 = \dfrac{\log 2}{\log 3} = \dfrac{0{,}30}{0{,}48} = 0{,}625$.

Exemplo 3.34. Admitindo $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, vamos resolver a equação exponencial $2^x = 3$.

Como $2^x = 3$, então

$$\log 2^x = \log 3,$$
$$x \cdot \log 2 = \log 3,$$
$$x = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0{,}48}{0{,}30} = 1{,}6.$$

Chamamos de função logarítmica a toda função dada por $f(x) = \log_a x$, em que a base a é um número positivo e diferente de 1.

Temos as seguintes características dessa função:

a) Domínio: conjunto dos números reais positivos (R_+^*).
b) Interceptos: a intersecção com o eixo x é o ponto (1, 0); não há inteseccção com o eixo y.
c) Para termos idéia do gráfico, tomemos as funções $f_1(x) = \log_2 x$ e $f_2(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e montemos a seguinte tabela de valores:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1/4	–2	2
1/2	–1	1
1	0	0
2	1	–1
4	2	–2
8	3	–3

Os gráficos dessas funções estão na Figura 3.61 (o da Figura 3.61(a) é o de $f_1(x)$ e o da Figura 3.61(b) é o de $f_2(x)$). Quando a base é maior que 1 ($a > 1$), o padrão gráfico da função é o do tipo de $f_1(x)$, e quando a base está entre 0 e 1 ($0 < a < 1$), o padrão é o de $f_2(x)$. Em ambos os casos, o conjunto imagem é o conjunto R dos números reais.

Figura 3.61(a): Gráfico de $f_1(x) = \log_2 x$.

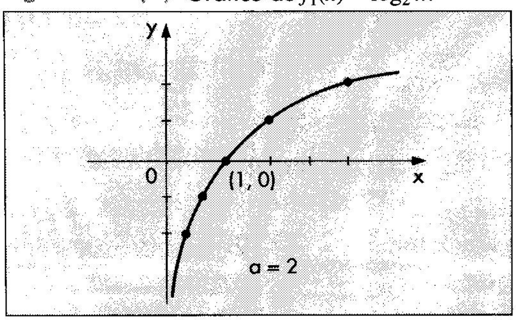
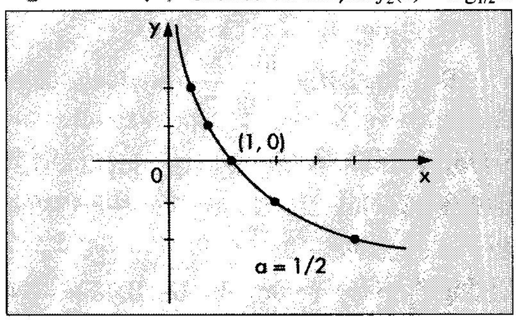


Figura 3.61(b): Gráfico da função $f_2(x) = \log_{1/2} x$.



Exercícios

141. Calcule os logaritmos abaixo sem o uso de calculadora:

a) $\log_2 8$ d) $\log_7 1$ g) $\log_2 2^{-3}$ j) $\log_{25} \frac{1}{5}$

b) $\log_7 49$ e) $\log_3 3$ h) $\log_3 \frac{1}{9}$ k) $\log_2 (16 \times 4)$

c) $\log_3 81$ f) $\log_{10} 10^4$ i) $\log_{\frac{1}{5}} 25$ l) $\log_5 5^6$

142. Usando uma calculadora ou computador, obtenha os seguintes logaritmos:

a) $\log 54$ d) $\log 34{,}6$ g) $\ln 1{,}5$ j) $\ln(0{,}8)$ m) $\log_2 7$

b) $\log 7$ e) $\ln 31$ h) $\ln 243$ k) $\ln(0{,}92)$ n) $\log_{12} 24$

c) $\log 122$ f) $\ln 7$ i) $\ln 1{,}7$ l) $\ln(0{,}54)$ o) $\log_{17} 5$

143. Admitindo $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3 = 0{,}48$, calcule os seguintes logaritmos:

a) $\log 6$ c) $\log 12$ e) $\log 20$ g) $\log 5$ i) $\log 0{,}2$

b) $\log 8$ d) $\log 24$ f) $\log 300$ h) $\log 50$ j) $\log 0{,}03$

144. Admitindo $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3 = 0{,}48$, resolva as equações exponenciais:

a) $3^x = 2$ c) $2^x = 9$ e) $6^x = 20$

b) $4^x = 3$ d) $6^x = 8$ f) $4^x = 0{,}3$

145. Resolva as equações exponenciais abaixo usando uma calculadora ou computador:

a) $2^x = 5 \cdot (3)^x$ c) $6 \cdot (3)^x = 10^x$ e) $2^{x-5} = 7$

b) $500 \cdot (1{,}2)^x = 800$ d) $3^{x-2} = 5$

146. Resolva as equações exponenciais abaixo usando uma calculadora ou computador:

a) $e^x = 4$ b) $e^{2x} = 5{,}17$ c) $e^{-5x} = 0{,}12$ d) $6 \cdot e^{3x} = 8{,}94$

147. O número de habitantes de uma cidade é hoje igual a 7.000 e cresce à taxa de 3% ao ano. Daqui a quanto tempo a população dobrará?
Dados: $\log 2 = 0{,}3010$ e $\log(1{,}03) = 0{,}0128$.

148. O PIB de um país cresce a uma taxa igual a 5% ao ano. Daqui a quantos anos aproximadamente o PIB triplicará?
Dados: $\log 3 = 0{,}4771$ e $\log 1{,}05 = 0{,}0212$.

149. Um imóvel vale hoje \$ 150.000,00, e a cada ano ele sofre uma desvalorização de 3%. Daqui a quanto tempo seu valor se reduzirá à metade?
Dados: $\ln 0{,}5 = -0{,}6931$ e $\ln 0{,}97 = -0{,}0305$.

150. Um automóvel novo vale hoje \$ 20.000,00 e sofre desvalorização de 15% ao ano. Daqui a quanto tempo seu valor se reduzirá à metade?
Dados: $\ln 0{,}5 = -0{,}6931$ e $\ln 0{,}85 = -0{,}1625$.

151. Daqui a t anos o valor de uma máquina será $V = 50 \cdot (0{,}8)^t$ milhares de reais. Daqui a quanto tempo seu valor se reduzirá à metade?
Dado $\log 2 = 0{,}3010$.

152. Estudos demográficos feitos em certo país estimaram que sua população daqui a t anos será $P = 40 \cdot (1{,}05)^t$ milhões de habitantes. Daqui a quanto tempo a população dobrará?
Dados $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 1{,}05 = 0{,}02$.

153. Esboce o gráfico, dê o domínio e o conjunto imagem de cada função:

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ c) $f(x) = \log_{0,2} x$ d) $f(x) = \log_{1,2} x$

154. Estude o sinal das funções do exercício anterior.

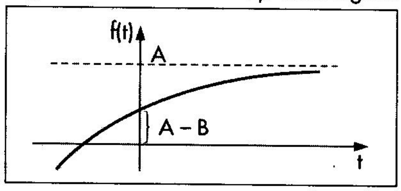
155. Dê o domínio das seguintes funções:

a) $y = \log (x - 3)$ c) $y = \log (x^2 - 4x + 3)$ e) $y = \log (4x - x^2)$

b) $y = \log (2 - x)$ d) $y = \log (x^2 - 4)$

156. Curva de aprendizagem. A curva de aprendizagem é o gráfico de uma função freqüentemente utilizada para relacionar a eficiência de trabalho de uma pessoa em função de sua experiência. A expressão matemática dessa função é $f(t) = A - B \cdot e^{-kt}$ em que t representa o tempo e $f(t)$ a eficiência. Os valores A, B e k são constantes positivas e dependem intrinsecamente do problema em questão. O gráfico da curva de aprendizagem tem o aspecto da Figura 3.62.

Figura 3.62: Curva de aprendizagem.



Nota-se que quando t aumenta muito, e^{-kt} tende a zero e, portanto, $f(t)$ tende a A. Assim, a reta horizontal que passa pelo ponto de ordenada A é uma assíntota do gráfico e praticamente reflete o fato de que, a partir de determinado tempo, a eficiência praticamente não se altera (ou se altera muito pouco). O ponto de intersecção com o eixo y tem ordenada $A - B$, pois $f(0) = A - B \cdot e^0 = A - B$.

Suponha que após t meses de experiência um operário consiga montar p peças por hora. Suponha ainda que $p = 40 - 20 \cdot e^{-0,4t}$.

a) Quantas peças ele montava por hora quando não tinha experiência?

b) Quantas peças montará por hora após 2,5 meses de experiência?
Dado: $e^{-1} = 0,37$.

c) Quantas peças, no máximo, conseguirá montar por hora?

d) Esboce o gráfico de p em função de t.

157. Um digitador após t dias de experiência consegue digitar p palavras por minuto. Suponha que $p = 60 - 55e^{-0,1t}$.

a) Quantas palavras ele digitava por minuto quando não tinha experiência?

b) Quantas palavras digitará por minuto após 20 dias de experiência?
Dado: $e^{-2} = 0,14$.

c) Quantas palavras conseguirá digitar por minuto no máximo?

d) Esboce o gráfico de p em função de t.

158. Considere a curva de aprendizagem $f(t) = 10 - B \cdot e^{-kt}$.
Sabendo que $f(1) = 5$ e $f(2) = 6$, obtenha B e k.
Dado $ln\ 1,25 = 0,22$.

3.5.14 Juros Compostos

Consideremos um capital de \$ 1.000,00, aplicado a juros compostos à taxa de 10% ao ano. Isso significa que:

- no 1º ano o juro auferido é $1.000 \cdot (0{,}10) = 100$ e o montante após 1 ano será
$$M_1 = 1.000 + 100 = 1.100;$$
- no 2º ano o juro auferido é $1.100 \cdot (0{,}10) = 110$ e o montante após 2 anos será
$$M_2 = 1.100 + 110 = 1.210;$$
- no 3º ano o juro auferido é $1.210 \cdot (0{,}10) = 121$ e o montante após 3 anos será
$$M_3 = 1.210 + 121 = 1.331,$$

e assim por diante.

Portanto, no regime de juros compostos, o juro auferido em cada período se agrega ao montante do início do período, e essa soma passa a gerar juros no período seguinte.

Consideremos um capital C, aplicado à taxa de juros i por período, e obtenhamos a fórmula do montante após n períodos.

Temos

$$M_1 = C + Ci = C(1 + i),$$
$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2,$$
$$M_3 = M_2 + M_2 i = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3.$$

Procedendo de modo análogo, obteremos o montante após n períodos que é dado por:

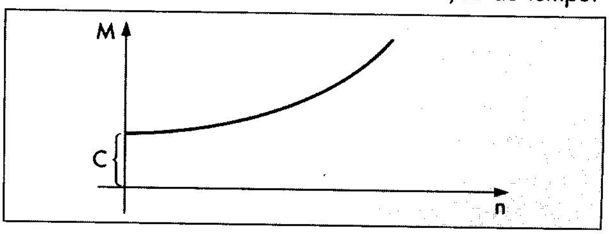
$$M_n = C(1 + i)^n, \text{ ou simplesmente } M = C(1 + i)^n.$$

Se quisermos um capital que aplicado à taxa i, durante n períodos, resulte num montante M, devemos isolar C da equação anterior. O valor assim obtido, C, é chamado de valor presente de M, isto é:

$$C = \frac{M}{(1 + i)^n}.$$

Embora a fórmula tenha sido deduzida para n inteiro e positivo, ela é estendida para todo n real positivo. Assim, M é uma função exponencial de n e crescente, pois sendo a taxa de juros $i > 0$, $1 + i$ será maior que 1. Portanto, o gráfico de M em função de n terá o aspecto daquele da Figura 3.63.

Figura 3.63: Gráfico do montante em função do tempo.



Exemplo 3.35. Um capital de \$ 3.000 é aplicado a juros compostos durante 5 meses à taxa de 2% ao mês. Assim temos:

$$C = 3.000, \qquad i = 2\%, \qquad n = 5,$$
$$M = 3.000(1{,}02)^5,$$
$$M = 3.000 \cdot (1{,}104081) = 3.312{,}24.$$

Assim, o montante da aplicação será \$ 3.312,24.

Exemplo 3.36. Um capital de \$ 1.000,00 foi aplicado a juros compostos, durante 4 meses, produzindo um montante de \$ 1.061,36. A taxa mensal de juros é dada por

$$1.061{,}36 = 1.000\,(1 + i)^4,$$
$$(1 + i)^4 = 1{,}06136,$$

elevando ambos os membros a expoente $\frac{1}{4}$ teremos:

$$[(1 + i)^4]^{\frac{1}{4}} = [1{,}06136]^{\frac{1}{4}},$$
$$(1 + i)^1 = (1{,}06136)^{0{,}25},$$
$$1 + i = 1{,}015 \Rightarrow i = 0{,}015 = 1{,}5\%.$$

Portanto a taxa mensal de juros da aplicação foi de 1,5% ao mês.

Exercícios

159. Um capital de \$ 2.000,00 é aplicado a juros compostos durante 4 meses à taxa de 1,8% ao mês. Qual o montante?

160. Um capital de \$ 10.000,00 é aplicado a juros compostos durante 1 ano e meio à taxa de 2% ao mês. Qual o montante?

161. Uma pessoa aplica hoje \$ 1.000,00 e aplicará \$ 2.000,00 daqui a 3 meses a juros compostos à taxa de 2,5% ao mês. Qual seu montante daqui a 6 meses?

162. Qual o capital que aplicado a juros compostos, durante 1 ano, à taxa de 7% ao trimestre, produz um montante de \$ 5.000,00?

163. Um capital de \$ 2.000,00 é aplicado durante 5 meses a juros compostos produzindo um montante de \$ 2.400,00. Qual a taxa mensal?

164. Durante quanto tempo um capital deve ser aplicado a juros compostos à taxa de 1,9% ao mês para que duplique?

165. Um capital de \$ 1.000,00 é aplicado a juros compostos à taxa de 300% ao ano. Um outro capital de \$ 2.000,00 é aplicado também a juros compostos à taxa de 100% ao ano. Daqui a quantos anos a diferença entre os montantes será igual a \$ 3.000,00? Dados: $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$.

166. Quanto devo aplicar hoje a juros compostos e à taxa de 2% ao mês para pagar um compromisso de \$ 6.000,00 daqui a 6 meses?(Em outras palavras, qual o valor presente do compromisso?)

167. Quanto devo aplicar hoje a juros compostos e à taxa de 2% ao mês para cumprir um compromisso de \$ 4.000,00 daqui a 2 meses, e outro de \$ 5.000,00 daqui a 3 meses?

168. A que taxa devo aplicar \$ 1.000,00 num fundo que rende juros compostos, para poder sacar \$ 100,00 daqui a 1 mês e \$ 1.100,00 daqui a 2 meses, esgotando meu saldo?

169. A que taxa devo aplicar \$ 1.000,00 num fundo que rende juros compostos, para poder sacar \$ 400,00 daqui a 1 mês e \$ 734,40 daqui a 2 meses, esgotando meu saldo?

170. A que taxa devo aplicar \$ 500,00 num fundo que rende juros compostos, para poder sacar \$ 200,00 daqui a 1 mês e \$ 341,25 daqui a 2 meses, esgotando meu saldo?

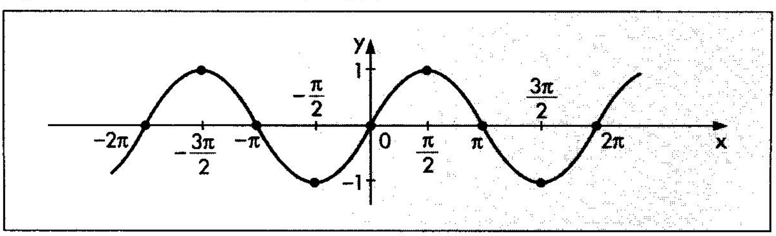
171. Um indivíduo que pretende se aposentar dentro de 30 anos resolve fazer 360 depósitos mensais, de A reais cada, em uma aplicação que rende juros compostos à taxa de 0,5% ao mês. Seu objetivo é constituir uma poupança da qual possa sacar \$ 2.000,00 por mês, durante 240 meses, sendo a primeira retirada um mês após o último depósito.
   a) Qual a poupança que ele deverá constituir logo após o último depósito?
   b) Qual o valor de A?

3.5.15 Funções Trigonométricas

Vamos abordar neste capítulo as principais funções trigonométricas que são: função seno, cosseno e tangente.

- Função seno, $f(x) = \text{sen } x$.
  a) Domínio: conjunto R dos reais.
  b) Interceptos: se $x = 0$, $f(0) = \text{sen } 0 = 0$ e, portanto, a intersecção com o eixo y é o ponto $(0, 0)$. A intersecção com o eixo x é feita fazendo $f(x) = \text{sen } x = 0$ e, portanto, $x = k \cdot \pi$ (k inteiro).
  c) O gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$ é aquele da Figura 3.64.
  d) Como o maior valor do seno é 1 e o menor é -1 e tendo em conta o gráfico dessa função, concluímos que o conjunto imagem é o intervalo $[-1; 1]$.

Figura 3.64: Gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$.



- Função cosseno, $f(x) = \cos x$.

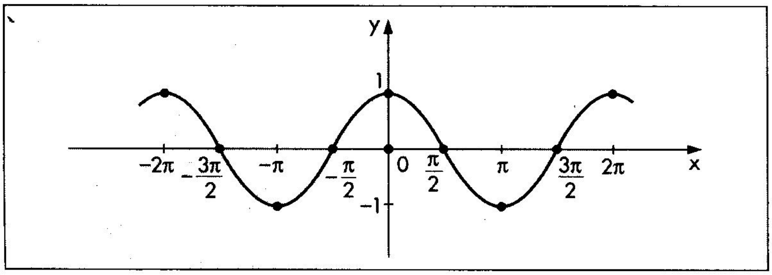
  a) Domínio: conjunto R dos reais.

  b) Interceptos: se $x = 0$, $f(0) = \cos 0 = 1$ e, portanto, a intersecção com o eixo y é o ponto $(0, 1)$. A intersecção com o eixo x é feita fazendo $f(x) = \cos x = 0$ e, portanto, $x = \pi/2 + k \cdot \pi$ (k inteiro).

  c) O gráfico da função $f(x) = \cos x$ é aquele da Figura 3.65.

  d) Como o maior valor do cosseno é 1 e o menor é -1 e tendo em conta o gráfico dessa função, concluímos que o conjunto imagem é o intervalo $[-1; 1]$.

Figura 3.65: Gráfico da função $f(x) = \cos x$.



- Função tangente, $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

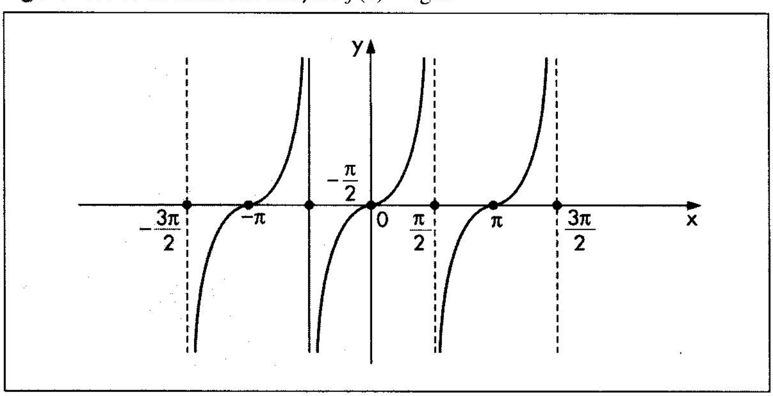
  a) Domínio: conjunto R dos reais excluindo os valores para os quais $\cos x = 0$, ou seja, os valores da forma $\pi/2 + k\pi$ (k inteiro).

  b) Interceptos: se $x = 0$, $f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0$ e, portanto, a intersecção com o eixo y é o ponto $(0, 0)$. A intersecção com o eixo x é feita fazendo $f(x) = \operatorname{tg} x = 0$ e, portanto, $x = k \cdot \pi$ (k inteiro).

  c) O gráfico da função $f(x) = \operatorname{tg} x$ é aquele da Figura 3.66 .

  d) O conjunto imagem é o conjunto R dos reais, pois para todo y real existe x tal que $\operatorname{tg} x = y$.

Figura 3.66: Gráfico da função $f(x) = \operatorname{tg} x$.



Exercícios

172. Esboce os gráficos das funções:
   a) $y = |\text{sen } x|$
   b) $y = |\cos x|$
   c) $y = |\text{tg } x|$ para $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

173. Faça o estudo do sinal das funções:
   a) $y = \text{sen } x$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
   b) $y = \cos x$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
   c) $y = \text{tg } x$, para $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
   d) $y = \dfrac{\text{sen } x}{x - 1}$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
   e) $y = \dfrac{x - 3}{\cos x}$, para $0 < x < 2\pi$.
   f) $y = \dfrac{x^2 - 1}{\text{tg } x}$, para $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

174. Qual o ponto de máximo e de mínimo das funções:
   a) $y = \text{sen } x$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$.
   b) $y = \cos x$, para $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.
   c) $y = \text{tg } x$, para $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
   d) $y = |\text{sen } x|$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
   e) $y = |\cos x|$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Capítulo 4

Limites

4.1 Sucessões ou Seqüências

No Capítulo 1 vimos que, em alguns conjuntos, a ordem em que os elementos aparecem é importante e, assim, introduzimos o conceito de par ordenado. Do mesmo modo, podemos estender esse conceito para triplas, quádruplas etc. ordenadas. Quando afirmamos que um conjunto está ordenado, queremos dizer que existe um primeiro elemento, um segundo elemento e assim por diante. Na realidade, o que fazemos é colocar esse conjunto em correspondência com o conjunto dos números naturais, ou parte deste.

Assim, chamamos de sucessão (ou seqüência) a toda função real cujo domínio é o conjunto dos números naturais ou parte deste.

Exemplo 4.1. Seja a sucessão dada por $f(n) = \dfrac{1}{n}$ com $n \in N^*$. As imagens são dadas por:

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1,$$

$$f(2) = \frac{1}{2},$$

$$f(3) = \frac{1}{3}$$

etc.

Tal função é dada por: $\left\{(1,\ 1),\ \left(2,\ \dfrac{1}{2}\right),\ \left(3,\ \dfrac{1}{3}\right),\ \left(4,\ \dfrac{1}{4}\right),\ \ldots\right\}$.

Habitualmente costuma-se representar uma sucessão escrevendo-se ordenadamente suas imagens. Assim, a sucessão dada nesse exemplo pode ser representada por:

$$\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots\right)$$

Exemplo 4.2. Consideremos a sucessão dada por $f(n) = \dfrac{n}{n+1}$.

Ela pode ser representada por:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right).$$

Exemplo 4.3. A sucessão (1, 2, 3, 4, 5, ...) é definida por $f(n) = n$ em que $n \in N^*$.

Exemplo 4.4. A sucessão (–1, –3, –5, –7, ...) é definida por $f(n) = -(2n - 1)$.

Exemplo 4.5. A sucessão (–1, 2, –3, 4, –5, ...) é definida por $f(n) = (-1)^n \cdot n$.

4.2 Convergência de Sucessões

Dizemos que uma sucessão converge para um número fixo se, à medida que n aumenta, o valor de $f(n)$ se aproxima desse valor fixo. Formalmente, podemos dizer que uma sucessão $(f(1), f(2), f(3), \ldots)$ converge para um número fixo a se para todo intervalo I centrado em a existir um número natural k tal que as imagens $f(k + 1), f(k + 2), f(k + 3), \ldots$ pertencem todas a I.

Tomemos novamente a seqüência do Exemplo 4.1:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right).$$

É fácil perceber que à medida que n cresce, a sucessão se aproxima de 0.

De fato, se tomarmos o intervalo $I_1 =]-0{,}5; 0{,}5[$ veremos que $f(3), f(4), f(5), \ldots$ são todos elementos que caem em I_1.

Se tomarmos outro intervalo centrado em 0, por exemplo, $I_2 =]-0{,}1; 0{,}1[$ veremos que $f_{11} = 0{,}0909$, $f_{12} = 0{,}0833$, $f_{13} = 0{,}0769$ etc. são todos elementos que caem em I_2.

Qualquer intervalo centrado em 0, por menor amplitude que tenha, permite encontrar um termo a partir do qual os elementos da sucessão caem dentro do intervalo.

Se observarmos a sucessão do Exemplo 4.3, veremos que à medida que n aumenta, os valores de $f(n)$ não convergem para nenhum valor fixo. Diremos que tal sucessão diverge.

Entre as sucessões divergentes, existem aquelas em que à medida que n aumenta, os valores de $f(n)$ conseguem superar qualquer valor fixado; dizemos que essas sucessões divergem para mais infinito; esse é o caso do Exemplo 4.3.

Pode ocorrer que à medida que n aumenta, os valores de $f(n)$ conseguem ficar abaixo de qualquer valor fixo, por menor que ele seja; dizemos que essas sucessões divergem para menos infinito; esse é o caso do Exemplo 4.4.

Existem ainda as sucessões divergentes que não divergem nem para mais nem para menos infinito: é o caso do Exemplo 4.5.

Observações

1) Quando uma sucessão convergir para certo valor a, mas sempre por valores menores do que a, dizemos que a sucessão converge para a pela esquerda. Assim, por exemplo, a sucessão $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right)$ converge para 1 pela esquerda.

   Analogamente, temos sucessões que convergem para a pela direita e ainda aquelas que convergem para a oscilando, isto é, tanto pela esquerda como pela direita.

2) Dado um número a qualquer, é geralmente possível construir sucessões que convirjam para esse valor. Assim, por exemplo, dado o número 3, a sucessão $\left(3{,}1; 3{,}01; 3{,}001; \dots; 3 + \frac{1}{10^n}; \dots\right)$ converge para 3 pela direita, ao passo que a sucessão $\left(2{,}9; 2{,}99, 2999; \dots; 3 - \frac{1}{10^n}; \dots\right)$ converge para 3 pela esquerda.

Exercícios

1. Nas sucessões abaixo, escreva a função definidora de cada uma:

   a) $(1, 4, 9, 16, 25, \dots)$

   b) $(-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots)$

   c) $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$

   d) $(0, 5, 10, 15, 20, \dots)$

   e) $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots\right)$

   f) $(0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; \dots)$

2. Das sucessões abaixo, quais são convergentes (e para quais números convergem) e quais são divergentes?

   a) $f(n) = \frac{2}{n}$

   b) $f(n) = \frac{n+1}{2}$

   c) $f(n) = \frac{n+1}{n^2+1}$

   d) $f(n) = \frac{2n^2+1}{n^2+1}$

   e) $f(n) = \frac{n^2}{3^n}$

   f) $f(n) = \frac{n^2+1}{n}$

   g) $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4$

   h) $f(n) = \frac{n-1}{n^2-1}$

   i) $f(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   j) $f(n) = (-1)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)$

   k) $f(n) = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)$

   l) $f(n) = \begin{cases} \frac{5n+1}{n}, & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{5n-1}{n}, & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$

   m) $f(n) = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$

   (Lembre-se de que o numerador e o denominador são somas de n termos de progressão geométrica no item m.)

Dadas as sucessões: $f(n) = \frac{1}{n}$ e $g(n) = \frac{n+1}{2n}$:

3. Para que valores convergem?

4. Qual a função definidora de $h(n) = f(n) + g(n)$? $h(n)$ é convergente?

5. Idem ao exercício anterior para a sucessão $h_1(n) = f(n) \cdot g(n)$.

6. Idem ao exercício anterior para a sucessão $h_2(n) = f(n) - g(n)$.

7. Idem ao exercício anterior para a sucessão $h_3(n) = \dfrac{f(n)}{g(n)}$.

4.3 Limite de Funções

O conceito de limite de funções tem grande utilidade na determinação do comportamento de funções nas vizinhanças de um ponto fora do domínio, no comportamento de funções quando x aumenta muito (tende para infinito) ou diminui muito (tende para menos infinito). Além disso, o conceito de limite é utilizado em derivadas, assunto do próximo capítulo.

Intuitivamente, dada uma função $f(x)$ e um ponto b do domínio, dizemos que o limite da função é L quando x tende a b pela direita ($x \rightarrow b^+$) se, à medida que x se aproxima de b pela direita (isto é, por valores superiores a b), os valores de $f(x)$ se aproximam de L. Simbolicamente, escrevemos:

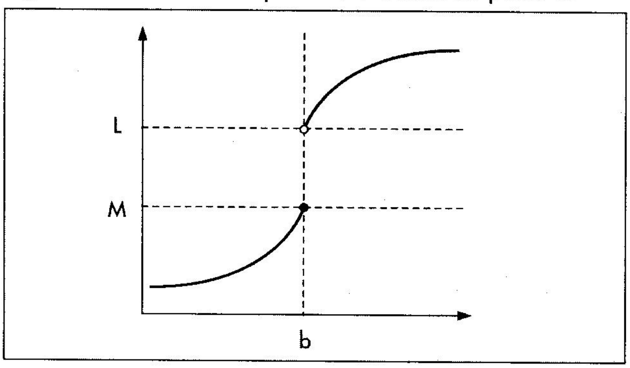
$$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = L.$$

Analogamente, dizemos que o limite da função é M quando x tende a b pela esquerda ($x \rightarrow b^-$) se, à medida que x se aproxima de b pela esquerda (isto é, por valores inferiores a b), os valores de $f(x)$ se aproximam de M. Simbolicamente escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = M.$$

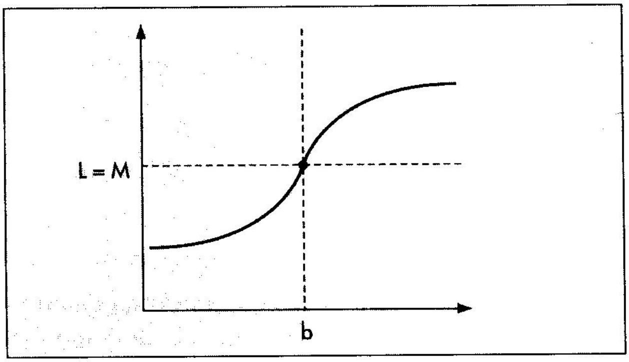
A Figura 4.1 ilustra essa idéia intuitiva. A definição formal, que caracteriza o conceito de aproximação, pode ser vista no apêndice.

Figura 4.1: Limites à esquerda e à direita do ponto b.



Caso $L = M$, ou seja, os limites laterais são iguais, dizemos que existe o limite de $f(x)$ quando x tende a b e escrevemos, $\lim f(x) = L = M$. A Figura 4.2 ilustra essa situação:

Figura 4.2: Existência do limite $f(x)$, quando x tende a b.



Quando os limites laterais L e M são distintos, dizemos que não existe o limite de $f(x)$ quando x tende a b (embora existam os limites laterais). A Figura 4.1 ilustra essa situação.

Exemplo 4.6. Consideremos a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leqslant 3 \\ 2x, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

e calculemos os limites laterais quando x tende a 3 pela direita e pela esquerda:

- **Limite pela esquerda**

Consideremos uma sucessão que convirja para 3 pela esquerda, por exemplo (2,9; 2,99; 2,999, ...).

Nesse caso, como x é menor que 3, a expressão de $f(x)$ é $f(x) = x + 2$. Assim, temos a seguinte correspondência:

x	$f(x)$
2,9	4,9
2,99	4,99
2,999	4,999
...	...

Assim, percebe-se intuitivamente que quando x tende a 3 pela esquerda, $f(x)$ tende a 5, e escrevemos

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5.$$

- **Limite pela direita**

Consideremos uma sucessão que convirja para 3 pela direita, por exemplo (3,1; 3,01; 3,001; ...).