

$$F(\tau_1) = 1 - \exp.[-\lambda_0 \pi (\tau_1 - b)^2/a^2] \quad (4.39)$$

ou substituindo a e b pelos valores determinados acima:

$$F(\tau_1) = 1 - \exp.[-\lambda_1 \pi V_1^2 (\tau_1 - T_p)^2] \quad (4.40)$$

que é a distribuição desejada.

Referências, Parte II

- (1) BALLOU, T.: "Business Logistics Management", Prentice-Hall, E. Unidos, (Cap. 8), 1973.
- (2) FRANCIS, R.L. e J.A. WHITE.: "Facility Layout and Location", Prentice-Hall, E. Unidos, (Cap. 4), 1974.
- (3) KUHN, H.W. e E. KUENNE.: "An Efficient Algorithm for the Numerical Solution of the Generalized Weber Problem in Spatial Economics", Journal of Regional Science, Vol 4, nº 2, pp 21-33, 1962.
- (4) LARSON, R.C. e A.R. CHONI.: "Urban Operations Research", Prentice-Hall, E. Unidos, 1981.
- (5) NOVAES, A.G.: "Pesquisa Operacional e Transportes: Modelos Probabilísticos", Editora da USP/Editora Mc Graw-Hill do Brasil Ltda, São Paulo, (seção 3.3), 1975.
- (6) NOVAES, A.G.: "Métodos de Otimização: Aplicações aos Transportes", Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1978.
- (7) NOVAES, A.G.: "Demanda e Custos de Transporte de Calcário no Rio Tietê", III Congresso de Transporte Marítimo e Construção Naval, Porto Alegre, 1970.

Parte III

COLETA, TRIAGEM E DISTRIBUIÇÃO DE MERCADORIAS

5. SISTEMAS DE COLETA/DISTRIBUIÇÃO

5.1. Caracterização

Um dos problemas típicos da Logística é o da coleta e distribuição de carga. O mesmo tipo de problema aparece na prestação de serviços distribuídos espacialmente sobre uma região de terminada. Por exemplo, os defeitos e avarias de telefones, instalações elétricas, gás, água e esgoto, etc constituem problemas análogos sempre que exigirem a presença física da equipe técnica no local da chamada.

Os problemas de coleta e de distribuição são conceitualmente análogos, na maioria dos casos. Podem ser analisados de forma conjunta, fazendo-se as correções específicas no momento das aplicações.

As características básicas desse tipo de problema são as seguintes:

(a) Uma região geográfica é dividida em zonas, cujos contornos podem ser rígidos ou, em alguns casos, podem sofrer alterações momentâneas para acomodar diferenças de demanda em regiões contíguas.

(b) A cada zona é alocado um veículo, com uma equipe de serviço, podendo ocorrer outras situações (mais de um veículo por zona, por exemplo).

(c) A cada veículo é designado um roteiro, incluindo os locais de parada (pontos de coleta ou entrega, atendimento de serviços, etc) e a sequência em que a equipe deverá atendê-los.

(d) O serviço deverá ser realizado dentro de um tempo de ciclo pré-determinado. No caso de coleta/entrega urbana, o roteiro típico se inicia de manhã cedo e se encerra no fim do dia (ou antes, se o roteiro for totalmente cumprido antecipadamente). Nas entregas regionais o ciclo pode ser maior. Há casos de entregas rápidas em que o ciclo é menor do que um dia útil.

(e) Os veículos são despachados a partir de um depósito.

onde se efetua a triagem da mercadoria (ou serviço) em função das zonas. Nos casos em que há mais de um depósito o problema pode ser analisado de forma análoga, efetuando-se, para isso, as divisões adequadas da demanda e/ou da área geográfica atendida.

Algumas questões metodológicas se colocam ao analista, destacando-se as seguintes:

- * (a) Como dividir a região de atendimento em zonas de serviço?
- (b) Como selecionar o veículo/equipe mais adequado ao serviço?
- (c) Qual a quilometragem média da frota e os diversos tempos associados ao serviço, de forma a quantificar os custos?
- * (d) Qual a fração do serviço (carga coletada ou distribuída, número de chamadas, etc) não cumprida num dia útil?
- (e) Qual a frequência ideal de serviço?
- (f) Como, enfim, selecionar a configuração mais adequada?

Esse tipo de problema apresenta dois níveis de resolução. Na fase de planejamento e projeto do sistema de coleta/distribuição ainda não se tem idéia precisa dos pontos reais de atendimento. Nesse caso é mais interessante adotar estimativas aproximadas, mas de cálculo rápido, de forma a possibilitar a análise de diversas alternativas.

Já na fase de operação, são conhecidos os locais de atendimento. Em alguns casos esses pontos são fixos, como, por exemplo, na distribuição diária de jornais, entrega de produtos nos estabelecimentos varejistas, etc. Noutros casos os locais de atendimento são aleatórios, sendo conhecidos somente na hora de executar o roteiro de serviços. Como exemplo citamos os serviços de entrega de compras para as lojas, os sistemas de atendi-

mento para reparos e consertos, etc. Em ambas as situações é necessário definir um roteiro otimizado para a equipe de serviço.

Neste capítulo abordamos os problemas do primeiro tipo, isto é, os casos ligados ao planejamento e projeto de siste^{ma}mas de coleta/distribuição. A roteirização de veículos, que apare^{ce}ce nos problemas operacionais específicos, será analisada no Capítulo 10 deste texto.

5.2. Variáveis

Na Fig. 5.1 é mostrado o esquema espacial de um siste^{ma}ma típico de coleta e distribuição de mercadorias. Uma região R, atendida pelo sistema, é dividida em M zonas. À cada zona é alocado um veículo de coleta/distribuição.

O veículo, ao ser liberado no depósito, sai carregado com a mercadoria a ser entregue e a lista dos endereços das visi^{tas}tas, com indicação da ordem de sequência das paradas.

O veículo percorre uma rota desde o depósito até o primeiro ponto de parada (ponto P_1 na Fig. 5.1). Denominamos de t o tempo decorrido nesse percurso e admitimos que, no regresso ao depósito, o tempo gasto seja também igual à t . A distância percorrida nesse percurso é denominada d .

Já na zona de entrega o veículo gasta um tempo t_p em cada parada, tempo esse necessário para estacionar, procurar a pessoa responsável no endereço, efetuar a descarga, providenciar a assinatura na nota ou borderô, etc.

O percurso entre dois pontos sucessivos de parada é representado por δ , no que refere à distância, e τ no que diz res^{peito}peito ao tempo.

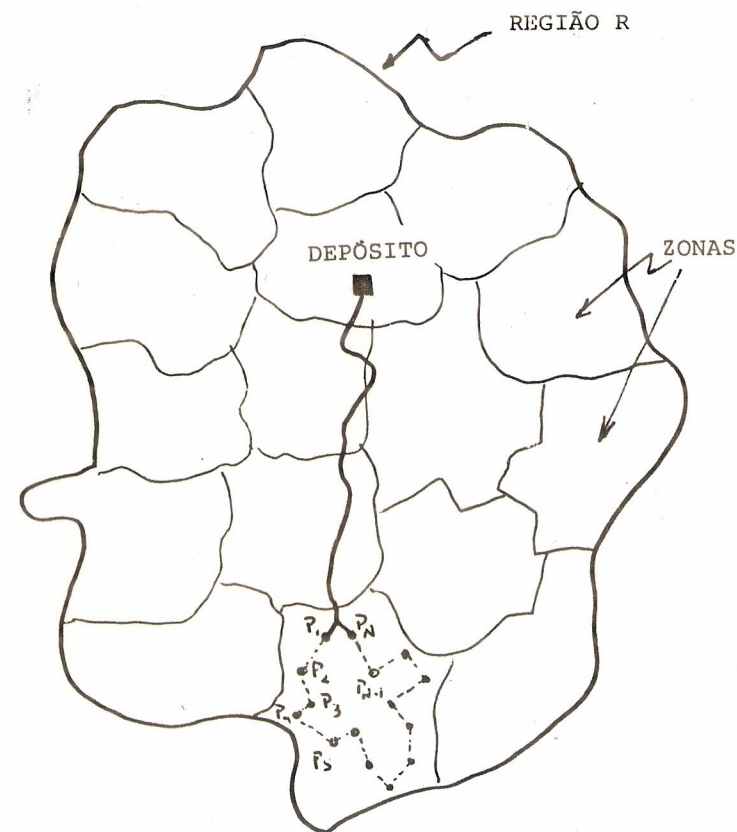
O tempo total de ciclo, medido desde que o veículo sai do depósito até seu retorno ao fim do serviço, é dado então por:

$$TC = t + T_p^* + T_t^* + t \quad (5.1)$$

onde:

TC = tempo de ciclo

t = tempo de percurso entre depósito e zona de distri^{buição}buição ou vice-versa. Notar que separamos os tem



- Percurso Depósito/Zona
- Pontos de Parada
- Percurso dentro da Zona

Esquema Geral de um Sistema de Coleta/Distribuição
Fig. 5.1

pos referentes às viagens de ida e de volta por que, em termos estatísticos, são valores independentes, embora regidos pela mesma distribuição.

T_p^* = soma dos tempos de parada dentro da zona de distribuição.

T_τ^* = soma dos tempos de percurso entre paradas sucessivas.

As variáveis aleatórias T_p^* e T_τ^* exigem tratamento estatístico especial. Suponhamos que, para uma certa zona, é observado num dia qualquer um número N de paradas. Sejam $t_p^{(1)}$, $t_p^{(2)}$, ..., $t_p^{(N)}$ os tempos gastos na primeira parada, na segunda e assim por diante. Obviamente:

$$T_p^* = t_p^{(1)} + t_p^{(2)} + \dots + t_p^{(N)} \quad (5.2)$$

Mas N , por sua vez, é uma variável aleatória, com média $E[N]$ e variância $\text{var}[N]$. Demonstra-se (vide Apêndice deste Capítulo) que:

$$E[T_p^*] = E[N] \cdot E[t_p] \quad (5.3)$$

$$\text{e} \quad \text{var}[T_p^*] = E[N] \cdot \text{var}[t_p] + E^2[t_p] \cdot \text{var}[N] \quad (5.4)$$

De forma análoga a média e a variância de T_τ^* são dadas por:

$$E[T_\tau^*] = E[N] \cdot E[\tau] \quad (5.5)$$

$$\text{e} \quad \text{var}[T_\tau^*] = E[N] \cdot \text{var}[\tau] + E^2[\tau] \cdot \text{var}[N] \quad (5.6)$$

Na expressão (5.1), por outro lado, todos os quatro termos do segundo membro são variáveis aleatórias independentes,

e portanto:

$$E[TC] = 2 \cdot E[t] + E[T_p^*] + E[T_\tau^*] \quad (5.7)$$

$$\text{e} \quad \text{var}[TC] = 2 \cdot \text{var}[t] + \text{var}[T_p^*] + \text{var}[T_\tau^*] \quad (5.8)$$

A quilometragem percorrida por um veículo, num ciclo TC , é dada, por sua vez, pela expressão:

$$DC = d + D_\delta^* + d \quad (5.9)$$

onde:

DC = quilometragem total de um ciclo.

d = distância do depósito à zona e vice-versa.

D_δ^* = soma das distâncias percorridas entre paradas sucessivas, dentro da zona.

De forma análoga chega-se à:

$$E[D_\delta^*] = E[N] \cdot E[\delta] \quad (5.10)$$

$$\text{e} \quad \text{var}[D_\delta^*] = E[N] \cdot \text{var}[\delta] + E^2[\delta] \cdot \text{var}[N] \quad (5.11)$$

sendo que a média e a variância de DC são dadas por:

$$E[DC] = 2 \cdot E[d] + E[D_\delta^*] \quad (5.12)$$

$$\text{e} \quad \text{var}[DC] = 2 \cdot \text{var}[d] + \text{var}[D_\delta^*] \quad (5.13)$$

As relações (5.7), (5.8), (5.12) e (5.13) permitem determinar os parâmetros relacionados com o ciclo de um veículo.

5.3. Distância percorrida na zona de coleta/distribuição

Na secção 4.2 do Capítulo 4, estudamos as distribuições que regem a distância entre um ponto qualquer e o seu vizinho mais próximo. Para isso adotou-se a hipótese de que os pontos são distribuídos espacialmente segundo um processo de Poisson, o que pressupõe uma densidade média constante ao longo da região de estudo.

No caso de métrica Euclideana vimos que a média e a variância da distância entre os dois pontos são dadas por (vide equações 4.19 e 4.20):

$$\bar{d} = 0,5 \cdot \lambda^{-1/2} \quad (5.14)$$

$$\sigma_d = 0,261 \cdot \lambda^{-1/2} \quad (5.15)$$

No caso de uma rota de entregas (ou coletas) a ser cumprida por um veículo, o problema é intrinsecamente diverso em razão de alguns fatores. Em primeiro lugar, ao se preparar o roteiro de entregas, nem sempre é possível caminhar de um ponto para o mais próximo. Isso porque o ótimo global (mínimo percurso total) não é composto pela soma dos ótimos individuais.

Em segundo lugar, mesmo que adotássemos o critério de avançar sempre para o ponto mais próximo, haveria casos em que seríamos obrigados a violar tal regra de forma a evitar um retrocesso no roteiro. Isto é, sempre que o ponto mais próximo já tivesse sido visitado, teríamos de excluí-lo.

Em razão desses fatores, quando se tem um roteiro de N pontos a percorrer em sequência, numa região com densidade média uniforme λ (processo de Poisson), a distância média $\bar{\delta}$ (distância total na zona dividida pelo número N de pontos) é dada por:

$$\bar{\delta} = K \cdot \lambda^{-1/2} \quad (5.16)$$

com $K \geq 0,5$

Larson e Odoni (14), secção 6.4.8) analisam este problema com base em investigações de Stein (22). Suponhamos que existam N pontos a serem cobertos numa área A de forma razoavelmente compacta e convexa. Seja L a extensão total do roteiro otimizado, isto é, aquele que passa uma única vez por todos os

pontos, de forma a minimizar a distância total percorrida.

Através de um teorema específico pode-se provar que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[L]/\sqrt{N} = K \sqrt{A} \quad (5.17)$$

onde K é uma constante.

Stein (22) estimou o valor de K em torno de 0,765. Para formas não muito alongadas ou pontudas, e convexas, a expressão acima dá resultados bastantes satisfatórios para N igual ou superior a 15.

Da expressão (5.17) tiramos:

$$E[L] \approx K \sqrt{N \cdot A} \quad (5.18)$$

Mas, como $E[L] = N \cdot \bar{\delta}$, temos:

$$\bar{\delta} = K \frac{\sqrt{A}}{N} = K \cdot \lambda^{-1/2} \quad (5.19)$$

uma vez que $\lambda \approx N/A$.

Observa-se assim identidade estrutural entre as deduções da secção 4.2, válidas para dois pontos próximos mas isolados, e os resultados indicados neste Capítulo. O que difere entre as duas formulações é a constante K, que assumia o valor 0,5 no primeiro caso e é igual a 0,765 nesta formulação.

Apesar de não dispormos de prova matemática é de se supor que o coeficiente de variação da distância δ mantenha-se aproximadamente igual aos casos anteriormente analisados (vide secção 4.2). Adotamos assim, como primeira aproximação, $C_v = 0,52$, o que leva a $\sigma_\delta = 0,52 \bar{\delta}$.

Moyses (18) realizou simulações através de computador, considerando zonas urbanas quadradas de 5 km de lado, e gerando aleatoriamente 30 pontos em cada quadrado. Após determinar o roteiro ótimo (mínima distância total) e analisar estatisticamente as distâncias amostradas, obteve o valor médio de 0,74 km por ponto de parada.

A densidade média nas simulações era de $\lambda = 1,2$ pontos/km². Aplicando a equação (5.19) com $K = 0,765$, obtemos $\bar{\delta} = 0,70$ km, valor esse não muito diferente daquele obtido por simulação. Deve-se notar que as simulações mencionadas não contemplaram formas diversas para a área A, nem tampouco se variou o número de pontos.

A equação (5.19) pode ser utilizada para dimensionar sistemas de distribuição numa primeira aproximação, geralmente nas fases de planejamento e projeto. Na fase de operação pode-se efetuar ajustes com base na observação direta, de forma a levar em conta variações na densidade λ , além de outros fatores.

Exemplo 5.1 Uma região urbana tem área de 400 km² e deve ser coberta por uma frota de distribuição que serve uma loja de departamentos de grande porte. A densidade média de entregas é de 1,5 pontos por km² e por dia. Analisar a variação da quilometragem percorrida dentro de cada zona de entrega, variando o número de zonas de 15 a 40.

Admitimos esforço de distribuição homogêneo para todas as zonas o que, no caso, implica em igual número de entregas por zona.

Seja M o número de zonas, N o número médio de pontos de entrega por zona e N_T o número total de entregas diárias para a região urbana em análise. Tem-se:

$$N_T = N \cdot M \quad (5.20)$$

com $N_T = \lambda \cdot A = 1,5 \times 400 = 600$ pontos/dia

Portanto:

$$E[N] = \frac{N_T}{M} = \frac{600}{M} \quad (5.21)$$

Aplicando a equação (5.19) com $\lambda = 1,5$ pontos/km² e $K = 0,765$ obtemos:

$$\bar{\delta} = 0,765 (1,5)^{-1/2} = 0,625 \text{ km}$$

Vamos admitir um acréscimo de 35% sobre a distância Euclideana para compensar os efeitos da malha viária (vide seção 2.3, Cap. 2), ou seja $\bar{\delta} = 1,35 \times 0,625 = 0,84$ km.

Adotando $C_v = 0,52$, temos $\sigma_{\delta} = 0,52 \bar{\delta} = 0,44$ km.

O valor médio da distância percorrida dentro da zona e o respectivo desvio padrão são calculados através das relações (5.10) e (5.11):

$$E[D_{\delta}^*] = E[N] \cdot E[\delta] \quad (5.22)$$

e
$$\text{var}[D_{\delta}^*] = E[N] \cdot \text{var}[\delta] + E^2[\delta] \cdot \text{var}[N] \quad (5.23)$$

Admitindo que os pontos se distribuam espacialmente segundo um processo de Poisson, temos $\text{var}[N] = E[N]$. A relação (5.23) se reduz portanto à:

$$\text{var}[D_{\delta}^*] = E[N] \cdot [\text{var}[\delta] + E^2[\delta]] \quad (5.24)$$

Substituindo $E[N]$ por (5.21), bem como $E[\delta]$ e $\text{var}[\delta]$ pelos seus respectivos valores nas expressões (5.22) e (5.24), vem:

$$E[D_{\delta}^*] = \frac{600}{M} \times 0,84 = \frac{504}{M} \quad (5.25)$$

$$\text{var}[D_{\delta}^*] = \frac{600}{M} (0,44^2 + 0,84^2) = \frac{539,52}{M}$$

ou
$$\sigma_{D^*} = \text{var}^{1/2}[D_{\delta}^*] = \frac{23,23}{\sqrt{M}} \quad (5.26)$$

Pelo teorema do limite central podemos admitir uma distribuição normal para representar a variação de D_{δ}^* . Para grau de confiança de 95%, o intervalo de variação esperado de D_{δ}^* é da ordem por:

$$D_0^* = E[D_0^*] \pm 1,96 \sigma_{D^*} \quad (5.27)$$

Variando M de 15 a 40, com intervalo de 5 unidades, obtemos os resultados apresentados no Quadro 5.1.

Quadro 5.1

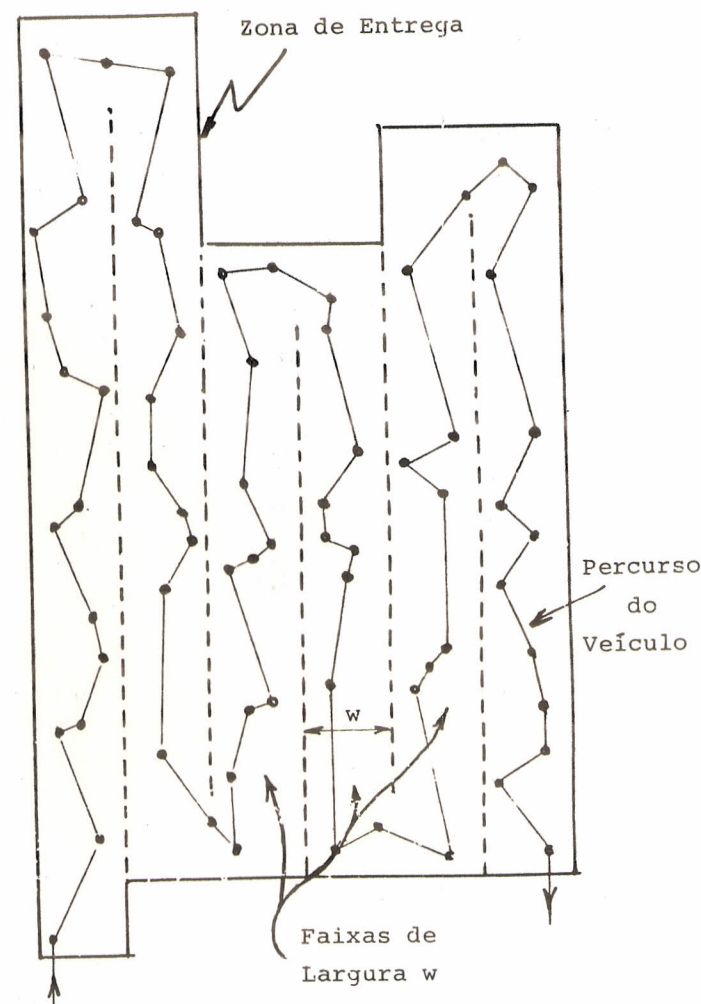
Distâncias Percorridas Dentro da Zona de Distribuição para Várias Configurações (Exemplo 5.1)

<u>Número de zonas (M)</u>	<u>Número médio de pontos por zona (N)</u>	<u>Distância percorrida dentro da zona: intervalo de variação (km)</u>
15	40	$33,6 \pm 11,7$
20	30	$25,2 \pm 10,2$
25	24	$20,2 \pm 9,1$
30	20	$16,8 \pm 8,3$
35	17	$14,4 \pm 7,7$
40	15	$12,6 \pm 7,2$

5.4. Outra formulação

Há casos em que pode ser vantajoso dividir as zonas de entrega em faixas estreitas a serem percorridas sequencialmente pelo veículo, conforme mostrado na Fig. 5.2. Essa formulação procura tirar partido das características morfológicas da rede viária, principalmente quando há predomínio de artérias em direções bem definidas e quando há um grande número de pontos a ser atendido por um veículo.

Esse caso foi estudado por Daganzo (3). Consideremos inicialmente uma faixa de extensão infinita, de largura W, com densidade λ (pontos/km²). Considerando um segmento da faixa con



Roteamento do Veículo de Distribuição ao Longo de Faixas de Largura w

Fig. 5.2

tendo N pontos, a distância total percorrida para que o veículo cubra todos os pontos (valor esperado) é:

$$E[L] = N \cdot \bar{\delta}_W \quad (5.28)$$

onde $\bar{\delta}_W$ é a distância média por ponto de parada, para largura da faixa igual a W .

Daganzo mostra que os valores $\bar{\delta}_W$, para métrica retangular e Euclideana respectivamente, são dados por:

$$\bar{\delta}_W = \frac{W}{3} + \frac{1}{\lambda W} \quad (\text{para métrica retangular}) \quad (5.29)$$

e

$$\bar{\delta}_W \approx \frac{W}{3} + \frac{1}{\lambda W} \cdot \phi(x) \quad (\text{métrica Euclideana}) \quad (5.30)$$

com $x = \lambda W^2$ e

$$\phi(x) = (2/x^2) [(1+x) \ln(1+x) - x] \quad (5.31)$$

A escolha da largura W da faixa deve ser tal que torne mínimo o valor de $\bar{\delta}_W$, pois assim estaremos otimizando o percurso a ser realizado pelo veículo de distribuição. O valor ótimo de W , exato para métrica retangular e aproximado para métrica Euclideana, é dado por (Daganzo):

$$W^* = \sqrt{\left(\frac{3}{\lambda}\right)} \quad (5.32)$$

Substituindo o valor otimizado de W em (5.29) e (5.30)

obtemos:

$$\bar{\delta}_W = k \cdot \lambda^{-1/2} \quad (5.33)$$

com $k = 1,15$ para métrica retangular, e $k = 0,90$ para métrica Euclideana.

Se compararmos o segundo valor ($k = 0,90$) com o resultado obtido por Stein (vide secção 5.3) para o caso mais geral (isto é, $k = 0,765$) nota-se um acréscimo de 17,6% na distância percorrida. Se, no entanto, for tirada vantagem da conformação viária, nos casos em que isso for possível, o método de percurso por faixas pode dar resultados satisfatórios, além de permitir que se faça o roteamento do veículo com maior facilidade.

5.5. Apêndice: média e variância de distribuição composta

Sejam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ valores amostrados a partir de uma mesma distribuição da variável aleatória contínua x , com valor esperado $E[x]$ e variância $\text{var}[x]$.

Suponhamos que N seja também uma variável aleatória discreta, com média $E[N]$ e variância $\text{var}[N]$.

O problema que se coloca é o de determinar a média e o desvio padrão da variável y , igual à soma das N amostras de x :

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_N \quad (5.34)$$

5.5.1. Funções geratrizes de momentos

A função geratriz de momentos (Feller, (9)) da variável discreta N , é dada por:

$$G(Z) = P_0 + P_1 \cdot Z + P_2 \cdot Z^2 + \dots = \sum_{N=0}^{\infty} P_N \cdot Z^N \quad (5.35)$$

onde P_N é a probabilidade de ocorrência de N

variá

vel real auxiliar tal que $|z| < 1$. A função geratriz de momentos da variável contínua $x \geq 0$ é dada por (Torres, (23):

$$R(s) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{sx} dx \quad (5.36)$$

onde $f(x)$ é a função densidade de probabilidade de x e s é uma variável auxiliar.

Derivando a expressão (5.35) em relação à z obtemos:

$$\frac{\partial G(z)}{\partial z} = \sum_{N=0}^{\infty} N \cdot P_N \cdot z^{N-1} \quad (5.37)$$

Fazendo $z = 1$ na expressão (5.37):

$$\left. \frac{\partial G(z)}{\partial z} \right|_{z=1} = \sum_{N=0}^{\infty} N \cdot P_N = E[N] \quad (5.38)$$

Derivando novamente em relação à z :

$$\frac{\partial^2 G(z)}{\partial z^2} = \sum_{N=0}^{\infty} N \cdot (N-1) P_N \cdot z^{N-2} \quad (5.39)$$

Fazendo $z = 1$ em (5.39) e lembrando que $\text{var}[N] = E[N^2] - E^2[N]$, obtemos:

$$\text{var}[N] = \left. \frac{\partial^2 G(z)}{\partial z^2} \right|_{z=1} - E^2[N] + E[N] \quad (5.40)$$

Dessa forma, conhecendo-se a função geratriz $G(z)$ de terminam-se facilmente a expectância e a variância de N por meio de derivação.

Raciocínio análogo é utilizado no caso da função geratriz $R(s)$, da variável contínua x . Derivando (5.36) em relação à s :

$$\frac{\partial R(s)}{\partial s} = \int_0^{\infty} x f(x) \cdot e^{sx} dx \quad (5.41)$$

Fazendo $s=0$ na expressão (5.41) obtemos imediatamente:

$$E[x] = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \left. \frac{\partial R(s)}{\partial s} \right|_{s=0} \quad (5.42)$$

Derivando mais uma vez a função geratriz de momentos:

$$\frac{\partial^2 R(s)}{\partial s^2} = \int_0^{\infty} x^2 f(x) \cdot e^{sx} dx \quad (5.43)$$

Fazendo $s=0$ e lembrando que $\text{var}[x] = E[x^2] - E^2[x]$, tem-se:

$$\text{var}[x] = \left. \frac{\partial^2 R(s)}{\partial s^2} \right|_{s=0} - E^2[x] \quad (5.44)$$

Dessa forma se pode calcular $E[x]$ e $\text{var}[x]$ a partir da função geratriz de momentos, via derivação.

5.5.2. Soma de um número aleatório de variáveis aleatórias

Sejam x_1, x_2, \dots, x_N valores de uma mesma distribuição contínua, dada pela densidade de probabilidade $f(x)$. O número N de valores amostrados, por sua vez, é uma variável aleatória discreta, com média $E[N]$ e variância $\text{var}[N]$.

Seja $G(Z)$ a função geratriz de momentos da variável N e $R(s)$ a função geratriz da variável contínua x .

$$\text{Seja } y = x_1 + x_2 + \dots + x_N \quad (5.45)$$

A função geratriz de momentos de y (Feller, (9), Cap. XII) é dada por:

$$H(s) = G(Z) \Big|_{Z=R(s)} \quad (5.46)$$

ou seja, a função geratriz $H(s)$ de y é obtida substituindo-se Z por $R(s)$ na função geratriz $G(Z)$.

Substituindo $Z=R(s)$ em (5.35):

$$H(s) = \sum_{N=0}^{\infty} P_N \cdot [R(s)]^N \quad (5.47)$$

Derivando a expressão (5.47) em relação a s obtemos:

$$\frac{\partial H(s)}{\partial s} = \sum_{N=0}^{\infty} N \cdot P_N \cdot [R(s)]^{N-1} \cdot \frac{\partial R(s)}{\partial s} \quad (5.48)$$

Fazendo $s=0$ em (5.48) obtemos:

$$E[y] = \sum_{N=0}^{\infty} N \cdot P_N \cdot E[x] \quad (5.49)$$

pois:

$$R(s) \Big|_{s=0} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial R(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} = E[x]$$

Fatorando a expressão (5.49):

$$E[y] = E[x] \cdot \sum_{N=0}^{\infty} N \cdot P_N = E[x] \cdot E[N] \quad (5.50)$$

A expectância de $E[y]$ é igual, portanto, ao produto das expectâncias de x e de N .

Derivando novamente $H(s)$ em relação a s :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H(s)}{\partial s^2} &= \sum_{N=0}^{\infty} N \cdot P_N \{ (N-1) [R(s)]^{N-2} \cdot \left[\frac{\partial^2 R(s)}{\partial s^2} \right] + \\ &\quad + [R(s)]^{N-1} \cdot \frac{\partial^2 R(s)}{\partial s^2} \} \quad (5.51) \end{aligned}$$

Fazendo $s=0$ em (5.51):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=0} &= \sum_{N=0}^{\infty} N \cdot P_N \{ (N-1) \cdot E^2[x] + \\ &\quad + E[x^2] \} \quad (5.52) \end{aligned}$$

Mas, pela expressão (5.44):

$$\text{var}[y] = \frac{\partial^2 H(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=0} - E^2[y] \quad (5.53)$$

e, lembrando que $E[y] = E[x] \cdot E[N]$:

$$\text{var}[y] = \frac{\partial^2 H(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=0} - E^2[x] \cdot E^2[N] \quad (5.54)$$

Substituindo (5.52) em (5.54):

$$\begin{aligned} \text{var}[y] = E^2[x] \sum_{N=0}^{\infty} N^2 \cdot P_N - E^2[x] \sum_{N=0}^{\infty} N \cdot P_N + E[x^2] \sum_{N=0}^{\infty} N \cdot P_N + \\ - E^2[x] \cdot E^2[N] \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} \text{var}[y] = E^2[x] \cdot E[N^2] - E^2[x] \cdot E^2[N] + E[x^2] \cdot E^2[N] + \\ - E^2[x] \cdot E^2[N] \end{aligned} \quad (5.56)$$

Lembrando que:

$$\text{var}[N] = E[N^2] - E^2[N] \quad (5.57)$$

$$\text{e } \text{var}[x] = E[x^2] - E^2[x] \quad (5.58)$$

podemos substituir $E[N^2]$ e $E[x^2]$ em (5.56) respectivamente por $\text{var}[N] + E^2[N]$ e por $\text{var}[x] + E^2[x]$, resultando após simplificações:

$$\text{var}[y] = E^2[x] \cdot \text{var}[N] + E[N] \cdot \text{var}[x] \quad (5.59)$$

que é a expressão desejada da variância da variável composta y.

6. CONDICIONANTES FÍSICOS E TEMPORAIS

6.1. Introdução

As variáveis que influem no dimensionamento de um sistema de coleta/distribuição apresentam, de uma maneira geral, variações estatísticas apreciáveis. Por essa razão, é precário dimensionar o sistema através de um modelo determinístico em que os efeitos da aleatoriedade de algumas variáveis não sejam considerados.

Alguns condicionantes físicos e temporais devem ser examinados e incorporados à metodologia de análise e dimensionamento, de forma a se chegar a resultados mais realistas.

Um primeiro aspecto a considerar é o da capacidade física dos veículos de coleta/distribuição. Dependendo das características físicas da carga (peso, volume) e da capacidade volúmetrica ou em peso do veículo, é possível acontecer, em certas ocasiões, superlotação do caminhão. Nesse caso, parte da carga não poderá ser transportada pelo veículo, devendo ser atendida de outra forma.

Outra restrição importante no dimensionamento do sistema é a da máxima jornada de trabalho dos tripulantes (motorista, ajudantes). Acima de um determinado número de horas de trabalho por dia, o desgaste físico e psíquico torna-se excessivo, prejudicando o empregado e os níveis de desempenho do próprio sistema. Ademais, a jornada máxima é limitada por lei e por acordos específicos com os sindicatos. Ocorre, assim, uma restrição temporal no dimensionamento e na operação do sistema.

Um outro problema que surge no dimensionamento de sistemas de coleta/distribuição operando em regiões relativamente extensas é o do desequilíbrio, em termos de produção, entre os veículos que atendem zonas próximas ao depósito e os que atendem zonas situadas na periferia. Esse desequilíbrio implica em tratamento diversificado para as zonas de coleta/distribuição, com base na distribuição espacial em torno do depósito.

Esses três tipos de problema serão analisados neste Capítulo, devendo os resultados serem incorporados à metodologia de análise e dimensionamento dos sistemas de coleta e distribuição.

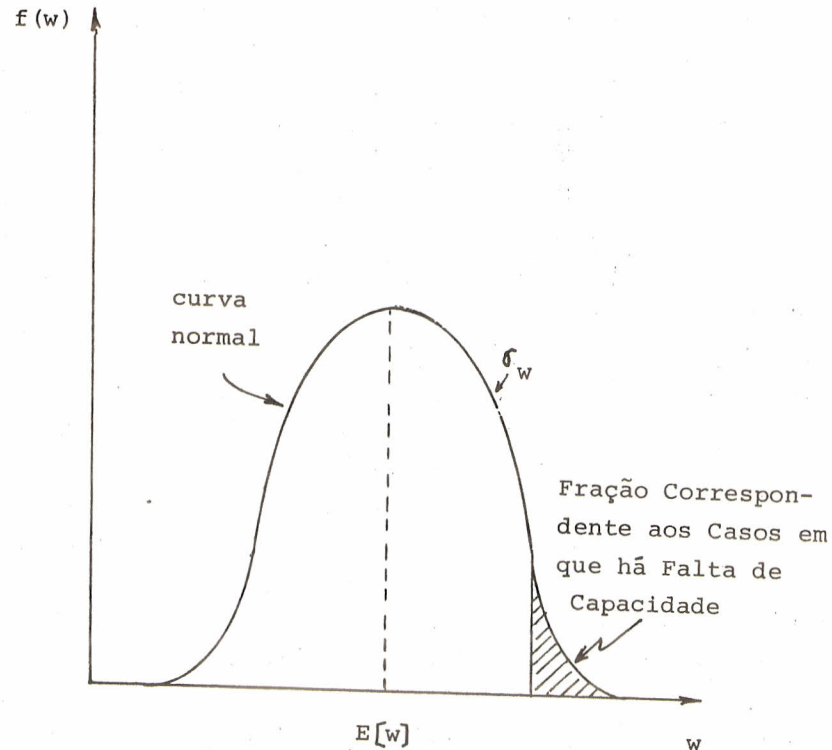
um coeficiente ϕ menor do que a unidade.

Deve-se observar, por outro lado:

$$W \leq \phi \cdot V \quad (6.4)$$

que é a restrição de capacidade física do veículo.

Sendo W a soma de um número relativamente grande de variáveis aleatórias, o teorema do limite central nos autoriza a adotar a hipótese de que W é regido por uma distribuição normal. Assim, conforme mostrado na Fig. 6.1, haverá uma certa porcentagem do tempo em que parte da carga não é atendida pelo veículo, por falta de capacidade física (volumétrica, no caso, ou em peso, em outros).



Fração da Demanda não Atendida por Falta de Capacidade do Veículo

Fig. 6.1

A fração do tempo em que isso ocorrerá é igual à área hachureada da Fig. 6.1 (área da cauda da distribuição normal).

Desejamos calcular, na verdade, a sobra média de carga no depósito, que é representada na Fig. 6.2 por \overline{SW} . Para isso é necessário considerar a distribuição normal normalizada. Sejam $f(\eta)$ e $\phi(\eta)$ respectivamente a ordenada e a área da distribuição normal normalizada.

O valor de η , parâmetro da normal normalizada, é dado pela relação entre o desvio absoluto referido à média e o desvio padrão:

$$\eta = \frac{\phi \cdot V - E[W]}{\sigma_W} \quad (6.4)$$

onde $\sigma_W = \{\text{var}[W]\}^{1/2}$

O valor de \overline{SW} é dado por⁽¹⁾:

$$\overline{SW} = (\phi \cdot V - E[W]) \cdot \phi^*(\eta) + \sigma_W \cdot f(\eta) \quad (6.5)$$

onde $f(\eta)$ é a ordenada da normal normalizada no ponto η e $\phi^*(\eta)$ é a área da cauda da distribuição, à direita do ponto η :

$$\phi^*(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} f(x) dx \quad (6.6)$$

Conhecendo-se a sobra média \overline{SW} , medida em unidades de volume (ou em peso, no caso de cargas densas), pode-se estimar o número médio de visitas não realizadas por dia, dividindo-se \overline{SW} por $E[u]$:

$$\overline{SN} = \frac{\overline{SW}}{E[u]} \quad (6.7)$$

As entregas não atendidas pelo veículo principal podem ser realizadas por um veículo menor, operando em zonas maiores.

(1) KENDALL (13), exercício nº 7. Vide dedução no Apêndice deste Capítulo.

6.2. Restrição da capacidade física do veículo.

As cargas leves tendem a lotar a capacidade volumétrica útil do veículo de distribuição antes que seja atingido o limite de peso. O inverso ocorre com mercadorias de densidades elevadas, quando a tonelage passa a ser o fator limitante. A análise que se segue é aplicável ao dois casos, bastando, para isso, que sejam trocadas algumas das variáveis no modelo.

Seja V a cubagem útil do compartimento de carga do veículo de distribuição⁽¹⁾. Seja u_i , por outro lado, o volume total ocupado pela mercadoria a ser entregue no i ésimo cliente. A variável aleatória u_i é representada pelo seu valor esperado $E[u_i]$ e pela variância $\text{var}[u_i]$.

Havendo N pontos de entrega a serem visitados pelo veículo, a cubagem útil total W ocupada pela carga, é igual à:

$$W = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N \quad (6.1)$$

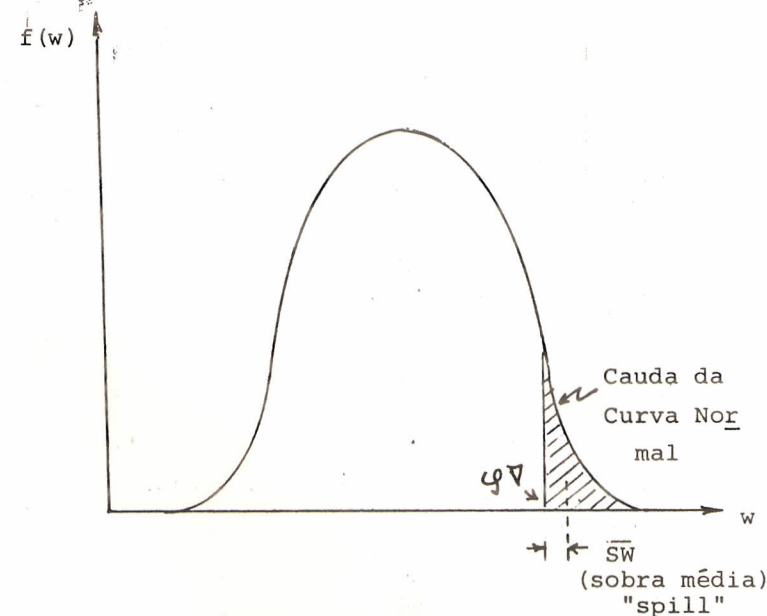
ou seja, W é a soma de N valores aleatórios igualmente distribuídos, em que N também é uma variável aleatória. Conforme já visto no Capítulo 5:

$$E[W] = E[N] \cdot E[u] \quad (6.2)$$

$$\text{e} \quad \text{var}[W] = E[N] \cdot \text{var}[u] + E^2[u] \cdot \text{var}[N] \quad (6.3)$$

Devido à quebra de estiva dentro do compartimento de carga do veículo, que corresponde às perdas decorrentes dos espaços vazios entre as peças, vão livres para acesso dos descarregadores, etc, o volume útil V do caminhão deve ser multiplicado por

(1) Consideraremos, na análise, o caso da limitação por volume. Para os casos em que a limitação seja por peso, as deduções são análogas.



Sobra Média por Excesso de Carga

Fig. 6.2

res, ou, em casos em que a urgência não seja premente, podem ser deixadas para o dia seguinte. Em qualquer caso há um custo adicional envolvido, seja da entrega excepcional, seja a da retenção da carga por mais um dia no depósito.

Exemplo 6.1 Num determinado serviço de distribuição de carga parcelada são alocadas, em média, 30 entregas por veículo e por dia. O volume médio de cada entrega é igual a 300 decímetros cúbicos e o desvio padrão é de 70 dcm³. O compartimento de carga do veículo tem capacidade útil de 17 m³, com coeficiente de quebra de estiva da ordem de 40%.

Admitindo que o número diário de entregas por zona seja totalmente aleatório (Poisson) calcular a demanda não atendida por restrição de capacidade volumétrica dos veículos.

Sendo o número de entregas totalmente aleatório, ou seja, regido por uma distribuição de Poisson, a variância é igual à média (vide Novaes, (16), Cap. 2). Dessa forma:

$$E[N] = 30$$

$$\text{var}[N] = 30$$

Por outro lado temos:

$$E[u] = 300 \text{ dcm}^3$$

$$\text{var}[u] = 70^2 = 4900 \text{ dcm}^3$$

Aplicando as expressões (6.2) e (6.3):

$$E[W] = E[N] \cdot E[u] = 30 \times 300 = 9000 \text{ dcm}^3 = 9 \text{ m}^3$$

$$\begin{aligned} \text{var}[W] &= E[N] \cdot \text{var}[u] + E^2[u] \cdot \text{var}[N] = \\ &= 30 \times 4900 + 300^2 \times 30 = 284,7 \times 10^4 \end{aligned}$$

e portanto

$$\sigma_W = \{\text{var}[W]\}^{1/2} = 1687 \text{ dcm}^3 = 1,69 \text{ m}^3$$

A capacidade útil líquida do veículo é obtida reduzindo-se de 40% o volume bruto disponível de 17 m^3 . Ou seja, é igual a $10,2 \text{ m}^3$.

A variável normal normalizada (η) equivalente é calculada a seguir:

$$\eta = \frac{\phi \cdot V - E[W]}{\sigma_W} = \frac{10,2 - 9,0}{1,69} = 0,71$$

Entrando com o valor de η numa tabela da função normal normalizada (ordenada e área) obtemos:

$$f(\eta) = 0,310 \quad \text{e} \quad \phi^*(\eta) = 0,239 \text{ (área da cauda)}$$

Aplicando a expressão (6.5):

$$\overline{SW} = (10,2 - 9) \times 0,239 + 1,69 \times 0,310 = 0,81 \text{ m}^3$$

Dessa forma a sobra média diária de carga é igual a $0,81 \text{ m}^3$. Dividindo-se esse valor pela cubagem média de uma entrega (300 dcm^3), obtém-se o número médio de paradas não realizadas por dia:

$$\overline{SN} = \frac{0,81 \times 10^3}{300} \approx 2,7$$

Dessa forma, cerca de 2,7 entregas, em média, deixam de ser realizadas diariamente em cada zona por falta de capacidade útil dos veículos. Como a taxa de não atendimento é relativamente alta o projetista deveria aumentar a cubagem do caminhão, de um lado, ou diminuir a alocação média de entregas a serem cumpridas por veículo. Esse tipo de análise será apresentado mais adiante, em que procuraremos enfocar os diversos aspectos envolvidos num único modelo.

6.3. Limitação imposta pela jornada de trabalho da tripulação

A tripulação do veículo de distribuição é composta pelo motorista e por um ou mais ajudantes. Há casos de entrega de carga parcelada, ou de prestação de serviços, em que a equipe é formada apenas por uma pessoa, a qual dirige também o veículo.

A jornada normal de trabalho da tripulação, que inclui as horas de serviço menos o período para almoço, é estabelecida por lei e pelos acordos trabalhistas dos respectivos sindicatos. Seja H_0 a jornada normal de trabalho e H_1 o máximo período de tempo contínuo permitido por dia.

Nota-se que H_1 pode ser fixado por acordos com os sindicatos ou por normas impostas pela própria empresa. Mesmo pagando horas extras regulamentares após a jornada básica, não é conveniente avançar demais além do período normal de trabalho por razões de desgaste físico e psíquico.

No nosso modelo admitimos, portanto, três níveis de jornada de trabalho:

- (I) nível normal, compreendido dentro das H_0 horas de trabalho regulamentar. Nesse período a tripulação recebe

be os valores salariais normais.

- (II) serviço extra, correspondente ao trabalho em excesso de H_0 horas por dia, mas inferior ao limite H_1 . Para essas horas extras são pagos os acréscimos previstos em lei e nos acordos trabalhistas.
- (III) nível crítico, que ocorre quando a jornada de trabalho ultrapassa o ponto H_1 , e que deve ser evitado. Nesse caso é pago também as horas extras, se eventualmente ocorrer tal excesso, mas deve-se evitá-lo.

Se considerarmos que o tempo de ciclo TC é a soma de um número relativamente grande de intervalos pequenos, podemos adotar uma distribuição normal para explicar sua variação probabilística (teorema do limite central).

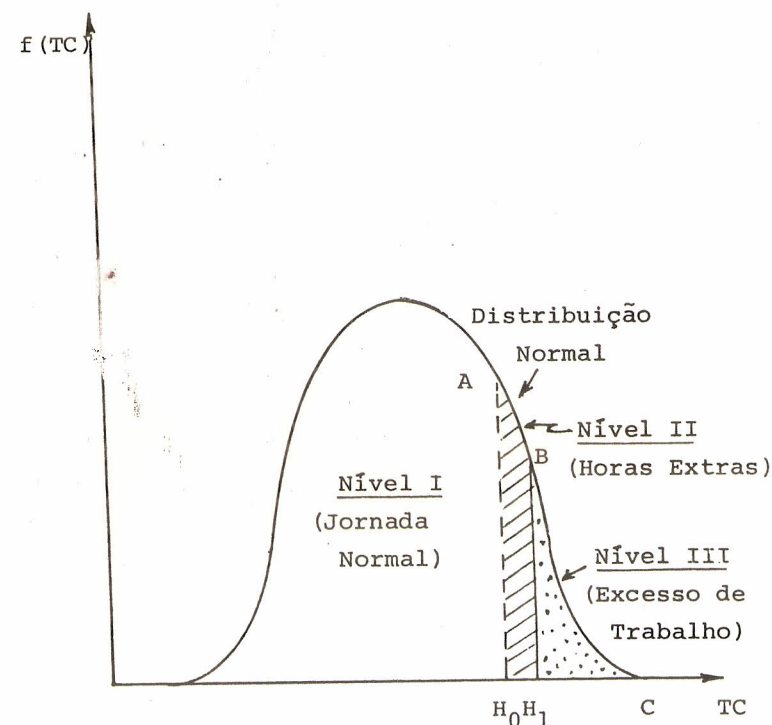
As expressões (5.7) e (5.8), do Capítulo 5, fornecem a média e o desvio padrão de TC. As propriedades da distribuição normal permitem então que se determinem os seguintes parâmetros:

- (a) Média de horas extras por dia.

Na Fig. 6.3 observa-se que as horas extras correspondem à área sob a curva, entre os pontos H_0 e H_1 . Para calcular o valor esperado de horas extras por veículo-dia, consideremos a cauda da distribuição normal correspondente à $TC > H_0$ e $TC > H_1$ respectivamente (Fig. 6.4). As áreas da cauda, para esses dois casos, são representadas pelas probabilidades p_0 e p_1 .

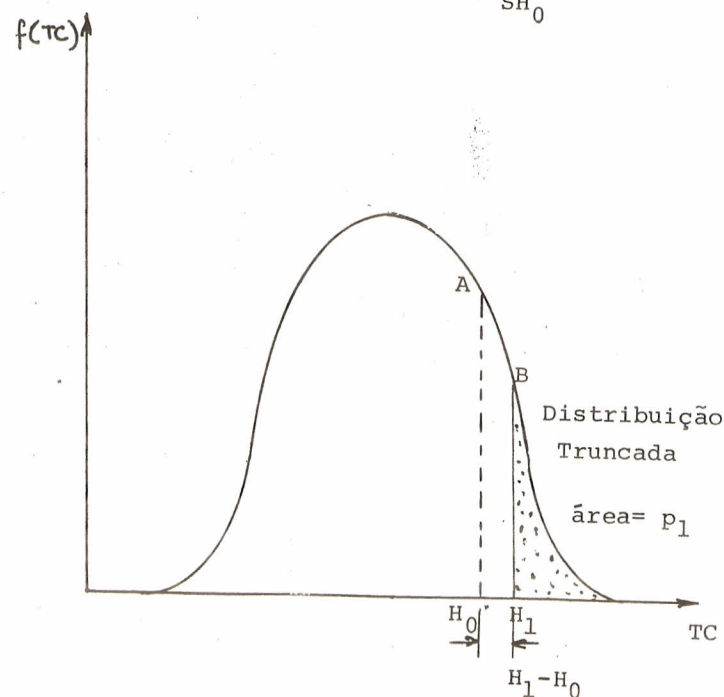
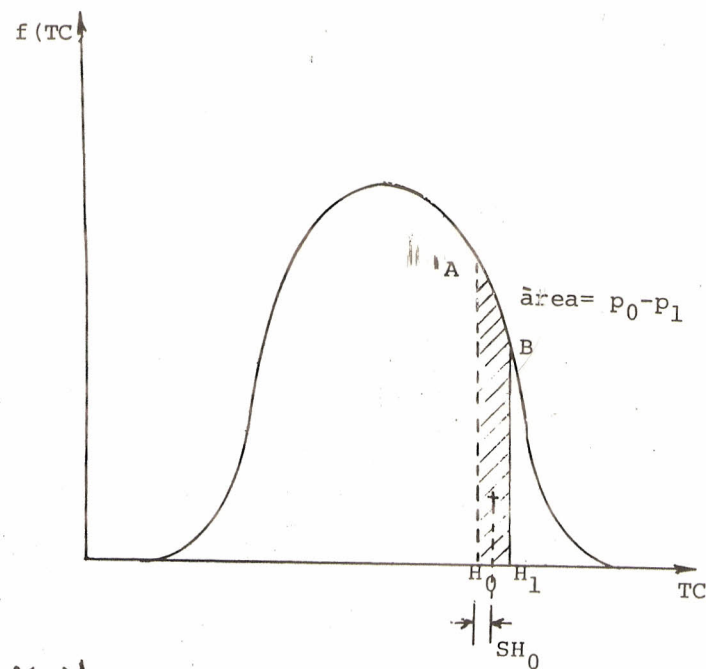
Seja SH_0 a abscissa do centro de gravidade de ABH_1H_0 , conforme mostra a Fig. 6.4. Temos então:

- a) SH_0 é o valor esperado de horas extras para $H_0 < TC \leq H_1$, com probabilidade $p_0 - p_1$.
- b) $H_1 - H_0$ é o valor esperado de horas extras para $TC > H_1$, já que H_1 é o limite superior máximo para o tempo de ciclo de um veículo. Esse caso ocorre com probabilidade p_1 .



Restrições Impostas pela Jornada de Trabalho

Fig. 6.3



Determinação do Valor Esperado de Horas Extras

Fig. 6.4

Compondo os dois casos, o valor esperado das horas extras é dado por:

$$HE = SH_0 \cdot (P_0 - P_1) + (H_1 - H_0) \cdot P_1 \quad (6.8)$$

As probabilidades P_0 e P_1 , que correspondem às áreas H_0ACH_0 e H_1BCH , sob a curva normal, na Fig. 6.3, são calculadas através do complemento da função integral $\Phi(\eta)$, como apresentado na secção 6.2:

$$\begin{aligned} P_0 &= \int_{\eta_0}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1 - \int_{-\infty}^{\eta_0} f(x) \cdot dx = \\ &= 1 - \Phi(\eta_0) \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$P_1 = \int_{\eta_1}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1 - \Phi(\eta_1) \quad (6.10)$$

A probabilidade de ocorrência do nível crítico da jornada de trabalho (isto é, $TC > H_1$) é igual à P_1 .

O analista deve evitar soluções que impliquem em valores significativos da probabilidade P_1 . Na realidade o intervalo $H_0 - H_1$ constitui uma válvula de compensação ("buffer") para a mão-de-obra. Isso porque o tempo de ciclo de veículos de distribuição, principalmente no meio urbano, apresenta variâncias elevadas, o que dificulta o dimensionamento mais preciso desse tipo de sistema.

Se o sistema fosse dimensionado de forma a se evitar horas extras (isto é, $TC \leq H_0$, nível I) o resultado seria a subutilização do equipamento e da tripulação. Tal ocorreria porque $E[TC]$, a média do tempo de ciclo, seria significativamente menor do que H_0 .

Permitindo que a jornada de trabalho avance no intervalo H_0 , H_1 (isto é, $H_0 < TC < H_1$, nível II), com pagamento de horas extras, o operador garantirá melhor aproveitamento para a mão-de-obra e para o equipamento. Deve-se no entanto, evitar que o tempo de ciclo TC ultrapasse o nível crítico H_1 (nível III).

Esses conceitos ficarão mais claros na resolução do Exemplo 6.3, da secção 6.5, onde o método será aplicado ao dimensionamento de um sistema de distribuição urbana de mercadorias.

Exemplo 6.2 Prosseguimos no desenvolvimento do Exemplo 6.1, adotando adicionalmente os seguintes valores:

$E[t]$ - tempo médio de percurso do depósito até a zona e vice-versa (10 km à velocidade média de 30 km/h): 20 minutos.

CV_t - coeficiente de variação da variável t : 20%.

$E[\tau]$ - tempo médio de percurso entre paradas sucessivas, dentro da zona (2 km à velocidade média de (15 km/h): 8 minutos.

CV_τ - coeficiente de variação de τ : 50%.

$E[t_p]$ - tempo médio de parada em cada ponto de entrega: 10 minutos.

CV_{t_p} - coeficiente de variação de t_p : 40%.

d - distância média entre o depósito e as zonas: 10 km.

δ - distância média por ponto de parada, dentro da zona: 2 km.

H_0 - jornada diária de trabalho normal: 8,5 hs.

H_1 - jornada máxima admissível: 10 hs.

Em primeiro lugar vamos estimar o número de paradas realizadas por veículo uma vez que, por razões de restrição de capacidade (Exemplo 6.1), ocorrem sobras, que são atendidas de outra forma. Lembramos que o dimensionamento inicial previa uma média de 30 entregas por veículo e por dia. Por limitações de capacidade 2,7 entregas não se realizam, em média, a cada dia. Dessa forma:

$$E[N'] = 30 - 2,7 = 27,3 \text{ entregas/dia}$$

Vamos admitir que, por se tratar de sobras marginais, a distribuição resultante não se altere significativamente em termos estruturais. Ou seja, admitimos mesmo coeficiente de variação, que no caso, é dado por:

$$CV_N = \frac{\sigma_N}{E[N]} = \frac{\{\text{var}[N]\}^{1/2}}{E[N]} \quad (6.11)$$

Mas como na distribuição de Poisson a variância é igual à média, tem-se:

$$CV_N = \{E[N]\}^{-1/2} = 30^{-1/2} = 0,182$$

Dessa forma o desvio padrão de N' é igual a $0,182 \times 27,3 = 4,97$, levando à variância de:

$$\text{var}[N'] = (4,97)^2 = 24,7$$

Inicialmente vamos calcular a média e a variância de T_p^* , que é a soma dos tempos de parada dentro da zona de distribuição. Pela equação (5.3), do Capítulo 5:

$$E[T_p^*] = E[N'] \cdot E[t_p] = 27,3 \times 10 = 273 \text{ min}$$

Para calcular a variância de T_p^* necessitamos da variância de t_p , entre outros parâmetros, que é dada por:

$$\text{var}[t_p] = (CV_{tp} \cdot E[t_p])^2 = (0,4 \times 10)^2 = 16 \text{ min}^2$$

Aplicando a expressão (5.4):

$$\begin{aligned} \text{var}[T_p^*] &= E[N'] \cdot \text{var}[t_p] + E^2[t_p] \cdot \text{var}[N'] = \\ &= 27,3 \times 16,0 + 10^2 \times 24,7 = 2906,8 \text{ min}^2 \end{aligned}$$

Calculamos agora a média e a variância de T_t^* , que é a soma dos tempos de percurso entre paradas sucessivas. Pela equação (5.5):

$$E[T_t^*] = E[N'] \cdot E[\tau] = 27,3 \times 8 = 218,4 \text{ min}$$

A variância de τ , por sua vez, é igual à:

$$\text{var}[\tau] = (CV_\tau \cdot E[\tau])^2 = (0,5 \times 8)^2 = 16 \text{ min}^2$$

Aplicando a equação (5.6):

$$\begin{aligned} \text{var}[T_t^*] &= E[N'] \cdot \text{var}[\tau] + E^2[\tau] \cdot \text{var}[N'] = \\ &= 27,3 \times 16 + 8^2 \times 24,7 = 2017,6 \text{ min}^2 \end{aligned}$$

A variância de t , por sua vez, tem o seguinte valor:

$$\text{var}[t] = (CV_t \cdot E[t])^2 = (0,2 \times 20)^2 = 16 \text{ min}^2$$

Aplicamos agora as expressões (5.7) e (5.8) para calcular o tempo de ciclo do caminhão de distribuição:

$$\begin{aligned} E[TC] &= 2 \cdot E[t] + E[T_p^*] + E[T_t^*] = \\ &= 2 \times 20 + 273 + 218,4 = 531,4 \text{ min} = 8,86 \text{ horas} \end{aligned}$$

$$\text{var}[TC] = 2 \cdot \text{var}[t] + \text{var}[T_p^*] + \text{var}[T_t^*] =$$

$$2 \times 16 + 2906,8 + 2017,6 = 4930,4 \text{ min}^2$$

e portanto:

$$\sigma_{TC} = \{\text{var}[TC]\}^{1/2} = 70,4 \text{ min} = 1,17 \text{ hs}$$

Calculamos agora η_0 e η_1 , que representam a variável normal normalizada para os pontos H_0 e H_1 , respectivamente:

$$\eta_0 = \frac{H_0 - E[TC]}{\sigma_{TC}} = \frac{8,5 - 8,86}{1,17} = -0,31$$

$$\eta_1 = \frac{H_1 - E[TC]}{\sigma_{TC}} = \frac{10 - 8,86}{1,17} = +0,97$$

Entrando com η_0 e η_1 numa tabela da curva normal normalizada, tiramos:

$$P_0 = 1 - \Phi(\eta_0) = 1 - 0,3783 = 0,6217$$

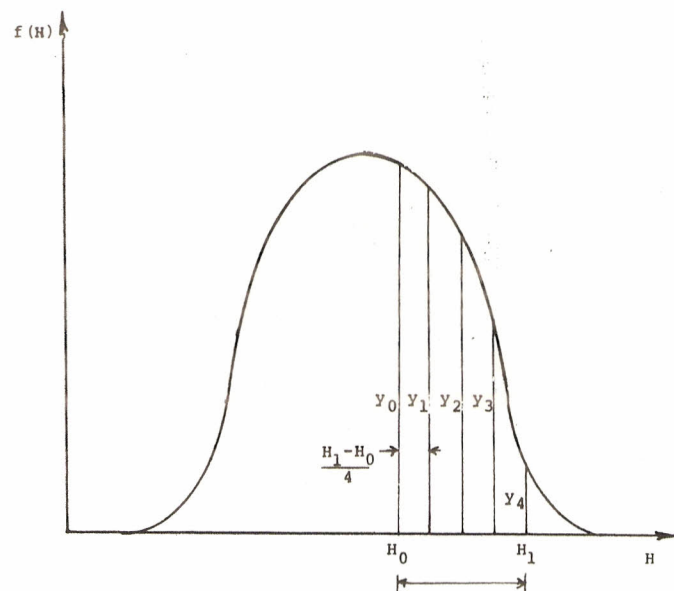
$$P_1 = 1 - \Phi(\eta_1) = 1 - 0,8365 = 0,1635$$

Para calcular SH_0 (abscissa do centro de gravidade da área ABH_1H_0 , da Fig. 6.3) é necessário lançar mão de um método numérico de integração. Matematicamente se tem:

$$SH_0 = \frac{1}{(P_0 - P_1)} \int_{H_0}^{H_1} (TC - H_0) \cdot f(TC) \cdot d(TC) \quad (6.12)$$

sendo $f(TC)$ a distribuição normal (densidade de probabilidade).

Para se obter uma aproximação para a integral (6.12) lançamos mão da fórmula de Simpson. Para isso divide-se o intervalo H_0, H_1 num número par de partes iguais (Fig. 6.5). No



Divisão da Distribuição Normal em Intervalos Iguais.

Fig. 6.5

caso, trabalhando com a variável normal normalizada, e dividindo o intervalo H_0, H_1 , em quatro partes iguais, temos:

$$\Delta TC = (H_1 - H_0)/4 \quad (6.13)$$

ou $\Delta \eta = (\eta_1 - \eta_0)/4 = [0,97 - (0,31)]/4 = 0,32$

sendo:

$$x_0 = \eta_0 = -0,31$$

$$x_1 = x_0 + \Delta \eta = -0,31 + 0,32 = 0,01$$

$$x_2 = x_1 + \Delta \eta = 0,01 + 0,32 = 0,33$$

$$x_3 = x_2 + \Delta \eta = 0,33 + 0,32 = 0,65$$

$$x_4 = x_3 + \Delta \eta = 0,65 + 0,32 = 0,97$$

Para cada ponto x_0, x_1, \dots, x_4 calcula-se o valor de $f(x)$, através da expressão de distribuição normal:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot x_i^2\right) \quad (6.14)$$

Os valores das ordenadas y_0, y_1, \dots, y_5 são iguais ao produto de $f(x_i)$ pelo braço, em relação ao ponto η_0 :

$$y_i = x_i \cdot f(x_i) \quad (6.15)$$

A integral, calculada pela fórmula de Simpson, é dada por:

$$S = \frac{\Delta \eta}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) \quad (6.16)$$

Finalmente, o braço SH_0 é calculado por meio de:

$$SH_0 = \frac{S \cdot \sigma_{TC}}{(P_0 - P_1)} \quad (6.17)$$

Na expressão acima, o valor de S , obtido pela fórmula de Simpson, corresponde à variável normal normalizada. Daí a necessidade de multiplicar o resultado pelo desvio padrão σ_{TC} .

Calculando, para o exemplo, os valores de y_i e aplicando a fórmula de Simpson, obtém-se $S = 0,272$, levando à:

$$SH_0 = \frac{0,272 \times 1,17}{(0,6217 - 0,1635)} = 0,69 \text{ hs}$$

Aplicando agora a expressão (6.8), tem-se:

$$\begin{aligned} HE &= SH_0 \cdot (P_0 - P_1) + (H_1 - H_0) \cdot P_1 = \\ &= 0,69 \times (0,6217 - 0,1635) + \\ &+ (10 - 8,5) \times 0,1635 = 0,56 \text{ hs} \end{aligned}$$

Ou seja, cada veículo apresentará, em média cerca de 0,56 horas de serviços extras por dia.

Voltaremos a analisar esse tipo de restrição na seção 6.5, onde será desenvolvido um exemplo de aplicação completo.

6.4. Organização espacial das zonas

A divisão da área total a ser atendida em zonas de distribuição depende de uma série de fatores de ordem geográfica (rede viária, limites naturais, distância da zona ao depósito, etc) e de fatores ligados à demanda (distribuição dos pontos, quantidade de carga a ser entregue em cada parada), etc.

Na fase de operação do sistema a divisão da região em zonas, embora passível de tratamento analítico-computacional, é usualmente realizada manualmente e de forma iterativa, através da experimentação em escala real e com as correções que a prática do dia-a-dia vai ditando.

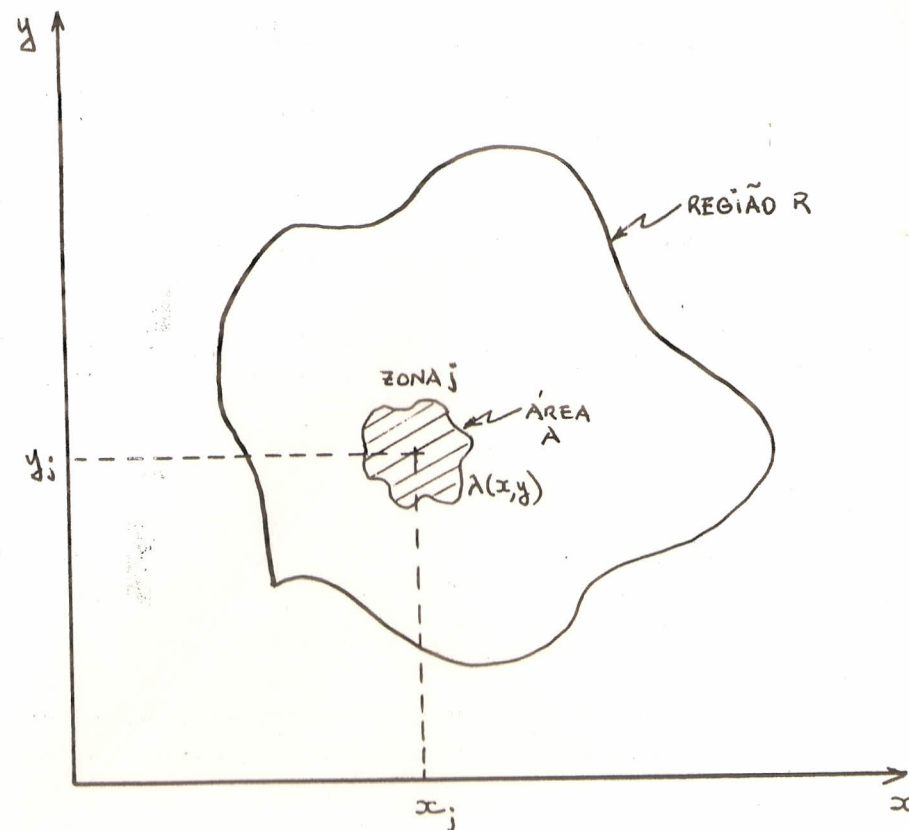
Na fase de análise, dimensionamento e projeto do sistema é necessário, no entanto, avaliar certos parâmetros básicos, o que pode ser feito através de modelos específicos.

Suponhamos que, para a região R da Fig. 6.6, seja conhecida a distribuição espacial da densidade de pontos, representada por uma função contínua $\lambda(x, y)$. A função de produção de um veículo de distribuição na zona j, da área A, depende essencialmente de dois fatores:

- número médio \bar{N} de pontos a serem atendidos na zona j.
- tempo útil disponível para efetuar as entregas dentro da zona.

O número médio de pontos de uma zona é dado pela integral da densidade sobre a área A:

$$\bar{N} = \iint_A \lambda(x, y) \, dx \, dy \quad (6.18)$$



Variação Espacial da Densidade λ

Fig. 6.6

Na prática, conforme será visto no Exemplo 6.3, é usual dividir a área da região R em quadrículas elementares, para as quais se calcula a densidade média. Nesse caso a integral dupla (6.18) é substituída pela somatória.

O tempo útil disponível para que o veículo realize o serviço de distribuição é igual ao tempo de ciclo (TC) menos o tempo necessário para ir do depósito à zona e vice-versa. Usando a terminologia adotada na seção 5.2, temos:

$$E[TU] = E[TC] - 2 \cdot E[t] \quad (6.19)$$

onde:

$E[TU]$ - valor esperado do tempo útil disponível para realização do serviço.

$E[TC]$ - valor esperado do tempo de ciclo.

$E[t]$ - valor esperado do tempo de percurso do depósito à zona.

Dividindo a relação (6.19) por $E[TC]$ obtemos a fração f do tempo de ciclo que é efetivamente empregada na realização do serviço de distribuição:

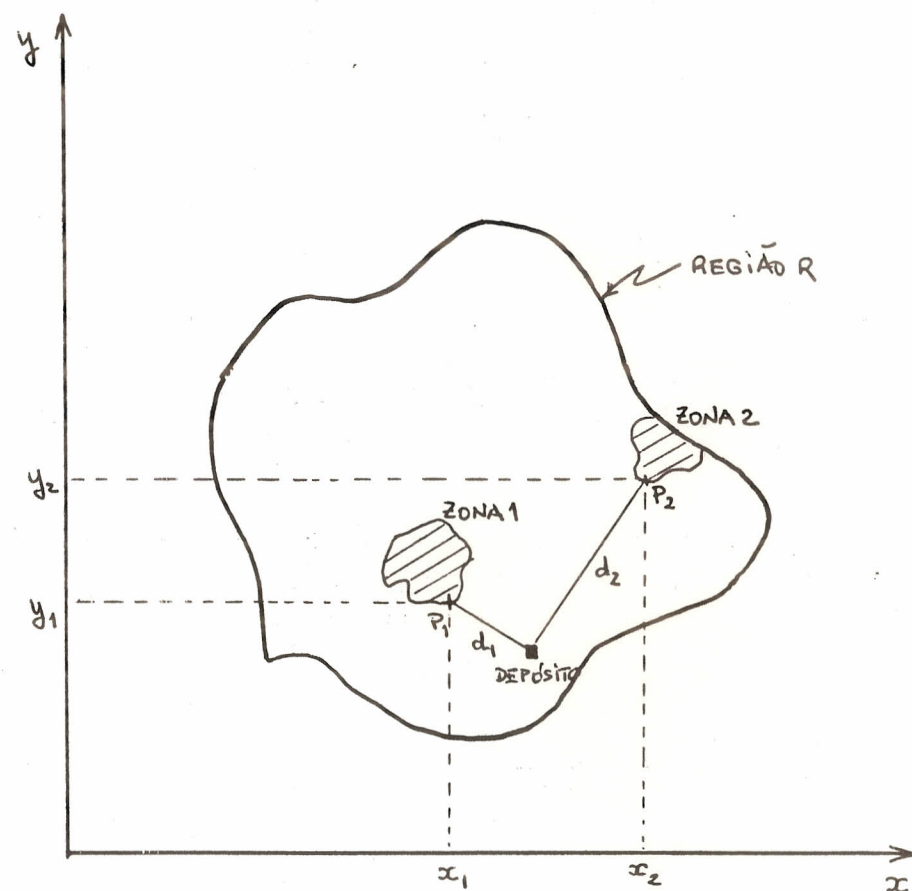
$$f = \frac{E[TU]}{E[TC]} = 1 - \frac{2 \cdot E[t]}{E[TC]} \quad (6.20)$$

Através da calibração (regressão simples) podemos relacionar o tempo $E[t]$ com a distância d entre o depósito e a zona. Uma relação linear, do tipo:

$$E[t] = a + b \cdot d \quad (6.21)$$

é usualmente válida. Para ajustar a relação (6.21) medem-se as distâncias através do odômetro do veículo e registram-se os tempos de percurso do depósito à zona. Obtida uma amostra razoável, utiliza-se um programa de regressão linear simples entrando-se com os pares $E[t]$, d ; o programa fornece então os valores de a e b .

Uma maneira expedita de se obter uma estimativa preliminar para a e b é o de considerar apenas dois pontos para a calibração. Um dos pontos deve ser tomado próximo ao depósito (ponto P_1 , Fig. 6.7) e, o outro, tão longe quanto possível (ponto P_2 , Fig. 6.7). Sendo d_1 e t_1 a distância e o tempo de percurso do



Variação da Distância das Zonas ao Depósito

Fig. 6.7

depósito ao ponto P_1 e d_2 , t_2 os valores referentes ao ponto P_2 , temos:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= a + b \cdot d_1 \\ t_2 &= a + b \cdot d_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

de onde tiramos:

$$b = \frac{t_1 - t_2}{d_1 - d_2} \quad (6.23)$$

$$e \quad a = t_1 - b \cdot d_1 \quad (6.24)$$

Tendo assim uma representação aproximada do tempo de percurso entre o depósito e as zonas, em função da distância, podemos substituir (6.22) em (6.20), obtendo-se:

$$f = 1 - \frac{2 \cdot (a + b \cdot d)}{E[TC]} \quad (6.25)$$

Para dividir a região R em sub-regiões, vamos admitir que cada subregião seja atendida por um mesmo número N de veículos. É desejável também que cada veículo seja utilizado durante todo o ciclo diário, representado por E[TC].

Para cada parada efetuada o veículo gasta, em média, um tempo TP + τ, onde TP é a duração média de parada e τ é o tempo médio de deslocamento entre paradas. Sendo E[TU] a parte útil do ciclo, o número esperado de paradas, por ciclo, é igual à E[TU] dividido por TP + τ.

A produção potencial da frota de N* veículos que atende uma subregião S é proporcional ao número de veículos e ao número de paradas que cada veículo poderá realizar, ou seja:

$$Q_j^* \cong N^* \cdot \frac{E[TU_j]}{TP + \tau_j} = N^* \cdot \frac{f_j \cdot E[TC]}{TP + \tau_j} \quad (6.26a)$$

que varia para cada quadrícula j.

Numa primeira aproximação podemos admitir que a relação TP/τ_j seja constante, ou seja TP ≅ k₁ τ_j. Lembrando que τ_j = k₂ · λ_j^{-1/2} (secção 5.3), que E[TC] é constante, e efetuando as substituições em (6.26a), obtemos:

$$Q_j^* \cong N^* \cdot \frac{f_j}{\lambda_j^{-1/2}} = N^* \cdot f_j \lambda_j^{1/2} \quad (6.26b)$$

A demanda potencial para a quadrícula j, por sua vez, é igual ao produto da área A da quadrícula pela densidade λ_j:

$$D_j^* = A \cdot \lambda_j \quad (6.27a)$$

Igualando Q_j^{*} e D_j^{*} obtemos:

$$N^* \cong \frac{\lambda_j^{1/2}}{f_j} \quad (6.27b)$$

Assim, se considerarmos três subregiões I, II e III, para que as frotas sejam aproximadamente iguais e o período de operação diária seja aproximadamente igual a E[TC], é preciso observar a igualdade:

$$\sum_{i \in I} \left(\frac{\lambda_i^{1/2}}{f_i} \right) = \sum_{j \in II} \left(\frac{\lambda_j^{1/2}}{f_j} \right) = \sum_{k \in III} \left(\frac{\lambda_k^{1/2}}{f_k} \right)$$

(6.28)

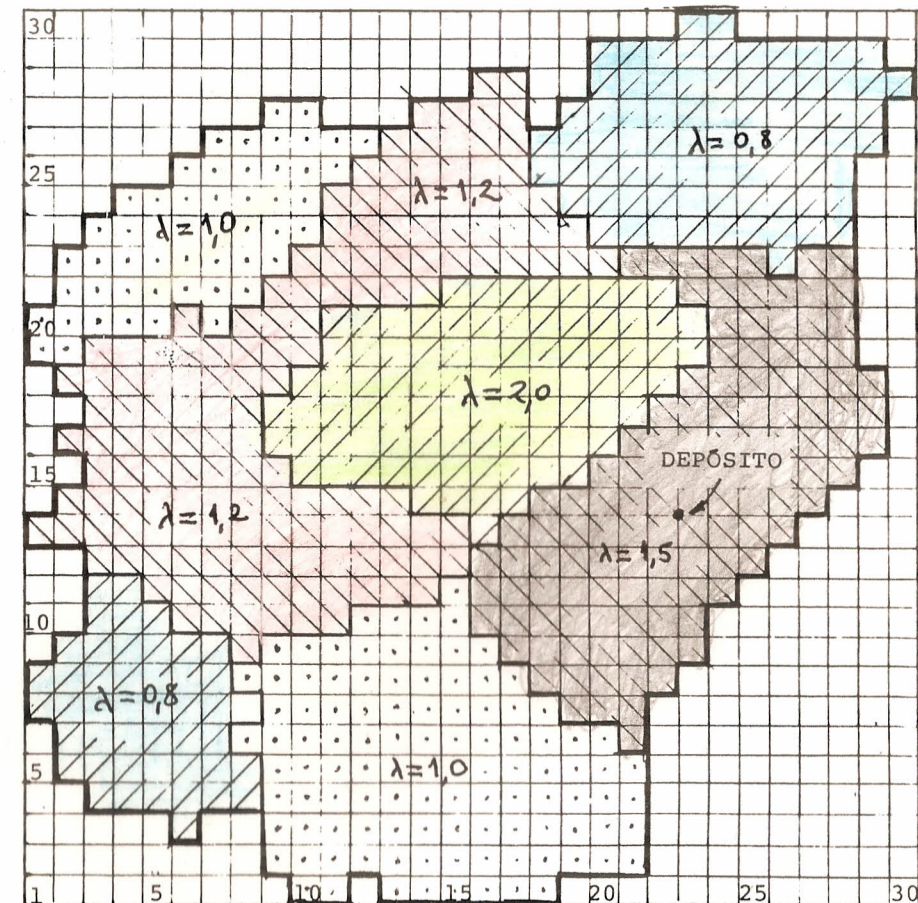
A partir do depósito as quadrículas vão sendo agregadas segundo a ordem crescente da distância, de forma que as somatórias indicadas em (6.28) sejam aproximadamente iguais para as três sub-regiões. Os conceitos apresentados nesta secção ficarão mais claros através da resolução de um exemplo.

Exemplo 6.3. Na Fig. 6.8 é apresentada a região R de forma digitalizada, constituída por 639 quadrículas de 1 km de lado, com área total de 639 km². As densidade médias de paradas são também apresentadas, notando-se variação de 0,8 pontos/km²/dia até 2,0 pontos/km²/dia. O depósito está localizado no ponto de coordenadas x = 22 km e y = 13 km (valores medidos a partir da origem arbitrariamente escolhida, indicada na Fig. 6.8).

O propósito deste exemplo é o de agrupar as quadrículas em três sub-regiões com igual nível de produção média diária e ordenadas segundo a distância ao depósito. Assim, a sub-região A, englobará as zonas próximas ao depósito; a sub-região C será formada pelas zonas mais distantes em relação ao depósito. A sub-região B representaria a situação intermediária.

Esse tipo de sub-divisão constitui um primeiro passo no sentido de se obter os contornos de cada uma das M zonas de distribuição. Existem técnicas eficientes de processamento de informações espaciais através de computador que permitem ir mais longe nesse tipo de análise. Constituem, no entanto, assunto bastante específico, fugindo do escopo básico deste texto.

Neste exemplo procurou-se resolver o problema de se agrupar as zonas em três sub-regiões com igual esforço de produ



Representação de Uma Região de Distribuição Por
Meio de Quadrículas (Exemplo 6.3)

Fig. 6.8

ção. Cada sub-região apresentará distância média diferente em relação ao depósito, bem como área coberta e densidade média.

O Programa nº 3, apresentado no Anexo ao fim do livro, foi desenvolvido inicialmente em linguagem Basic para microcomputador. Em razão do número elevado de quadrículas (639) e da rotina de ordenação dos pontos segundo a distância ao depósito, o tempo total de processamento se mostrou muito elevado. Linguagens compiladas, tipo Quick Basic, Pascal, Fortran e C, permitem resolver esse tipo de problema em tempo sensivelmente mais reduzido. Optou-se, por isso, pela linguagem Pascal.

O programa está subdividido em duas partes. A primeira trata da alimentação dos dados relacionados com as quadrículas (coordenadas, dimensões, etc) e os valores da densidade. A segunda executa os cálculos propriamente ditos.

Conforme mostra a Fig. 6.8 as quadrículas são numeradas ao longo dos eixos coordenados a partir de uma origem arbitrariamente escolhida. Assim, a posição de uma quadrícula qualquer fica definida por um par I, J , onde I representa a abscissa (número da quadrícula) e J a ordenada.

Para alimentar o computador com as informações sobre as quadrículas há uma rotina, no Programa nº 3, que procura reduzir o trabalho de digitação. Observa-se, na Fig. 6.8, que há extensões razoáveis de quadrículas ao longo das quais as características são homogêneas. Dessa forma, a rotina de alimentação de dados opera da seguinte forma:

- Varia-se J (a ordenada) de forma sequencial crescente, isto é, faz-se $J = 1, 2, \dots$
- Para um certo valor de J verifica-se, ao longo das abscissas, a extensão do segmento homogêneo a ser introduzido no computador. Digitam-se os extremos desse segmento.
- Digita-se, a seguir, a densidade média, válida para esse segmento homogêneo.
- Passa-se ao segmento homogêneo seguinte, e assim sucessivamente.

Por exemplo, para $J = 1$, o primeiro segmento homogêneo vai da quadrícula $I = 10$ à quadrícula $I = 11$, para as quais $\lambda = 1,0$. O segundo segmento homogêneo, ainda com $J = 1$, vai de $I = 13$ a $I = 18$, com $\lambda = 1,0$. Uma vez que foram esgotadas as quadrículas com $J = 1$, passa-se a $J = 2$.

Para essa ordenada ($J = 2$), há apenas um segmento homogêneo, compreendido no intervalo $I = 9$ a $I = 21$, e com $\lambda = 1,0$.

Vejamos, por exemplo, o caso em que $J = 13$. O primeiro segmento, com $\lambda = 1,2$, vai de $I = 1$ a $I = 15$. O segundo, com $\lambda = 2,0$, tem apenas uma quadrícula, $I = 16$; o segmento é definido então com os extremos inferior e superior iguais a 16. O terceiro segmento, com $\lambda = 1,5$ se estende no intervalo $I \in (17, 26)$, e assim por diante.

Uma vez carregados os dados referentes às quadrículas, são os mesmos conservados na memória, para uso posterior. É alimentada também a posição do depósito, definida através das coordenadas XD e YD medidas a partir da origem. No caso das coordenadas do depósito a medida das distâncias é o quilômetro, e não mais o número múltiplo de quadrículas.

Alimentam-se, a seguir, os valores de d_1, t_1 e d_2, t_2 , necessários ao cálculo estimativo de a e b (relação 6.23). No caso, foram utilizados os seguintes dados:

$$\text{ponto } P_1: \quad d_1 = 1 \text{ km}$$

$$t_1 = 8 \text{ min}$$

$$\text{ponto } P_2: \quad d_2 = 20 \text{ km}$$

$$t_2 = 50 \text{ min}$$

O passo seguinte é o cálculo das distâncias entre cada quadrícula e o depósito. Sendo LE o lado da quadrícula elementar (no caso $LE = 1 \text{ km}$), a distância $DC(I, J)$, entre a quadrícula de coordenadas I, J e o depósito, é calculada através da expressão:

$$DC(I, J) = [(X_0 + (I - 0,5) \cdot LE - XD)^2 + (Y_0 + (J - 0,5) \cdot LE - YD)^2]^{1/2} \quad (6.29)$$

onde:

X_0, Y_0 - coordenadas do ponto 0,0 do sistema de numeração das quadrículas. No caso a origem do sistema de coordenadas x, y coincide com a origem das quadrículas, e portanto $X_0 = Y_0 = 0$

I, J - par de números identificador da quadrícula (coordenadas das quadrículas).

XD, YD - coordenadas do depósito (no caso $XD = 22$ km e $YD = 13$ km).

Notar que subtraiu-se um valor igual a $0,5 \cdot LE$ de I e de J , de forma a fazer coincidir o ponto de referência sobre o centro da quadrícula.

Nessa mesma rotina são calculados o número total de quadrículas (QD) que formam a região R; a área da região R, que é a agregação das áreas elementares (AREA); o número esperado de pontos de serviço (PS) e finalmente o nível de produção (PRO).

O número esperado de pontos de serviço para a região R é obtido somando-se os produtos das áreas elementares pela densidade, em cada quadrícula:

$$PS = \sum_I \sum_J AE \cdot L(I, J) \quad (6.30)$$

onde AE é a área elementar de uma quadrícula e $L(I, J)$ é a densidade correspondente a essa quadrícula.

O nível de produção, por sua vez, é dado pela expressão (6.27b):

$$PRO = \sum_I \sum_J L(I, J)^{1/2} f_{ij} \quad (6.31)$$

sendo f_{ij} a fração útil do tempo de ciclo, conforme relação (6.25).

No exemplo em questão se tem:

$$QD = [\text{nº de quadrículas}] = 639$$

$$AREA = [\text{área total}] = 639 \text{ km}^2$$

$$PS = [\text{nº médio de pontos de serviço}] = 800 \text{ pontos/dia}$$

$$PRO = [\text{nível de produção}] = 919,9 \text{ relativo}$$

A densidade média da região R é de $1,25$ pontos/ km^2 .

O passo seguinte do programa é a ordenação das quadrículas segundo a distância ao depósito, em ordem crescente. Essa rotina consome um tempo maior de processamento.

Tendo obtido a sequência ordenada, o programa vai agregando as quadrículas até que se atinja $1/3$ do nível total de produção da região, ou seja, $919,9/3 = 306,6$. Esse grupo de quadrículas forma a sub-região A, constituída por zonas próximas ao depósito.

Prosseguindo, o programa agrega as quadrículas na sequência, até atingir o nível de $2/3$ do nível total de produção, ou seja, $613,3$. Tem-se, então, a sub-região B. As quadrículas restantes formam a região C, dos pontos mais afastados.

São calculadas também as distâncias médias de cada sub-região ao depósito, no caso respectivamente $d_A = 5,9$ km, $d_B = 12,0$ km e $d_C = 17,6$ km (vide Fig. 6.9).

Finalmente o programa efetua o mapeamento das três sub-regiões A, B e C, conforme mostrado na Fig. 6.9.

A divisão das sub-regiões A, B, C em zonas de distribuição é uma tarefa analiticamente mais complexa. Para o leitor interessado, os trabalhos de Openshaw (19, 20) e de Baass (1), servirão de ponto de partida para uma análise mais aprofundada do assunto.

AGRUPAMENTO DAS ZONAS EM TRÊS SUB-REGIÕES



SUB-REG.:1,(<<),DIST.MED.(KM): 5.9 AREA: 200.0,DENS.: 1.59
 SUB-REG.:2,(\$\$),DIST.MED.(KM): 12.0 AREA: 220.0,DENS.: 1.19
 SUB-REG.:3,(++),DIST.MED.(KM): 17.6 AREA: 219.0,DENS.: 1.01

AREA TOTAL (KM 2): 639.0
 DEMANDA TOTAL (PONTOS/DIA): 800
 DENSIDADE MEDIA GLOBAL (PONTOS/DIA/KM 2): 1.25
 DISTANCIA MEDIA GLOBAL (KM): 11.14

Divisão de uma Região em Três Sub-Regiões

Fig. 6.9

6.5. Dimensionamento de sistema de coleta/distribuição

Analisaremos, através de um exemplo, a metodologia para dimensionamento de um sistema de distribuição para a região urbana do exemplo 6.3, conforme enunciado a seguir.

Exemplo 6.4 A região R da Fig. 6.8 deve ser atendida por uma frota de veículos de distribuição. A demanda, expressa em paradas por dia, é regida por um processo espacial de Poisson, com os valores médios indicados no exemplo 6.3. Observa-se que a densidade de pontos de entrega varia ao longo da região R. O depósito está localizado no ponto de coordenadas {22, 13} (em km).

O problema de dimensionamento do sistema de distribuição pode ser resumido da seguinte forma:

- Determinar o número de zonas em que cada uma das três sub-regiões deve ser dividida. A cada zona será alocado um veículo.
- Determinar o veículo que apresenta melhor desempenho, considerando critério misto, incluindo custo e nível de serviço.

Serão examinados, na análise, três tipos de veículos, indicados no Quadro 6.1 juntamente com seus custos unitários.

Adotam-se, como custo da hora extra, um valor médio de CZ\$ 100,00 por hora. Nesse valor são computados apenas o salário do motorista e ajudante, mais adicionais e encargos. Trazendo-se de um custo marginal, em que as demais despesas fixas são totalmente amortizadas no custo fixo básico, é lícito considerar apenas o correspondente às horas extras da tripulação.

O custo variável adicional, função da distância percorrida, também é considerado na análise.

A região R compreende área de 639 km², com densidade média de 1,25 paradas por km² e por dia (vide Exemplo 6.3), sendo dividida em três sub-regiões conforme mostrado no Quadro 6.2.

A mercadoria a ser distribuída é de densidade relati

Quadro 6.1

Veículos Analisados no Exemplo 6.4 e
Respectivos Custos Unitários

<u>Veículo</u>	<u>Capacidade</u> <u>de carga</u> (toneladas)	<u>Custo</u> <u>fixo</u> (CZ\$/dia)	<u>Custo</u> <u>variável</u> (CZ\$/km)
VW-6,80	5,5	1293,60	4,30
GM-11.000 FD	6,0	1430,40	4,90
MB-1114/48 FD	12,0	2008,80	5,50

Quadro 6.2

Características das Sub-regiões: Exemplos 6.3 e 6.4

<u>SUB-REGIÃO</u>	<u>Descrição</u>	<u>Distância</u> <u>média</u> (km)	<u>Área</u> (km ²)	<u>Densidade</u> <u>média</u> (Pontos/km ² /dia)
1	Próxima ao depósito	5,9	200	1,59
2	Média distância	12,0	220	1,19
3	Distante do depósito	17,6	219	1,01
		35,5	639	1,25

vamente alta, lotando o veículo por peso (produtos industriais densos). O peso médio dos produtos entregues em cada ponto de parada (cliente) é $E[u] = 200$ kg, com desvio padrão de 60 kg.

O tempo médio de parada, em cada entrega, é de 16 minutos, com desvio padrão de 4 minutos.

A velocidade média dos caminhões no tráfego urbano é de 23 km/hora.

Admitimos que os tempos de percurso entre o depósito e as zonas apresentem coeficiente de variação (relação entre desvio padrão e o valor médio) igual à 0,40. Dentro das zonas o coeficiente de variação dos tempos de movimentação dos veículos entre os locais de entrega é da ordem de 0,5.

Para resolver este problema de dimensionamento de frota de distribuição foi desenvolvido o Programa 4, apresentado no Apêndice.

O programa é sub-dividido em diversas partes, analisadas a seguir:

a) Entrada de dados gerais. Esta parte do programa é auto-explicativa. São alimentados todos os dados necessários logo no início do processamento, à exceção dos dados referentes ao veículo, que são introduzidos sequencialmente (Quadro 6.3).

Em outras palavras, efetua-se o processamento do programa para o primeiro veículo, depois para o segundo e assim sucessivamente.

b) Variação do número de zonas. Uma vez introduzidos os dados gerais e as informações de um tipo de veículo em particular, o programa efetua a análise exaustiva do problema, variando sistematicamente o número de zonas. No programa MZ representa o número médio de zonas por sub-região. Assim, se $MZ = 5$, isso significa que, no total, haverá 3 . $MZ = 15$ zonas, já que a região R é sub-dividida em três sub-regiões.

A variação exaustiva do número médio MZ é feita através de um incremento constante, denominado SMZ no programa.

c) Ajuste no número de zonas. As três sub-regiões apresentam níveis de produção diferentes já que suas distâncias ao depósito são significativamente diferentes entre si. É necessário

Quadro 6.3

Dados de Entrada para Resolução do Exemplo 6.4

DIMENSIONAMENTO DE SISTEMA URBANO DE DISTRIBUIÇÃO

EXEMPLO 6.4

AREA TOTAL DA REGIAO R (KM 2) -->	639.0
< Zonas Proximas ao Deposito >	
AREA DA SUBREGIAO (KM 2) -->	200.0
DENSIDADE MEDIA (PARADAS/DIA/KM2) -->	1.59
DISTANCIA MEDIA AO DEPOSITO (KM) -->	5.9
< Zonas Intermediarias >	
AREA DA SUBREGIAO (KM 2) -->	220.0
DENSIDADE MEDIA (PARADAS/DIA/KM2) -->	1.19
DISTANCIA MEDIA AO DEPOSITO (KM) -->	12.0
< Zonas Afastadas >	
AREA DA SUBREGIAO (KM 2) -->	219.0
DENSIDADE MEDIA (PARADAS/DIA/KM2) -->	1.01
DISTANCIA MEDIA AO DEPOSITO (KM) -->	17.6

DIMENSIONAMENTO DE SISTEMA URBANO DE DISTRIBUIÇÃO

EXEMPLO 6.4

VELOCIDADE MEDIA NO TRAFEGO (KM/H) -->	23
TEMPO MEDIO POR PARADA (MIN) -->	16
DESvio PADRAO, TEMPO DE PARADA (MIN) -->	4
PESO MEDIO DE UMA ENTREGA (KG) -->	200
DESvio PADRAO, PESO ENTREGA (KG) -->	60
COEF.VARIACAO, TEMPO DEPOSITO-ZONA -->	0.4
COEF.VARIACAO, TEMPO DESLOC. NA ZONA -->	0.6
JORNADA NORMAL TRABALHO (HS/DIA) -->	8
JORNADA MAXIMA TRABALHO (HS/DIA) -->	12
MARCA E/OU TIPO DE VEICULO (ATE 10 CAR) -->	GM-11000 70
CAPACIDADE DE CARGA UTIL DO VEIC. (KG) -->	6000
COEF. DE QUEBRA DE ESTIVA (%) -->	0

DIMENSIONAMENTO DE SISTEMA URBANO DE DISTRIBUIÇÃO

EXEMPLO 6.4

< Faixa de Variacao do Numero de Zonas p/ Analise >	
LIMITE INFERIOR -->	5
LIMITE SUPERIOR -->	30
INCREMENTO -->	1

< Dados de custo >

CUSTO FIXO (CZ\$/DIA) -->	1430.40
CUSTO VARIÁVEL (CZ\$/KM) -->	4.90
CUSTO HORA EXTRA TRIPULACAO (CZ\$/HR) -->	100.00
ACRESCIMO DE CUSTO, ENTREGA ESPECIAL (%) -->	150

$$M_i = \frac{\lambda_i \cdot A_i}{N_i + \overline{SP}_i} \quad (6.34)$$

A equalização por nós adotada equivale a se fazer $TC_1 = TC_2 = TC_3 = TC = \text{constante}$. Igualando TC_1 e TC_2 (relação 6.32), e simplificando, vem:

$$N_1 \cdot (TP + \tau_1) - N_2 \cdot (TP + \tau_2) = 2 \cdot T_2 - 2 \cdot T_1 \quad (6.35)$$

Igualando TC_1 e TC_3 , por sua vez:

$$N_1 \cdot (TP + \tau_1) - N_3 \cdot (TP + \tau_3) = 2 \cdot T_3 - 2 \cdot T_1 \quad (6.36)$$

Uma terceira equação pode ser obtida através do total de pontos de parada atendidos por dia. Essa equação é a seguinte:

$$M_1 \cdot N_1 + M_2 \cdot N_2 + M_3 \cdot N_3 = \sum_i \lambda_i \cdot A_i - \sum_i M_i \cdot \overline{SP}_i \quad (6.37)$$

Na equação acima os produtos $M_i \cdot N_i$, do primeiro membro, fornecem os totais de pontos de parada para cada uma das sub-regiões. Somando-se esses produtos parciais obtém-se o total geral de pontos de parada para toda a região R em análise. O segundo membro equivale a multiplicar a equação (6.33) por M_i e somar em relação a i .

Substituindo M_i pela expressão (6.34), na equação (6.37), chega-se à:

$$\frac{\lambda_1 \cdot A_1}{N_1 + \overline{SP}_1} \cdot N_1 + \frac{\lambda_2 \cdot A_2}{N_2 + \overline{SP}_2} \cdot N_2 + \frac{\lambda_3 \cdot A_3}{N_3 + \overline{SP}_3} =$$

então equalizar os esforços de entrega dos veículos em cada sub-região, de forma a garantir um nível de desempenho aproximadamente homogêneo. Para isso, escolhemos o tempo de ciclo como variável de equalização, isto é, procuraremos dimensionar a frota de maneira a apresentar tempos de ciclo praticamente constantes entre sub-regiões.

Sendo TC_i o tempo de ciclo médio dos veículos na sub-região i ($i = 1, 2, 3$), tem-se:

$$TC_i = 2 \cdot T_i + N_i \cdot (TP + \tau_i) \quad (6.32)$$

onde:

T_i - tempo de percurso entre o depósito e a zona (minutos)

N_i - número de paradas na zona.

TP - tempo médio de parada (minutos).

τ_i - tempo médio de percurso por ponto de parada (minutos).

O número médio de paradas na zona (N_i) é dado por:

$$N_i = \frac{\lambda_i \cdot A_i}{M_i} - \overline{SP}_i \quad (6.33)$$

onde:

N_i - densidade média de pontos na sub-região i (pontos de parada/km²/dia)

A_i - área da sub-região i (km²).

M_i - número de zonas que compõem a sub-região i .

\overline{SP}_i - "spill", ou sobra, medido em número de pontos de parada (sub-região i).

Da relação (6.33) se tira:

$$N_i = \frac{\lambda_i \cdot A_i}{M_i} - \overline{SP}_i \quad (6.38)$$

As três equações (6.35), (6.36) e (6.38) permitem que se calculem os valores de N_1 , N_2 e N_3 . Uma vez que a expressão (6.38) não é linear em relação à N_i , utilizamos um método iterativo de forma a linearizar o sistema de equações indicado acima.

Inicialmente adota-se número igual de zonas para as três sub-regiões, ou seja:

$$M_1^{(1)} = M_2^{(1)} = M_3^{(1)} = M/3 \quad (6.39)$$

Em lugar de utilizar a relação (6.38), adotamos a equação (6.37), substituindo M_1 , M_2 e M_3 pelos valores iniciais calculados através de (6.39).

Resolve-se o sistema de equações (6.35), (6.36) e (6.37), obtendo-se os valores de N_1 , N_2 e N_3 . Entrando, a seguir, na relação (6.34) com os valores de N_1 , N_2 e N_3 obtêm-se novos valores $M_1^{(2)}$, $M_2^{(2)}$ e $M_3^{(2)}$.

O processo continua até a k ésima iteração, quando a diferença entre os valores de M_i , com relação à iteração anterior, for menor do que a precisão desejada:

$$|M_i^{(k)} - M_i^{(k-1)}| < \epsilon$$

Esse processo de equalização é realizado no programa 4 do anexo, através da "procedure" ISONOMIA.

d) Tempo de ciclo. O tempo de ciclo varia para cada sub-região, e é calculado através de uma sub-rotina utilizando a metodologia desenvolvida no Cap. 5. Basicamente são obtidos os valores esperados do tempo de ciclo, representado por $TC(I)$, onde

I é o índice da sub-região, e os valores do desvio padrão STC(I).

e) Restrição de capacidade física do veículo. A análise segue metodologia desenvolvida na secção 6.2. No caso, por se tratar de carga densa, não se considerou a quebra de estiva que ocorre normalmente no caso de mercadorias volumétricas (ou seja, faz-se $\phi = 1$). É determinado o excesso médio de entregas por veículo ("spill"), isto é, o número médio de paradas que não podem ser cumpridas por falta de capacidade de veículo. O "spill" é representado pela variável SPN_i . A partir dos valores iniciais de N_i (número de entregas programadas por veículo) obtêm-se os valores corrigidos (isto é, $N_i - SPN_i$) e, através desses, os novos valores do tempo de ciclo, através da sub-rotina apropriada.

f) Restrição da jornada de trabalho. A análise das restrições impostas pela jornada de trabalho segue a metodologia descrita na secção 6.3. O cálculo das probabilidades P_0 e P_1 é feito através de sub-rotina. Entra-se com a média (ZM) e o desvio padrão (SZ) da distribuição normal, bem como o ponto Z para o qual se deseja calcular o valor de $\phi(Z)$, ou seja, a probabilidade acumulada até esse ponto. A sub-rotina fornece a probabilidade através da variável PB.

O número médio de horas extras, por veículo e por dia, na sub-região I, é representado pela variável HE_i . O tempo médio excedente da jornada de trabalho em relação ao nível crítico H_1 é representado por SPI (em minutos). Para converter esse excedente ("spill") em número médio de entregas, divide-se SPI pelo tempo médio correspondente a uma parada, que é igual à soma $t_i + t_p$. Essa sobra ("spill") é representada por SPH_i .

Corrige-se o número de paradas por veículo, subtraindo-se de N_i o "spill" médio SPH_i , em seguida calculando-se os novos valores do tempo de ciclo TC_i .

g) Quilometragem diária da frota. Sendo N_i o número médio efetivo de paradas diárias (entregas) por veículo, a quilometragem total percorrida pela frota, num dia de trabalho, é dada por:

$$KMF = \sum_i M_i \cdot [2 \cdot DP_i + N_i \cdot \delta_i'] \quad (6.40)$$

onde:

KMF - quilometragem média total percorrida pela frota de distribuição num dia de trabalho típico.

M_i - número de zonas (igual ao número de veículos) da sub-região i.

DP_i - distância média do depósito à zona, sub-região i.

N_i - número médio efetivo de entregas realizadas por um veículo, sub-região i.

δ_i' - distância média por ponto de parada (km).

Conforme foi visto na secção 5.3 a distância média por ponto é dada por:

$$\delta_i = k_0 \cdot (\lambda_i)^{-1/2} \quad (6.41)$$

onde λ_i é a densidade média na sub-região i, sendo k_0 uma constante.

Como N_i representa o número de entregas efetivamente realizadas por um veículo, já subtraídas as sobras decorrentes de restrições físicas (capacidade do veículo) e temporais (jornada de trabalho), é necessário recalcular a densidade média através de:

$$\lambda_i' = N_i \cdot M_i / A_i \quad (6.42)$$

onde:

N_i - número médio efetivo de paradas por zona.

M_i - número de zonas, sub-região i.

A_i - área da sub-região i .

Aplica-se agora a relação (6.41) entrando-se com o valor corrigido de λ_i' :

$$\delta_i' = k_0 \cdot (\lambda_i')^{-1/2} \quad (6.43)$$

sendo esse o valor a ser utilizado na expressão (6.40).

h) Custo operacional básico da frota. O custo operacional da frota, em cruzados por dia de trabalho é dado por:

$$CST = C_F \cdot MZ + C_{EX} \cdot HE + C_{KM} \cdot KMF \quad (6.44)$$

onde:

MZ - número total de zonas, que é igual ao número de veículos em operação ($MZ = \sum_i M_i$).

C_F - custo fixo diário de um veículo (CZ\$/dia).

HE - total de horas extras da frota, por dia.

C_{EX} - custo marginal da hora extra de operação (CZ\$/hora).

C_{KM} - custo variável (CZ\$/km).

KMF - quilometragem média diária da frota.

Neste custo não se computaram as despesas de se efetuar entregas em caráter especial, não realizadas pela frota principal. Esse custo é analisado no item (i).

Para se determinar o custo médio por entrega calcula-se inicialmente o número médio efetivo de entregas por dia:

$$NP = \sum_i N_i \cdot M_i \quad (6.45)$$

O custo médio de uma entrega é dado por:

$$CM_1 = CST/NP \quad (6.46)$$

i) Custo das entregas especiais. A mercadoria não entregue pela frota básica, que sobrou no depósito por falta de capacidade física dos veículos ou por indisponibilidade de tempo, deve ser distribuída em caráter especial, por meio de veículos extras ou de serviço de terceiros.

Na prática o custo médio de uma entrega especial é significativamente maior do que o custo normal. Isso porque há necessidade de manipulação extra da mercadoria no depósito, a frota utilizada apresenta níveis de desempenho piores, etc. No caso de se utilizar veículos de menor capacidade de carga, o custo unitário é adicionalmente maior.

No nosso exemplo admitimos que uma entrega especial custe 2,5 vezes a despesa normal. Não é conveniente, portanto, manter elevado o nível de sobras ("spill"), pois o impacto nos custos operacionais é significativo.

O custo médio, para entregas especiais, é denominado de CM_2 , e é obtido multiplicando-se CM_1 pelo fator FSP que, no caso, é igual à 2,5.

Aplicou-se o modelo para os três tipos de veículos apresentados no Quadro 6.1. O programa varia o número de zonas de forma sistemática, apresentando os resultados por sub-região e médias gerais.

Nos quadros 6.4, 6.5 e 6.6 são apresentados os resultados da aplicação do modelo para os três tipos de veículos indicados no Quadro 6.1. Em cada quadro a primeira tabela reflete o extremo inferior da análise, correspondente a um total geral de 15 zonas. A segunda tabela corresponde à configuração de mínimo custo para cada tipo de veículo.

Na Figura 6.10 são traçadas as curvas do custo médio unitário em função do número total de zonas, para cada tipo de veículo. Observa-se que a configuração de mínimo custo corresponde a um veículo GM-11000 7D, de 6 toneladas, com custo unitário de CZ\$ 76,20 por parada. Essa configuração (Quadro 6.5) é obtida dividindo-se a sub-região 1 em 12 zonas, a sub-região 2 em 11 zonas e a sub-região 3 em 10 zonas, num total de 33 zonas de distribuição.

Quadro 6.4

Resultados Gerais - Exemplo 6.4

< Dimensionamento Sistema de Distribuicao Fisica de Mercadorias >

TIPO DE VEICULO:	VM-6.80			
CAPACIDADE VEICULO (TON):	3.5			
Custos Unitarios:				
* CUSTO FIXO (\$/VEIC/DIA):	1293.60			
* CUSTO VARIÁVEL (\$/km):	4.30			
* CUSTO HORA EXTRA (\$/VEIC/HR):	100.00			
* ACRESCIMO ENTREGA ESPECIAL (%):	150.00			
* CUSTO MEDIO POR PARADA (\$):	192.91			
NUMERO TOTAL DE ZONAS:	15			
	SUBREG1	SUBREG2	SUBREG3	MEDIA
NUMERO DE ZONAS:	5	5	5	5
PARADAS PROGRAMADAS P/ ZONA:	63.6	52.4	44.2	53.4
TEMPO DE CICLO (HS):	6.5	6.5	6.7	6.6
QUILOM./VEICULO/DIA:	43.9	53.4	64.5	54.6
SPILL,CAP.FIS. (%):	72.5	60.6	60.4	67.2
SPILL,JORN.TRAB. (%):	0.0	0.0	0.0	0.0
SPILL TOTAL (%):	72.5	60.6	60.4	66.5
HORAS EXTRAS (HS/DIA/VEIC):	0.0	0.0	0.0	0.0
PROB.EXCEDER CAP.VEICULO:	1.000	1.000	1.000	1.000
PROB.EXCEDER H1:	0.000	0.000	0.000	0.000

<<<< (ACIONE RETURN P/ CONTINUAR) >>>>

< Dimensionamento Sistema de Distribuicao Fisica de Mercadorias >

TIPO DE VEICULO:	VM-6.80			
CAPACIDADE VEICULO (TON):	3.5			
Custos Unitarios:				
* CUSTO FIXO (\$/VEIC/DIA):	1293.60			
* CUSTO VARIÁVEL (\$/km):	4.30			
* CUSTO HORA EXTRA (\$/VEIC/HR):	100.00			
* ACRESCIMO ENTREGA ESPECIAL (%):	150.00			
* CUSTO MEDIO POR PARADA (\$):	111.75			
NUMERO TOTAL DE ZONAS:	48			
	SUBREG1	SUBREG2	SUBREG3	MEDIA
NUMERO DE ZONAS:	16	16	16	16
PARADAS PROGRAMADAS P/ ZONA:	19.9	16.4	13.8	16.7
TEMPO DE CICLO (HS):	5.7	5.7	5.7	5.7
QUILOM./VEICULO/DIA:	29.2	41.1	51.2	40.5
SPILL,CAP.FIS. (%):	16.5	7.2	2.6	9.6
SPILL,JORN.TRAB. (%):	0.0	0.0	0.0	0.0
SPILL TOTAL (%):	16.5	7.2	2.6	8.8
HORAS EXTRAS (HS/DIA/VEIC):	0.0	0.0	0.0	0.0
PROB.EXCEDER CAP.VEICULO:	0.695	0.354	0.172	0.420
PROB.EXCEDER H1:	0.000	0.000	0.000	0.000

<<<< (ACIONE RETURN P/ CONTINUAR) >>>>

Quadro 6.5

Resultados Gerais - Exemplo 6.4

< Dimensionamento Sistema de Distribuicao Fisica de Mercadorias >

TIPO DE VEICULO:	GM-11.000			
CAPACIDADE VEICULO (TON):	6.0			
Custos Unitarios:				
* CUSTO FIXO (\$/VEIC/DIA):	1430.40			
* CUSTO VARIÁVEL (\$/km):	4.90			
* CUSTO HORA EXTRA (\$/VEIC/HR):	100.00			
* ACRESCIMO ENTREGA ESPECIAL (%):	150.00			
* CUSTO MEDIO POR PARADA (\$):	118.79			
NUMERO TOTAL DE ZONAS:	15			
	SUBREG1	SUBREG2	SUBREG3	MEDIA
NUMERO DE ZONAS:	5	5	5	5
PARADAS PROGRAMADAS P/ ZONA:	63.6	52.4	44.2	53.4
TEMPO DE CICLO (HS):	10.2	10.3	10.3	10.3
QUILOM./VEICULO/DIA:	52.9	65.2	74.5	64.2
SPILL,CAP.FIS. (%):	52.8	42.7	32.3	43.0
SPILL,JORN.TRAB. (%):	0.5	0.6	0.7	0.6
SPILL TOTAL (%):	53.3	43.3	33.0	43.2
HORAS EXTRAS (HS/DIA/VEIC):	2.6	2.6	2.6	2.6
PROB.EXCEDER CAP.VEICULO:	1.000	0.998	0.980	0.993
PROB.EXCEDER H1:	0.127	0.129	0.133	0.130

<<<< (ACIONE RETURN P/ CONTINUAR) >>>>

< Dimensionamento Sistema de Distribuicao Fisica de Mercadorias >

TIPO DE VEICULO:	GM-11.000			
CAPACIDADE VEICULO (TON):	6.0			
Custos Unitarios:				
* CUSTO FIXO (\$/VEIC/DIA):	1430.40			
* CUSTO VARIÁVEL (\$/km):	4.90			
* CUSTO HORA EXTRA (\$/VEIC/HR):	100.00			
* ACRESCIMO ENTREGA ESPECIAL (%):	150.00			
* CUSTO MEDIO POR PARADA (\$):	76.17			
NUMERO TOTAL DE ZONAS:	33			
	SUBREG1	SUBREG2	SUBREG3	MEDIA
NUMERO DE ZONAS:	12	11	10	11
PARADAS PROGRAMADAS P/ ZONA:	28.9	23.8	20.1	24.5
TEMPO DE CICLO (HS):	8.4	8.4	8.4	8.4
QUILOM./VEICULO/DIA:	36.5	49.9	61.2	48.5
SPILL,CAP.FIS. (%):	6.0	1.2	0.2	3.0
SPILL,JORN.TRAB. (%):	0.0	0.0	0.1	0.0
SPILL TOTAL (%):	6.0	1.2	0.2	2.6
HORAS EXTRAS (HS/DIA/VEIC):	0.7	0.7	0.6	0.7
PROB.EXCEDER CAP.VEICULO:	0.423	0.112	0.017	0.196
PROB.EXCEDER H1:	0.005	0.005	0.004	0.005

Quadro 6.6

Resultados Gerais, Exemplo 6.4

< Dimensionamento Sistema de Distribuição Física de Mercadorias >

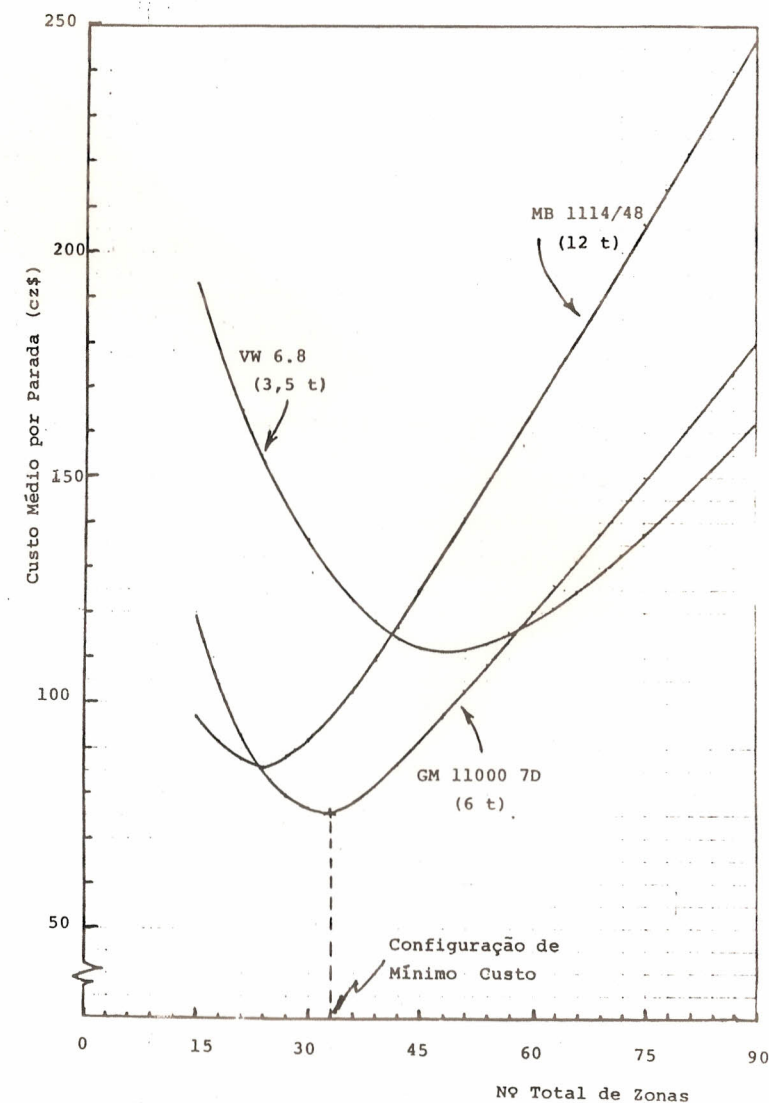
TIPO DE VEICULO:	MB-1114/48			
CAPACIDADE VEICULO (TON):	12.0			
Custos Unitarios:				
* CUSTO FIXO (\$/VEIC/DIA):	2008.80			
* CUSTO VARIÁVEL (\$/km):	5.50			
* CUSTO HORA EXTRA (\$/VEIC/HR):	100.00			
* ACRESCIMO ENTREGA ESPECIAL (%):	150.00			
* CUSTO MEDIO POR PARADA (\$):	97.00			
NUMERO TOTAL DE ZONAS:	15			
	SUBREG1	SUBREG2	SUBREG3	MEDIA
NUMERO DE ZONAS:	5	5	5	5
PARADAS PROGRAMADAS P/ ZONA:	63.6	52.4	44.2	53.4
TEMPO DE CICLO (HS):	16.9	17.0	17.1	17.0
QUILOM./VEICULO/DIA:	50.8	62.4	71.8	61.8
SPILL,CAP.FIS. (%):	8.5	1.2	0.0	3.8
SPILL,JORN.TRAB. (%):	24.8	30.3	36.2	29.7
SPILL TOTAL (%):	33.3	31.5	36.2	33.7
HORAS EXTRAS (HS/DIA/VEIC):	4.0	4.0	4.0	4.0
PROB.EXCEDER CAP.VEICULO:	0.667	0.156	0.012	0.278
PROB.EXCEDER H1:	0.991	0.993	0.995	0.993

<<<< (AÇÃO RETURN P/ CONTINUAR) >>>>

< Dimensionamento Sistema de Distribuição Física de Mercadorias >

TIPO DE VEICULO:	MB-1114/48			
CAPACIDADE VEICULO (TON):	12.0			
Custos Unitarios:				
* CUSTO FIXO (\$/VEIC/DIA):	2008.80			
* .CUSTO VARIÁVEL (\$/km):	5.50			
* CUSTO HORA EXTRA (\$/VEIC/HR):	100.00			
* ACRESCIMO ENTREGA ESPECIAL (%):	150.00			
* CUSTO MEDIO POR PARADA (\$):	85.61			
NUMERO TOTAL DE ZONAS:	24			
	SUBREG1	SUBREG2	SUBREG3	MEDIA
NUMERO DE ZONAS:	9	8	7	8
PARADAS PROGRAMADAS P/ ZONA:	39.7	32.7	27.6	33.9
TEMPO DE CICLO (HS):	11.6	11.5	11.4	11.5
QUILOM./VEICULO/DIA:	44.0	58.8	71.5	57.0
SPILL,CAP.FIS. (%):	0.0	0.0	0.0	0.0
SPILL,JORN.TRAB. (%):	3.9	4.2	4.5	4.1
SPILL TOTAL (%):	3.9	4.2	4.5	4.1
HORAS EXTRAS (HS/DIA/VEIC):	3.1	3.1	3.0	3.1
PROB.EXCEDER CAP.VEICULO:	0.001	0.000	0.000	0.000
PROB.EXCEDER H1:	0.400	0.376	0.355	0.379

<<<< (AÇÃO RETURN P/ CONTINUAR) >>>>



Variação do Custo Médio por Parada - Exemplo 6.4

Fig. 6.10

Observa-se (Quadro 6.4) que o veículo de 3,5 toneladas é inadequado para esse tipo de serviço porque sua capacidade de carga não é compatível com o tipo de mercadoria e de serviço comtemplados no exemplo. A configuração de mínimo custo, para esse tipo de veículo (Quadro 6.4) apresenta tempo de ciclo baixo (5,7 horas) e sobra significativa por falta de capacidade nos veículos.

O caminhão de 12 toneladas, por seu turno, apresenta ciclo elevado (11,5 horas), ocasionando "spill" por excesso de jornada de trabalho. É um veículo cuja capacidade física está além do necessário para o serviço em questão.

O caminhão de 6 toneladas foi o que se apresentou mais equilibrado em termos de capacidade física versus necessidades do serviço (Quadro 6.5). O tempo de ciclo (8,4 horas) é razoável, garantindo bom aproveitamento para a frota e evitando excesso de trabalho para a tripulação. No caso seria o veículo a ser recomendado.

6.6. Apêndice: sobra média ("spill") da distribuição normal

Seja a distribuição normal de uma variável aleatória x , com média \bar{x} e desvio padrão σ (Fig. 6.11). Seja a um ponto na escala de x , conforme mostra a Fig. 6.11.

A probabilidade de se observar $x > a$ é dada por:

$$\text{prob}\{x > a\} = \int_a^{\infty} f(x) \cdot dx \quad (6.47)$$

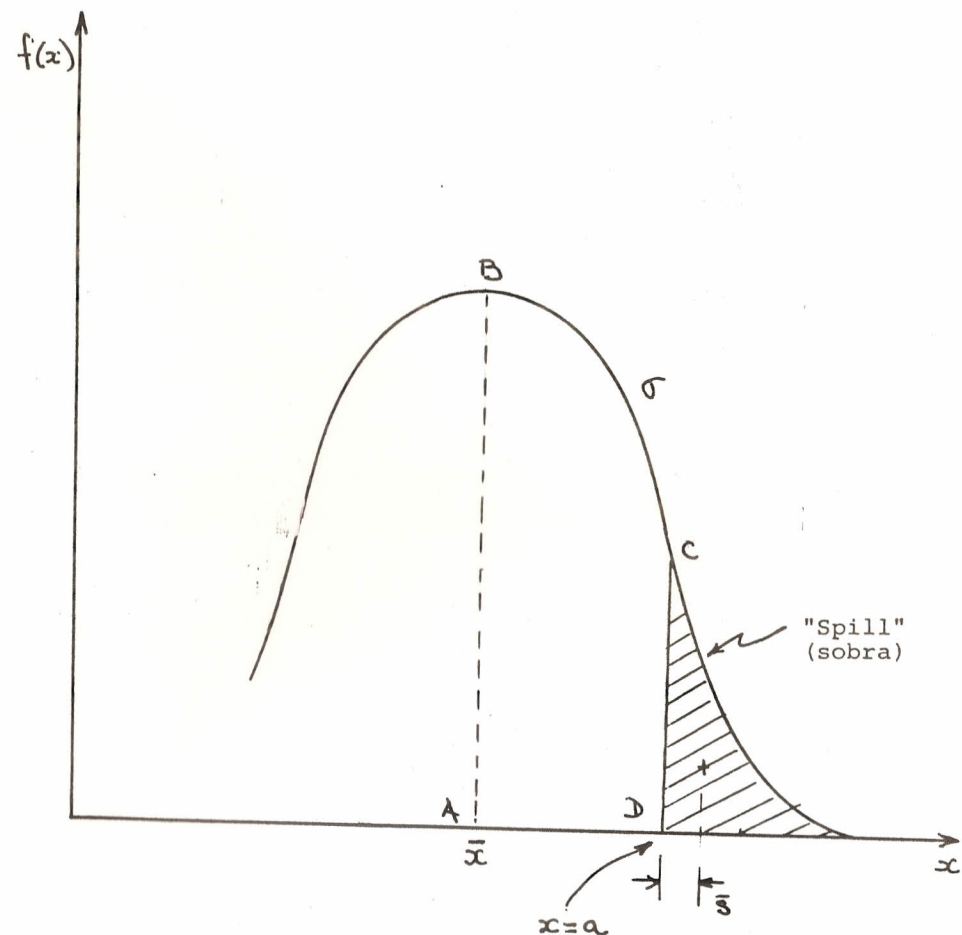
A área da curva normal é tabelada a partir da média, correspondendo à área da figura ABCD (Fig. 6.11). Ou seja:

$$\text{prob}\{x > a\} = 0,5 - \Phi(a) = \Phi^*(a) \quad (6.48)$$

onde $\Phi(a)$ é a área obtida da tabela da normal, entrando com a variável normal normalizada $(a - \bar{x})/\sigma$.

O valor esperado de $x > a$ é dado por:

$$E[x > a] = \frac{\int_a^{\infty} x f(x) dx}{\int_a^{\infty} f(x) dx} \quad (6.49)$$



"Spill" - Distribuição Normal

Fig. 6.11

A função densidade de probabilidade da distribuição normal é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] \quad (6.50)$$

O numerador da expressão (6.49) pode ser expandido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_a^\infty x f(x) dx &= \int_a^\infty (x - \bar{x} + \bar{x}) f(x) dx = \\ &= \int_a^\infty (x - \bar{x}) f(x) dx + \bar{x} \int_a^\infty f(x) dx \end{aligned} \quad (6.51)$$

A primeira integral do último membro de (6.51) é calculada substituindo $f(x)$ por (6.50):

$$\begin{aligned} \int_a^\infty (x - \bar{x}) f(x) dx &= \int_a^\infty \frac{(x - \bar{x})}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] \cdot dx = \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(a - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (6.52)$$

A ordenada da curva normal normalizada $f(a)$, no ponto $(a - \bar{x})/\sigma$, é dado por:

$$f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a - \bar{x}}{\sigma}\right)^2\right] \quad (6.53)$$

e portanto (6.52) é igual à $\sigma \cdot f(a)$.

A segunda integral de (6.51), bem como o denominador de (6.49), são iguais à $\Phi^*(a)$. Então:

$$E[x/x > a] = \frac{\sigma \cdot f(a) + \bar{x} \cdot \Phi^*(a)}{\Phi^*(a)} =$$

$$= \bar{x} + \sigma \cdot f(a)/\Phi^*(a)$$

(6.54)

A sobre média \bar{S} é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= (\text{zero}) \cdot \text{prob}\{x \leq a\} + \{E[x > a] - a\} \cdot \text{prob}\{x > a\} = \\ &= \{E[x > a] - a\} \cdot \Phi^*(a) \end{aligned} \quad (6.55)$$

Substituindo (6.54) em (6.55):

$$\bar{S} = [\bar{x} + \sigma \cdot f(a)/\Phi^*(a) - a] \cdot \Phi^*(a) \quad (6.56)$$

ou:

$$\bar{S} = (\bar{x} - a) \cdot \Phi^*(a) + \sigma \cdot f(a) \quad (6.57)$$

que é a expressão usada para obter a relação (6.5).