

PORTUGALIAE MATHEMATICA

VOLUME 22

1 9 6 3

Publicação subsidiada por

Publication subventionnée par

Publication sponsored by

JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA, SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
e FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Edição de

«GAZETA DE MATEMÁTICA, LDA.»

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Rua Nova da Trindade, 1, 5.º-S
LISBOA-2 (PORTUGAL)

HERMANN & C.^{tes}, Editeurs
6, Rue de la Sorbonne
PARIS (5^{eme})

TEORIA DIRECTA DAS DISTRIBUIÇÕES SOBRE UMA VARIEDADE *

POR J. SANTOS GUERREIRO

*Grupo de Física Matemática da Comissão de Estudos
da Energia Nuclear*

1. **Introdução.** A noção de distribuição sobre uma variedade diferenciável pode ser definida de diversas maneiras, que podem não ser equivalentes. Assim, enquanto a definição de L. SCHWARTZ, (cf. [11]) generaliza o conceito de medida, a que vamos estabelecer aqui generaliza a noção de função contínua, e só se identifica, de maneira canónica, com a primeira se existir na variedade um elemento de volume privilegiado.

No processo que vamos seguir, procuramos generalizar a noção de distribuição sobre um domínio de \mathbb{R}^n para uma variedade diferenciável qualquer, tendo em vista conservar o princípio de extensão às distribuições do conceito de função composta, que estabelecemos em [9], e que se pode enunciar do seguinte modo:

«Para toda a aplicação regular $(1) \mu: X \rightarrow Y$, em que X e Y são domínios de \mathbb{R}^n , é possível fazer corresponder, de uma única maneira, a cada distribuição T sobre Y uma distribuição $T \circ \mu$ sobre X , que se diz a imagem de T por μ , nas seguintes condições: (a) Se T é uma função f contínua em Y , $T \circ \mu$ coincide com a função composta $f \circ \mu$, no sentido usual; (b) A aplicação $T \rightarrow T \circ \mu$ é contínua, sendo mesmo um isomorfismo vectorial topológico se μ é um homeomorfismo de X sobre Y .

O método que vamos utilizar nesta extensão é, sob muitos aspectos, semelhante ao método usado por S. SILVA para definir as distribuições em abertos de \mathbb{R}^n , [15], [16], e pode-se considerar mesmo como uma generalização deste às variedades diferenciáveis.

Assim, começamos por definir o espaço $\tilde{C}(K)$ das distribuições sobre um segmento K duma variedade diferenciável V

* Recebido em Dezembro de 1961.

(1) O conceito de aplicação regular que se vai utilizar no texto é formulado no § 2. 3.

(domínio de V isomorfo a um domínio aberto ou compacto de R^n), como sendo um espaço localmente convexo que contém o espaço $C(K)$ das funções contínuas em K , como sub-espaço vectorial, e tal que, para toda a carta Φ de K (isomorfismo dum domínio de R^n sobre K), a aplicação $f \mapsto f \circ \Phi$, de $C(K)$ no espaço das funções contínuas no domínio de Φ , seja prolongável num isomorfismo vectorial topológico de $\tilde{C}(K)$ sobre o espaço das distribuições no domínio de Φ .

Estas condições determinam $\tilde{C}(K)$ a menos um isomorfismo que conserva as funções contínuas, e permitem transportar, para este espaço, todas aquelas propriedades das distribuições definidas em domínios de R^n , que se mantêm invariantes com as transformações de coordenadas.

Entre estas propriedades, encontra-se o já citado princípio de extensão da noção de função composta, que permite definir a imagem $T \circ \mu$ de uma distribuição qualquer $T \in \tilde{C}(K)$ por uma aplicação regular $\mu: K' \rightarrow K$, e, em particular, a restrição de T a qualquer segmento $K' \subset K$, como sendo a imagem de T pela aplicação idêntica de K' em K .

Encontra-se assim uma situação semelhante à que conduz, no caso de R^n , a definir o espaço das distribuições sobre um aberto, como limite projectivo dos espaços de distribuições sobre os intervalos compactos contidos nesse aberto, em relação aos operadores de restrição. Somos então conduzidos naturalmente a definir também o espaço das distribuições sobre uma variedade diferenciável V , como o limite projectivo dos espaços $\tilde{C}(K)$ correspondentes aos segmentos compactos $K \subset V$, relativamente aos operadores de restrição. Mas, a razão mais profunda desta definição reside no facto do princípio de extensão da noção de função composta se manter ainda, para uma aplicação regular qualquer de V noutra variedade com a mesma dimensão.

As propriedades das distribuições sobre uma variedade diferenciável estabelecem-se, na maioria dos casos, por processos semelhantes aos que se utilizam em R^n . Existem no entanto algumas propriedades de importância fundamental em que tais métodos têm de ser adaptados de forma conveniente, ou mesmo substituídos por outros. Isto acontece em especial com a Análise Linear onde, embora os resultados sejam semelhantes aos que já foram estabelecidos no caso de R^n , o caminho seguido para os obter é bastante diferente.

Aí, estabelece-se uma fórmula integral, para as aplicações lineares contínuas do espaço das distribuições num espaço localmente convexo E , separado e completo em relação às sucessões, análoga à que já foi estabelecida para o caso de R^n , com a diferença de que a indicatriz de uma tal aplicação não é uma função, mas sim uma medida diferenciável sobre V com valores em E .

Demonstra-se também que se E é sub-normável a indicatriz de qualquer aplicação linear contínua de $\tilde{C}(V)$ em E é de suporte compacto. Esta propriedade, que se demonstra muito simplesmente em R^n , a partir da Prop. 4 de [14], tem de ser demonstrada aqui de modo diferente por esta proposição não ser aplicável, em virtude dos segmentos compactos de V , para a ordenação habitual $K' \subset K$, não constituírem um conjunto filtrante à direita.

Se a variedade possui um elemento de volume σ , este permite associar, de maneira bi-unívoca, a cada medida diferenciável θ^* uma função $\theta = \frac{1}{\sigma} \theta^*$, de modo que se tem $\int T d\theta^* = \int T \theta d\sigma$.

A fórmula integral das aplicações lineares contínuas retoma então o mesmo aspecto que para o caso de R^n , e a indicatriz de uma aplicação linear contínua pode passar de novo a ser interpretada como uma função.

O estudo do dual, que permite confrontar o nosso método com o de L. SCHWARTZ, aparece aqui consideravelmente simplificado em relação ao que S. SILVA faz em [15], para o caso de R^n , mas isso deve-se ao facto de termos provado antes, directamente, que o espaço $\tilde{C}(V)$ é reflexivo. Aí se estabelece, como é de esperar, em virtude do que atrás ficou dito, que as distribuições sobre uma variedade diferenciável podem ser identificadas canonicamente com as formas lineares contínuas sobre o espaço das medidas diferenciáveis e de suporte compacto. O nosso conceito de distribuição só se identifica então, canonicamente, com o que L. SCHWARTZ define em [11], quando existir na variedade em questão um elemento de volume privilegiado.

Terminamos este trabalho com o estudo das distribuições sobre um grupo de LIE, visando especialmente a convolução que definimos directamente, por meio da fórmula integral,

$$\int T(\hat{u}x^{-1})S(u)du.$$

Podíamos ter ido mais longe estudando outras questões como

a transformação de FOURIER, mas preferimos não alongar mais este trabalho, reservando-as para trabalhos futuros.

Procurámos reduzir a um mínimo indispensável os conceitos e resultados que se utilizam no texto. Porém, como acontece sempre em trabalhos desta índole, aplicam-se frequentemente noções que ultrapassam os conhecimentos da média geral dos leitores. Por isso, recordamos no número seguinte alguns conceitos e resultados, visando especialmente a teoria dos Espaços Localmente Convexos e a Teoria Directa das Distribuições, que julgamos essenciais para uma boa compreensão do texto.

Para não alongar demasiado este número, outras noções preliminares, como as que dizem respeito às variedades e grupos de LIE, foram introduzidas só na altura em que começaram a tornar-se necessárias.

2. Preliminares. a) *Espaços localmente convexos.* Vamos recordar aqui algumas noções da Teoria dos Espaços Localmente Convexos que serão utilizadas frequentemente no texto.

Consideremos um espaço vectorial E ⁽¹⁾. Chama-se *semi-norma* sobre E toda a função real $p(x)$, não negativa, definida em E , que verifica as seguintes condições: (1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$; (2) $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$, $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in C$. Se $p(x) = 0$ implica $x = 0$, diz-se que p é uma *norma* sobre E .

Um conjunto $A \subset E$ diz-se *absolutamente convexo* se, quaisquer que sejam $x, y \in A$, $\lambda, \mu \in C$, se tem $\lambda x + \mu y \in A$, desde que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. A diz-se *absorvente* se, para todo $x \in E$, existe um número $\varphi > 0$ tal que $x \in \varphi A$.

A bola de raio $\delta > 0$ associada a uma semi-norma p sobre E , isto é, o conjunto dos pontos $x \in E$ tais que $p(x) \leq \delta$, é um conjunto absolutamente convexo e absorvente. Inversamente, a todo o conjunto $U \subset E$ absolutamente convexo e absorvente corresponde uma semi-norma p definida por $p(x) = \inf \{ \varphi \mid x \in \varphi U \}$.

Um espaço vectorial E diz-se um *espaço localmente convexo* se se definiu uma topologia em E por meio de um sistema de semi-normas, ou, o que é equivalente, por meio dum sistema fundamental de vizinhanças de zero absolutamente convexas e absorventes. A soma $x+y$, o produto λx e as semi-normas $p(x)$ são então funções contínuas resp. sobre $E \times E$, $C \times E$ e E .

(1) Todos os espaços vectoriais que vamos considerar aqui são espaços vectoriais sobre o corpo complexo C .

Consideremos dois espaços localmente convexos E, F cujas topologias sejam definidas por dois sistemas de semi-normas $\{p_\alpha\}, \{q_\beta\}$, respectivamente.

Para que uma aplicação linear $\varphi: E \rightarrow F$ seja contínua, é necessário e suficiente que a toda a semi-norma q_β corresponda uma semi-norma p_α e um número real $\rho > 0$, tais que se tenha $q_\beta[\varphi(x)] \leq \rho p_\alpha(x), \forall x \in E$. Daqui se deduz facilmente uma condição para que dois sistemas de semi-normas sobre E definam a mesma topologia.

Dado um espaço localmente convexo E , um sub-conjunto $A \subset E$ diz-se limitado se é absorvido por qualquer vizinhança de zero, isto é, para toda a vizinhança U de zero em E existe um número $\lambda > 0$ tal que $A \subset \lambda U$. Equivale também a dizer que toda a semi-norma contínua em E é limitada em A .

Entre os espaços localmente convexos que vamos considerar, destacam-se, pelo seu papel na Teoria das Distribuições, os espaços (LN^*) , (cf. [14]), e os espaços (LF) , (cf. [5]).

Um espaço localmente convexo E diz-se um espaço (LN^*) se é o limite indutivo duma sucessão crescente E_n de espaços de Banach, tal que cada espaço E_n induz no anterior E_{n-1} uma topologia menos fina que a deste espaço, e a bola de cada espaço E_n é relativamente compacta no espaço seguinte E_{n+1} . Uma sucessão E_n nestas condições diz-se uma sucessão de definição de E . De acordo com a noção de limite indutivo, (cf. [14]), o espaço E , como espaço vectorial, é a reunião dos espaços E_n , e a sua topologia é a mais fina das topologias localmente convexas que induzem em cada um dos espaços E_n uma topologia menos fina que a deste espaço.

Um espaço (LF) é também um limite indutivo, mas duma sucessão E_n de espaços (F) (localmente convexos, metrizáveis e completos) tal que cada espaço E_n induz em E_{n-1} uma topologia idêntica à deste espaço.

Os espaços (LN^*) e (LF) gozam de propriedades semelhantes. Assim, todo espaço E , (LN^*) ou (LF) é separado e completo; uma sucessão x_j de elementos de E converge para zero, se todos os elementos x_j pertencem a um mesmo espaço E_n e convergem para zero neste espaço; análogamente, um conjunto $H \subset E$ é limitado se está contido num dos espaços E_n e é limitado neste espaço.

Se E é um espaço (LF) a topologia induzida por E em cada um dos espaços E_n é idêntica à topologia deste espaço.

Esta propriedade nunca se verifica nos espaços LN^* de dimensão infinita, únicos que têm interesse.

Um espaço localmente convexo E , separado, diz-se *tonelado* se todo o sub-conjunto de E absolutamente convexo, absorvente e fechado é uma vizinhança de zero. Um espaço tonelado em que todo o sub-conjunto limitado é relativamente compacto diz-se um espaço de *Montel*.

Um espaço (LN^*) é sempre um espaço de Montel (cf. [14]). Um espaço (LF) é sempre tonelado, mas pode não ser um espaço de Montel.

Chama-se *dual* dum espaço localmente convexo separado E , e designa-se por E' , o espaço vectorial (sem qualquer topologia) constituído pelas formas lineares contínuas sobre E .

Entre as diversas topologias que se podem considerar em E' , as mais importantes são: (a) a topologia da convergência simples τ_s , que se chama também *topologia fraca*; (b) a topologia da convergência uniforme nas partes limitadas de E que se chama também *topologia forte*. O espaço E' munido com a topologia fraca diz-se o *dual fraco* de E , e quando munido com a topologia forte diz-se o *dual forte* de E .

Consideremos, mais geralmente, um conjunto qualquer \mathfrak{B} de partes limitadas de E . Chama-se \mathfrak{B} -topologia sobre E' a topologia da convergência uniforme nos conjuntos de \mathfrak{B} . Esta topologia é, como se reconhece facilmente, definida pelas semi-normas

$$p_B(x) = \sup_{x \in B} | \langle u, x \rangle |, \quad B \in \mathfrak{B}.$$

A topologia fraca τ_s sobre E' é a menos fina das \mathfrak{B} -topologias, enquanto que a topologia forte τ_b é a mais fina destas topologias.

A cada elemento $x \in E$ corresponde uma e uma só forma linear \tilde{x} sobre o dual E' , assim definida: $\langle \tilde{x}, u \rangle = \langle u, x \rangle$, $\forall u \in E'$.

Demonstra-se que esta forma linear é contínua para a topologia fraca, e portanto também para a topologia forte.

Frequentemente identifica-se cada elemento $x \in E$ com a correspondente forma linear \tilde{x} , de modo que o espaço E é, ao mesmo tempo, sub-espaço vectorial do dual E_s'' do seu dual fraco e do dual E_b'' do seu dual forte.

Demonstra-se facilmente que se tem sempre $E = E_s''$, isto é: *todo o espaço localmente convexo é idêntico, como espaço vectorial, ao dual do seu dual fraco.*

Para a topologia forte, já não acontece sempre assim, pois que podem existir, em geral, formas lineares sobre E' contínuas para esta topologia que não sejam do tipo $u \rightarrow \langle u, x \rangle$, $\forall u \in E'$. Assim, geralmente, $E \neq E''_b$.

Porém se $E = E''_b$ diz-se que E é *semi-reflexivo*, e se, além disso, a topologia forte sobre E''_b é idêntica à topologia de E , este espaço diz-se *reflexivo*.

Se E é reflexivo, o seu dual forte $E'(\tau_b)$ é também reflexivo, de modo que cada um destes espaços é o dual forte do outro, o que equivale a dizer que cada um deles é o espaço das formas lineares contínuas sobre o outro, com a topologia da convergência limitada.

Demonstra-se que todo o espaço de Montel é reflexivo; em particular, todo o espaço (LN^*) é reflexivo, (cf. [2]).

(b) *Distribuições sobre um domínio compacto de R^n* . Consideremos um domínio compacto X de R^n , isto é, um compacto conexo e coincidente com a aderência do seu interior. Designemos por $C(X)$ o espaço vectorial das funções complexas $f(x^1, \dots, x^n)$ definidas e contínuas em X . Para todo o índice $i = 1, 2, \dots, n$, designemos por D_i o operador de derivação usual $f \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}$, com a condição $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C(X)$.

O operador D_i é linear e admite um inverso direito assim definido:

$$(2.1) \dots I_i f(x) = \int_{a_i}^{x_i} \tilde{f}(x^1, \dots, \zeta^i, \dots, x^n) d\zeta^i, \quad \forall f \in C(X),$$

em que $a = (a^1, \dots, a^n) \in X$, e \tilde{f} é uma função contínua em R^n que prolonga f .

Os operadores I_i são permutáveis: $I_i I_k = I_k I_i$, $i, k = 1, \dots, n$. Os operadores D_i são também permutáveis no sentido de que se tem, $D_i D_k f = D_k D_i f$, sempre que ambos os membros desta igualdade sejam definidos.

Convencionaremos pôr para, todo o sistema de inteiros ≥ 0 , $p = (p_1, \dots, p_n)$, $D_1^{p_1} \dots D_n^{p_n} = D^p$, e análogamente $I_1^{p_1} \dots I_n^{p_n} = I^p$.

O espaço das distribuições sobre X , que aqui se designará por $\tilde{C}(X)$, pode ser definido como sendo uma extensão vectorial de $C(X)$ que verifica as seguintes condições (*axiomas das distribuições num domínio compacto*):

(D1) Para todo o índice $i=1, \dots, n$ é possível definir uma aplicação linear $\tilde{D}_i: \tilde{C}(X) \rightarrow \tilde{C}(X)$ (derivação generalizada em relação à variável x_i) que prolonga o operador de derivação usual D_i .

(D2) Os operadores \tilde{D}_i são permutáveis, isto é, $\tilde{D}_i \tilde{D}_k = \tilde{D}_k \tilde{D}_i$, $i, k=1, \dots, n$.

(D3) Toda a distribuição $T \in \tilde{C}(X)$ é da forma $T = \tilde{D}^p f$ em que $f \in C(X)$ e $p = (p_1, \dots, p_n)$ é um sistema de inteiros ≥ 0 .

(D4) Se $T \in \tilde{C}(X)$ e $\tilde{D}_i T = 0$ então T é derivada generalizada, de certa ordem, duma função $f \in C(X)$ independente de x^i em cada intervalo $I \subset X$.

É fácil demonstrar que o espaço $\tilde{C}(X)$ é univocamente determinado, por estes axiomas, a menos um isomorfismo que conserva as funções contínuas, (cf. [15]).

O espaço $\tilde{C}(X)$ pode ser construído por diversos métodos. Aqui interessa-nos unicamente analisar o método directo de S. SILVA, o que vamos fazer de modo bastante breve.

Para isso, convém estabelecer previamente algumas consequências dos axiomas (D1)–(D4), supondo, é claro, $\tilde{C}(X)$ já construído.

De (D1) e (D2) resulta facilmente que se tem, para toda a distribuição $T = \tilde{D}^p f$, $f \in C(X)$,

$$(2.2) \dots \quad \tilde{D}^p f = \tilde{D}^{p+q} (I^q f).$$

Assim, toda a distribuição $T = \tilde{D}^p f$ pode ser representada de uma infinidade de maneiras, como derivada (generalizada) de uma função contínua. Importa então estabelecer condições para que duas distribuições $T = \tilde{D}^p f$, $S = \tilde{D}^q g$ sejam iguais.

Tendo em conta (2.2) e ainda o facto de os operadores de derivação serem lineares, deduz-se facilmente que a igualdade $\tilde{D}^p f = \tilde{D}^q g$ é equivalente a

$$(2.3) \dots \quad \tilde{D}^{p+q} (I^q f - I^p g) = 0.$$

Tudo se reduz então a determinar as funções $\varphi \in \tilde{C}(X)$ que verificam a equação $\tilde{D}^r \varphi = 0$, ou seja a intersecção do núcleo do operador \tilde{D}^r com o espaço $C(X)$, que se designará por $N_r(X)$.

Do axioma (D4) resulta facilmente que $N_r(X)$ é constituído pelas funções da forma

$$(2.4) \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha_i=1}^{r_i-1} \varphi_{\alpha_i}(x) \cdot (x^i)^{\alpha_i},$$

em que, para cada índice $\alpha_i = 1, \dots, r_i - 1$, $\varphi_{\alpha_i}(x)$ é uma função contínua em X independente de x^i em cada intervalo $I \subset X$.

Vê-se assim, que duas distribuições $T = \tilde{D}^p f$ $S = \tilde{D}^q g$ são iguais se, e só se, $I^q f - I^p g$ é uma função da forma (2.4), com $r = p + q$, ou seja:

$$(2.5) \dots \quad I^q f - I^p g \in N_{p+q}(X).$$

Consideremos agora o conjunto Λ constituído pelos pares (p, f) , em que p é um sistema de inteiros ≥ 0 e f é uma função contínua em X , e consideremos a relação:

$$(2.6) \dots \quad (p, f) \sim (q, g) \text{ se, e só se, } I^p f - I^q g \in N_{p+q}(X).$$

A relação assim definida é, como se demonstra facilmente, uma relação de equivalência em Λ , independentemente de qualquer hipótese sobre a existência de $\tilde{C}(X)$.

Este facto leva-nos então a interpretar as distribuições sobre X como sendo as classes de equivalência $[p, f]$ dos diferentes pares $(p, f) \in \Lambda$, para relação (2.6).

Por outro lado, a adição, multiplicação por um escalar e derivação, traduzem-se, nesta maneira de interpretar as distribuições, pelas seguintes regras:

$$(2.7) \dots \quad \begin{cases} [p, f] + [p, g] = [p, f + g] \\ \lambda [p, f] = [p, \lambda f] \\ \tilde{D}^p [q, f] = [p + q, f]. \end{cases}$$

Posto isto, somos naturalmente conduzidos a definir o espaço $\tilde{C}(X)$, como sendo o conjunto das classes $[p, f]$ com a estrutura determinada pelas relações (2.7). A demonstração de que o espaço $\tilde{C}(X)$, assim definido, verifica os axiomas (D1)—(D4) reduz-se a uma série de verificações fáceis de estabelecer (cf. [15], [16]).

Daqui em diante, desde que não haja possibilidade de confusão, designaremos por $D^p T$, em vez de $\tilde{D}^p T$, a derivada de uma distribuição.

O operador de derivação mista $D_1 \dots D_n$ será designado por D , e para todo o inteiro $m \geq 0$, designaremos por $C_m(X)$, o

sub-espaço de $\tilde{C}(X)$ constituído pelas distribuições da forma $T = \mathbf{D}^m f$ em que $f \in C(X)$.

Reconhece-se imediatamente que os espaços $C_0(X) = C(X)$, $C_1(X), \dots, C_m(X), \dots$ formam uma sucessão crescente de espaços vectoriais cuja reunião é $\tilde{C}(X)$.

Introduzamos em $C(X)$ a topologia da convergência uniforme sobre X , e em cada um dos espaços $C_m(X)$, $m = 1, 2, \dots$, a mais fina das topologias localmente convexas que tornam contínua a aplicação $f \rightarrow \mathbf{D}^m f$ de $C(X)$ em $C_m(X)$.

Os espaços $C_m(X)$ são, como se demonstra facilmente, espaços de Banach, e a topologia induzida por $C_m(X)$ em $C_{m-1}(X)$ é menos fina que a deste último espaço.

Por outro lado, recorrendo ao clássico teorema de ASCOLI, (cf. [15]), demonstra-se que a bola de cada espaço $C_m(X)$ é relativamente compacta no espaço seguinte $C_{m+1}(X)$.

Posto isto, é natural definir a topologia de $\tilde{C}(X)$ como sendo a topologia do *limite indutivo* dos espaços $C_m(X)$, cf. 2. a), ou seja, a topologia localmente convexa mais fina que induz em cada espaço $C_m(X)$ uma topologia menos fina que a deste espaço.

O espaço $\tilde{C}(X)$ é então um espaço (LN*) e como tal é um espaço completo, separado e de Montel.

Uma sucessão de distribuições $T_j \in \tilde{C}(X)$ converge para zero neste espaço se, e só se, todas as distribuições T_j pertencem a um mesmo espaço $C_m(X)$ e convergem para zero segundo a topologia deste espaço. Um conjunto $\mathfrak{H} \subset \tilde{C}(X)$ é limitado se, e só se, \mathfrak{H} está contido num dos espaços $C_m(X)$ e é limitado neste espaço.

Uma aplicação linear de $\tilde{C}(X)$ num espaço localmente convexo E é contínua se, e só se, a sua restrição a qualquer dos espaços $C_m(X)$ é contínua, relativamente à topologia deste espaço. Deduz-se, em particular, que os operadores de derivação são contínuos em $\tilde{C}(X)$.

O facto de os operadores de derivação serem contínuos dá origem a uma propriedade bastante importante. Como se sabe, para toda a função contínua $f \in C(X)$, existe uma sucessão de polinómios φ_n que converge uniformemente para f , e portanto também segundo a topologia induzida por $\tilde{C}(X)$ em $C(X)$.

Então, como toda a distribuição $T \in \tilde{C}(X)$ é da forma $\tilde{\mathbf{D}}^p f$, segue-se que existe também uma sucessão de polinómios que converge para T em $\tilde{C}(X)$.

O sub-espaço de $\tilde{C}(X)$ constituído pelos polinómios é então denso em $\tilde{C}(X)$, e o mesmo acontece portanto com o sub-espaço das funções contínuas.

Do critério de convergência, que estabelecemos anteriormente, deduz-se facilmente o seguinte critério de derivabilidade para funções com valores no espaço $\tilde{C}(X)$ das distribuições sobre um domínio compacto X de R^n :

Seja $F(u)$ uma função com valores em $\tilde{C}(X)$, definida num aberto Ω de R^n . Se, para todo o domínio compacto $\Delta \subset \Omega$, existe um inteiro p e uma função $f(x, u)$ contínua e admitindo derivada parcial $\frac{\partial}{\partial u^i} f(x, u)$ contínua em $X \times \Omega$, tais que $F(u) = \tilde{D}_x^p f(x, u)$, para cada $u \in \Delta$, então $F(u)$ admite derivada parcial em relação à variável u^i , contínua em Ω , e tal derivada é dada pela fórmula

$$\frac{\partial}{\partial u^i} F = D_x^p \frac{\partial f}{\partial u^i}.$$

E de modo análogo para as derivadas de ordem superior.

c) *Análise Linear.* Pode-se estabelecer, para as distribuições, uma fórmula de representação (fórmula de DIRAC) que desempenha na Teoria das Distribuições um papel análogo ao da fórmula integral de CAUCHY na Teoria das Funções Analíticas.

Ponhamos, para todo o inteiro $m \geq 0$, para todo o ponto $u = (u_1, \dots, u_n)$ de R^n e todo o índice $i = 1, 2, \dots, n$,

$$(2.8) \quad G_i^m(x-u) = \begin{cases} \frac{(x^i - u^i)^{m+1}}{(m+1)!} & \text{se } x^i \geq u^i \\ 0 & \text{se } x^i < u^i, \end{cases}$$

e designemos por $G^m(x-u)$ o produto das n funções $G_i^m(x-u)$.

Fácilmente se reconhece que $G^m(x-u)$ é uma função contínua em R^n , assim como as m primeiras derivadas mixtas $D_x G^m(x-u), \dots, D_x^m G^m(x-u)$; no entanto, a derivada $D_x^{m+1} G_i^m(x-u)$ é descontínua em todos pontos de qualquer dos hiperplanos $x^i = u^i$, de modo que as derivadas seguintes já não podem ser interpretadas no sentido usual.

Para todo o domínio compacto $X \subset R^n$, designemos por $G_X^m(x-u)$ a restrição de $G^m(x-u)$ a X . Como $G_X^m(x-u)$ é

continua em X , as derivadas $D_x^p G_x^m$, que, para $p > m + 1$, podem não existir no sentido usual, podem ser interpretadas como distribuições sobre X .

Vejamos que se tem:

$$(2.9) \dots \quad D_x^{m+2} G_x^m(x-u) \begin{cases} = 0 & \text{se } u \notin \overset{\circ}{X} \quad (1) \\ \neq 0 & \text{se } u \in \overset{\circ}{X} \end{cases}$$

Basta ver que assim é quando X é um intervalo compacto.

Ora, neste caso, se $u \notin \overset{\circ}{X}$, existe um índice i tal que $G_i^m(x-u)$ se reduz no intervalo X a um polinómio de grau $m + 1$, eventualmente nulo. Então $G_x^m(x-u)$ é da forma (2.4), com $r = (m + 1, \dots, m + 1)$, e portanto $D_x^{m+2} G_x^m(x-u) = 0$. Se $u \in \overset{\circ}{X}$, nenhuma das funções $G_i^m(x-u)$ se reduz, no intervalo X , a um polinómio, e daí se deduz facilmente que $D_x^{m+2} G_x^m(x-u) \neq 0$.

Consideremos agora a aplicação $u \rightarrow G_x^m(\hat{x}-u)$ que faz corresponder a cada ponto $u \in \mathbb{R}^n$ a função $G_x^m(\hat{x}-u)$.

Podemos considerá-la como uma *função vectorial* definida em \mathbb{R}^n e com valores no espaço $C(X)$. Esta função é contínua quando se introduz em $C(X)$ a topologia da convergência uniforme sobre X , visto que $G_x^m(x-u)$ é contínua como função das variáveis x e u .

Pode-se interpretar também $u \rightarrow G_x^m(\hat{x}-u)$ como uma função com valores em $\tilde{C}(X)$, sendo ainda contínua neste caso, pois que a topologia induzida por $\tilde{C}(X)$ em $C(X)$ é menos fina que a da convergência uniforme.

Nestas condições, para toda a função $f \in C(X)$, o produto $f(u) G_x^m(\hat{x}-u)$ é integrável no sentido de RIEMAN, relativamente à topologia da convergência uniforme sobre $C(X)$ e portanto também em relação à topologia de $\tilde{C}(X)$.

Demonstra-se facilmente que se tem:

$$(2.10) \dots \quad f(\hat{x}) = D_x^{m+2} \int_X f(u) \cdot G_x^m(\hat{x}-u) du, \quad \forall f \in C(X).$$

Como o operador D^{m+2} é contínuo, a fórmula anterior pode escrever-se

(1) $\overset{\circ}{X}$ designa o interior de X .

$$(2. 11) \dots \quad f(\hat{x}) = \int_X f(u) \cdot D_x^{m+2} G_X^m(\hat{x} - u) du,$$

o que constitui a fórmula de DIRAC para as funções contínuas.

Para cada $u \in X$, $D_x^{m+2} G^m(\hat{x} - u)$ é uma distribuição sobre X , independente de m , a que chamaremos distribuição de DIRAC sobre X relativa ao ponto u , e que designaremos por $\delta_X(\hat{x} - u)$.

A fórmula de DIRAC (2. 11) escreve-se então:

$$(2. 11') \dots \quad f(\hat{x}) = \int_X f(u) \delta_X(\hat{x} - u) du, \quad \forall f \in C(X)$$

A partir do critério estabelecido no número anterior, deduz-se facilmente que a função $\delta_X(\hat{x} - u)$ é diferenciável (1). Por outro lado, de (2. 9) resulta imediatamente que o suporte de $\delta_X(\hat{x} - u)$ é precisamente o domínio compacto X .

A fórmula de representação de DIRAC estende-se facilmente às distribuições, com uma conveniente generalização da noção de integral.

Seja E um espaço localmente convexo separado, completo em relação às sucessões, e seja φ uma função definida e contínua em R^n , com valores em E .

O integral de φ em relação a uma distribuição $T \in \tilde{C}(X)$ define-se pondo, para toda a sucessão de funções contínuas $f_n \rightarrow T$,

$$(2. 12) \dots \quad \int_X T(u) \varphi(u) du = \lim_n \int_X f_n(u) \varphi(u) du,$$

desde que o limite do segundo membro exista e seja independente da sucessão f_n que converge para T .

É fácil ver que se φ é diferenciável e tem o seu suporte contido em X , o integral (2. 12) existe sempre, qualquer que seja a distribuição $T = D^p f$ considerada, sendo dado pela fórmula:

$$(2. 13) \dots \quad \int_X T(u) \varphi(u) du = (-1)^{|p|} \cdot \int_X f(u) D_u^p \varphi(u) du, \quad (2)$$

(1) Em todo este trabalho o termo *diferenciável* será entendido no sentido de indefinidamente derivável no sentido usual.

(2) Para todo o sistema de inteiros $p = (p_1, \dots, p_n)$, $|p|$ designa a soma $p_1 + \dots + p_n$.

a qual se estabelece facilmente, usando repetidas vezes o método de integração por partes.

Com esta definição, deduz-se imediatamente, a partir de (2.12),

$$(2.14) \dots T(\hat{x}) = \int_X T(u) \partial_x(\hat{x} - u) du, \quad \forall T \in \tilde{C}(X),$$

o que constitui a fórmula integral de DIRAC para as distribuições.

Esta fórmula mostra que os elementos $\partial_x(\hat{x} - u)$, $u \in \overset{\circ}{X}$, constituem uma base de $\tilde{C}(X)$, na qual se exprime qualquer distribuição em termos das operações de adição, multiplicação por escalares e passagem ao limite.

Este facto permite determinar as aplicações lineares contínuas de $\tilde{C}(X)$ num espaço localmente convexo E , separado e completo em relação às sucessões, por um método semelhante ao que se usa para os espaços de dimensão finita.

Sendo Θ uma tal aplicação, vê-se imediatamente que se tem, por (2.13):

$$(2.15) \dots \Theta(T) = \int_X T(u) \Theta[\partial_x(\hat{x} - u)] du,$$

ou ainda,

$$(2.15') \dots \Theta(T) = \int_X T(u) \theta(u) du,$$

em que

$$(2.16) \dots \theta(u) = \Theta[\partial_x(\hat{x} - u)], \quad \forall u \in \overset{\circ}{X}.$$

É imediato que a função $\theta(u)$, a que chamaremos *indicatriz* de Θ , é diferenciável e tem o seu suporte contido em X .

Suponhamos agora que é dada uma função $\theta: \overset{\circ}{X} \rightarrow E$, diferenciável e de suporte contido em X . Existe então o integral de θ a respeito de qualquer distribuição $T \in \tilde{C}(X)$, e a partir de (2.13) demonstra-se facilmente que a aplicação $\Theta: \tilde{C}(X) \rightarrow E$, definida por (2.15), é contínua.

Vejamus ainda que θ é a indicatriz de Θ , isto é: $\theta(a) = \Theta[\partial_x(\hat{x} - a)]$, $\forall a \in \overset{\circ}{X}$.

Tem-se com efeito:

$$\Theta[\partial_x(\hat{x} - a)] = \int_X \partial_x(\hat{u} - a) \theta(u) du = \int_X G_X^0(\hat{u} - a) \mathbf{D}^2 \theta(u) du;$$

e, por um processo de cálculo análogo ao que permite deduzir (2. 10), obtém-se

$$\int_X G_X^0(\hat{x} - a) \mathbf{D}^2 \theta(u) du = \theta(a).$$

Tem-se assim o seguinte teorema:

TEOREMA 2. 1. *Seja X um domínio compacto de \mathbb{R}^n e seja E um espaço localmente convexo separado e completo em relação às sucessões. Existe então uma correspondência bi-unívoca $\Theta \leftrightarrow \theta$ entre as aplicações lineares contínuas $\Theta: \tilde{\mathcal{C}}(X) \rightarrow E$ e as funções diferenciáveis $\theta: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ de suporte contido em X, a qual é determinada pelas fórmulas (2. 15) e (2. 16).*

Suponhamos que E é a recta complexa. Segundo o teorema anterior podemos identificar cada forma linear contínua Θ sobre $\tilde{\mathcal{C}}(X)$ com a sua indicatriz θ . Com esta convenção, pode-se então afirmar que o espaço $\mathcal{D}(X)$ das funções complexas diferenciáveis em \mathbb{R}^n e de suporte contido em X é o dual do espaço $\tilde{\mathcal{C}}(X)$.

Por outro lado, como $\tilde{\mathcal{C}}(X)$ é reflexivo, $\tilde{\mathcal{C}}(X)$ é também o dual forte de $\mathcal{D}(X)$, quando se mune este espaço com a topologia do dual forte. Demonstra-se que esta topologia é idêntica à topologia da convergência uniforme para cada uma das derivadas, cf. [11], a qual é definida pelas semi-normas:

$$\|\varphi\|_p = \max_{x \in X} \{|\varphi(x)|, |\mathbf{D}\varphi(x)|, \dots, |\mathbf{D}^p\varphi(x)|\}.$$

Assim, cada distribuição $T \in \tilde{\mathcal{C}}(X)$ pode ser interpretada, de acordo com a definição de L. SCHWARTZ, como forma linear contínua sobre $\mathcal{D}(X)$ (cf. [11]):

$$(2. 17) \dots \quad \langle \varphi, T \rangle = \int_X T(u) \cdot \varphi(u) du.$$

Como aplicação do Teor. 2. 1, vamos ver que, para toda a função α diferenciável em X, a aplicação $f \rightarrow \alpha f$, que faz corresponder a cada função f contínua em X o produto αf , é prolongável numa, e numa só, aplicação linear contínua de $\tilde{\mathcal{C}}(X)$ em si próprio.

Ora, tem-se, pela fórmula de DIRAC,

$$\alpha f(\hat{x}) = \int_X f(u) \alpha(u) \delta_X(\hat{x} - u) dx,$$

ou ainda

$$(2.18) \dots \quad \alpha f(\hat{x}) = \int_X f(u) \theta(u) du,$$

em que

$$(2.19) \dots \quad \theta(u) = \begin{cases} \alpha(u) \delta_X(\hat{x} - u) & u \in X \\ 0 & \text{nos restantes pontos } u \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Demonstra-se facilmente, cf. [10], que $\theta(u)$ é diferenciável e tem o seu suporte contido em X .

Assim, θ é indicatriz de uma única aplicação linear contínua $\Theta_x: \tilde{C}(X) \rightarrow \tilde{C}(X)$, (2.15), e a fórmula (2.18) mostra então que $\Theta_x(f) = \alpha f$, $\forall f \in C(X)$.

Posto isto, define-se o produto de uma distribuição qualquer $T \in \tilde{C}(X)$ por uma função qualquer $\alpha \in C^\infty(X)$, pondo $\alpha T = \Theta_x(T)$. As regras formais da multiplicação usual assim como a regra de derivação do produto, estendem-se imediatamente, prolongando por continuidade as identidades que traduzem tais regras.

A clássica fórmula de DIRAC para a multiplicação

$$(2.20) \dots \quad \alpha(x) \cdot \delta(\hat{x} - u) = \alpha(u) \delta(\hat{x} - u), \quad \forall u \in X,$$

obtém-se imediatamente, pois que o primeiro membro é precisamente a indicatriz $\theta(u)$ da aplicação $T \rightarrow \alpha T$, a qual é dada por (2.19).

(d) *Distribuições sobre um aberto.* A extensão da noção de distribuição a um aberto qualquer Ω de \mathbb{R}^n faz-se mediante o conceito de *restrição*, que se define do seguinte modo: sejam X, X' dois domínios compactos de \mathbb{R}^n tais que $X' \subset X$ e seja $T = D^p f$ uma distribuição sobre X , chama-se restrição de T a X' à distribuição

$$T|_{X'} = D^p(f|_{X'}),$$

em que $f|_{X'}$ designa a restrição de f a X' .

Demonstra-se sem dificuldade que $\tau_{X, X'}: T \rightarrow T|_{X'}$ é uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(X)$ sobre $\tilde{C}(X')$.

As distribuições sobre Ω são então definidas como sendo os sistemas $T = \{T_X\}$ que se obtêm, fazendo corresponder a cada

domínio compacto $X \subset \Omega$ uma distribuição $T_X \in \tilde{C}(X)$, de modo que se verifique a seguinte condição de compatibilidade:

$$(T_X)_{|X'} = T_{|X'}, \text{ sempre que } X' \subset X.$$

A adição, multiplicação por um escalar e a derivação são definidas pelas regras

$$(2. 2. 1) \dots \quad \begin{cases} |T_X| + |S_X| = |T_X + S_X| \\ \lambda |T_X| = |\lambda T_X| \\ D^p |T_X| = |D^p T_X|. \end{cases}$$

Verifica-se facilmente que o conjunto $\tilde{C}(\Omega)$ das distribuições sobre Ω é um espaço vectorial, e que D^p é uma aplicação linear deste espaço em si próprio.

Fazendo corresponder a cada função $f \in C(\Omega)$ o sistema $\{f_X\}$, constituído pelas restrições de f aos domínios compactos $X \subset \Omega$, obtém-se um isomorfismo vectorial de $C(\Omega)$ sobre um sub-espaço de $\tilde{C}(\Omega)$, o qual pode portanto ser identificado com $C(\Omega)$.

Se $T = \{T_X\} \in \tilde{C}(\Omega)$, cada uma das distribuições T_X diz-se também a restrição de T a X . Se Ω' é um aberto contido em Ω , a restrição $T_{|_{\Omega'}}$ de T a Ω' pode-se definir como sendo o sub-sistema $T = \{T_X\}_{X \subset \Omega'}$.

Pode-se também definir a restrição de uma distribuição T sobre um domínio compacto $X \subset R^n$ a um aberto $\Omega \subset X$, pondo $T_{|_{\Omega}} = \{T_{|X'}\}_{X' \subset \Omega}$, ou ainda, se $T = D^p f$, $f \in C(X)$, $T_{|_{\Omega}} = D^p(f_{|\Omega})$.

Qualquer dos operadores de restrição, assim definidos, é evidentemente linear.

Demonstra-se facilmente que, se X é um domínio compacto de R^n e Ω um aberto qualquer de R^n que contenha X , toda a distribuição $T \in \tilde{C}(X)$ é a restrição a X duma distribuição definida em Ω . Prova-se ainda que a aplicação de $\tilde{C}(X)$ em $\tilde{C}(\overset{\circ}{X})$, $T \rightarrow T_{|\overset{\circ}{X}}$, é um isomorfismo vectorial de $\tilde{C}(X)$ sobre um sub-espaço vectorial de $\tilde{C}(\overset{\circ}{X})$. Podemos então identificar $\tilde{C}(X)$ com tal sub-espaço, e considerar as distribuições sobre um domínio compacto X , como sendo as distribuições no seu interior que são prolongáveis a qualquer aberto que contenha X .

Para as distribuições sobre abertos de R^n , desempenha papel importante a seguinte propriedade que L. SCHWARTZ designa sugestivamente por «principe du Recollement des Morceaux»:

«Seja $\{\Omega_\alpha\}$ uma família de abertos de reunião Ω e suponhamos que a cada índice α corresponde uma distribuição $T_\alpha \in \tilde{C}(\Omega_\alpha)$, de modo que se tenha: $T_\alpha|_{\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta} = T_\beta|_{\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta}$, sempre que $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \emptyset$.

Existe então uma e uma só distribuição T sobre Ω tal que $T_\alpha = T|_{\Omega_\alpha}$, $\forall \alpha$.

Daqui resulta imediatamente que a reunião de todos os abertos, onde uma distribuição T é nula, (1) é ainda um aberto onde T é nula.

Chama-se suporte duma distribuição $T \in \tilde{C}(\Omega)$ o complementar, a respeito de Ω , do maior aberto onde T é nula. Se T é uma função contínua, esta noção de suporte coincide com a noção usual.

e) *Limites Projectivos. Topologia de $\tilde{C}(\Omega)$.* Consideremos uma família de espaços vectoriais E_α cujos índices são tomados num conjunto ordenado I , e suponhamos que a cada par ordenado $\alpha \leq \beta$ corresponde uma aplicação linear $g_{\beta\alpha}: E_\beta \rightarrow E_\alpha$, de modo que se verifiquem as seguintes condições: (P1) $g_{\alpha\alpha} = id(E_\alpha)$; (P2) $g_{\gamma\alpha} = g_{\beta\alpha} \circ g_{\gamma\beta}$ sempre que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Nestas condições, chamaremos limite projectivo dos espaços E_α em relação às aplicações $g_{\alpha\beta}$, ao sub-espaço E do produto $\prod_\alpha E_\alpha$ constituído pelos elementos $x = \{x_\alpha\}$ tais que $x_\alpha = g_{\beta\alpha}(x_\beta)$, sempre que $\alpha \leq \beta$.

Vê-se imediatamente que o espaço $\tilde{C}(\Omega)$ das distribuições sobre um aberto Ω de \mathbb{R}^n é o limite projectivo dos espaços $\tilde{C}(X)$, em que X percorre o conjunto dos domínios compactos contidos em Ω , relativamente aos operadores de restrição $\rho_{X X'}: T \rightarrow T|_{X'}$.

Se os espaços E_α são espaços localmente convexos e as aplicações $g_{\alpha\beta}$ são contínuas, considera-se, salvo indicação em contrário, o limite projectivo E munido da topologia induzida pela do produto $\prod_\alpha E_\alpha$. Tal topologia é também a menos fina das topologias localmente convexas que tornam contínuas as projecções, $g_\alpha: \{x_\alpha\} \rightarrow x_\alpha$, de E em cada um dos espaços E_α .

(1) Para abreviar, diz-se frequentemente que duas distribuições T e T' são iguais em Ω se $T/\Omega = T'/\Omega$.

Demonstra-se facilmente que, se os espaços E_α são separados, E é um sub-espaço fechado de $\prod_{\alpha} E_\alpha$, sendo portanto *completo* se cada um dos espaços E_α é também completo.

Uma aplicação φ dum espaço topológico qualquer F em E é contínua se, e só se, para todo o índice α , a aplicação $\varphi_\alpha = g_\alpha \circ \varphi$ é contínua.

A topologia do espaço das distribuições $\tilde{C}(\Omega)$ define-se então naturalmente, como sendo a topologia usual do limite projectivo dos espaços $\tilde{C}(X)$, correspondentes aos domínios compactos $X \subset \Omega$, relativamente aos operadores de restrição ρ_X .

O espaço $\tilde{C}(\Omega)$, assim definido, é então um espaço localmente convexo, completo e separado.

Uma aplicação φ dum espaço topológico qualquer F em $\tilde{C}(\Omega)$ é contínua se, e só se, para todo o domínio compacto $X \subset \Omega$, $\varphi_X = \rho_X \circ \varphi$ é contínua.

Torna-se mais difícil estabelecer critérios para que uma aplicação dum limite projectivo de espaços localmente convexos num espaço topológico qualquer seja contínua. Tem-se no entanto o seguinte resultado, (cf. [14]):

«Se o conjunto de índices I é filtrante, e se F é um espaço localmente convexo sub-normável⁽¹⁾, então uma aplicação linear $\varphi: E \rightarrow F$ é contínua se, e só se, existir um índice $\alpha \in I$ e uma aplicação linear contínua $\varphi_\alpha: E_\alpha \rightarrow F$ tais que $\varphi = \varphi_\alpha \circ g_\alpha$.

Daí se deduz em particular:

«Para que uma aplicação φ do espaço $\tilde{C}(\Omega)$, das distribuições sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, num espaço localmente convexo sub-normável F seja contínua, é necessário e suficiente que exista um domínio compacto $X \subset \Omega$ e uma aplicação linear contínua $\varphi_X: \tilde{C}(X) \rightarrow F$, de modo que se tenha $\varphi = \varphi_X \circ \rho_X$, ou seja: $\varphi(T) = \varphi_X(T|_X)$, $\forall T \in \tilde{C}(\Omega)$.

A proposição anterior reduz então o problema de determinar as aplicações lineares contínuas do espaço das distribuições sobre um aberto Ω de \mathbb{R}^n num espaço localmente convexo F , separado, completo em relação às sucessões e sub-normável, ao problema já tratado em *c*).

(1) Um espaço localmente convexo E diz-se *sub-normável* se existe pelo menos uma norma contínua em E .

§ I. Mudanças de variável

3. Posição do problema. A maneira como se define usualmente a imagem $f \circ \mu$ duma função f por uma mudança de variável $y = \mu(x)$, $f \circ \mu(x) = f[\mu(x)]$, faz intervir o conceito de valor num ponto e não é, por isso, aplicável às distribuições. No entanto, como a noção de distribuição generaliza a noção de função contínua, é natural procurar estender a mudança de variável às distribuições de modo a serem conservadas as propriedades fundamentais desta operação.

Esta extensão pode ser feita por diferentes caminhos; aqui, seguiremos o método de prolongamento por continuidade que utilizámos já em [9], o qual, além de permitir estudar o problema com bastante generalidade, é o que melhor se adapta aos fins que temos em vista neste trabalho.

Consideremos dois domínios X, Y do espaço R^n , cada um deles *aberto* ou *compacto*, e seja μ uma aplicação contínua de X em Y ; μ pode-se exprimir por meio de um sistema de n funções contínuas

$$y^i = \mu^i(x^1, \dots, x^n) \quad i = 1, \dots, n,$$

em que x^1, \dots, x^n designam as coordenadas dum ponto qualquer $x \in X$, e y^1, \dots, y^n são as coordenadas do ponto imagem $y = \mu(x)$.

Fazendo corresponder a cada função $f(y)$ ⁽¹⁾, contínua em Y , a sua imagem por μ , ou seja, a função composta $f \circ \mu(x) = f[\mu(x)]$, define-se uma aplicação do espaço $C(Y)$ no espaço $C(X)$.

Esta aplicação é evidentemente linear, e respeita a multiplicação, isto é:

$$(f \cdot g) \circ \mu = (f \circ \mu) \cdot (g \circ \mu) \quad \forall f, g \in C(Y).$$

O problema, que nos propomos tratar, consiste então em fazer corresponder a cada distribuição $T \in \tilde{C}(Y)$ uma distribuição bem determinada $T \circ \mu \in \tilde{C}(X)$, de modo que se verifiquem as seguintes condições:

(M1) Quando T é uma função f , contínua em Y , $T \circ \mu$ coincide com a função composta $f \circ \mu$, no sentido usual.

(M2) A correspondência $T \rightarrow T \circ \mu$, que designaremos por μ^* , é uma aplicação contínua de $\tilde{C}(Y)$ em $\tilde{C}(X)$.

(1) Quando não se indique a natureza dos valores duma função f subentende-se que f é uma função *complexa*. Esta convenção será adoptada em todo o texto.

O problema assim posto pode não admitir solução alguma. No entanto, se existir uma solução, esta é única, pois que $C(Y)$ é um sub-espaço denso em $\tilde{C}(Y)$, e a condição (M1) determina μ^* neste sub-espaço.

Não tem interesse aqui a discussão das condições a que deve satisfazer μ para que o problema seja possível. Limitamo-nos a estabelecer a existência de μ^* no caso em que μ é regular, o que é suficiente para o fim que temos em vista.

4. Mudanças de variável regulares. Antes de prosseguir, convém esclarecer o sentido em que vamos utilizar a noção de aplicação regular.

Dados dois sub-conjuntos X, Y de R^n , uma aplicação $\mu: X \rightarrow Y$ diz-se *regular* num ponto x_0 interior a X se é diferenciável neste ponto e o seu Jacobiano, J_μ , não se anula em x_0 .

Se x_0 é um ponto da fronteira de X , μ diz-se regular em x_0 , se existir uma vizinhança U de x_0 e uma aplicação $\bar{\mu}: U \rightarrow R^n$, regular em x_0 , que coincida com μ na intersecção $U \cap X$.

Uma aplicação $\mu: X \rightarrow Y$ diz-se regular se é regular em cada ponto de X .

Posto isto, comecemos por demonstrar o seguinte Lema:

LEMA 4.1. *Sejam X e Y dois domínios compactos de R^n . A toda a aplicação injectiva e regular $\mu: X \rightarrow Y$ corresponde uma e uma só aplicação linear contínua $\mu^*: \tilde{C}(Y) \rightarrow \tilde{C}(X)$ tal que se tem, para toda a função $f \in C(Y)$, $\mu^*(f) = f \circ \mu$.*

Como já vimos, μ^* , se existir, é univocamente determinada. Vejamos que, nas condições do Lema, ela existe de facto.

A fórmula de DIRAC permite escrever

$$(4.1) \quad \dots \quad f \circ \mu(\hat{x}) = \int_X f \circ \mu(v) \delta_X(\hat{x} - v) dv, \quad \forall f \in C(Y).$$

Este integral é um integral no sentido de RIEMANN em que a função integranda é uma função vectorial com valores no espaço $\tilde{C}(X)$, definida e contínua em R^n . Pode-se então efectuar a mudança de variável $z = \mu(v)$ pela regra usual⁽¹⁾.

(1) Convém ter em atenção que μ define um homeomorfismo de X sobre $\mu(X)$.

Obtém-se assim :

$$(4.2) \dots f \circ \mu(\hat{x}) = \int_{\mu(X)} f(z) \cdot |J_{\mu^{-1}}(z)| \delta_X(\hat{x} - \mu^{-1}(z)) dz,$$

ou ainda

$$(4.2') \dots f \circ \mu(\hat{x}) = \int_Y f(z) \theta(z) dz,$$

em que θ é uma função definida em R^n , com valores em $\tilde{C}(X)$, tal que

$$(4.3) \dots \theta(z) = \begin{cases} |J_{\mu^{-1}}(z)| \delta_X(\hat{x} - \mu^{-1}(z)), & \text{se } z \text{ é interior a } \mu(X) \\ 0 & \text{nos outros pontos.} \end{cases}$$

A função θ tem o seu suporte contido em Y . Então, se θ for diferenciável, corresponde-lhe, pelo Teor. 2.1, uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(Y)$ em $\tilde{C}(X)$, que, em virtude de 4.2', será a aplicação μ^* procurada.

Tudo se reduz então a provar que θ é diferenciável.

Isso é imediato nos pontos interiores ou exteriores a $\mu(X)$; resta portanto estabelecer a diferenciabilidade de θ nos pontos fronteiras a $\mu(X)$.

Seja então z_0 um ponto da fronteira de $\mu(X)$; como μ define um homeomorfismo de X sobre $\mu(X)$, existe um único ponto da fronteira de X tal que $\mu(v_0) = z_0$. Por outro lado, como μ é regular existe uma vizinhança aberta V de v_0 , uma vizinhança aberta W de z_0 e uma aplicação regular $\mu_0: V \rightarrow W$ que coincide com μ em $X \cap V$. Podemos supor ainda as vizinhanças V e W suficientemente pequenas para que μ_0 seja um homeomorfismo.

Ora, a função definida em W

$$\theta_0(z) = |J_{\mu_0^{-1}}(z)| \delta_X(\hat{x} - \mu_0^{-1}(z))$$

é diferenciável e coincide com $\theta(z)$ em W , o que acaba de demonstrar o lema.

O lema anterior estende-se para os restantes casos em que um dos domínios X, Y , pelo menos, é aberto.

Suponhamos, em primeiro lugar, que X é compacto e Y é aberto, e designemos por μ_1 a aplicação de X sobre $Y_1 = \mu(X)$ tal que $\mu_1(x) = \mu(x)$, $\forall x \in X$.

Como Y_1 é um domínio compacto, o lema anterior garante a existência de uma aplicação linear contínua μ_1^* de $\tilde{C}(Y_1)$ sobre $\tilde{C}(X)$ tal que $\mu_1^*(f) = f \circ \mu_1, \forall f \in C(Y_1)$.

Então, pondo, para toda a distribuição $T \in \tilde{C}(Y)$,

$$\mu^*(T) = \mu_1^*(T|_{Y_1}),$$

ou seja

$$\mu^* = \mu_1^* \circ \rho_{Y Y_1},$$

vê-se imediatamente que μ^* é uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(Y)$ sobre $\tilde{C}(X)$ tal que $\mu^*(f) = f \circ \mu, \forall f \in C(Y)$.

Consideremos agora o caso em que X é aberto e Y é aberto ou compacto. Para todo o domínio compacto $K \subset X$, designemos por μ_K a restrição de μ a K . A aplicação μ_K está então nas condições do caso anterior, ou nas do próprio Lema, conforme Y seja aberto ou compacto. Em qualquer dos casos, existe uma aplicação linear contínua $\mu_K^*: \tilde{C}(Y) \rightarrow \tilde{C}(K)$ tal que $\mu_K^*(f) = f \circ \mu_K$.

Reconhece-se facilmente que, para toda a distribuição $T \in \tilde{C}(Y)$, o sistema formado pelas distribuições $\mu_K^*(T)$ é uma distribuição sobre X , no sentido da definição dada em 2. d), que vamos designar por $\mu^*(T)$.

Como, para todo o segmento $K \subset X$ se tem $\mu_K^* = \rho_K \circ \mu$, da condição que estabelecemos em 2. c), para que uma aplicação dum espaço topológico em $\tilde{C}(X)$ seja contínua, resulta imediatamente que μ^* é uma aplicação contínua de $\tilde{C}(Y)$ em $\tilde{C}(X)$, tendo-se ainda para toda a função $f \in C(K)$, $\mu^*(f) = f \circ \mu$.

Pode-se então enunciar o seguinte teorema:

TEOREMA 4.2. *Sejam X e Y dois domínios de \mathbb{R}^n , cada um deles aberto ou compacto. A toda a aplicação injectiva regular $\mu: X \rightarrow Y$ corresponde uma e uma só aplicação linear contínua $\mu^*: \tilde{C}(Y) \rightarrow \tilde{C}(X)$ que prolonga a aplicação $f \rightarrow f \circ \mu$ de $C(Y)$ em $C(X)$.*

Para cada distribuição $T \in \tilde{C}(Y)$, a distribuição $\mu^*(T)$ dir-se-á distribuição composta de T com μ , ou ainda, por abuso de linguagem, imagem de T por μ , e designar-se-á por $T \circ \mu$ ou $T[\mu(x)]$.

Da fórmula (4.3) resulta que a imagem da distribuição de DIRAC sobre Y , $\delta_Y(\hat{y} - v)$, por uma aplicação injectiva regular

$\mu: X \rightarrow Y$, é dada, em cada ponto $v \in \mu(X)$, pela fórmula

$$(4.4) \quad \mu^*[\partial_Y(\hat{y} - v)] = |J_{\mu^{-1}}(v)| \partial_X(\hat{x} - \mu^{-1}(v)),$$

sendo nula nos restantes pontos de R^n .

Pode-se ainda escrever:

$$(4.5) \quad \partial_Y(\mu(\hat{x}) - \mu(a)) = \frac{1}{|J_\mu(a)|} \cdot \partial_X(\hat{x} - a), \quad \forall a \in X.$$

O teorema 4.2 continua válido se μ é regular mas não é injectiva.

A demonstração pode ser feita por um processo análogo ao que utilizámos na extensão do Lema 4.1 ao caso em que X é aberto, (Ver Notas Finais).

5. Propriedades das mudanças de variáveis. Vamos agora ver que a maior parte das propriedades da mudança de variável nas funções é extensível às distribuições.

No que se segue X, Y, Z , designam sempre domínios abertos ou compactos dum mesmo espaço R^n , e para cada aplicação regular⁽¹⁾ $\mu: X \rightarrow Y$, μ^* designa a aplicação $T \rightarrow T \circ \mu$ definida no número anterior.

PROPOSIÇÃO 5.1 *Se $\mu: X \rightarrow Y$, $\nu: Y \rightarrow Z$ são aplicações regulares, tem-se:*

$$(5.1) \quad (T \circ \nu) \circ \mu = T \circ (\nu \circ \mu), \quad \forall T \in \tilde{C}(Z),$$

ou seja

$$(5.1') \quad (\nu \circ \mu)^* = \mu^* \circ \nu^*.$$

Com efeito, a relação 5.1 é verificada quando T é uma função contínua em Z e prolonga-se portanto a qualquer distribuição $T \in \tilde{C}(Z)$, visto que cada um dos seus membros é, de acordo com o Teor. 4.2, função contínua de T .

A proposição anterior exprime que a operação que consiste em compôr uma distribuição com uma aplicação regular é associativa.

(1) Aqui consideraremos μ no caso geral, injectiva ou não, admitindo, como fizemos notar no número anterior, que o Teor. 4.2 é extensível às aplicações regulares não injectivas.

PROPOSIÇÃO 5. 2. Se $X \subset Y$ e $i: X \rightarrow Y$ é a inclusão de X em Y , $i(x) = x$, $\forall x \in X$, então i^* é o operador de restrição $\rho_{YX}: T \rightarrow T|_X$. Em particular, se i é a identidade de X , i^* é a identidade de $\tilde{C}(X)$.

A demonstração é análoga à da Prop. 5. 1.

TEOREMA 5. 3. Se μ é um homeomorfismo regular de X sobre Y (isomorfismo), μ^* é um isomorfismo vectorial topológico de $\tilde{C}(Y)$ sobre $\tilde{C}(X)$, e tem-se

$$(5. 2) \quad \mu^{*-1} = (\mu^{-1})^*.$$

Com efeito, se μ é um homeomorfismo regular de X sobre Y , $\nu = \mu^{-1}$ é um homeomorfismo regular de Y sobre X , e portanto existem, de acordo com o Teor. 4. 2, μ^* e ν^* . Como, $\nu \circ \mu = id(X)$ e $\mu \circ \nu = id(Y)$, das Pro. 5. 1 e 5. 2 resulta

$$\mu^* \circ \nu^* = id(\tilde{C}(X)), \quad \nu^* \circ \mu^* = id(\tilde{C}(Y)),$$

o que mostra que ν^* e μ^* são isomorfismos inversos um do outro.

OBS. Os resultados anteriores podem apresentar-se duma maneira mais sucinta e elegante, utilizando as noções de *categoria* e *functor*, hoje correntes em Topologia Algebrica (1).

Consideremos, por um lado, a categoria \mathcal{C} dos domínios de R^n , tomando como morfismos as aplicações regulares $\mu: X \rightarrow Y$ e para lei de composição de morfismos a composição de aplicações $(\nu, \mu) \rightarrow \nu \circ \mu$. Consideremos, por outro lado, a categoria $\tilde{\mathcal{C}}$ formada pelos espaços de distribuições definidas em domínios de R^n , tomando para morfismos as aplicações lineares contínuas $\theta: \tilde{C}(Y) \rightarrow \tilde{C}(X)$, e para lei de composição de morfismos a composição de aplicações.

Os resultados anteriores podem então resumir-se num único enunciado:

«A lei de correspondência que associa a cada domínio $X \in \mathcal{C}$ o espaço $\tilde{C}(X)$ e a cada morfismo $\mu: X \rightarrow Y$ a aplicação $\mu^*: T \rightarrow T \circ \mu$ de $\tilde{C}(Y)$ em $\tilde{C}(X)$ é um functor contravariante».

(1) Veja por exemplo, «Téorie des Faisceaux» Godement, Act. Scient. Industrielles, 1252, HERMANN.

Com uma técnica semelhante à da Prop. 5. 1 demonstram-se ainda as seguintes proposições:

PROPOSIÇÃO 5. 4. *Se $\mu: X \rightarrow Y$ é regular e α é uma função diferenciável em Y , tem-se,*

$$(5. 3) \quad \mu^*(\alpha T) = \mu^*(\alpha) \cdot \mu^*(T), \quad \forall T \in \tilde{C}(Y).$$

PROPOSIÇÃO 5. 5. *Se $\mu: X \rightarrow Y$ é regular, tem-se, designando por $y^i = \mu^i(x^1, \dots, x^n)$ as funções coordenadas de μ ,*

$$(5. 4) \quad \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu^*(T)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \mu^* \left(\frac{\partial T}{\partial y^j} \right).$$

A proposição 5. 4 exprime que μ^* respeita a multiplicação de distribuições por funções diferenciáveis. A proposição 5. 5 é uma extensão às distribuições da conhecida regra de derivação das funções compostas. Por vezes, escreve-se a relação (5. 4) de forma mais abreviada,

$$\frac{\partial T}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial T}{\partial y^j};$$

mas é evidente que se comete aqui um abuso de linguagem, pois que se representa pelo mesmo símbolo T uma distribuição sobre Y e a sua imagem pela aplicação μ .

A fórmula da mudança de variável nos integrais múltiplos é também extensível às distribuições:

PROPOSIÇÃO 5. 6. *Suponhamos que X e Y são domínios compactos de \mathbb{R}^n . Se f é uma função contínua em \mathbb{R}^n com valores num espaço localmente convexo E , separado e completo em relação às sucessões, e se μ é um homeomorfismo regular de X sobre Y , tem-se*

$$(5. 5) \quad \int_Y T(y) f(y) dy = \int_X T[\mu(x)] f[\mu(x)] |J_\mu(x)| dx$$

sempre que exista o integral do primeiro membro.

Consideremos uma sucessão φ_n de funções contínuas em X convergente para $T \circ \mu$. Então, como μ^{*-1} é uma aplicação linear contínua, a sucessão $\mu^{*-1}(\varphi_n) = \varphi_n \circ \mu^{-1}$ converge para

$(T \circ \mu) \circ \mu^{-1} = T$. Por outro lado, a conhecida regra da mudança de variável em integrais múltiplos permite escrever

$$(5. 5') \quad \int_Y \varphi_n[\mu^{-1}(y)]f(y) dy = \int_X \varphi_n(x)f[\mu(x)]|J_\mu(x)| dx.$$

Então, se existe o primeiro membro de (5. 5), obtém-se esta relação passando 5. 5' ao limite, de acordo com a definição de integral de uma distribuição em relação a uma função, 2. c).

Como caso particular, tem-se o seguinte corolário:

COROLÁRIO. *Se μ é um homeomorfismo regular de X sobre Y , a imagem $\mu^*(T)$ de uma distribuição T sobre Y é definida como forma linear contínua sobre $\mathcal{D}(X)$ pela fórmula:*

$$(5. 6) \quad \langle \mu^*(T), \varphi \rangle = \langle T, |J_\mu| \cdot \mu^*(\varphi) \rangle.$$

§ II. Distribuições sobre uma variedade.

6. Algumas noções sobre variedades diferenciáveis. *a)* Vamos recordar aqui a noção de variedade diferenciável com uma dada dimensão n , cf. [3], [8], [19].

Uma tal variedade pode ser definida como sendo um espaço topológico separado V , com base numerável, munido duma lei que faz corresponder a cada aberto $\Omega \subset V$ uma classe de funções definidas em Ω , que se designará por $C^\infty(\Omega)$, nas seguintes condições:

(V1). *Para todo o ponto $u \in V$, existe um homeomorfismo Φ dum aberto X de \mathbb{R}^n sobre uma vizinhança aberta U de u tal que, $f \in C^\infty(U)$ se, e só se, $f \circ \Phi$ é diferenciável em X .*

(V2). *Uma função f , definida em Ω , pertence a $C^\infty(\Omega)$ se, e só se, para todo o ponto $u \in \Omega$, existe uma vizinhança aberta U de u tal que $f|_U \in C^\infty(U)$.*

Toda a função $f \in C^\infty(\Omega)$ diz-se diferenciável em Ω . Reconhece-se imediatamente que $C^\infty(\Omega)$ é um sub-espaço do espaço vectorial $C(\Omega)$ das funções contínuas em Ω .

A noção de função diferenciável estende-se a um domínio compacto Δ qualquer de V pelo mesmo processo que em \mathbb{R}^n .

Consideremos duas variedades V, V' e dois abertos $\Omega \subset V, \Omega' \subset V'$. Uma aplicação $\mu: \Omega \rightarrow \Omega'$ diz-se diferenciável se, para toda a função f diferenciável em Ω' , $f \circ \mu$ é diferenciável em Ω . Reconhece-se imediatamente que, se $\mu': \Omega \rightarrow \Omega'$ e $\mu'': \Omega' \rightarrow \Omega''$ são diferenciáveis, a aplicação composta $\mu = \mu'' \circ \mu'$ é diferenciável. Se $\Omega \subset \Omega'$, a inclusão $i: \Omega \rightarrow \Omega'$ é diferenciável. Em particular, a restrição de uma aplicação diferenciável $\mu: \Omega \rightarrow \Omega'$ a qualquer aberto contido em Ω é diferenciável.

De modo análogo se define aplicação diferenciável dum aberto ou domínio compacto de V num aberto ou domínio compacto de V' .

Uma aplicação bijectiva $\mu: \Omega \rightarrow \Omega'$ diz-se *bi-diferenciável* se é diferenciável, e a sua inversa, μ^{-1} , também é diferenciável. Uma aplicação bi-diferenciável $\mu: \Omega \rightarrow \Omega'$ diz-se também um *isomorfismo* de Ω sobre Ω' .

Chamaremos *segmento aberto* de V a todo o domínio aberto $U \subset V$ isomorfo a um domínio X de \mathbb{R}^n . De modo análogo, chamaremos *segmento compacto* de V a todo o domínio compacto isomorfo a um domínio compacto de \mathbb{R}^n , mas que esteja contido num segmento aberto.

Se K é um segmento aberto ou compacto de V , todo o isomorfismo $\Phi: X \rightarrow K, X \subset \mathbb{R}^n$, diz-se uma *carta* de K . Para todo o ponto $u \in K$, as coordenadas do ponto $\Phi^{-1}(u) \in \mathbb{R}^n$ dizem-se *coordenadas* de u na carta Φ , ou Φ -coordenadas de u .

Se $\Phi: X \rightarrow K, \Phi': X' \rightarrow K$ são duas cartas de K , a aplicação $h_{\Phi\Phi'} = \Phi^{-1}\Phi'$ é uma aplicação bi-diferenciável de X' sobre X , que exprime as Φ -coordenadas de cada ponto de K em função das Φ' -coordenadas do mesmo ponto. Por isso se diz que $h_{\Phi\Phi'}$ é uma transformação de coordenadas de K .

Consideremos duas variedades V, W com a mesma dimensão n , e seja μ uma aplicação diferenciável dum segmento $K \subset V$ num segmento $L \subset W$. Para todo o par de cartas $\Phi: X \rightarrow K, \Psi: Y \rightarrow L$, tem-se

$$\mu = \Psi \circ \mu_{\Psi\Phi} \circ \Phi^{-1},$$

em que $\mu_{\Psi\Phi}$ é uma aplicação diferenciável de X em Y .

Pois bem, diremos que μ é *regular* num ponto $v \in K$, se $\mu_{\Psi\Phi}$ é regular no ponto correspondente $\Phi^{-1}(v) \in X$. Demonstra-se, sem dificuldade, que a definição não depende das cartas Φ, Ψ consideradas.

Uma aplicação $\mu: V \rightarrow W$ diz-se regular num ponto $v \in V$ se

a sua restrição a um segmento aberto suficientemente pequeno contendo v , é regular no ponto v .

b) Toda a variedade diferenciável V é evidentemente um espaço localmente compacto e, como possui uma base numerável de abertos, é também um espaço paracompacto, cf. [5]. Assim, a toda a cobertura aberta $\{\Omega_\alpha\}$ de V pode-se fazer sempre corresponder uma cobertura $\{\Omega_\beta\}$ subordinada à primeira e localmente finita.

Por outro lado, prova-se facilmente que, para todo o aberto Ω e todo o segmento compacto $K \subset \Omega$, existe sempre uma função diferenciável $\varphi \geq 0$ de suporte contido em Ω e igual a 1 sobre K , cf. [8].

Podemos então, seguindo o mesmo método que no caso de \mathbb{R}^n (cf. [8], [11]), demonstrar a seguinte propriedade, conhecida com o nome de Teorema da Partição da Unidade, que desempenhará papel bastante importante no que segue:

A toda a cobertura aberta, numerável $\{\Omega_j\}$ de V pode-se sempre fazer corresponder um sistema de funções diferenciáveis α_j com as seguintes propriedades:

(P1) Cada uma das funções α_j tem suporte compacto contido em Ω_j .

(P2) Para todo o compacto Δ de V , existe um número finito, somente, de funções α_j que não se anulam em Δ .

(P3) Em cada ponto $v \in V$, $\sum \alpha_j(v) = 1$.

Um sistema de funções $\{\alpha_j\}$ nestas condições diz-se uma partição da unidade localmente finita associada à cobertura Ω_j .

c) Uma medida sobre uma variedade diferenciável V , pode ser definida, do mesmo modo que em \mathbb{R}^n , como uma função de conjunto $\theta(A)$, complexa, completamente aditiva, definida na classe $\mathfrak{B}(V)$ dos borelianos limitados de V .

O integral $\int_V f d\theta$ dum função f definida em V , em relação a uma medida $d\theta$,⁽¹⁾ define-se da seguinte maneira:

(1) Usa-se indiferentemente a notação θ ou a notação diferencial $d\theta$ para designar uma medida.

Se f tem suporte contido num segmento compacto K , o integral é definido à maneira usual, por meio das somas de LEBESGUE-STIELTJES.

No caso geral, utiliza-se uma partição da unidade localmente finita $1 = \sum \varphi_j$, tal que o suporte de cada função φ_j esteja contido num segmento compacto K_j , e põe-se

$$(6.1) \dots \quad \int_V f d\theta = \sum_j \int_V f \varphi_j d\theta,$$

desde que a série do segundo membro seja convergente, e tenha sempre a mesma soma, qualquer que seja a partição da unidade nas condições consideradas.

Se A é um conjunto qualquer de V , põe-se ainda

$$\int_A f d\theta = \int_V \tilde{f} d\theta$$

em que $\tilde{f}(x) = f(x)$, para $x \in A$, e $\tilde{f}(x) = 0$ para $x \notin A$.

Se $A \in \mathfrak{B}(V)$ tem-se, em particular, $\theta(A) = \int_A d\theta$.

A adição de medidas, assim como o produto por um escalar, definem-se à maneira usual e convertem o conjunto de todas as medidas sobre V num espaço vectorial. Define-se ainda o produto duma medida θ sobre V por uma função $f \in C(V)$, como sendo a medida $\theta' = f\theta$, tal que

$$\theta'(A) = \int_A f d\theta, \quad \forall A \in \mathfrak{B}(V).$$

Se $\theta' = f\theta$ põe-se também $f = \theta'/\theta$ e diz-se que f é a densidade de θ' em relação a θ .

Consideremos agora uma aplicação μ dum boreliano qualquer $B \subset V$ numa variedade diferenciável W , de modo que μ seja um homeomorfismo de B sobre $\mu(B)$. Para toda a medida θ sobre W , chama-se imagem de θ por μ à medida $\mu^*\theta$ sobre B , assim definida:

$$\mu^*\theta(A) = \theta(\mu A),$$

para todo o boreliano limitado $A \subset B$.

Demonstra-se facilmente que se tem, para toda a função f integrável em $\mu(B)$ a respeito de θ ,

$$(6.2) \dots \quad \int_B f d\theta = \int_{\mu(B)} \mu^*(f) \cdot d(\mu^*\theta).$$

A medida sobre R^n , que corresponde à noção usual de integral $\int_{R^n} f(x) dx$ (1), é obtida, prolongando aos borelianos limitados de R^n a função de intervalo: $v([a, b]) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$. Designaremos tal medida por dx .

Uma medida $d\theta$ sobre R^n (ou sobre um aberto ou domínio compacto de R^n) diz-se diferenciável, se existe uma função diferenciável φ tal que $d\theta = \varphi dx$.

Uma medida $d\theta$ sobre uma variedade diferenciável V diz-se diferenciável se, para todo o segmento K e toda a carta Φ de K , $d(\Phi^*\theta)$ é uma medida diferenciável sobre X . Neste caso, a cada carta $\Phi: X \rightarrow K$ corresponde uma função $\theta_\Phi \in C^\infty(K)$ tal que

$$d(\Phi^*\theta) = \theta_\Phi [\Phi(x)] dx,$$

a qual se diz a densidade de θ na carta Φ .

A fórmula (6.2) permite reduzir imediatamente o integral duma função f , com suporte contido num segmento compacto K , por meio duma carta $\Phi: X \rightarrow K$, a um integral sobre X

$$\int_K f d\theta = \int_X f[\Phi(x)] \theta_\Phi[\Phi(x)] dx.$$

No caso geral o integral $\int_V f d\theta$ reduz-se a uma soma finita ou infinita de integrais do tipo precedente, por meio duma partição da unidade.

Deduz-se facilmente que, se $d\theta$ é uma medida diferenciável sobre V , as densidades θ_Φ verificam a seguinte condição de compatibilidade:

$$(6.3) \dots \quad \theta_{\Phi'}(v) = |J_{\Phi^{-1}\Phi'}|_v \theta_\Phi(v),$$

para todo o par de cartas $\Phi: X \rightarrow K$, $\Phi': X' \rightarrow K'$ tais que $K \subset K'$.

Inversamente, demonstra-se facilmente que a todo o sistema de funções $\{\theta_\Phi\}$, que se obtém associando a cada carta $\Phi: X \rightarrow K$ uma função θ_Φ diferenciável em K , de modo que se verifique

(1) Chamada também medida de LEBESGUE.

(6.3), corresponde uma e uma só medida diferenciável $d\theta$, tal que θ_Φ é a densidade de $d\theta$ na carta Φ .

Podemos mais geralmente considerar medidas sobre V com valores num espaço localmente convexo qualquer. Todas as considerações anteriores são aplicáveis.

d) Vamos recordar a noção de espaço tangente num ponto a duma variedade diferenciável V com dimensão n .

Consideremos, por um lado, o espaço vectorial real \mathfrak{L}_a constituído pelas aplicações lineares reais (1) $L: C^\infty(V) \rightarrow C$ tais que:

$$(6.4) \dots \quad L(fg) = Lf \cdot g(a) + f(a) \cdot Lg;$$

e, por outro lado, o conjunto Γ_a constituído pelas aplicações diferenciáveis γ dum intervalo I de \mathbb{R}^1 em V , para as quais existe um ponto $t_0 \in I$ tal que $\gamma(t_0) = a$; uma aplicação γ nestas condições diz-se um *caminho diferenciável* de V no ponto a .

A cada caminho $\gamma \in \Gamma_a$ corresponde um operador $L_\gamma \in \mathfrak{L}_a$ assim definido:

$$(6.5) \dots \quad L_\gamma f = \left[\frac{df \circ \gamma}{dt} \right]_{t_0}$$

Inversamente, demonstra-se que, para todo o operador $L \in \mathfrak{L}_a$, existe uma infinidade de caminhos $\gamma \in \Gamma_a$ tais que $L_\gamma = L$.

Introduzamos em Γ_a a seguinte relação de equivalência: $\gamma_1 \sim \gamma_2$ se, e só se, $L_{\gamma_1} = L_{\gamma_2}$. A classe $\mathbf{u} = [\gamma]$ de todos os caminhos equivalentes a um dado caminho γ diz-se um *vector tangente* a V no ponto a .

A cada vector $\mathbf{u} = [\gamma]$ corresponde então um operador $L_\gamma \in \mathfrak{L}_a$, o qual se designará também por L_u . Tendo em conta a definição de vector tangente, vê-se imediatamente que a aplicação $\mathbf{u} \rightarrow L_u$ é uma aplicação bi-unívoca do conjunto \mathfrak{T}_a de todos os vectores tangentes a V no ponto a sobre o espaço \mathfrak{L}_a . Podemos então introduzir em \mathfrak{T}_a uma estrutura de espaço vectorial, de modo que esta aplicação seja um isomorfismo, o que equivale a definir a adição de dois vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{T}_a$ e a multiplicação por um escalar real λ mediante as relações:

$$L_{\mathbf{u} + \mathbf{v}} = L_u + L_v \quad L_{\lambda \mathbf{u}} = \lambda L_u.$$

(1) Uma aplicação linear L de $C^\infty(V)$ no corpo C diz-se real se para toda a função real f , $L(f)$ é real.

O espaço vectorial \mathfrak{X}_a assim definido diz-se o *espaço tangente* a V no ponto a .

Vejamus que \mathfrak{X}_a é de dimensão finita igual à de V .

Para isso, consideremos um segmento U que contenha o ponto a . A cada carta $\Phi(x^1, \dots, x^n)$ de U podemos associar n caminhos $\varphi^i \in \Gamma_a$, cada um dos quais resulta de fixar na função $\Phi(x^1, \dots, x^n)$ todas as variáveis x^k no ponto $\Phi^{-1}(a)$, excepto a variável x^i ,

$$\varphi^i(x^i) = \Phi(a^1, \dots, a^{i-1}, x^i, a^{i+1}, \dots, a^n).$$

A cada caminho φ^i corresponde um vector tangente $[\varphi^i] \in \mathfrak{X}_a$ ao qual, por sua vez, corresponde o operador

$$L_{\varphi^i}: f \rightarrow \left[\frac{\partial [f \circ \Phi]}{\partial x^i} \right]_{\Phi^{-1}(a)}$$

Ora, dado um vector $\mathbf{u} = [\gamma] \in \mathfrak{X}_a$, tem-se

$$L_{\mathbf{u}} f = \left[\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right]_{t=t_0} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f \circ \Phi}{\partial x^i} \right]_{\Phi^{-1}(a)} \cdot \left[\frac{d(\Phi^{-1}\gamma)^i}{dt} \right]_{t=t_0}$$

donde se deduz, pondo $u^i = \left[\frac{d(\Phi^{-1}\gamma)^i}{dt} \right]_{t=t_0}$,

$$(6.6) \dots \quad L_{\mathbf{u}} = \sum_i u^i L_{\varphi^i}.$$

Vê-se assim que os n vectores $[\varphi^i]$ constituem uma base para o espaço tangente \mathfrak{X}_a , que é portanto um espaço de dimensão n ; o mesmo acontece, claro está, com o espaço \mathfrak{L}_a que admite como base o conjunto dos operadores L_{φ^i} .

Chamaremos campo de vectores, sobre um sub-conjunto U de V , a toda a função \mathbf{u} que faz corresponder a cada ponto $a \in U$ um vector tangente $\mathbf{u}(a) \in \mathfrak{X}_a$. A adição de campos, produto por um escalar real, ou por uma função real φ , define-se à maneira usual: $(\mathbf{u} + \mathbf{v})(a) = \mathbf{u}(a) + \mathbf{v}(a)$; $(\lambda \cdot \mathbf{u})(a) = \lambda \mathbf{u}(a)$; $(\varphi \cdot \mathbf{u})(a) = \varphi(a) \cdot \mathbf{u}(a)$.

Para toda a função $f \in C^\infty(U)$, chamaremos *derivada* de f segundo um campo de vectores \mathbf{u} sobre U a função $D_{\mathbf{u}}f$ assim definida:

$$(D_{\mathbf{u}}f)(a) = L_{\mathbf{u}(a)}f, \quad \forall a \in U.$$

Um campo \mathbf{u} sobre um aberto U (ou domínio compacto) de V , diz-se diferenciável, se, para toda a função $f \in C^\infty(U)$, $D_{\mathbf{u}}f \in C^\infty(U)$. O conjunto de todos os campos diferenciáveis sobre U , que designaremos por $\mathfrak{X}^\infty(U)$, é um espaço vectorial real e também um módulo sobre o anel $C^\infty(U; \mathbb{R})$ das funções reais diferenciáveis em U .

Por outro lado, cada operador de derivação $D_{\mathbf{u}}$ é uma aplicação linear real de $C^\infty(U)$ em si próprio, que verifica a seguinte condição: $D_{\mathbf{u}}(f \cdot g) = D_{\mathbf{u}}f \cdot g + f \cdot D_{\mathbf{u}}g$.

O conjunto $\mathfrak{L}^\infty(U)$ das aplicações lineares reais de $C^\infty(U)$ em si próprio, que verificam esta condição, constitui também um espaço vectorial real, e um módulo sobre $C^\infty(U; \mathbb{R})$. Das definições anteriores resulta que $\mathbf{u} \rightarrow D_{\mathbf{u}}$ é um isomorfismo de $\mathfrak{T}^\infty(U)$ sobre $\mathfrak{L}^\infty(U)$, o que permite identificar \mathbf{u} com $D_{\mathbf{u}}$ (1).

Suponhamos que U é um segmento de V e seja Φ uma carta de U . A cada índice $i = 1, 2, \dots, n$ corresponde então um campo \mathbf{x}^i tal que $D_{\mathbf{x}^i}f = D_i(f \circ \Phi)$; estes campos são diferenciáveis e, de acordo com (6.6), constituem uma base para o módulo $\mathfrak{X}^\infty(U)$, que é assim de dimensão finita igual à de V . Esta propriedade não se verifica, em geral, se U é um aberto qualquer de V .

Consideremos agora duas variedades V, V' e seja μ uma injecção diferenciável dum aberto (ou domínio compacto) $U \subset V$ sobre um aberto (ou domínio compacto) $U' \subset V'$. A cada campo $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ corresponde um campo $\mathbf{u}' \in \mathfrak{X}^\infty(U')$ tal que

$$(6.7) \quad \dots \quad (D_{\mathbf{u}'}f)(\mu(a)) = (D_{\mathbf{u}}f \circ \mu)(a), \quad \forall a \in U, \quad \forall f \in C^\infty(U').$$

O campo \mathbf{u}' , assim definido, diz-se a imagem de \mathbf{u} pela aplicação μ e representa-se por $\mu_*(\mathbf{u})$.

Da relação (6.7) deduz-se imediatamente

$$(6.8) \quad \dots \quad D_{\mu_*(\mathbf{u})} = \mu^{*-1} \circ D_{\mathbf{u}} \circ \mu^*,$$

e, em particular, se U é um segmento de V e Φ uma carta de U ,

$$D_{\mathbf{x}^i} = \Phi^* \circ D_i \circ \Phi^{*-1}.$$

A noção de derivada segundo um campo de vectores estende-se às distribuições.

Seja X um domínio de \mathbb{R}^n , aberto ou compacto; o módulo $\mathfrak{L}^\infty(X)$ constituído pelos operadores de derivação $D_{\mathbf{u}}$ associados aos campos de vectores sobre X é, neste caso, de dimensão finita

(1) Esta identificação, embora cómoda, não será utilizada aqui.

n e admite como base o sistema formado pelos operadores de derivação parcial D_i . Pode-se então escrever,

$$D_u = \sum_{i=1}^n u^i(x) \cdot D_i,$$

em que as funções $u^i(x)$ são diferenciáveis em X .

Ora, cada operador D_i é prolongável numa única aplicação linear contínua $\tilde{D}_i: \tilde{C}(X) \rightarrow \tilde{C}(X)$, que é o operador de derivação generalizada, 2. b. Daí se deduz que D_u é prolongável num único operador linear contínuo $\tilde{D}_u: C(X) \rightarrow \tilde{C}(X)$, assim definido:

$$\tilde{D}_u = \sum_{i=1}^n u^i(x) \cdot \tilde{D}_i.$$

Para toda a distribuição $T \in \tilde{C}(X)$, $\tilde{D}_u T$ diz-se a derivada de T segundo o campo u .

Se X, X' são dois domínios de R^n e μ é um isomorfismo de X sobre X' tem-se ainda

$$(6.9) \quad \tilde{D}_{\mu_*(u)} = \mu^{*-1} \circ \tilde{D}_u \circ \mu^* \quad (1).$$

7. Distribuições sobre um segmento de variedade. Consideremos uma variedade diferenciável V com n dimensões, e seja K um segmento de V *aberto* ou *compacto*. A cada carta $\Phi: X \rightarrow K$ fazemos corresponder o espaço das distribuições no domínio X de Φ , que, para pôr em evidência esta correspondência, se designará por \tilde{C}_Φ . Análogamente, o sub-espaço das funções contínuas no domínio de Φ será designado por C_Φ .

Se $\Phi: X \rightarrow K$, $\Psi: Y \rightarrow K$ são duas cartas de K , a transformação $h_{\Psi\Phi} = \Psi^{-1} \circ \Phi$ é um homeomorfismo regular de X sobre Y . Então, pelo Teor. 5.3, a aplicação $f \rightarrow f \circ h_{\Psi\Phi}$ de C_Y sobre C_X é prolongável num *isomorfismo vectorial topológico* de \tilde{C}_Y sobre \tilde{C}_X

$$(7.1) \quad \dots \quad h_{\Psi\Phi}^*: \tilde{C}_Y \rightarrow \tilde{C}_X \circ h_{\Psi\Phi}.$$

Por outro lado, toda a carta $\Phi: X \rightarrow K$ é também um homeomorfismo regular de X sobre K e induz um isomorfismo $f \rightarrow f \circ \Phi$ do espaço $C(K)$ das funções contínuas em K sobre o espaço C_X .

(1) Esta relação não é válida com a hipótese mais geral de μ ser somente diferenciável, como no caso das funções, pois que μ^* pode não existir, cf. (Teor. 4.2).

Torna-se então natural procurar uma extensão do espaço $C(K)$ de modo a poder generalizar o Teor. 5.3 para as cartas de K . Mais precisamente, poremos o seguinte problema:

PROBLEMA 7.1. *Determinar um espaço localmente convexo S que contenha $C(K)$ como sub-espaço vectorial e, para toda a carta $\Phi: X \rightarrow K$, um isomorfismo vectorial topológico $\Phi^*: S \rightarrow \tilde{C}_\Phi$ que prolongue a aplicação $f \rightarrow f \circ \Phi$ de $C(K)$ sobre C_Φ .*

Vejamus que o problema, assim posto, admite solução.

Para isso, fixemos uma carta $\Psi: Y \rightarrow K$ e um espaço localmente convexo S isomorfo a \tilde{C}_Ψ . Entre os diversos isomorfismos vectoriais topológicos de S sobre \tilde{C}_Ψ fixemos um deles, que designaremos por χ .

A cada função $f \in C(K)$ corresponde um e um só elemento $\tilde{f} \in S$ tal que

$$(7.2) \dots \quad \chi(\tilde{f}) = f \circ \Psi.$$

É imediato que a correspondência $f \rightarrow \tilde{f}$, assim definida, é um isomorfismo vectorial de $C(K)$ sobre um sub-espaço vectorial de S , o que nos leva então a identificar cada função f contínua em K com o elemento correspondente $\tilde{f} \in S$.

Assim, $C(K)$ passa a ser um sub-espaço vectorial de S , ficando verificada a primeira condição do problema.

Posto isto, façamos corresponder a cada carta Φ de K a aplicação $\Phi^*: S \rightarrow \tilde{C}_\Phi$, assim definida:

$$(7.3) \dots \quad \Phi^* = h_{\Psi, \Phi}^* \circ \chi.$$

É imediato que Φ^* é um isomorfismo vectorial topológico de S sobre \tilde{C}_Φ . Por outro lado, tem-se, para toda a função $f \in C(K)$,

$$\Phi^*(f) = h_{\Psi, \Phi}^*[\chi(f)] = (f \circ \Psi) \circ (\Psi^{-1} \Phi) = f \circ \Phi,$$

o que demonstra que o espaço S e os isomorfismos Φ^* definidos por meio de (7.3) verificam as condições do problema.

Vamos agora ver que, dadas duas quaisquer soluções do problema, S_1 e S_2 , existe um isomorfismo vectorial topológico $i: S_1 \rightarrow S_2$ que conserva as funções $f \in C(K)$.

Para cada carta $\Phi: X \rightarrow K$ designemos por Φ_1^* e Φ_2^* os isomorfismos de S_1 e S_2 sobre \tilde{C}_Φ , respectivamente, que prolongam a aplicação $f \rightarrow f \circ \Phi$.

Vê-se então, imediatamente, que, para uma dada carta Ψ , o isomorfismo $i = \Psi_2^{*-1} \circ \Psi_1^*$ está nas condições indicadas.

Este isomorfismo i respeita as aplicações Φ^* no seguinte sentido:

$$(7.4) \dots \quad \Phi_1^* = \Phi_2^* \circ i, \quad \text{para toda a carta } \Phi \text{ de } K.$$

Tem-se, com efeito, para toda a função $f \in C(K)$,

$$\Phi_1^*(f) = \Phi_2^*[i(f)],$$

e esta relação prolonga-se a todos os elementos de S_1 , visto que, pelas próprias condições do problema, $C(K)$ é denso em S_1 (1).

Reconhece-se também facilmente que todo o isomorfismo $i = S_1 \rightarrow S_2$ que verifique (7.4) conserva as funções contínuas.

Assim, todas as soluções do Problema 7.1 são *canonicamente* isomorfas.

Torna-se então natural escolher, uma vez por todas, um espaço localmente convexo S e um sistema de isomorfismos Φ^ que verifiquem as condições do Problema 7.1. O espaço S será designado por $\tilde{C}(K)$, e aos seus elementos chamaremos distribuições sobre K ou definidas em K .*

Se T é uma distribuição sobre K , e Φ é uma carta de K , designaremos a distribuição $\Phi^*(T)$ por *imagem de T na carta Φ* ou *distribuição composta de T com Φ* , e representá-la-emos por $T \circ \Phi$ ou $T[\Phi(x)]$.

O conceito de distribuição, assim definido, generaliza o conceito de função contínua, de modo tal que, quando uma distribuição T se reduz a uma função $f \in C(K)$, a sua imagem $T \circ \Phi$, em cada carta Φ , coincide com a função composta $f \circ \Phi$ no sentido usual.

Consideremos duas cartas Φ, Ψ de K ; as imagens $T \circ \Phi$, $T \circ \Psi$ de uma distribuição $T \in \tilde{C}(K)$ estão relacionadas pela mudança de variável $h_{\Psi\Phi}$, isto é:

$$(7.5) \dots \quad T \circ \Phi = (T \circ \Psi) \circ h_{\Psi\Phi}.$$

Com efeito, esta relação é válida se $T \in C(K)$ e estende-se então a todo o espaço $\tilde{C}(K)$, visto que $C(K)$ é denso em $\tilde{C}(K)$.

(1) Pode-se também demonstrar (7.4) notando que i é único, o que resulta imediatamente de $C(K)$ ser denso em qualquer dos espaços S_1 e S_2 .

O espaço $\tilde{C}(K)$, sendo, como espaço localmente convexo, isomorfo a qualquer dos espaços \tilde{C}_Φ , verifica todas as propriedades topológicas destes espaços.

Assim, $\tilde{C}(K)$ é completo, separado e reflexivo. Se K é compacto, $\tilde{C}(K)$ é um espaço (LN).*

Suponhamos $V = \mathbb{R}^n$. Neste caso, todo o domínio aberto ou compacto X é um segmento de \mathbb{R}^n , e a aplicação idêntica $i: X \rightarrow X$ é uma carta de X . Consideremos, por um lado, o espaço $\tilde{C}(X)$ definido pelo processo precedente, e, por outro lado, o espaço \tilde{C}_i . Para toda a função f contínua em X , tem-se $f = f \circ i$, portanto o isomorfismo $i^*: \tilde{C}(X) \rightarrow \tilde{C}_i$ conserva as funções contínuas, o que torna natural identificar, por meio deste isomorfismo, estes dois espaços.

Vê-se assim que o conceito de distribuição sobre um segmento K , que acabamos de definir, coincide com o conceito de distribuição já conhecido, quando K é um segmento de \mathbb{R}^n .

Por vezes é cómodo identificar, por meio de uma carta Φ , escolhida arbitrariamente, os pontos de um segmento K de V com os pontos correspondentes do domínio de Φ . Neste caso, identificam-se também $C(K)$ com C_Φ e $\tilde{C}(K)$ com \tilde{C}_Φ por meio do isomorfismo Φ^* .

Deve-se no entanto notar que esta identificação, em geral, é arbitrária, e só diz respeito aos conceitos e propriedades que se podem estabelecer em $C(K)$ independentemente da carta Φ .

Estão nestas condições, além das propriedades referentes à estrutura vectorial-topológica de $\tilde{C}(K)$, a noção de imagem por uma aplicação regular, a noção de restrição, a multiplicação por uma função diferenciável, que serão estudadas nos números seguintes.

As propriedades de \tilde{C}_Φ que dependem da carta Φ não se podem transportar para $\tilde{C}(K)$ por meio de Φ^* , a não ser mediante uma generalização que as torne independentes de Φ . Assim, a noção de derivada de uma distribuição $T \in \tilde{C}(K)$ tem de ser definida de forma mais geral que em \mathbb{R}^n , relativamente a um campo de vectores tangentes sobre K , o que de resto já acontecia com as funções. O mesmo acontece com a integração, o que vem a reflectir-se de forma especial no estudo das aplicações lineares contínuas de $\tilde{C}(K)$ num espaço localmente convexo, como veremos mais adiante.

OBSERVAÇÃO. O espaço $\tilde{C}(K)$ pode ser construído de outra forma possivelmente mais intuitiva (1).

Cada distribuição sobre K pode ser definida como sendo um sistema $\{T_\Phi\}$ que se obtém associando a cada carta Φ uma distribuição $T_\Phi \in \tilde{C}_\Phi$, de modo que se verifique a seguinte condição de compatibilidade:

$$T_\Phi = T_\Psi \circ h_{\Psi\Phi} = h_{\Psi\Phi}^*(T_\Psi), \text{ para todo o par de cartas } \Phi, \Psi \text{ de } K.$$

A adição de duas distribuições e a multiplicação por um escalar λ definem-se pondo

$$\begin{aligned} \{T_\Phi\} + \{S_\Phi\} &= \{T_\Phi + S_\Phi\} \\ \lambda \{T_\Phi\} &= \{\lambda T_\Phi\}. \end{aligned}$$

Para cada carta Φ , a aplicação Φ^* é definida como sendo a aplicação $T \rightarrow T_\Phi$ de $\tilde{C}(K)$ em \tilde{C}_Φ . Esta aplicação é um isomorfismo vectorial e converte-se num isomorfismo vectorial topológico, se se toma como topologia de $\tilde{C}(K)$ a imagem por Φ^{*-1} da topologia de \tilde{C}_Φ , a qual é independente da carta Φ , como se reconhece facilmente.

Finalmente, fazendo corresponder a cada função $f \in C(K)$ o sistema formado pelas funções $f \circ \Phi$, define-se um isomorfismo vectorial de $C(K)$ sobre um sub-espço de $\tilde{C}(K)$. Põe-se então $f = \{f \circ \Phi\}$; e assim $C(K)$ é um sub-espço de $\tilde{C}(K)$.

Por outro lado, tem-se, de acordo com a definição de Φ^* , $\Phi^*(f) = f \circ \Phi$.

O espaço $\tilde{C}(K)$ assim construído, juntamente com os isomorfismos Φ^* , é então uma solução do Prob. 7. 1.

Isto equivale também a tomar $\tilde{C}(K)$ como o limite projectivo dos espaços \tilde{C}_Φ relativamente às aplicações $h_{\Phi\Psi}^*$ (2).

Esta solução pode-se obter mais facilmente, notando que as condições do problema são equivalentes a construir um sistema de isomorfismos $\Phi^*: \tilde{C}(K) \rightarrow \tilde{C}_\Phi$, de modo que sejam compatíveis no seguinte sentido:

$$\Phi^* = h_{\Psi\Phi}^* \circ \Psi^*.$$

(1) Já apresentada por nós no XXIV Congresso Luso-Espanhol.

(2) O conjunto de índices aqui é o conjunto de todas as cartas de K , com a relação de ordem: $\Phi \leq \Psi$ para todo o par de cartas.

8. Imagem por uma aplicação regular. Conceito de restrição.

A construção do espaço $\tilde{C}(K)$ das distribuições sobre um segmento de variedade diferenciável K foi orientada de modo a generalizar o Teor. 4.2 para as cartas de K .

Vamos agora ver que este teorema é ainda generalizável para uma aplicação regular qualquer $\mu: K \rightarrow L$ dum segmento K dum variedade V num segmento L dum variedade W , com a mesma dimensão que V .

Para todo o par de cartas $\Phi: X \rightarrow K$, $\Psi: Y \rightarrow L$, tem-se

$$(8.1) \dots \quad \mu = \Psi \circ \mu_{\Psi\Phi} \circ \Phi^{-1},$$

em que $\mu_{\Psi\Phi}$ é uma aplicação regular de X em Y , e, pelo Teor. 4.2, $\mu_{\Psi\Phi}$ induz uma aplicação linear contínua $\mu_{\Psi\Phi}^*: T \rightarrow T \circ \mu_{\Psi\Phi}$ de $\tilde{C}(Y)$ em $\tilde{C}(X)$.

Então, a aplicação

$$(8.2) \dots \quad \mu^* = \Phi^{*-1} \circ \mu_{\Phi\Psi}^* \circ \Psi^*$$

é uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(L)$ em $\tilde{C}(K)$, e de (8.1) e (8.2) resulta imediatamente que se tem, para toda a função f contínua em L , $\mu^*(f) = f \circ \mu$. Por outro lado, μ^* é a única aplicação linear contínua de $\tilde{C}(L)$ em $\tilde{C}(K)$ nestas condições, visto que $C(L)$ é denso em $\tilde{C}(L)$. Tem-se assim:

TEOREMA 8.1. *A toda a aplicação regular $\mu: K \rightarrow L$, corresponde uma e uma só aplicação linear contínua $\mu^*: \tilde{C}(L) \rightarrow \tilde{C}(K)$ tal que se tem, para toda a função f contínua em L , $\mu^*(f) = f \circ \mu$.*

Para toda a distribuição $T \in \tilde{C}(L)$, a imagem $\mu^*(T)$ diz-se distribuição composta de T com μ ou imagem de T por μ , e designa-se por $T \circ \mu$ ou $T[\mu(v)]$. Vê-se imediatamente que, no caso em que μ é uma carta Φ de L , $T \circ \mu$ coincide com a imagem $T \circ \Phi$ de T na carta Φ , como foi definida no número anterior.

A noção de imagem de uma distribuição por uma aplicação regular verifica propriedades análogas às que estabelecemos no número 5, para o caso das distribuições definidas em domínios de R^n .

No que se segue K, L, M, \dots designam segmentos de variedades diferenciáveis, com a mesma dimensão.

PROPOSIÇÃO 8. 2. *Se $\mu: K \rightarrow L$, $\nu: L \rightarrow M$ são aplicações regulares, tem-se*

$$(8. 3) \dots (\nu \circ \mu)^* = \mu^* \circ \nu^*$$

ou mais explicitamente:

$$(8. 3') \dots (T \circ \nu) \circ \mu = T \circ (\nu \circ \mu), \quad \forall T \in \tilde{C}(M).$$

PROPOSIÇÃO 8. 3. *Se i é a identidade de K , i^* é a identidade de $\tilde{C}(K)$.*

TEOREMA 8. 4. *Se μ é um isomorfismo de K sobre L , μ^* é um isomorfismo de $\tilde{C}(L)$ sobre $\tilde{C}(K)$ e tem-se*

$$(8. 4) \dots (\mu^*)^{-1} = (\mu^{-1})^*.$$

Todas estas proposições se demonstram do mesmo modo que no número 5.

Pode-se ainda reunir as três proposições anteriores num único enunciado, considerando, por um lado, a categoria \mathfrak{C} constituída por todos os segmentos de todas as variedades diferenciáveis com uma dada dimensão n e, por outro lado, a categoria \mathfrak{E} formada pelos espaços de distribuições $\tilde{C}(K)^{(1)}$, $K \in \mathfrak{C}$:

TEOREMA 8. 5. *A lei de correspondência que associa a cada segmento $K \in \mathfrak{C}$ o espaço $\tilde{C}(K)$ e a cada morfismo $\mu: K \rightarrow L$ o morfismo $\mu^*: \tilde{C}(L) \rightarrow \tilde{C}(K)$ é um functor contravariante.*

Consideremos agora dois segmentos K, K' duma variedade diferenciável V , tais que $K' \subset K$. A inclusão $i_{K K'} = K' \rightarrow K$ é uma aplicação regular de K' em K , e, se $f \in \tilde{C}(K)$, $f \circ i_{K K'}$ é a restrição de f a K' . Põe-se então a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 8. 6. *Chamaremos restrição de uma distribuição $T \in \tilde{C}(K)$ a um segmento $K' \subset K$ à distribuição*

$$T|_{K'} = T \circ i_{K K'}.$$

Resulta imediatamente da Prop. 5. 2 que, se $V = \mathbb{R}^n$, o con-

(1) Supondo, é claro, que os morfismos de \mathfrak{C} são as aplicações regulares $\mu: K \rightarrow L$ e os morfismos de $\tilde{\mathfrak{C}}$ são as aplicações lineares contínuas.

ceito de restrição, assim definido, coincide com o que já foi definido para este caso particular.

Seguindo as notações habituais, designaremos por $\rho_{K K'}$ a aplicação $T \rightarrow T_{/K'}$ de $\tilde{C}(K)$ em $\tilde{C}(K')$, a qual é, em virtude do Teor. 8. 1, uma aplicação linear contínua.

Os operadores de restrição $\rho_{K K'}$ verificam as seguintes propriedades

$$(8. 5) \dots \quad \begin{cases} \rho_{K K} = id[C, K] \\ \rho_{K K''} = \rho_{K' K'} \circ \rho_{K K'} \end{cases} \quad (K'' \subset K' \subset K).$$

Consideremos uma carta $\Phi: X \rightarrow K$ e seja Φ' a carta de K' obtida por restrição de Φ a $X' = \Phi^{-1}(K')$. Tem-se então, de acordo com (8. 2), notando que neste caso $\mu_{\Phi, \Phi'}$ é a inclusão de X' em X e portanto $\mu_{\Phi, \Phi'}^* = \rho_{X X'}$,

$$(8. 6) \dots \quad \rho_{K K'} = (\Phi'^*)^{-1} \circ \rho_{X X'} \circ \Phi^*,$$

onde se deduz:

$$(8. 6') \dots \quad \Phi'^*(T_{/K'}) = \rho_{X X'}[\Phi^*(T)].$$

Então, se identificarmos por meio da carta Φ os pontos de K com os pontos correspondentes de X , K' identifica-se com X' , e, de acordo com o que dissemos no número 5, resulta, atendendo a (8. 6'), que $\rho_{K K'}$ se identifica com $\rho_{X X'}$.

Recorrendo a esta identificação generalizam-se de maneira imediata muitas propriedades das distribuições definidas em domínios de R^n , para as distribuições definidas num segmento de V , entre as quais destacaremos as seguintes:

PROPOSIÇÃO 8. 7. *Se U é um segmento aberto de V , $\tilde{C}(U)$ é o limite projectivo dos espaços $C(K)$, em que K percorre o conjunto dos segmentos compactos contidos em U , relativamente aos operadores de restrição $\rho_{K K'}$.*

PROPOSIÇÃO 8. 8. *Toda a distribuição T sobre um segmento compacto $K \subset V$ é prolongável a qualquer segmento aberto U que contenha K ; por outras palavras: existe sempre uma distribuição $\tilde{T} \in \tilde{C}(U)$ tal que $\tilde{T}_{/K} = T$.*

Prova-se ainda, pelo mesmo processo, que, se K é um segmento compacto de V , há uma correspondência bi-unívoca entre

as distribuições T sobre K e as suas restrições ao interior $\overset{\circ}{K}$ de K . Esta correspondência é um isomorfismo vectorial, *mas não topológico*, de $\tilde{C}(K)$ sobre o sub-espaço de $\tilde{C}(\overset{\circ}{K})$ constituído pelas distribuições que são prolongáveis a um segmento aberto U que contenha K .

9. Multiplicação por uma função diferenciável. Derivação.

O produto αT de uma distribuição $T \in \tilde{C}(K)$ por uma função α diferenciável em K , pode-se definir pela condição de se ter, para toda a carta Φ de K ,

$$(9.1) \dots \quad \Phi^*(\alpha T) = \Phi^*(\alpha) \cdot \Phi^*(T),$$

o que equivale a generalizar a Prop. 5.4 para as cartas de K .

Desta relação resulta imediatamente que o produto αT , quando existe, é univocamente determinado.

Por outro lado, fixando uma carta Φ de K e definindo αT por meio da relação (9.1), ter-se-á, para outra qualquer carta Ψ ,

$$\Psi^*(\alpha T) = h_{\Phi\Psi}^*[\Phi^*(\alpha T)] = h_{\Phi\Psi}^*[\Phi^*(\alpha)] \cdot h_{\Phi\Psi}^*[\Phi^*(T)] = \Psi^*(\alpha) \cdot \Psi^*(T)$$

o que mostra que αT existe de facto.

O produto assim definido generaliza evidentemente o produto usual, isto é: *se T é uma função f contínua em K , o produto αT , em que $\alpha \in C^\infty(K)$, coincide com o produto usual αf .*

Designemos por M_α a aplicação $T \rightarrow \alpha T$ de $\tilde{C}(K)$ em $\tilde{C}(K)$ e por $M_{\Phi^*(\alpha)}$ a aplicação correspondente $T \rightarrow \Phi^*(\alpha) \cdot T$ de \tilde{C}_Φ em si próprio, a qual é, como vimos em 2. c), uma aplicação linear contínua.

De (9.1) resulta imediatamente que se tem

$$M_\alpha = \Phi^{*-1} \circ M_{\Phi^*(\alpha)} \circ \Phi^*,$$

o que mostra que M_α é também uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(K)$ em si próprio.

Como $C(K)$ é denso em $\tilde{C}(K)$, M_α é a única aplicação linear contínua de $\tilde{C}(K)$ em si próprio que prolonga a multiplicação usual $f \rightarrow \alpha f$.

Consideremos agora uma aplicação regular $\mu : K \rightarrow L$ dum segmento K duma variedade V num segmento L duma variedade W , com a mesma dimensão que V .

A partir das relações (9. 1) e (8. 2) deduz-se facilmente que se tem :

$$(9. 2) \dots \mu^*(\alpha T) = \mu^*(\alpha) \cdot \mu^*(T), \quad \forall T \in \tilde{C}(L), \quad \forall \alpha \in C^\infty(L),$$

o que constitui uma generalização da Prop. 5. 4.

A relação (9. 2) pode-se também obter, mais simplesmente, prolongando por continuidade a relação evidente $\mu^*(\alpha f) = \mu^*(\alpha) \mu^*(f)$, $\forall f \in C(L)$.

Vamos agora definir a derivada de uma distribuição $T \in \tilde{C}(K)$ relativamente a um campo u de vectores tangentes a V definido em K , cf. 6. d).

Para isso, vejamos que D_u , como aplicação de $C^\infty(K)$ em si próprio, é prolongável numa aplicação linear contínua $\tilde{D}_u : C(K) \rightarrow C(K)$, a qual será então univocamente determinada, visto $C^\infty(K)$ ser denso em $\tilde{C}(K)$.

Com efeito, se Φ é uma carta de K ,

$$\tilde{D}_u = \Phi^{*-1} \circ \tilde{D}_{\Phi_*^{-1}(u)} \circ \Phi^*$$

é uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(K)$ em si próprio, e a relação 6. 9 mostra que \tilde{D}_u prolonga D_u .

A derivada de uma distribuição $T \in \tilde{C}(K)$ segundo o campo $u \in \mathfrak{X}^\infty(K)$ define-se então como sendo a distribuição $\tilde{D}_u T$.

Se V e W são variedades diferenciáveis com a mesma dimensão, e μ é uma injecção regular dum segmento $K \subset V$ sobre um segmento $L \subset W$, deduz-se ainda facilmente que se tem, para todo o campo $u \in \mathfrak{X}^\infty(V)$,

$$\tilde{D}_{\mu_*(u)} = \mu^{*-1} \circ \tilde{D}_u \circ \mu^*.$$

10. Distribuições sobre um aberto. Consideremos uma variedade diferenciável V com dimensão n e seja Ω um *aberto qualquer* de V .

As relações (8. 5) conduzem naturalmente a definir o espaço das distribuições sobre Ω como sendo o limite projectivo dos espaços $\tilde{C}(K)$ correspondentes aos segmentos compactos $K \subset \Omega$, relativamente aos operadores de restrição $\rho_{KK'}$, o que equivale a adaptar as seguintes definições :

DEFINIÇÃO 10. 1. Chamaremos *distribuição sobre Ω* a todo o sistema $T = \{T_K\}$ que se obtém, fazendo corresponder a todo o segmento compacto $K \subset \Omega$ uma distribuição $T_K \in \tilde{C}(K)$, de modo que se

tenha, para todo o par de segmentos $K' \subset K$, $T_{K/K'} = T_{K'}$, ou seja:

$$(10. 1) \dots \quad \varphi_{KK'}(T_K) = T_{K'}.$$

Se $T = \{T_K\}$ é uma distribuição sobre Ω , cada uma das distribuições componentes T_K diz-se a *restrição* de T a K , e designa-se também por $T|_K$.

A adição de duas distribuições $T = \{T_K\}$, $S = \{S_K\}$ sobre Ω , e o produto por um escalar λ , definem-se por meio das fórmulas

$$(10. 2) \dots \quad \begin{cases} T + S = \{T_K + S_K\} \\ \lambda T = \{\lambda T_K\}. \end{cases}$$

Vê-se imediatamente que o conjunto $\tilde{C}(\Omega)$ das distribuições sobre Ω é um espaço vectorial, sendo precisamente o sub-espaço do produto de espaços vectoriais $\prod_{K \subset \Omega} \tilde{C}(K)$ constituído pelos sistemas $T = \{T_K\}$ que verificam a relação de compatibilidade (10. 1). É então o limite projectivo (algébrico) dos espaços $\tilde{C}(K)$ relativamente aos operadores de restrição $\varphi_{KK'}$.

A topologia de $\tilde{C}(\Omega)$ será definida como sendo a topologia usual deste limite projectivo, tomando os espaços $\tilde{C}(K)$ como espaços localmente convexos munidos também das suas topologias usuais.

Tal topologia é, como se viu em 2 e), a topologia induzida em $\tilde{C}(\Omega)$ pelo produto de espaços localmente convexos $\prod_{K \subset \Omega} \tilde{C}(K)$; é também a menos fina das topologias localmente convexas sobre $\tilde{C}(\Omega)$ que tornam contínuos os operadores $\varphi_K: T \rightarrow T_K$.

Tendo em conta as propriedades gerais dos limites projectivos, deduz-se que:

PROPOSIÇÃO 10. 1. *O espaço $\tilde{C}(\Omega)$ é um espaço localmente convexo, completo e separado.*

PROPOSIÇÃO 10. 2. *Condição necessária e suficiente para que uma aplicação $\Theta: E \rightarrow \tilde{C}(\Omega)$, de um espaço topológico qualquer E em $\tilde{C}(\Omega)$, seja contínua é que, para todo o segmento compacto $K \subset \Omega$, $\Theta_K = \varphi_K \circ \Theta$ seja contínua.*

Mais adiante estudaremos outras propriedades topológicas de $\tilde{C}(\Omega)$.

Vamos agora ver que a noção de distribuição, sobre um aberto, generaliza a noção de função contínua. Para isso, façamos corresponder a cada função f contínua em Ω o sistema $\tilde{f} = \{f|_K\}$ constituído pelas restrições de f aos segmentos compactos $K \subset \Omega$. É imediato que \tilde{f} é uma distribuição sobre Ω . Por outro lado, vê-se imediatamente que a aplicação $f \rightarrow \tilde{f}$ é um isomorfismo vectorial de $C(\Omega)$ sobre um sub-espaço de $\tilde{C}(\Omega)$, o que permite identificar toda a função $f \in C(\Omega)$ com a correspondente distribuição \tilde{f} .

O espaço $C(\Omega)$ das funções contínuas em Ω é então um sub-espaço vectorial de $\tilde{C}(\Omega)$.

11. Imagem por uma aplicação regular. Restrição. Consideremos duas variedades V, W com a mesma dimensão. No número 8 mostrámos que o Teor. 4.2 se estende para uma aplicação regular dum segmento K de V num segmento L de W . Vamos agora ver que este teorema se pode generalizar ainda aos restantes casos, em que pelo menos um dos segmentos é substituído por um aberto qualquer da respectiva variedade. A técnica que vamos utilizar é semelhante à que usámos no número 4; e, tal como aí, vamos limitar-nos ao caso em que μ é injectiva.

Começemos por supor que μ é uma aplicação regular injectiva dum segmento K de V num aberto Ω de W .

Nestas condições $L = \mu(K)$ é um segmento de W . Então, sendo μ_1 a aplicação de K sobre L tal que $\mu_1(x) = x, \forall x \in K$, do Teor. 8.1 resulta que existe uma aplicação linear contínua $\mu_1^* : \tilde{C}(L) \rightarrow \tilde{C}(K)$, tal que $\mu_1^*(f) = f \circ \mu_1, \forall f \in C(L)$.

Consideremos o operador de restrição $\rho_L : \tilde{C}(\Omega) \rightarrow \tilde{C}(L)$ que faz corresponder a cada distribuição $T \in \tilde{C}(\Omega)$ a sua restrição a $L, T_L = \rho_L T$. Como ρ_L é uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(\Omega)$ em $\tilde{C}(L)$, $\mu^* = \mu_1^* \circ \rho_L$ é também uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(\Omega)$ em $\tilde{C}(K)$.

Por outra parte, tem-se evidentemente $\mu^*(f) = f \circ \mu, \forall f \in C(\Omega)$, e μ^* é a única aplicação linear contínua nestas condições, dada a unicidade de μ_1^* .

Suponhamos agora que μ é uma aplicação regular injectiva dum aberto Ω' de V num aberto Ω de W .

Tal como no número 4, consideremos, para cada segmento compacto $K \subset \Omega'$, a restrição μ_K de μ a K . A aplicação μ_K

encontra-se nas condições do caso que tratamos anteriormente, e existe portanto uma aplicação linear contínua $\mu_K^* : \tilde{C}(\Omega) \rightarrow \tilde{C}(K)$ tal que $\mu_K^*(f) = f \circ \mu$, $\forall f \in C(\Omega)$.

Reconhece-se facilmente que, para toda a distribuição $T \in \tilde{C}(\Omega)$, o sistema de distribuições $\{\mu_K^*(T)\}$ é uma distribuição sobre Ω' , q e se designará por $\mu^*(T)$. Como se tem $\rho_K \circ \mu^* = \mu_K^*$, da Prop. 10. 2 resulta imediatamente que μ^* é uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(\Omega)$ em $\tilde{C}(\Omega')$, tendo-se, como é imediato, $\mu^*(f) = f \circ \mu$, $\forall f \in C(\Omega)$.

Vejamus ainda que μ^* é a única aplicação linear contínua nestas condições.

Basta observar que se existisse outra aplicação μ_1^* , ter-se-ia para todo o segmento $K \subset \Omega'$, $\rho_K \circ \mu_1^* = \rho_K \circ \mu^*$, pois que cada uma das aplicações $\rho_K \circ \mu_1^*$ e $\rho_K \circ \mu^*$ prolonga a aplicação $f \rightarrow f \circ \mu_K$ de $C(\Omega)$ em $C(K)$. Daí se deduz imediatamente que $\mu^* = \mu_1^*$.

O raciocínio anterior aplica-se também ao caso em que μ é uma aplicação injectiva regular dum aberto Ω' de V num segmento de W .

Tem-se assim o seguinte teorema:

TEOREMA 11. 1. *Sejam V e W duas variedades com a mesma dimensão. A toda a injecção regular $\mu : \Omega' \rightarrow \Omega$ dum aberto Ω' de V num aberto Ω de W corresponde uma e uma só aplicação linear contínua μ^* de $\tilde{C}(\Omega)$ em $\tilde{C}(\Omega')$ tal que se tem $\mu^*(f) = f \circ \mu$, $\forall f \in C(\Omega)$.*

Conclusão análoga se um dos conjuntos Ω, Ω' , em vez de aberto, é um segmento compacto da respectiva variedade.

Este teorema ainda se estende para o caso em que μ é regular mas não necessariamente injectiva (ver Notas Finais).

Tal como nos números 4 e 8, designaremos ainda, para toda a distribuição $T \in \tilde{C}(\Omega)$, por $T \circ \mu$ a distribuição $\mu^*(T)$, e diremos que $T \circ \mu$ é a distribuição composta de T com μ ou imagem de T por μ .

As Prop. 8. 2, 8. 3 e o Teor. 8. 4 generalizam-se imediatamente.

No número anterior definimos a restrição de uma distribuição T sobre um aberto Ω de V a um segmento compacto $K \subset \Omega$. Vê-se imediatamente que, sendo i a inclusão de K em Ω , $T_K = T \circ i$, ou seja $\rho_K = i^*$.

Consideremos agora dois abertos Ω', Ω de V tais que $\Omega' \subset \Omega$ e seja i a inclusão de Ω' em Ω . Definiremos a *restrição* duma distribuição T sobre Ω a Ω' , como sendo a distribuição $T|_{\Omega'} = T \circ i$.

Fácilmente se reconhece que, sendo $T = \{T_K\}$, $T|_{\Omega'}$ é o sistema de distribuições $\{T_K|_{K \subset \Omega'}\}$.

O operador de restrição $\rho_{\Omega\Omega'} : T \rightarrow T|_{\Omega'}$ é evidentemente uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(\Omega)$ em $\tilde{C}(\Omega')$.

Reconhece-se imediatamente que as relações (8.7) se verificam ainda para os operadores de restrição, que acabamos de definir.

Vamos ver agora que o «princípio de Recollement des Morceaux» de L. SCHWARTZ se mantém, para as distribuições definidas em abertos de uma variedade diferenciável V :

TEOREMA 11.2. *Seja $\{\Omega_\alpha\}$ uma família de abertos de V de reunião Ω e suponhamos que a cada índice α corresponde uma distribuição $T_\alpha \in \tilde{C}(\Omega_\alpha)$ de modo que se tem, $T_{\alpha/\Omega_{\alpha\beta}} = T_{\beta/\Omega_{\alpha\beta}}$, para todo o par de índices α, β tal que $\Omega_{\alpha\beta} = \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \emptyset$. Existe então uma e uma só distribuição $T \in C(\Omega)$ tal que $T_\alpha = T|_{\Omega_\alpha}, \forall \alpha$.*

Se Ω é um segmento aberto de V , o teorema reduz-se imediatamente ao já demonstrado no caso de \mathbb{R}^n , tomando uma carta Φ de Ω e identificando $\tilde{C}(\Omega)$ com \tilde{C}_Φ , nas condições indicadas no número 8.

Consideremos agora o caso geral.

Seja U um segmento aberto contido em Ω . A cada índice α , tal que $U_\alpha = U \cap \Omega_\alpha \neq \emptyset$, façamos corresponder a distribuição $T_{U,\alpha} = T_\alpha|_{U \cap \Omega_\alpha}$. As distribuições $T_{U,\alpha}$, assim definidas, verificam as hipóteses do princípio de Recollement des Morceaux, que já vimos ser válido neste caso. Nestas condições, existe uma e uma só distribuição T_U tal que $T_{U/U_\alpha} = T_{U,\alpha} = T_\alpha|_{U_\alpha}$.

Agora, a cada segmento compacto $K \subset \Omega$ façamos corresponder uma distribuição T_K tal que $T_K = T_{U/K}$, sendo U um segmento aberto que contenha K . Vê-se imediatamente que T_K não depende do segmento U .

As distribuições T_K verificam a condição de compatibilidade da Def. 10.1 e definem portanto uma distribuição T sobre Ω . Ora, para todo o índice α e todo o segmento compacto $K \subset \Omega_\alpha$, tem-se $T_K = T|_K$, e portanto $T_\alpha = T|_{\Omega_\alpha}$. Assim, T é a única distribuição que verifica as condições do teorema.

O teorema anterior permite definir o suporte duma distribuição $T \in \tilde{C}(\Omega)$ nos mesmos termos que em R^n .

Com efeito deduz-se imediatamente que, para toda a distribuição $T \in \tilde{C}(\Omega)$, a reunião dos abertos em que T é nula é ainda um aberto onde T é nula. O complementar a respeito de Ω de tal aberto é então, por definição, o *suporte* de T .

12. Multiplicação por uma função diferenciável. Derivação.

Se V é uma variedade diferenciável, todo o aberto Ω de V pode-se considerar também como variedade diferenciável, com a estrutura induzida por V , isto é, para todo o aberto $\Omega' \subset \Omega$, uma função f definida em Ω' é diferenciável, relativamente a Ω , se o é relativamente à variedade V . Nestas condições, o estudo das distribuições definidas em abertos duma variedade diferenciável reduz-se ao das distribuições definidas em toda a variedade como vamos fazer daqui em diante.

Seja α uma função diferenciável em V . Para todo o segmento compacto K de V , ponhamos $M_{\alpha_K}(T) = \alpha|_K \cdot T|_K$; M_{α_K} é então, de acordo com o que vimos no número 9, uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(V)$ em $\tilde{C}(K)$.

Por outro lado, para cada distribuição $T \in \tilde{C}(V)$, as distribuições $M_{\alpha_K}(T)$ verificam a condição de compatibilidade (10.1) e definem portanto uma distribuição $M_\alpha(T)$ sobre V , à qual chamaremos *produto de T por α* , e designaremos por αT .

Tem-se assim, para todo o segmento K de V ,

$$(12.1) \dots \quad \rho_K(\alpha T) = \rho_K(\alpha) \cdot \rho_K(T),$$

ou ainda

$$(12.1') \quad \rho_K \circ M_\alpha = M_{\alpha_K},$$

e a Prop. 10.2 mostra então que M_α é uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(V)$ em si próprio.

É imediato que, se T é uma função $f \in C(V)$, o produto αT definido por (12.1) coincide com o produto usual αf ; por outras palavras, M_α é uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(V)$ em si próprio que prolonga a aplicação $f \rightarrow \alpha f$ de $C(V)$ em $C(V)$, sendo a *única* em tais condições, o que se pode demonstrar por um processo análogo ao que usámos no Teorema 11.1 para estabelecer a unicidade de μ^* .

Se V, W são duas variedades diferenciáveis com a mesma dimensão e $\mu: V \rightarrow W$ é uma aplicação injectiva regular de V em W , tem-se

$$(12.2) \dots \quad \mu^*(\alpha T) = \mu^*(\alpha) \cdot \mu^*(T), \quad \forall \alpha \in C^\infty(V), \quad \forall T \in \tilde{C}(V)$$

relação esta que generaliza a Prop. 5.4, e que se pode demonstrar pelo mesmo processo, prolongando por continuidade a relação $\mu^*(\alpha f) = \mu^*(\alpha) \cdot \mu^*(f)$, $\forall f \in C(V)$.

De (12.2) resulta imediatamente que se tem, para todo o aberto $\Omega \subset V$, $(\alpha T)|_\Omega = \alpha|_\Omega \cdot T|_\Omega$ ou ainda, designando por ρ_Ω o operador de restrição $T \rightarrow T|_\Omega$,

$$\rho_\Omega(\alpha T) = \rho_\Omega(\alpha) \cdot \rho_\Omega(T).$$

Daqui se deduz, em particular, que o suporte de αT está contido na intersecção dos suportes de α e de T .

No número 8 vimos que toda a distribuição T sobre um segmento compacto K de V é prolongável numa distribuição \tilde{T} sobre um segmento aberto U que contenha K . Podemos agora demonstrar a seguinte proposição mais geral:

PROPOSIÇÃO 12.1. *Toda a distribuição T sobre um segmento compacto K numa variedade diferenciável V é prolongável a V numa distribuição \tilde{T} , com suporte contido numa vizinhança aberta de K , escolhida arbitrariamente.*

Consideremos um segmento aberto $U_0 \supset K$. Como se sabe, existe sempre uma função α diferenciável em V com suporte contido em U_0 e igual a 1 sobre K .

Posto isto, façamos corresponder a U_0 uma distribuição \tilde{T}_0 sobre U_0 que prolongue a distribuição T , e ao aberto $U_1 = V - \Delta$, em que Δ é o suporte de α , façamos corresponder a distribuição $T_1 = 0$ sobre U_1 . Os abertos U_0 e U_1 constituem uma cobertura de V e as distribuições $T_0 = \alpha|_{U_0} \cdot \tilde{T}_0$ e T_1 verificam, relativamente a esta cobertura, as condições do Teor. 11.2, visto que qualquer uma destas distribuições é nula em $U_0 \cap U_1$.

Nestas condições, existe uma distribuição \tilde{T} sobre V tal que $\tilde{T}|_{U_0} = T_0$, $\tilde{T}|_{U_1} = T_1$. A segunda relação mostra que \tilde{T} tem o seu suporte contido em Δ e portanto em U_0 , e da pri-

meira resulta $\tilde{T}_K = (\tilde{T}/u_0)_{/K} = \alpha_{/K} T = T$, o que demonstra a proposição.

Consideremos agora um campo u de vectores tangentes a V . Para cada segmento compacto $K \subset V$, designemos por u_K a restrição de u a K .

A cada campo u_K corresponde, como vimos no número 9, uma aplicação linear contínua \tilde{D}_{u_K} de $\tilde{C}(K)$ em si próprio, de modo que a aplicação $T \rightarrow \tilde{D}_{u_K} T_{/K}$, de $\tilde{C}(V)$ em $\tilde{C}(K)$, é também uma aplicação linear contínua.

Estas aplicações estão nas mesmas condições que as aplicações M_{α_K} que consideramos anteriormente. Então, o mesmo processo que utilizámos para definir o produto αT permite também definir a derivada $\tilde{D}_u T$ duma distribuição qualquer $T \in \tilde{C}(V)$, segundo um campo $u \in \mathfrak{X}^\infty(V)$, como sendo a distribuição $\tilde{D}_u T$ tal que

$$(12.3) \dots \varrho_K(\tilde{D}_u T) = \tilde{D}_{u_K} \varrho_K(T), \text{ para todo o segmento compacto } K \subset V.$$

Seguindo o processo, que indicámos para a multiplicação, demonstra-se ainda que \tilde{D}_u é uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(V)$ em $\tilde{C}(V)$, sendo a única, em tais condições, que prolonga $D_u: C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$.

Se Ω é um aberto de V e $u \in \mathfrak{X}^\infty(V)$, reconhece-se facilmente que se tem

$$(12.4) \dots (\tilde{D}_u T)_{/\Omega} = \tilde{D}_{u_\Omega}(T_{/\Omega}), \quad \forall T \in \tilde{C}(V),$$

ou ainda

$$(12.4') \dots \varrho_\Omega \circ \tilde{D}_u = \tilde{D}_{u_\Omega} \circ \varrho_\Omega,$$

o que se exprime muitas vezes dizendo, embora incorrectamente, que \tilde{D}_u *permuta com os operadores de restrição*.

De (12.4) resulta que o suporte de $\tilde{D}_u T$ está contido na intersecção dos suportes de u e T .

Finalmente, se μ é um isomorfismo de V sobre outra variedade W , tem-se a seguinte relação, que generaliza (6.9),

$$(12.5) \dots \tilde{D}_{\mu_*(u)} = \mu^{*-1} \circ \tilde{D}_u \circ \mu^*,$$

e que se pode obter pelo mesmo processo.

13. Espaços (L_c) e espaços bornológicos. Outras propriedades de $\tilde{C}(V)$. No número 10 estabelecemos algumas propriedades topológicas do espaço $\tilde{C}(V)$, que resultam imediatamente da definição de $\tilde{C}(V)$ como limite projectivo dos espaços $\tilde{C}(K)$. Vamos agora completar este estudo, mostrando que $\tilde{C}(V)$ é um espaço (L_c) , (cf. [14]), e também um espaço bornológico (cf. [1], [6]), o que dará origem a novas propriedades que desempenharão papel importante no que se segue.

Convém então recordar as noções de espaço (L_c) e de espaço bornológico, assim como as propriedades fundamentais destes espaços.

Um espaço localmente convexo E diz-se um espaço (L_c) se todo o conjunto convexo $A \subset E$, que não contém o limite de qualquer sucessão de pontos $x_n \notin A$, é aberto em E .

Desta definição deduz-se facilmente a seguinte proposição, que caracteriza os espaços (L_c) , (cf. [13], Prop. 9, 10):

PROPOSIÇÃO 13.1. *Para que um espaço localmente convexo E seja um espaço (L_c) é necessário e suficiente que verifique a seguinte condição:*

(LC) *Uma aplicação linear φ de E num espaço localmente convexo arbitrário F é contínua se transforma cada sucessão $x_n \rightarrow 0$ em E numa sucessão $\varphi(x_n) \rightarrow 0$ em F .*

Esta condição é verificada se E é metrizável. Assim, todo o espaço localmente convexo *metrizável*, e em particular, todo o espaço *normado* é um espaço (L_c) .

Por outro lado,

PROPOSIÇÃO 13.2. *O limite indutivo E duma sucessão crescente E_n de espaços (L_c) é um espaço (L_c) .*

É uma consequência imediata da definição e do facto de que um conjunto convexo A é aberto em E , se $A \cap E_n$ é aberto em cada um dos espaços E_n .

Assim, todo o espaço (LN^*) ou (LF) é um espaço (L_c) , donde se deduz, em particular,

COROLÁRIO I. *O espaço $\tilde{C}(K)$ das distribuições sobre um segmento compacto K de V é um espaço (L_c) .*

Vejam agora como se comportam os espaços (L_c) em relação à operação de limite projectivo:

TEOREMA 13.3. *Seja E o limite projectivo duma família $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de espaços (L_c) , com índices num conjunto ordenado qualquer I , relativamente a um sistema de aplicações lineares contínuas $g_{\beta\alpha}: E_\beta \rightarrow E_\alpha$, $\alpha \leq \beta$. Se, para todo o índice $\alpha \in I$ e para toda a sucessão $x_n \rightarrow 0$ em E_α , existe uma sucessão $x_n^{(\alpha)} \rightarrow 0$ em E tal que $x_n = g_\alpha(x_n^{(\alpha)})$, então E é um espaço (L_c) .*

Este teorema é demonstrado em [14], Teor. 8, no caso particular em que I é o conjunto dos inteiros $1, 2, \dots, n, \dots$. Pode-se no entanto generalizar a demonstração para o caso em que I é um conjunto ordenado qualquer.

O espaço $\tilde{C}(V)$, como limite projectivo dos espaços $\tilde{C}(K)$, está nas condições da hipótese do Teorema anterior, como resulta do seguinte Lema:

LEMA 13.4. *Seja Ω um aberto de V e seja K um segmento compacto de V tal que $K \subset \Omega$. Então, para toda a sucessão $T_n \rightarrow 0$ em $\tilde{C}(K)$, existe uma sucessão $T_n^{(K)} \rightarrow 0$ em $\tilde{C}(V)$ tal que $T_n = \rho_K(T_n^{(K)})$, $\forall n$.*

Se Ω é um segmento aberto de V , o lema reduz-se ao que é demonstrado em [15], (20. Pág. 153), tomando uma carta $\Phi: X \rightarrow \Omega$ e identificando X com Ω por meio de Φ .

No caso geral, consideremos dois segmentos abertos U^1, U^2 tais que $K \subset U^1 \subset U^2 \subset \Omega$.

Existe então uma sucessão $T_n^{(2)} \rightarrow 0$ em $\tilde{C}(U^2)$, tal que $T_n = \rho_{U^1, K}(T_n^{(2)})$. Para cada índice n , ponhamos $T_n^{(1)} = \rho_{U^1, U^1}(T_n^{(2)})$ e designemos por $\tilde{T}_n^{(1)}$ um prolongamento qualquer de $T_n^{(1)}$ a Ω , cf. Prop. 11.4.

Posto isto, consideremos uma função $\alpha \in C^\infty(\Omega)$ com suporte contido em U^1 e igual a 1 sobre K , e ponhamos $T_n^{(K)} = \alpha \tilde{T}_n^{(1)}$. É fácil verificar que $T_n^{(K)} \rightarrow 0$ em $\tilde{C}(V)$; por outro lado, tem-se, evidentemente, $T_n = \rho_K(T_n^{(K)})$.

Tem-se assim, como consequência do Lema anterior e do Teor. 13.3, os seguintes Corolários:

COROLÁRIOS:

II. *O espaço $\tilde{C}(V)$ é um espaço (L_c) .*

III. *Uma aplicação linear Θ de $\tilde{C}(V)$ num espaço localmente*

convexo F é contínua se, e só se, $\lim_n \Theta(T_n) = \Theta(\lim_n T_n)$, para toda a sucessão T_n convergente em $\tilde{C}(V)$.

Ainda como consequência do Lema 4.1 e do Corolário I, tem-se a seguinte proposição, que utilizaremos mais adiante:

PROPOSIÇÃO 13.5. *Para todo o segmento compacto K de V o operador de restrição $\rho_K: \tilde{C}(V) \rightarrow \tilde{C}(K)$ é um homomorfismo.*

Recordemos que uma aplicação linear φ dum espaço localmente convexo E num espaço localmente convexo F se diz um homomorfismo se, sendo $N = \varphi^{-1}(\{0\})$ o núcleo de φ , a aplicação associada de E/N sobre F , $\hat{\varphi}: x + N \rightarrow \varphi(x)$, é um isomorfismo vectorial topológico. Uma condição necessária e suficiente para que φ seja um homomorfismo é que transforme todo o conjunto aberto e convexo de E num sub-conjunto aberto em F , cf. [2].

Consideremos então um conjunto convexo aberto $\mathfrak{A} \subset \tilde{C}(V)$ e vejamos que $\rho_K(\mathfrak{A})$ é aberto em $\tilde{C}(K)$. Para isso, basta mostrar, Corol. I, que $\rho_K(\mathfrak{A})$ não contém o limite de nenhuma sucessão convergente de distribuições $T_n \notin \mathfrak{A}$.

Ora, do Lema 13.4 deduz-se facilmente que, se $T_n \rightarrow T$ em $\tilde{C}(K)$, existe uma sucessão $\tilde{T}_n \rightarrow \tilde{T}$ em $\tilde{C}(V)$, tal que $\rho_K(\tilde{T}_n) = T_n$. Então, se $T_n \notin \rho_K(\mathfrak{A})$ também $\tilde{T}_n \notin \mathfrak{A}$, e como \mathfrak{A} é aberto $\tilde{T} \notin \mathfrak{A}$, logo $T = \rho_K(\tilde{T}) \notin \rho_K(\mathfrak{A})$.

Vejamos agora a noção de espaço bornológico.

Um espaço localmente convexo E diz-se bornológico se toda a parte convexa A de E que absorve todas as partes limitadas de E é uma vizinhança de zero (1).

Os espaços bornológicos verificam propriedades análogas às das Prop. 13.1, 13.2 e do Teor. 13.3 que se demonstram por métodos semelhantes:

PROPOSIÇÃO 13.1. *Para que um espaço localmente convexo E seja um espaço bornológico, é necessário e suficiente que verifique a seguinte condição:*

(1) É manifesta a analogia entre os espaços bornológicos e os espaços (L_c) : enquanto nestes a topologia é determinada pela classe das sucessões convergentes para zero, nos espaços bornológicos a topologia é determinada pela classe dos conjuntos limitados.

(B). Uma aplicação linear φ de E num espaço localmente convexo qualquer F é contínua se transforma todo o conjunto A limitado em E num conjunto $\varphi(A)$ limitado em F .

PROPOSIÇÃO 13. 2'. O limite indutivo duma sucessão crescente de espaços bornológicos é bornológico.

TEOREMA 13. 3'. Seja E o limite projectivo duma família $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de espaços bornológicos, com índices num conjunto ordenado qualquer I , em relação a um sistema de aplicações lineares contínuas $g_{\beta\alpha}: E_\beta \rightarrow E_\alpha$, $\alpha \leq \beta$. Se para todo o índice $\alpha \in I$ e todo o conjunto H limitado em E_α , existe um conjunto $H^{(\alpha)}$ limitado em E , tal que $g_\alpha(H^{(\alpha)}) = H$, então o espaço E é bornológico.

Todo o espaço normado é bornológico, pois que num tal espaço existe sempre uma vizinhança de zero limitada (1). Da Prop. 13. 2' resulta então que todo o espaço (LN^*) é bornológico; daí se deduz o seguinte corolário:

COROLÁRIO I'. O espaço $\tilde{C}(K)$ das distribuições sobre um segmento compacto K de V é bornológico.

Vejamos agora que o espaço $\tilde{C}(V)$ é bornológico. Tendo em conta a Prop. 13. 3', bastará provar o seguinte Lema, análogo a 13. 4:

LEMA 13. 4. Seja Ω um aberto qualquer de V e seja K um segmento compacto tal que $K \subset \Omega$. Para todo o conjunto \mathfrak{H} limitado em $C(K)$, existe um conjunto $\mathfrak{H}^{(K)}$ limitado em $\tilde{C}(\Omega)$, tal que $\rho_K(\mathfrak{H}^{(K)}) = \mathfrak{H}$.

Vamos demonstrar o Lema só para o caso em que Ω é um segmento aberto de V , pois que a extensão ao caso em que Ω é um aberto qualquer de V se faz do mesmo modo que no Lema 13. 4.

Identifiquemos, por meio de uma carta Φ de Ω , Ω com o domínio desta carta; K será então identificado, por meio de Φ , com um domínio compacto de R^n contido em Ω (2).

(1) Todo o espaço metrizável é também um espaço bornológico e portanto todo o espaço (LF) .

(2) Esta identificação é legítima a respeito das propriedades topológicas de $\tilde{C}(\Omega)$ e portanto também a respeito dos conjuntos limitados, cf. 7).

Como vimos em 2b), um conjunto $\mathfrak{H} \subset \tilde{C}(K)$ é limitado neste espaço, se existir um inteiro $m \geq 0$, tal que \mathfrak{H} esteja contido em $C_m(K)$ e seja limitado neste espaço. Tendo em conta a maneira como se define a topologia de $C_m(K)$, reconhece-se facilmente que H é limitado em $C_m(K)$, se existir um inteiro m e um número real $l \geq 0$, tal que toda a distribuição $T \in \mathfrak{H}$ seja da forma $T = D^m f$, em que $f \in C(K)$ e $\max_{x \in K} |f(x)| \leq l$.

Designemos por \mathfrak{H}_l o conjunto de todas funções que verificam esta condição, e ponhamos para cada função $f \in \mathfrak{H}_l$

$$(13.1) \dots \quad F(x) = \int_a^x f(\xi^1, \dots, \xi^n) d\xi^1 \dots d\xi^n,$$

em que a é um ponto fixo de R^n e

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in K \\ 0 & \text{se } x \notin K \end{cases}$$

A cada distribuição $T = D^m f \in \mathfrak{H}$, façamos corresponder a distribuição sobre Ω , $T^{(K)} = D^{m+1}(F|_{\Omega})$. O conjunto $\mathfrak{H}^{(K)}$, assim formado, é limitado em $\tilde{C}(\Omega)$ pois que se tem, como se deduz facilmente de 13.1,

$$\max_{x \in R^n} |F(x)| \leq l \cdot \text{med } K.$$

Por outro lado, tem-se, para toda a distribuição $T \in \mathfrak{H}$, $\rho_K(T^{(K)}) = D^{m+1}(F|_K) = D^m f = T$, o que acaba de demonstrar o Lema.

Desta Lema e do Teor. 13.3' resultam então os seguintes Corolários:

COROLÁRIOS:

II'. O espaço $\tilde{C}(V)$ é um espaço bornológico.

III'. Uma aplicação linear Θ de $\tilde{C}(V)$ num espaço localmente convexo qualquer F é contínua, se transforma todo o conjunto \mathfrak{H} limitado em $C(V)$ num conjunto $\Theta(\mathfrak{H})$ limitado em F .

Vejamos agora que:

PROPOSIÇÃO 13 6. Todo o espaço bornológico completo e separado, em particular o espaço $\tilde{C}(V)$, é um espaço tonelado.

Recordemos, cf. 2. a), que um espaço localmente convexo se diz tonelado quando todo o «tonel» (conjunto absolutamente convexo, fechado e absorvente) é uma vizinhança de zero. Por outro lado, há uma propriedade dos espaços localmente convexos, que se demonstra em [1], § 3 Lema 1, segundo a qual: *num espaço localmente convexo E separado, qualquer tonel absorve todas as partes de E limitadas e completas*. Então, se E é separado e completo, qualquer tonel $\mathfrak{T} \subset E$ absorve todas as partes limitadas, pois que, neste caso, a aderência duma parte limitada de E é limitada e completa. Daí se segue que, se E, além de completo e separado, é bornológico, todo o tonel é vizinhança de zero.

TEOREMA 13.7. *O espaço $\tilde{C}(V)$ é um espaço de Montel e é portanto reflexivo.*

Como $\tilde{C}(V)$ é tonelado, bastará mostrar, cf. 2. a), que toda a parte limitada de $\tilde{C}(V)$ é relativamente compacta. Ora, se \mathfrak{H} é um sub-conjunto limitado de $\tilde{C}(V)$, para todo o segmento $K \subset V$, $\mathfrak{H}_K = \rho_K(\mathfrak{H})$ é limitado em $\tilde{C}(K)$, e como $\tilde{C}(K)$ é um espaço de Montel, \mathfrak{H}_K é relativamente compacto.

Como $\mathfrak{H} \subset \prod_K \mathfrak{H}_K$, e o produto $\prod_K \mathfrak{H}_K$ é relativamente compacto no produto de espaços $\prod_K \tilde{C}(K)$, o mesmo acontece com \mathfrak{H} . Então, \mathfrak{H} é relativamente compacto em $\tilde{C}(V)$, por este ser um sub-espaço fechado de $\prod_K \tilde{C}(K)$, 2 e).

§ III. Análise linear

14. Aplicações lineares contínuas de $\tilde{C}(K)$ num espaço localmente convexo. Neste parágrafo, vamos determinar as aplicações lineares contínuas do espaço das distribuições sobre uma variedade diferenciável V num espaço localmente convexo E, o qual suporemos sempre *separado e completo em relação às sucessões*.

Para isso, começaremos por estudar as aplicações lineares contínuas do espaço $\tilde{C}(K)$, das distribuições num segmento compacto K de V, em E, problema este que se reduz facilmente ao que já foi tratado em 2. c).

Com efeito, dada uma carta Φ de K definida num domínio compacto X de R^n , a cada aplicação linear contínua $\Theta: \tilde{C}(K) \rightarrow E$ corresponde uma e uma só aplicação linear contínua $\Theta_\Phi: \tilde{C}(X) \rightarrow E$ tal que $\Theta = \Theta_\Phi \circ \Phi^*$, ou seja

$$(14.1) \quad \dots \quad \Theta_\Phi[\Phi^*(T)] = \Theta(T), \quad \forall T \in \tilde{C}(K).$$

A correspondência $\Theta \rightarrow \Theta_\Phi$ é evidentemente um isomorfismo vectorial entre os espaços de aplicações lineares contínuas $\mathfrak{L}[\tilde{C}(K); E]$ e $\mathfrak{L}[\tilde{C}(X); E]$.

Para estudar melhor esta correspondência, convém estabelecer algumas definições.

Chamaremos *indicatriz de Θ relativa à carta Φ* à função vectorial $\Theta_\Phi: K \rightarrow E$ cuja imagem na carta Φ é a indicatriz de Θ , como foi definida em 2. c). Tem-se assim:

$$(14.2) \quad \dots \quad \theta_\Phi(u) = \Theta_\Phi[\delta_X(\hat{x} - \Phi^{-1}(u))], \quad \forall u \in K.$$

É imediato que θ_Φ é diferenciável e nula na fronteira de K , juntamente com todas as suas derivadas, sendo então prolongável a V , como função diferenciável de suporte contido em K . No que segue, designaremos o espaço vectorial constituído por estas funções por $\mathfrak{D}(K; E)$, ou simplesmente $\mathfrak{D}(K)$, se E é a recta complexa C .

Chamaremos *distribuição de Dirac num dado ponto $u \in K$, relativa à carta Φ* , e designaremos por $\delta_K(\Phi; u)$, a distribuição cuja imagem nesta carta é a distribuição de DIRAC, já definida em 2. c), $\delta_X[\hat{x} - \Phi^{-1}(u)]$.

Tem-se então

$$(14.3) \quad \dots \quad \Phi^*[\delta_K(\Phi, u)] = \delta_X(\hat{x} - \Phi^{-1}(u)),$$

de modo que de (14.2) resulta

$$(14.2') \quad \dots \quad \theta_\Phi(u) = \Theta[\delta_K(\Phi; u)], \quad \forall u \in K.$$

Por outro lado, da fórmula integral (2.15'), que determina os valores de uma aplicação linear contínua, deduz-se:

$$(14.4) \quad \dots \quad \Theta(T) = \int_X T[\Phi(x)] \theta_\Phi[\Phi(x)] dx, \quad \forall T \in \tilde{C}(K).$$

Pode-se então enunciar a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 14. 1. *Toda a carta $\Phi: X \rightarrow K$ induz um isomorfismo vectorial $\Theta \rightarrow \theta_\Phi$ entre os espaços $\mathfrak{L}[\tilde{C}(K); E]$ e $\mathfrak{D}(K; E)$. Este isomorfismo é determinado pela fórmula (14. 2') e o isomorfismo recíproco por (14. 4).*

Este isomorfismo não é canónico, pois que depende da carta Φ considerada.

Com efeito, se Φ, Ψ são duas cartas de K , deduz-se facilmente da fórmula de transformação da distribuição de Dirac:

$$(14. 5) \dots \quad \delta_K(\Phi; u) = |J_{\Psi^{-1} \circ \Phi}|_u \delta_K(\Psi; u),$$

donde vem uma relação análoga, para as indicatrizes θ_Φ, θ_Ψ ,

$$(14. 6) \dots \quad \theta_\Phi(u) = |J_{\Psi^{-1} \circ \Phi}|_u \theta_\Psi(u).$$

15. Aplicações lineares contínuas de $\tilde{C}(V)$ em E . Consideremos agora uma aplicação linear contínua Θ de $\tilde{C}(V)$ num espaço localmente convexo E que, como já dissemos, se continuará a supor separado e completo em relação às sucessões. Tomando um sistema numerável $\{K_j\}$ de segmentos compactos, tal que $\{\overset{\circ}{K}_j\}$ seja uma cobertura de V , e uma partição da unidade localmente finita $\{\alpha_j\}$ associada a esta cobertura, cf. 6 c), tem-se

$$(15. 1) \dots \quad \Theta(T) = \sum_j \Theta(\alpha_j T).$$

A determinação de Θ reduz-se então à das aplicações $T \rightarrow \Theta(\alpha T)$.

Tem-se para este efeito o seguinte Lema:

LEMA 15. 1. *A todo o segmento compacto K de V e a toda a carta $\Phi: X \rightarrow K$ corresponde uma e uma só função $\theta_\Phi \in C^\infty(K; E)$, tal que se tem, para toda a função $\alpha \in \mathfrak{D}(K)$,*

$$(15. 2) \dots \quad \Theta(\alpha T) = \int_X T[\Phi(x)] \alpha[\Phi(x)] \theta_\Phi[\Phi(x)] dx.$$

Notemos, em primeiro lugar, que $T \rightarrow \Theta(\alpha T)$ é uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(V)$ em E , nula no núcleo $\mathfrak{F}_K^{-1}(\{0\})$ do operador de restrição $\mathfrak{F}_K^{-1}(\{0\})$. Então, como \mathfrak{F}_K é um homomorfismo, Prop. 13. 6, existe uma e uma só aplicação linear contínua $\Theta_{K\alpha}: \tilde{C}(K) \rightarrow E$ tal que

$$(a) \dots \quad \Theta_{K\alpha}(T|_K) = \Theta(\alpha T),$$

e, designando por $\theta_{\Phi, \alpha}$ a indicatriz de $\Theta_{K, \alpha}$ relativa à carta Φ , tem-se, Teor. 14. 1,

$$(b) \dots \begin{cases} \Theta(\alpha T) = \int_X T[\Phi(x)] \theta_{\Phi, \alpha}[\Phi(x)] dx \\ \theta_{\Phi, \alpha}(u) = \Theta_{K, \alpha}[\delta_K(\Phi, u)]. \end{cases}$$

Posto isto, suponhamos que existe uma função θ_{Φ} nas condições do Lema.

Da unicidade de $\theta_{\Phi, \alpha}$ resulta imediatamente,

$$(15. 3) \dots \quad \alpha(u) \theta_{\Phi, \alpha}(u) = \theta_{\Phi, \alpha}(u).$$

Se θ'_{Φ} é uma função nas mesmas condições que θ_{Φ} , tem-se $\alpha(u) \theta'_{\Phi}(u) = \alpha(u) \theta_{\Phi}(u)$, $\forall u \in K$, $\forall \alpha \in \mathcal{D}(K)$. Como se pode escolher, para todo o ponto $u \in \overset{\circ}{K}$, α pela condição $\alpha(u) = 1$, segue-se que $\theta_{\Phi}(u) = \theta'_{\Phi}(u)$ no interior de K , e também na fronteira, visto que, por hipótese, θ_{Φ} , θ'_{Φ} são contínuas em K . Assim, θ_{Φ} , se existir, é única.

Vejamos agora que θ_{Φ} existe.

Consideremos, para isso, outro segmento compacto L tal que $K \subset \overset{\circ}{L}$, e seja $\Psi: Y \rightarrow L$ uma carta de L . Seja ainda $\beta \in \mathcal{D}(L)$, tal que $\beta(y) = 1$ em K . Existe então uma função $\theta_{\Psi, \beta}$ tal que

$$\Theta(\beta T) = \int_Y T[\Psi(y)] \theta_{\Psi, \beta}[\Psi(y)] dy.$$

Nestas condições, pondo

$$\theta_{\Phi}(u) = |J_{\Psi^{-1}\Phi}|_u \cdot \theta_{\Psi, \beta}(u), \quad \forall u \in K$$

tem-se,

$$\Theta(\alpha T) = \Theta(\beta \cdot \alpha T) = \int_Y T[\Psi(y)] \alpha[\Psi(y)] \theta_{\Psi, \beta}(\Psi(y)) dy,$$

e, efectuando neste integral a mudança de coordenadas $h_{\Psi\Phi} = \Psi^{-1}\Phi$, obtém-se (15. 2), (cf. Prop. 5. 6).

Das relações (15. 3) e (14. 6) deduz-se facilmente a seguinte condição de compatibilidade para as funções θ_{Φ} :

$$(15. 4) \dots \quad \theta_{\Phi}(u) = |J_{\Psi^{-1}\Phi}|_u \theta_{\Psi}(u),$$

para todo o par de cartas $\Phi: X \rightarrow K$, $\Psi: Y \rightarrow L$, tais que $K \subset L$.

Nestas condições, como vimos em 6 c), as funções θ_Φ são as densidades, nas diferentes cartas Φ , duma *medida* θ diferenciável em V e com valores em E , a qual se diz a *indicatriz* de Θ .

Fixando, para cada índice j , uma carta $\Phi_j: X_j \rightarrow K_j$, de (15. 1) e (15. 2) resulta que a *correspondência* $\theta \rightarrow \Theta$ é determinada pela seguinte fórmula:

$$(15. 1') \dots \quad \Theta(T) = \sum_j \int_{X_j} T[\Phi_j(x)] \alpha_j[\Phi_j(x)] \theta_{\Phi_j}[\Phi_j(x)] dx.$$

Observemos que, se T é uma função $f \in C(V)$, a série que figura no segundo membro de (15. 1') é o integral de f em relação a θ , como definimos em 6 c).

Torna-se então natural definir o integral duma distribuição $T \in \tilde{C}(V)$ em relação a uma medida diferenciável θ sobre V com valores em E , o qual se representará por $\int_V T d\theta$ ou $\int_V T(v) d\theta(v)$, como sendo a soma daquela série, desde que tal soma exista e seja independente da cobertura $\{K_j\}$ e da partição da unidade α_j consideradas.

Tem-se assim

$$(15. 1'') \dots \quad \Theta(T) = \int_V T d\theta.$$

A correspondência $z: \Theta \rightarrow \theta$ assim definida é, como facilmente se verifica, um isomorfismo vectorial do espaço $L[\tilde{C}(V); E]$, das aplicações lineares contínuas de $\tilde{C}(V)$ em E , sobre um sub-espaço do espaço $\mathfrak{M}^\infty(V, E)$, das medidas diferenciáveis sobre V com valores em E .

A relação (15. 6) dá-nos explicitamente Θ em função de θ , ou seja o isomorfismo inverso z^{-1} ; vamos ver agora como se determina explicitamente z .

Para isso, consideremos a aplicação idêntica $I: \tilde{C}(V) \rightarrow \tilde{C}(V)$ e seja $\delta = z(I)$ a indicatriz de I ; δ é então uma medida diferenciável sobre V com valores em $C(V)$, tal que

$$(15. 5) \dots \quad T = \int_V T d\delta, \quad \forall T \in \tilde{C}(V).$$

Daqui se deduz facilmente que se tem

$$(15. 6) \dots \quad \theta = \Theta \circ \delta$$

ou ainda, sendo K um segmento compacto qualquer de V e Φ uma carta de K ,

$$(15.6') \dots \quad \theta_{\Phi}(u) = \Theta[\delta(\Phi, u)]$$

em que $\Theta_{\Phi}(u)$ e $\delta(\Phi, u)$ designam as densidades de Θ e δ relativas à carta Φ ; a $\delta(\Phi, u)$ chamaremos *distribuição de Dirac sobre V relativa à carta Φ e ao ponto u* .

Vejamus que, sendo L um segmento compacto de V , se tem

$$(15.7) \dots \quad \begin{cases} \int_L [\delta(\Phi, u)] = \delta_K(\Phi, u), & \text{se } L = K \\ \int_L [\delta(\Phi, u)] = 0 & \text{se } u \notin L \end{cases}$$

Estas relações determinam então $\delta(\Phi, u)$, como sendo a distribuição de suporte no ponto u , que coincide em K com $\delta_K(\Phi, u)$.

Basta demonstrá-las para os pontos $u \in \overset{\circ}{K}$, pois que cada um dos membros é função contínua de u . Para isso, notemos que a toda a função $\alpha \in \mathcal{D}(K)$ corresponde uma aplicação linear contínua $\rho_{LK\alpha} : \tilde{C}(K) \rightarrow \tilde{C}(L)$, tal que $\rho_{KL\alpha}(T/K) = \rho_L(\alpha T)$, cuja indicatriz é $\alpha(u) \rho_L[\delta(\Phi, u)]$. Então, se $K=L$, a indicatriz de $\rho_{LK\alpha}$ é $\alpha(u) \delta_K(\Phi, u)$ o que demonstra a primeira das relações (15.9). Se $u \notin L$, pode-se tomar α de modo que seja $\alpha(u) \neq 0$ e $\alpha=0$ em L , então $\rho_{LK\alpha}$ é nula, e o mesmo acontece com $\rho_L[\delta(\Phi, u)]$.

A análise que fizemos até aqui permite enunciar o seguinte Teorema:

TEOREMA 15.2. *Seja E um espaço localmente convexo, separado e completo em relação às sucessões. Existe um isomorfismo $\alpha : \Theta \rightarrow \theta$ do espaço $L[\tilde{C}(V); E]$, das aplicações lineares contínuas de $\tilde{C}(V)$ em E , sobre um sub-espaço do espaço $\mathfrak{M}^{\infty}(V; E)$, das medidas diferenciáveis sobre V , com valores em E . Este isomorfismo e o seu recíproco são determinados pelas fórmulas:*

$$(15.8) \dots \quad \begin{cases} \Theta(T) = \int_V T d\theta, & \forall T \in C(V) \\ \theta_{\Phi}(u) = \Theta[\delta(\Phi, u)] \end{cases}$$

Põe-se agora o problema de determinar as medidas $\theta \in \mathfrak{M}^{\infty}(V, E)$ que são indicatrizes de aplicações lineares contínuas. Se V é uma variedade compacta, qualquer medida

diferenciável $\theta \in \mathfrak{M}^\infty(V, E)$ é indicatriz de uma aplicação linear contínua, como veremos adiante. No caso geral, só se conhece uma solução satisfatória do problema mediante certas hipóteses suplementares sobre E .

O caso que vamos analisar aqui é aquele em que E é sub-normável, 2d). O problema fica automaticamente resolvido, também, se E é dado como limite projectivo de espaços sub-normáveis, o que é largamente suficiente nas aplicações correntes.

Comecemos por estabelecer o seguinte Lema:

LEMA 15. 3. *Toda a medida diferenciável θ sobre V com valores em E , de suporte compacto, é indicatriz de uma aplicação linear contínua $\Theta: \tilde{C}(V) \rightarrow E$.*

Recordemos que o suporte duma medida θ é o complementar do maior aberto Ω tal que $\theta(A) = 0$, para todo o boreliano $A \subset \Omega$. Se θ é diferenciável o suporte de θ é a reunião dos suportes das funções θ_ϕ .

Consideremos uma infinidade numerável de segmentos compactos K_j cujos interiores K_j formem uma cobertura de V , e uma partição da unidade localmente finita $\{\alpha_j\}$ associada a esta cobertura.

Ponhamos

$$\Theta(T) = \sum_j \int_V \alpha_j T d\theta.$$

Como só há um número finito de índices j para os quais α_j não se anula no suporte de θ , o segundo membro da relação anterior reduz-se a uma soma com um número finito de parcelas.

Por outro lado, para cada índice j , $\Theta_j: T \rightarrow \int_V \alpha_j T d\theta$ é uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(V)$ em E .

Com efeito, tomando uma carta $\Phi_j: X_j \rightarrow K_j$, tem-se

$$\Theta_j(T) = \int_{X_j} T[\Phi_j(x)] \alpha_j[\Phi_j(x)] \theta_\phi[\Phi_j(x)] dx,$$

mas $\alpha_j \theta_\phi$ é indicatriz duma aplicação linear contínua $\Theta'_j: \tilde{C}(K_j)$ em E , e a relação anterior mostra que $\Theta_j = \Theta'_j \circ \rho_{K_j}$.

Assim Θ é soma dum número finito de aplicações lineares contínuas Θ_j , e é portanto uma aplicação linear contínua. Como

a indicatriz de cada aplicação Θ_j é evidentemente $\alpha_j \theta$, a indicatriz de Θ será então $\sum_j \alpha_j \theta = \theta$.

Do Lema anterior resulta então como já tínhamos afirmado:

TEOREMA 15. 4. *Se V é compacta, a correspondência $\alpha: \Theta \rightarrow \theta$ definida pelas fórmulas (15. 8) é um isomorfismo vectorial de $\mathcal{L}[\tilde{C}(V); E]$ sobre $\mathfrak{M}^\infty(V; E)$.*

Analisemos agora o caso em que E é sub-normável.

LEMA 15. 5. *Se E é sub-normável, para toda a aplicação linear contínua $\Theta: \tilde{C}(V) \rightarrow E$, existe um compacto Δ de V tal que $\Theta(T) = 0$, para toda a distribuição T cujo suporte não encontre Δ .*

Como E é sub-normável, existe uma norma contínua em E . Designemos por B a bola relativa a esta norma.

Os sub-conjuntos de $\tilde{C}(V)$ da forma

$$\bigcap_{i=1}^m \varphi_{K_i}^{-1}(\mathfrak{A}_i)$$

em que K_1, \dots, K_m , é um sistema finito de segmentos de V , e para cada índice $i=1, 2, \dots, m$, \mathfrak{A}_i é uma vizinhança de zero em $\tilde{C}(K_i)$, constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero para $\tilde{C}(V)$. Como Θ é contínua, existe pelo menos uma destas vizinhanças, cuja imagem por Θ está contida em B ,

$$\Theta \left(\bigcap_{i=1}^m \varphi_{K_i}^{-j}(\mathfrak{A}_i) \right) \subset B.$$

Ora, para cada segmento compacto K_i , o conjunto das distribuições sobre V tais que $\varphi_{K_i}(T) = 0$, ou seja $\varphi_{K_i}^{-1}(\{0\})$, é um sub-espço vectorial de $\tilde{C}(V)$, e a intersecção destes sub-espços é um sub-espço \mathfrak{H} de $\tilde{C}(V)$, tal que $\Theta(\mathfrak{H}) \subset B$.

Como $\Theta(\mathfrak{H})$ é um sub-espço de E , segue-se que $\Theta(\mathfrak{H}) = \{0\}$, pois o único sub-espço que pode estar contido numa bola é o sub-espço nulo.

Ponhamos $\Delta = \bigcup_{i=1}^m K_i$, Δ é então um compacto de V , e como toda a distribuição T , cujo suporte não encontra Δ , pertence a \mathfrak{H} , tem-se $\Theta(T) = 0$.

Deste Lema resulta imediatamente que a indicatriz duma aplicação linear contínua de $C(V)$ num espaço sub-normável é de suporte compacto.

Com efeito, como $\partial(\Phi, u)$ tem suporte reduzido ao ponto u , $\theta_\Phi(u) = \Theta[\partial(\Phi, u)]$ é nula se $u \notin \Delta$.

Tem-se assim o seguinte Teorema:

TEOREMA 15. 6. *Se E é sub-normável, a correspondência $\alpha: \Theta \leftrightarrow \theta$, definida pelas fórmulas (15. 8), é um isomorfismo vectorial de $\mathcal{L}[\tilde{C}(V); E]$ sobre o sub-espaço $\mathcal{D}^*(V; E)$ de $\mathfrak{M}^\infty(V; E)$ constituído pelas medidas de suporte compacto.*

Um caso particular do Teorema anterior é aquele em que E se reduz à recta complexa C . Neste caso, as fórmulas (15. 8) definem um isomorfismo vectorial $\alpha: \theta \leftrightarrow \Theta$ de $\mathcal{D}^*(V) = \mathcal{D}^*(V; C)$ sobre o dual de $\tilde{C}(V)$, o que permite *identificar* estes dois espaços.

Assim, toda a medida $\theta \in \mathcal{D}^*(V)$ pode ser interpretada como uma forma linear contínua sobre $\tilde{C}(V)$:

$$(15. 9) \dots \quad \langle \theta, T \rangle = \int_V T d\theta.$$

Como $\tilde{C}(V)$ é reflexivo, Teor. 13. 7, $\tilde{C}(V)$ é também o dual forte de $\mathcal{D}^*(V)$ quando se considera sobre este espaço a *topologia forte* τ_b , ou seja, a topologia da convergência uniforme nas partes limitadas de $\tilde{C}(V)$.

Nestas condições, toda a distribuição $T \in \tilde{C}(V)$ pode também ser interpretada como uma forma linear contínua sobre $\mathcal{D}^*(V) (\tau_b)$:

$$(15. 10) \dots \quad \langle T, \theta \rangle = \int_V T d\theta.$$

OBSERVAÇÕES :

1. O integral $\int_V T d\theta$, como foi definido anteriormente, verifica propriedades análogas às dos integrais usuais. Em particular, é válida a seguinte regra de mudança de variável que generaliza (6. 2): se μ é um isomorfismo de V sobre outra variedade W tem-se

$$(15. 11) \quad \int_W T d\theta = \int_V \mu^*(T) d\mu^*\theta, \quad \forall T \in \tilde{C}(W),$$

sempre que um destes integrais exista.

A demonstração é imediata a partir da definição e da Prop. 5. 6.

2. Uma consequência do Teor. 15. 6 é que $\mathfrak{D}(V)$ é denso em $\tilde{C}(V)$. Por outras palavras, toda a distribuição $T \in \tilde{C}(V)$ é limite duma sucessão de funções indefinidamente diferenciáveis e de suporte compacto.

Na verdade toda a forma linear contínua sobre $C(V)$ que se anula em $\mathfrak{D}(V)$ é nula em todo o espaço $\tilde{C}(V)$, pois que

$$\int_V \varphi d\theta = 0, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(V), \text{ arrasta } \theta = 0.$$

Este resultado pode obter-se também directamente a partir do facto já conhecido de que, para todo o segmento compacto K , $C^\infty(K)$ é denso em $\tilde{C}(K)$.

3. A análise do número 14 pode também ser feita usando a noção de medida. Da Prop. 14. 1 resulta então que existe um isomorfismo $\Theta \rightarrow \theta$ do espaço $\mathfrak{L}[\tilde{C}(K); E]$ sobre o sub-espaço $\mathfrak{D}^*(K; E)$ de $\mathfrak{D}^*(V; E)$, constituído pelas medidas de suporte contido em K , o qual é definido pelas fórmulas

$$\Theta(T) = \int_K T d\theta \quad \theta_\Phi(u) = \Theta[\partial_K(\Phi; u)],$$

em que

$$\int_K T d\theta = \int_X T[\Phi(x)] \theta_\Phi[\Phi(x)] dx.$$

Em particular, o espaço $\mathfrak{D}^*(K) = \mathfrak{D}^*(K; C)$ é isomorfo ao dual de $\tilde{C}(K)$, e como este espaço é reflexivo, visto ser um espaço (LN^*) , $\tilde{C}(K)$ é também o dual de $\mathfrak{D}^*(K)$, quando se considera este espaço munido da topologia forte.

Como, para toda a carta $\Phi: X \rightarrow K$, a correspondência $\theta \rightarrow \theta_\Phi$ é um isomorfismo vectorial, vê-se imediatamente, cf. 2 c), que a topologia forte sobre $\mathfrak{D}^*(K)$ é definida pelas semi-normas

$$\|\theta\| = \sup_{x \in X} |D^n \theta_\Phi[\Phi(x)]|.$$

16. Topologia do dual de $\tilde{C}(V)$. Vamos agora explicitar a topologia forte τ_b do dual $\mathfrak{D}^*(V)$.

Seja Δ um compacto qualquer de V e seja K_1, \dots, K_m um sistema finito de segmentos compactos de V , tal que $\overset{\circ}{K}_1, \dots, \overset{\circ}{K}_m$ constitua uma cobertura de Δ . Para cada índice $j = 1, \dots, m$ fixemos uma carta $\Phi_j: X_j \rightarrow K_j$.

Tem-se então o seguinte Lema :

LEMA 16.1. *A topologia $\tau_{b,\Delta}$ induzida por $\mathcal{D}^*(V)[\tau_b]$ no sub-espaço $\mathcal{D}^*(\Delta)$, constituído pelas medidas de suporte contido em Δ , é definida pelas semi-normas :*

$$(16.1) \dots \quad p_{\Phi_j \Delta}^n(\theta) = \sup_{x \in \overset{\circ}{X}_j} |D^n \theta_{\Phi_j}(\Phi_j(x))|,$$

em que n percorre o conjunto de todos os sistemas finitos de inteiros não negativos (n_1, \dots, n_s) .

Designemos por τ a topologia definida pelas semi-normas (16.1), vamos ver que τ é mais fina que $\tau_{b,\Delta}$. Como τ é metrizável, bastará mostrar que toda a sucessão de medidas θ_k , que converge para zero segundo esta topologia, converge para zero segundo $\tau_{b,\Delta}$, ou seja, para todo o conjunto \mathfrak{H} limitado em $\tilde{C}(V)$, $\langle \theta_k, T \rangle$ tende para zero uniformemente sobre \mathfrak{H} .

Como \mathfrak{H} é limitado, para todo o índice j , existe um sistema n_j de inteiros ≥ 0 e um número real $l_j \geq 0$ tais que se tem, para toda a distribuição $T \in \mathfrak{H}$, $\Phi_j^*(T) = D^{n_j} f_j$, com $f_j \in C(X_j)$ e $\sup_{x \in \overset{\circ}{X}_j} |f_j(x)| < l_j$.

Tomemos uma partição da unidade α_j associada à cobertura $\{\overset{\circ}{K}_j\}$. Tem-se então, cf. 2. b), (2.13),

$$\langle \theta_k, T \rangle = \sum_j \int_{X_j} D^{n_j} f_j \theta_{\Phi_j} \alpha_j dx = \sum_j (-1)^{|\mathbf{n}_j|} \int_{X_j} f_j D^{n_j} \theta_{\Phi_j} \alpha_j dx.$$

Como, para todo o sistema n de inteiros ≥ 0 , $D^n \theta_{\Phi_j} \rightarrow 0$ uniformemente sobre X_j , da conhecida fórmula de LEIBNITZ, para a derivada dum produto, resulta imediatamente que também $D^{n_j} \theta_{\Phi_j} \alpha_j$ converge uniformemente para zero em X_j . Daí se deduz, por majoração do último membro da relação anterior, que $\sup_{T \in \mathfrak{H}} |\langle \theta_k, T \rangle| \rightarrow 0$.

Resta ver que $\tau_{b,\Delta}$ é também mais fina que τ , o que equivale a provar que toda a semi-norma $p_{\Phi_j \Delta}^n$ é contínua para a topologia $\tau_{b,\Delta}$.

Façamos corresponder a cada ponto $u \in \overset{\circ}{K}_j$ e cada sistema n de inteiros ≥ 0 a distribuição $\partial^{(n)}(\Phi_j, u)$ assim definida :

$$\begin{cases} \varrho_{K_j}[\partial^{(n)}(\Phi_j, u)] = \Phi_j^{*-1}[D^n \delta_{X_j}(\hat{x} - \Phi_j^{-1}(u))] \\ \varrho_L[\partial^{(n)}(\Phi_j, u)] = 0 \quad \text{se } u \notin L. \end{cases}$$

O conjunto \mathfrak{H} formado por estas distribuições é limitado em $\tilde{C}(V)$, e tem-se, por outro lado, como se reconhece facilmente:

$$\sup_{T \in \mathfrak{H}} |\langle \theta, T \rangle| = \sup_{x \in X_j} |D^n \theta_{\Phi_j}[\Phi_j(x)]| = \rho_{\Phi_j, \Delta}(\theta)$$

o que termina a demonstração.

COROLÁRIO. *Se K é um segmento compacto de V , a topologia $\tau_{b, K}$ induzida por τ_b em $\mathcal{D}^*(K)$ é idêntica à topologia forte de $\mathcal{D}^*(K)$ como dual de $\tilde{C}(K)$.*

Com efeito se $\Phi: X \rightarrow K$ é uma carta de K , tal topologia é definida pelas semi-normas $\sup_{x \in X} |D^n \theta_{\Phi}[\Phi(x)]|$, 15. Obs. 3.

LEMA 16. 2. *A topologia forte τ_b sobre $\mathcal{D}^*(V)$ é a mais fina das topologias localmente convexas sobre $\mathcal{D}^*(V)$ que induzem em cada sub-espaço $\mathcal{D}^*(\Delta)$ uma topologia idêntica a $\tau_{b, \Delta}$.*

Designemos por τ esta topologia. Bastará então mostrar que a toda a forma linear contínua φ sobre $\mathcal{D}^*(V)[\tau]$ corresponde uma distribuição $T \in \tilde{C}(V)$ tal que $\langle \varphi, \theta \rangle = \langle T, \theta \rangle$ (1).

Designemos por φ_K a restrição de φ a $\mathcal{D}^*(K)$; então, como $\tilde{C}(K)$ é o dual forte de $\mathcal{D}^*(K)$, do Corol. anterior resulta que existe uma distribuição $T_K \in \tilde{C}(K)$ tal que, $\langle \varphi_K, \theta \rangle = \langle T_K, \theta \rangle$.

Ora, é imediato que se $K' \subset K$, $T_{K'} = \varphi_{K'}(T_K)$. Assim, o sistema de distribuições $\{T_K\}$ define uma distribuição T nas condições requeridas.

Consideremos agora uma sucessão crescente de compactos $\Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_n \subset \dots$ cuja reunião seja V ; do Lema anterior resulta que $\mathcal{D}^*(V)[\tau_b]$ é o limite indutivo dos espaços $\mathcal{D}^*(\Delta_n)[\tau_{b, \Delta_n}]$.

Por outro lado, demonstra-se facilmente a partir do Lema 16. 1 que cada um dos espaços $\mathcal{D}^*(\Delta)$ é fechado em $\mathcal{D}^*(V)$, sendo então completo visto que $\mathcal{D}^*(V)$ é completo, por ser o dual forte dum espaço bornológico separado, cf. [6]. Os espaços $\mathcal{D}^*(\Delta)$ são então espaços (F) e portanto:

(1) A topologia forte sobre o dual E' dum espaço reflexivo E é a mais fina das topologias para as quais E é o dual de E' cf. [2].

TEOREMA 16.3. *O espaço $\mathcal{D}^*(V)[\tau_b]$ é um espaço (LF). Se $\Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_n \subset \dots$ é uma sucessão de compactos cuja reunião é V , os espaços $\mathcal{D}^*(\Delta_n)[\tau_{b, \Delta_n}]$ constituem uma sucessão definidora de $\mathcal{D}^*(V)[\tau_b]$.*

ESCÓLIO. Do Teorema anterior resulta que uma sucessão de medidas $\theta_n \in \mathcal{D}^*(V)$ tende para zero, segundo a topologia forte τ_b , se, e sòmente se, verificar as seguintes condições:

a) *As medidas θ_n têm os seus suportes contidos num compacto fixo de V .*

b) *Para todo o segmento compacto K de V e toda a carta $\Phi: X \rightarrow K$, $\theta_{n, \Phi}[\Phi(x)]$ e todas as suas derivadas convergem uniformemente para zero em X .*

Como $\mathcal{D}^*(V)$ é um espaço (L_c) , vê-se imediatamente que uma distribuição $T \in \tilde{C}(V)$ pode ser interpretada como uma forma linear sobre $\mathcal{D}^*(V)$ tal que $\langle T, \theta_n \rangle \rightarrow 0$, para toda a sucessão de medidas θ_n nas condições (a) e (b).

Ora, as medidas diferenciáveis sobre V podem-se interpretar, segundo as definições de G. RHAM, cf. [8], como formas exteriores de grau n e de espécie ímpar, de modo que as distribuições, como definimos, coincidem com as correntes de G. RHAM de grau zero e espécie par, cf. [8], Pág. 39.

17. Análise linear em variedades com elemento de volume.

Chamaremos *elemento de volume* sobre uma variedade diferenciável V , toda a medida diferenciável σ real e positiva. No que se segue vamos supor que se fixou em V um elemento de volume σ .

A cada função diferenciável $\varphi: V \rightarrow E$ corresponde então uma e uma só medida φ^* diferenciável e com valores em E tal que

$$(17.1) \dots \quad \varphi^* = \varphi \cdot \sigma.$$

A correspondência $\varphi \leftrightarrow \varphi^*$ assim definida é um isomorfismo vectorial entre os espaços $C^\infty(V; E)$ e $\mathfrak{M}^\infty(V; E)$. A função φ e a correspondente medida φ^* dizem-se *adjuntas* uma da outra.

É imediato que o suporte duma função e o da medida adjunta são idênticos. Então, a correspondência $\varphi \rightarrow \varphi^*$ é também um isomorfismo vectorial de $\mathcal{D}(V; E)$ sobre $\mathcal{D}^*(V; E)$.

Sendo dadas uma distribuição $T \in \tilde{C}(V)$ e uma função $\varphi \in C^\infty(V; E)$, define-se o integral de T , a respeito de φ e do elemento de volume σ , por meio da fórmula:

$$(17.2) \dots \quad \int_V T_\varphi \cdot d\sigma = \int_V T d\varphi^*.$$

Consideremos uma aplicação linear contínua $\Theta: \tilde{C}(V) \rightarrow E$. Existe então uma e uma só função diferenciável $\theta \in C^\infty(V; E)$ cuja adjunta θ^* é a indicatriz de Θ . A função θ diz-se a *indicatriz* de Θ relativa ao elemento de volume σ , ou simplesmente indicatriz de Θ , se não houver possibilidade de confusão.

A primeira das fórmulas (15.8) pode agora escrever-se

$$(17.3) \dots \quad \Theta(T) = \int_V T \theta d\varphi.$$

Por outro lado, para toda a carta Φ dum segmento compacto K de V e todo o ponto $u \in K$, tem-se, como é fácil verificar,

$$\theta(u) = \frac{1}{\sigma_\Phi(u)} \cdot \theta_\Phi^*(u),$$

donde vem, tendo em conta a segunda das relações (15.8),

$$(17.4) \dots \quad \theta(u) = \Theta \left[\frac{1}{\sigma_\Phi(u)} \cdot \delta(\Phi, u) \right].$$

Para todo o ponto $u \in V$, $\frac{1}{\sigma_\Phi(u)} \delta(\Phi, u)$ é então uma distribuição sobre V , independente da carta Φ que se considera. Chamar-lhe-emos *distribuição de Dirac* sobre V no ponto u , relativa ao elemento de volume σ , e representá-la-emos por $\delta_\sigma(\hat{v}, u)$, ou simplesmente por $\delta(\hat{v}, u)$, se não houver possibilidade de confusão.

Tem-se assim

$$(17.5) \dots \quad \delta(\hat{v}, u) = \frac{1}{\sigma_\Phi(u)} \delta(\Phi, u).$$

Os resultados do número 15 podem então ser enunciados da seguinte maneira:

TEOREMA 17.1. *Seja V uma variedade diferenciável munida dum elemento de volume σ . Existe então um isomorfismo vectorial $z: \Theta \rightarrow \theta$ de $\mathfrak{L}[\tilde{C}(V), E]$ sobre um sub-espaço de $C^\infty(V; E)$, o qual coincide com $C^\infty(V, E)$ se V é compacta, e com $\mathfrak{D}(V; E)$ se E é*

sub-normável. Este isomorfismo e o seu recíproco são definidos pelas fórmulas

$$(17.6) \dots \begin{cases} \theta(u) = \Theta[\hat{\gamma}(\hat{v}, u)], & \forall u \in V \\ \Theta(T) = \int_V T(u) \theta(u) d\sigma(u), & \forall T \in \tilde{C}(V). \end{cases}$$

Se E é a recta complexa C , tem-se em particular:

COROLÁRIO. As fórmulas (17.6) definem uma correspondência bi-unívoca (isomorfismo vectorial) $\alpha: \Theta \leftrightarrow \theta$ entre as formas lineares contínuas Θ sobre $\tilde{C}(V)$ e as funções $\theta \in \mathcal{D}(V)$.

Nestas condições, pode-se identificar $\mathcal{D}(V)$ com o dual de $\tilde{C}(V)$, e supondo $\mathcal{D}(V)$ com a topologia forte, $\tilde{C}(V)$ é também o dual forte de $\mathcal{D}(V)$.

Por outro lado, fazendo corresponder a cada medida $\theta \in \mathcal{D}^*(V)$ a medida adjunta $\theta^* \in \mathcal{D}(V)$, obtém-se, como vimos, um isomorfismo vectorial de $\mathcal{D}(V)$ sobre $\mathcal{D}^*(V)$ o qual aplica, para cada compacto Δ de V , $\mathcal{D}(\Delta)$ sobre $\mathcal{D}^*(\Delta)$. Ora, é imediato que a topologia forte τ_b sobre $\mathcal{D}(V)$, é idêntica à imagem por este isomorfismo da topologia forte sobre $\mathcal{D}^*(V)$, estudada no número 16.

Por outro lado, demonstra-se facilmente que as semi-normas sobre $\mathcal{D}(\Delta)$, $\sup_{x \in X} |D^n \theta[\Phi_j(x)] \sigma[\Phi_j(x)]|$, que correspondem, por meio deste isomorfismo, às semi-normas (16.1), formam um sistema equivalente ao das semi-normas

$$(17.7) \quad \sup_{x \in X_j} |D^n \theta[\Phi_j(x)]|, \quad \theta \in \mathcal{D}(\Delta).$$

Os resultados do número 16 subsistem portanto substituindo $\mathcal{D}^*(V)$ por $\mathcal{D}(V)$ e as semi-normas (16.1) pelas semi-normas (17.7).

Em particular, uma distribuição T sobre V pode ser definida como uma forma linear contínua sobre $\mathcal{D}(V)$, nos mesmos termos que L. SCHWARTZ define em [11].

Assim, quando se fixa em V um elemento de volume, o conceito de distribuição que definimos aqui identifica-se canonicamente com o de L. SCHWARTZ.

Como em qualquer variedade diferenciável existe sempre uma infinidade de elementos de volume⁽¹⁾, existe também uma

(1) Resulta dum teorema devido a WITHNEY segundo o qual toda a variedade diferenciável com dimensão n é sempre uma sub-variedade de R^{2n+1} .

infinitude de maneiras de identificar os dois conceitos de distribuição, porém se não existir um elemento de volume privilegiado qualquer destas identificações não é canónica, é arbitrária.

18. Propriedades da distribuição de Dirac. A distribuição de Dirac sobre uma variedade diferenciável V , munida dum elemento de volume, definida no número anterior, verifica propriedades semelhantes às que já se conhecem para o caso de R^n e que vamos agora estabelecer.

Da própria definição resulta que $\delta(\hat{v}, u)$ tem suporte pontual $\{u\}$. Por outro lado, a função vectorial $u \rightarrow \delta(\hat{v}, u)$ é a indicatriz da aplicação idêntica de $\tilde{C}(V)$ e da primeira das fórmulas (17.6) deduz-se

$$(18.1) \dots \quad T(\hat{v}) = \int_V T(u) \delta(\hat{v}, u) d\sigma(u), \quad \forall T \in \tilde{C}(V),$$

o que constitui a *fórmula de Dirac* para as distribuições sobre V , a qual, como se vê, é formalmente idêntica à fórmula de Dirac para as distribuições definidas em R^n , cf. [15].

Da segunda fórmula (15.8) resulta

$$(18.2) \dots \quad \theta(u) = \int_V \delta(\hat{v}, u) \theta(v) d\sigma(v), \quad \forall \theta \in \mathfrak{D}(V; E),$$

relação esta que se designa por *segunda* fórmula de Dirac.

No caso particular em que $E = C$, tem-se

$$(18.2') \dots \quad \theta(u) = \langle \theta, \delta(\hat{v}, u) \rangle, \quad \forall \theta \in \mathfrak{D}(V);$$

esta relação, que define $\delta(v, u)$ como forma linear contínua sobre $\mathfrak{D}(V)$, é a que se usa habitualmente na Teoria Funcional de L. SCHWARTZ, para definir a distribuição de Dirac.

No número 12, vimos que, para toda a função $\varphi \in C^\infty(V)$, a multiplicação $M_\varphi: T \rightarrow \varphi T$ é a única aplicação linear contínua de $\tilde{C}(V)$ em si próprio que prolonga a multiplicação $f \rightarrow \varphi f$, $f \in C(V)$. Pode-se então determinar a indicatriz de M_φ por um método análogo ao utilizado em 2c).

Tem-se com efeito, pela fórmula de Dirac (18.1),

$$M_\varphi(f) = \int_V \varphi(u) f(u) \delta(\hat{v}, u) d\sigma(u) = \int_V f(u) \cdot \varphi(u) \delta(\hat{v}, u) d\sigma(u),$$

o que mostra que a indicatriz de M_φ é a função $\varphi(u) \delta(v, u)$. Daqui se deduz a fórmula de Dirac, para a multiplicação,

$$(18.3) \dots \varphi(\hat{v}) \delta(\hat{v}, u) = \varphi(u) \cdot \delta(\hat{v}, u), \quad \varphi \in C^\infty(V).$$

Consideremos agora duas variedades diferenciáveis V e W , com a mesma dimensão, e seja μ um homeomorfismo regular de V sobre W .

Como vimos no número 11, a aplicação $f \rightarrow f \circ \mu$ de $C(V)$ em $C(W)$ é prolongável numa única aplicação linear contínua $\mu^*: T \rightarrow T \circ \mu$ de $\tilde{C}(W)$ sobre $\tilde{C}(V)$. Um processo análogo ao utilizado em 4 permite então determinar, como vamos ver, a indicatriz de μ^* .

Tem-se com efeito, designando por σ_V o elemento de volume de V ,

$$\mu^*(f) = \int_V f \circ \mu(u) \delta(\hat{v}, u) d\sigma_V(u), \quad \forall f \in C(W),$$

e efectuando neste integral a mudança de variável $z = \mu(u)$ obtém-se, de acordo com (6 2),

$$\mu^*(f)(v) = \int_W f(z) \delta(\hat{v}, \mu^{-1}(z)) d\mu^{-1*} \sigma_V(z).$$

Ora, sendo σ_W o elemento de volume de W , tem-se, pondo

$$(18.4) \dots \Delta_{\mu^{-1}} = \frac{\mu^{-1*}(\sigma_V)}{\sigma_W},$$

$$\mu^*(f)(v) = \int_W f(z) \Delta_{\mu^{-1}}(z) \delta(\hat{v}, \mu^{-1}(z)) d\sigma_W(z),$$

donde se deduz que a indicatriz de μ^* é a função

$$\theta(z) = \Delta_{\mu^{-1}}(z) \delta(\hat{v}, \mu^{-1}(z)).$$

Como $\theta(z)$ representa em cada ponto $z \in W$ a imagem por μ^* da distribuição de Dirac sobre W , $\delta(\hat{w}, z)$, tem-se

$$(18.5) \dots \mu^*[\delta(\hat{w}, z)] = \Delta_{\mu^{-1}}(z) \cdot \delta[\hat{v}, \mu^{-1}(z)].$$

A relação (18 5) constitui uma generalização da fórmula de transformação (4 4); $\Delta_{\mu^{-1}}(z)$, que chamaremos *módulo* de μ^{-1} no ponto z , coincide, como se vê, com o módulo do Jacobiano de μ^{-1} , quando V e W são domínios de \mathbb{R}^n .

19. Algumas propriedades das distribuições sobre um grupo de Lie. Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável, com uma dada dimensão n , munida duma estrutura de grupo, tal que a aplicação $(x, y) \rightarrow xy$ de $G \times G$ em G é diferenciável. A aplicação $x \rightarrow x^{-1}$, assim como as translações esquerda e direita, $\bar{c}_a: x \rightarrow ax$, $r_a: x \rightarrow xa$, são diferenciáveis, sendo portanto automorfismos de G , cf. [3], [4], [7].

A translação esquerda $\bar{c}_{a^{-1}}$ induz então um isomorfismo $\bar{c}_{a^{-1}}^*$ de $\hat{C}(G)$ sobre $\hat{C}(G)$; a imagem $T \circ \bar{c}_{a^{-1}}^*$ duma distribuição $T \in \hat{C}(G)$ por este isomorfismo diz-se a *transladada* de T por a (ou para o ponto a) à esquerda, e designa-se por $T(a^{-1}\hat{x})$. De modo análogo se define a transladada à direita $T(\hat{x}a^{-1})$.

Um campo de vectores $u \in \mathfrak{X}^\infty(G)$ diz-se *invariante à esquerda* se $\bar{c}_{a^*}(u) = u$, $\forall a \in G$, ou seja, cf. 6 d),

$$(19.2) \dots \quad D_u(f \circ \bar{c}_a) = (D_u f) \circ \bar{c}_a, \quad \forall f \in C^\infty(G), \quad \forall a \in G.$$

Dáí se deduz também que se tem, para toda a distribuição T sobre G e todo o ponto $u \in G$, (1)

$$(19.2') \dots \quad D_u(T \circ \bar{c}_{a^{-1}}) = (D_u T) \circ \bar{c}_{a^{-1}}.$$

Os campos invariantes à esquerda constituem um sub-espço vectorial de $\mathfrak{X}^\infty(G)$ que se designará por \mathfrak{g}_e . De (19.2) deduz-se facilmente que a cada vector u_e tangente a G na origem e (elemento neutro de G) corresponde um e um só campo $u \in \mathfrak{g}_e$ tal que $u(e) = u_e$; esta correspondência é um isomorfismo de \mathfrak{X}_e sobre \mathfrak{g}_e que é assim de dimensão finita n , igual à de G .

De modo análogo se define campo invariante à direita; o conjunto destes campos é também um espaço vectorial de dimensão igual à de G , que se designará por \mathfrak{g}_d .

Vê-se imediatamente que qualquer base de \mathfrak{g}_s ou \mathfrak{g}_d é também uma base do módulo $\mathfrak{X}^\infty(G)$, que é então de dimensão finita igual à de G .

Se u_1, \dots, u_n é uma base de \mathfrak{g}_s põe-se, como em 2 b), para todo o sistema $p = (p_1 \dots p_n)$ de inteiros ≥ 0 , $D_u^p = D_{u_1}^{p_1} \dots D_{u_n}^{p_n}$. Os operadores de derivação assim definidos são invariantes à esquerda, isto é, tem-se $D_u^p(T \circ \bar{c}_{a^{-1}}) = (D_u^p T) \circ \bar{c}_{a^{-1}}$. Análogamente, para uma base qualquer de $\mathfrak{X}^\infty(G)$.

(1) Designaremos aqui por $D_u T$ a derivada duma distribuição em vez de $\hat{D}_u T$.

Se K é um segmento compacto de G fazem-se convenções análogas. Um campo $\in \mathfrak{T}^\infty(K)$ diz-se invariante à esquerda (*respect.* à direita) se é a restrição a K dum campo $\mathbf{u} \in \mathfrak{g}_s$ (*respect.* $\mathbf{u} \in \mathfrak{g}_d$). Os operadores de derivação D_x , associados a uma carta $\Phi: X \rightarrow K$, cf. 6 *d*), não são em geral invariantes à esquerda nem à direita, mas exprimem-se como combinações lineares finitas de tais operadores ⁽¹⁾, $D_x = \sum_j a_j^i(x) D_{\mathbf{u}_j}$, com coeficientes $a_j^i(x)$ indefinidamente diferenciáveis em K .

Como se sabe, toda a distribuição $T \in \tilde{C}(K)$ é da forma $T = D_x^m f$, em que m é um sistema de inteiros ≥ 0 . Deduz-se então, por considerações elementares, que, dado um sistema qualquer de n campos, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$, formando uma base de $\mathfrak{T}^\infty(K)$, T exprime-se também com a forma $T = D_w^p F$ em que F é uma função contínua em K , a qual pode ser escolhida de modo a possuir derivadas até uma ordem previamente dada.

Em particular $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ pode ser uma base de \mathfrak{g}_s ou \mathfrak{g}_d . Assim, toda a distribuição $T \in \tilde{C}(K)$ se pode também exprimir como derivada dum função contínua, por meio de operadores de derivação invariantes à esquerda ou à direita.

Demonstra-se que a todo o campo $\mathbf{u} \in \mathfrak{g}_s$ corresponde um e um só homomorfismo do grupo aditivo R em G , que se designa por $t \rightarrow \exp t\mathbf{u}$, nas seguintes condições, cf. [3], [7]: (a) a aplicação $(x, t) \rightarrow x \exp t\mathbf{u}$ de $G \times R$ em G é diferenciável; (b) para toda a função $f \in C^\infty(G)$ e todo o ponto $x \in G$, tem-se

$$(19.3) \dots \quad D_{\mathbf{u}} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x \exp t\mathbf{u}) - f(x)}{t}$$

A noção de derivada retoma então um aspecto análogo ao de R^n . Se f é uma função, não necessariamente diferenciável, define-se ainda $D_{\mathbf{u}} f$ por meio da relação anterior.

Demonstra-se que uma função f definida em G , com valores num espaço localmente convexo E , é diferenciável se, e só se, existirem as derivadas de todas as ordens relativas a uma base de \mathfrak{g}_s .

Têm-se resultados análogos para os campos invariantes à direita.

(1) Para abreviar, e desde que não haja possibilidade de confusão, designaremos pela mesma notação a derivada segundo um campo de vectores sobre G e derivada segundo restrição dum tal campo a um segmento de G .

Pode-se agora estabelecer um critério de derivabilidade para uma função $T(y)$ definida em G com valores no espaço das distribuições sobre um segmento compacto K de G , análogo ao que estabelecemos em 2. b).

Fixemos uma base w_1, w_2, \dots, w_n de $\mathfrak{T}^\infty(K)$ e uma base u_1, \dots, u_n de \mathfrak{g}_s :

PROPOSIÇÃO 19. 1. *Se, para todo o ponto de G , existe uma vizinhança compacta Δ deste ponto e um sistema de inteiros $p = (p_1, \dots, p_n)$ tais que, para todo o $y \in \Delta$, $T(y) = D_w^p f(x, y)$, em que $f \in C(K \times \Delta)$ e possui, como função de y , derivada $D_{u_i} f \in C(K \times \Delta)$, então $T(y)$ é continuamente derivável em relação ao campo u_i e tem-se*

$$(19. 4) \quad \dots \quad D_{u_i} T(y) = D_w^p [D_{u_i} f(x, y)].$$

E análogamente para as derivadas de qualquer ordem $D_u^p T(y)$.

A demonstração é imediata tendo em conta a relação (19. 3) e o facto dos operadores de derivação D_w^p serem contínuos.

Uma função $T(y)$, com valores em $\tilde{C}(G)$, será derivável em relação a um campo u_i , se para todo o segmento compacto K , $(\hat{\varphi}_K T)(y)$ é derivável em relação a u_i .

Deduz-se daqui em particular que:

PROPOSIÇÃO 19. 2. *Para toda a distribuição $T \in \tilde{C}(G)$, a função $u \rightarrow T(u^{-1} \hat{x})$ é diferenciável em G .*

Basta ver que assim é para a função $u \rightarrow \hat{\varphi}_K [T(u^{-1} \hat{x})]$ em que K é um segmento compacto qualquer de G . Tomando um segmento compacto L tal que $K \subset \overset{\circ}{L}$, pode-se escolher uma função $f \in C(L)$, com derivadas até uma dada ordem m em relação a uma base u_1, \dots, u_n de \mathfrak{g}_s , de modo que T seja da forma $D_u^p f$ em L e portanto em K . Por outro lado, se $y_0 \in G$ pode-se escolher uma vizinhança compacta Δ de y_0 tal que $\Delta^{-1} K \subset L$. Tem-se então, como se verifica facilmente, $\hat{\varphi}_K (T(y^{-1} x)) = D_u^p \hat{\varphi}_K [f(y^{-1} x)]$ e, enquanto x varia em K e y em Δ , $f(y^{-1} x)$ satisfaz as condições da Prop. 19. 1. Assim $\hat{\varphi}_K [T(u^{-1} \hat{x})]$ admite derivadas contínuas de qualquer ordem sendo portanto diferenciável em G .

Demonstra-se que em todo o grupo de LIE G existe sempre um elemento de volume σ invariante para as translações esquerdas, isto é, $\tau_{u^{-1}}^*(\sigma) = \sigma$, cf. [3], [4], o qual é definido a menos um factor constante. No que se segue, suporemos sempre fixado em G um tal elemento de volume.

Da fórmula de transformação da transformação de Dirac (18. 5) resulta imediatamente, tendo em conta a invariância do elemento de volume σ com as translações esquerdas:

$$\tau_{a^{-1}}^*[\delta(\hat{x}, u)] = \delta(\hat{x}, au);$$

e, em particular, pondo $\delta = \delta(\hat{x}, e)$

$$(19. 6) \dots \delta(\hat{x}, u) = \tau_{u^{-1}}^*(\delta) = \delta(u^{-1}\hat{x}).$$

Assim :

PROPOSIÇÃO 19. 3. *Num grupo de Lie G , a distribuição de Dirac em cada ponto $u \in G$ é a transladada à esquerda, para este ponto, da distribuição de Dirac na origem.*

20. Aplicações lineares contínuas permutáveis com as translações de G . Vamos começar por determinar as aplicações lineares contínuas de $\tilde{C}(G)$ em si próprio que permutam com as translações à esquerda.

Sendo Θ uma tal aplicação tem-se então, para toda a distribuição $T \in \tilde{C}(G)$ e todo o ponto $a \in G$,

$$(20. 1) \dots \Theta[\tau_{a^{-1}}^*(T)] = \tau_{a^{-1}}^*[\Theta(T)].$$

Daqui se deduz em particular, sendo θ a indicatriz de Θ ,

$$\theta(u) = \theta[\delta(u^{-1}\hat{x})] = \tau_{u^{-1}}^*[\Theta(\delta)]$$

ou ainda, pondo $S = \Theta(\delta)$,

$$(20. 2) \dots \theta(u) = S(u^{-1}x).$$

Tendo em conta a fórmula integral das aplicações lineares contínuas (17. 6), vem então:

$$(20. 3) \dots \Theta(T) = \int_G T(u)S(u^{-1}\hat{x})d\sigma(u).$$

Se T e S são funções contínuas em G , o integral que figura na relação anterior é o produto de convolução dessas

funções como é usualmente definido, cf. [17]. No caso geral, sempre que este integral exista, no sentido da definição dada em 15, chamaremos ao seu valor produto de convolução das distribuições T e S , e representá-lo-emos por $T * S$.

Vejamos que:

PROPOSIÇÃO 20.1. *Se $\Theta: \tilde{C}(G) \rightarrow \tilde{C}(G)$ é uma aplicação linear contínua que permuta com as translações à esquerda, $S = \Theta(\delta)$ é uma distribuição de suporte compacto.*

Como se sabe, para todo o segmento compacto K de G , $\tilde{C}(K)$ é sub-normável (1). Tendo em conta o Teor. 15.6, deduz-se então que $\rho_K[\tilde{c}_{u^{-1}}^*(S)]$ é de suporte compacto, isto é, existe um compacto Δ_K de V tal que $\rho_K[\tilde{c}_{u^{-1}}^*(S)] = 0, \forall u \notin \Delta_K$.

Então, como $S = \tilde{c}_u^*[\tilde{c}_{u^{-1}}^*(S)]$, S é nula em qualquer segmento $u \cdot K$ tal que $u \notin \Delta_K$, donde se deduz que o suporte de S está contido em $\Delta_K \cdot K$, que é um conjunto compacto de G .

Vê-se assim que toda a aplicação linear contínua $\Theta: \tilde{C}(G) \rightarrow \tilde{C}(G)$ que permuta com as translações à esquerda é a convolução à direita com uma distribuição fixa $S = \Theta(\delta)$ de suporte compacto.

Inversamente, consideremos uma distribuição $S \in \tilde{C}(G)$ de suporte compacto. Da Prop. 19.2 resulta que $u \rightarrow \tilde{c}_{u^{-1}}^*(S) = S(u^{-1}x)$ é uma função diferenciável em G . Por outro lado, se K é um segmento compacto de G vê-se imediatamente que a função $u \rightarrow \rho_K[\tilde{c}_{u^{-1}}^*(S)]$ é nula no exterior de $\Delta \cdot K$, sendo Δ o suporte de S . Assim, a cada segmento compacto K de G corresponde uma aplicação linear contínua $\Theta_K: \tilde{C}(G) \rightarrow \tilde{C}(K)$ cuja indicatriz é $\rho_K[\tilde{c}_{u^{-1}}^*(S)]$.

Se K, K' são dois segmentos compactos de G tais que $K' \subset K$, tem-se, como é fácil verificar $\Theta_{K'}(T) = \rho_{K K'}[\Theta_K(T)]$, donde se deduz que existe uma aplicação linear contínua $\Theta: \tilde{C}(G) \rightarrow \tilde{C}(G)$ cuja indicatriz é a função $u \rightarrow S(u^{-1}x)$.

Tal aplicação é dada pela fórmula (20.3), sendo então a convolução de T com S . Por outro lado, recorrendo à fórmula

(1) A demonstração desta propriedade deve-se a S. SILVA. Veja «Conceitos de Função Diferenciável em Espaços Localmente Convexos».

da mudança de variável no integral (15. 11), deduz-se imediatamente que Θ permuta com as translações à esquerda.

Tem-se assim o seguinte Teorema:

TEOREMA 20. 3 *Seja G um grupo de Lie. Existe uma correspondência bi-unívoca entre as aplicações lineares contínuas $\Theta: \tilde{C}(G) \rightarrow \tilde{C}(G)$ que permutam com as translações à esquerda $\tau_{a^{-1}}^*$ e as distribuições $S \in \tilde{C}(G)$ de suporte compacto, a qual é definida pelas seguintes fórmulas:*

$$(20. 4) \dots \quad \begin{cases} S = {}^{(1)}\hat{\delta} \\ \Theta(T) = T \cdot S, \quad \forall T \in \tilde{C}(G). \end{cases}$$

Vamos agora determinar as aplicações lineares contínuas de $\tilde{C}(G)$ em si próprio que permutam com as translações à direita.

Para isso, vamos estabelecer alguns resultados que permitirão reduzir este problema ao anterior.

Designemos por j o automorfismo de $G, x \rightarrow x^{-1}$, e ponhamos $\check{T} = T \circ j, \forall T \in \tilde{C}(G)$. O módulo de $j, \Delta = \Delta_j$, como definimos em 18, que se chama também função modular de G , cf. [17], verifica em cada ponto $u \in G$ a relação $\Delta^{-1}(u) = \Delta(u^{-1})$, tendo-se em particular $\Delta(e) = 1$.

Tem-se então, tendo em conta a relação (18. 5),

$$(20. 5) \dots \quad j^* [\hat{\delta}(u^{-1} \hat{x})] = \Delta(u) \hat{\delta}(u^{-1} \hat{x});$$

em particular

$$\check{\hat{\delta}} = \hat{\delta}.$$

Vejamos ainda que se tem

$$(20. 6) \dots \quad \int_G T(u) S(u^{-1} \hat{x}) d\tau(u) = \int_G \check{S}(v) T(\hat{x} v) d\sigma(v)$$

se uma das distribuições S, T é de suporte compacto.

A partir das relações anteriores e das fórmulas de Dirac (18. 1) e (18. 2) deduz-se imediatamente que (20. 6) se verifica, quando uma das distribuições T ou S é uma combinação linear finita de distribuições de Dirac $\hat{\delta}(\hat{x}, a_i) = \hat{\delta}(a_i^{-1} \hat{x})$, e prolonga-se, por continuidade, a qualquer par de distribuições T e S , nas condições indicadas, visto que toda a distribuição sobre G é limite duma sucessão de combinações lineares finitas de distribuições de Dirac, o que se demonstra do mesmo modo que em 15. Obs. 2.

Da relação (20. 6) resulta imediatamente

$$(20. 7) \dots \quad T \overset{\vee}{*} S = \overset{\vee}{S} * \overset{\vee}{T}.$$

Por outro lado, se Θ permuta com as translações à direita (*resp.* à esquerda), $\Theta' = j^* \Theta j^*$ permuta com as translações à esquerda (*resp.* à direita), o que decorre imediatamente da relação $j \circ \bar{c}_a = r_{a-1} \circ j$.

Ora, se Θ permuta com as translações à direita, $S' = \Theta'(\partial)$ é uma distribuição de suporte compacto tal que $\Theta'(T) = T * S$, donde se deduz, usando a relação (20. 7), e pondo $S = \overset{\vee}{S}'$

$$(20. 8) \dots \quad \begin{cases} \Theta(T) = S * T & \forall T \in \tilde{C}(G) \\ S = \Theta(\partial). \end{cases}$$

Inversamente, se S é uma distribuição de suporte compacto, $\overset{\vee}{S}$ é também de suporte compacto e corresponde-lhe pelo Teor. 20.3 uma e uma só aplicação linear contínua Θ' , permutável com as translações à esquerda. Então $\Theta = j^* \Theta' j^*$ permuta com as translações à direita, e de (20. 7) resulta que Θ verifica as relações (20. 8).

Pode-se então enunciar:

TEOREMA 20. 4. *Existe uma correspondência bi-unívoca $\Theta \leftrightarrow S$ entre as aplicações lineares contínuas Θ que permutam com as translações à direita e as distribuições de suporte compacto $S \in \tilde{C}(G)$, a qual é definida pelas fórmulas (20. 8).*

Vejam agora, de modo breve, algumas propriedades da convolução.

PROPOSIÇÃO 20. 5. *Toda a aplicação linear contínua que permuta com as translações à direita (*resp.* à esquerda) permuta com os operadores de derivação invariantes à esquerda (*resp.* à direita).*

A demonstração é imediata, tendo em conta a relação (20. 6) e a continuidade dos operadores de derivação.

Tem-se assim, sendo u_1, \dots, u_n uma base de \mathfrak{g}_s e v_1, \dots, v_n uma base de \mathfrak{g}_d ,

$$(20. 9) \dots \quad \begin{cases} D_u^\ell(T * S) = T * D_u^\ell S \\ D_v^\ell(T * S) = D_v^\ell T * S. \end{cases}$$

O produto de convolução é associativo no sentido de que se tem $(S * T) * R = S * (T * R)$, sempre que duas das distribuições S, T, R sejam de suporte compacto.

Bastará considerar o caso em que as duas primeiras distribuições S e T são de suporte compacto, os outros reduzem-se facilmente a este.

Nestas condições, designando por Θ_S e Θ_T as aplicações $R \rightarrow S * R$ e $R \rightarrow T * R$ respectivamente, $\Theta_S \circ \Theta_T$ é uma aplicação linear contínua de $\tilde{C}(G)$ em si próprio que permuta com as translações à direita. Do Teor. 20.4 resulta então que existe uma distribuição Z de suporte compacto tal que

$$\Theta_S[\Theta_T(\cdot)] = Z, \quad \Theta_S[\Theta_T(R)] = Z * R.$$

Da primeira destas relações deduz-se $Z = S * T$ e da segunda $S * (T * R) = (S * T) * R$.

Ao mesmo tempo fica provado também que o produto de duas distribuições de suporte compacto é uma distribuição de suporte compacto.

O produto de convolução não é comutativo, a não ser que o grupo G seja comutativo, o que se deduz imediatamente de (20.5).

Para terminar este breve estudo da convolução vejamos que:

PROPOSIÇÃO 20.7. *O produto de convolução $\varphi * T$ dum função diferenciável φ de suporte compacto por uma distribuição qualquer T é uma função diferenciável.*

Suponhamos em primeiro lugar que T é uma função $f \in C(V)$. Então $\varphi * f$ é uma função, e das relações (20.9) resulta que, para todo o operador de derivação D_v^l relativo a uma base v_1, \dots, v_n de \mathfrak{g}_d , se tem $D_v^l(\varphi * f) = D_v^l \varphi * f$, o que mostra que $\varphi * f$ admite derivadas de todas as ordens, sendo portanto diferenciável.

Se relativamente a uma base u_1, \dots, u_n de \mathfrak{g}_d , T é da forma $T = D_u^l f$, tem-se $\varphi * T = D_u^l(\varphi * f)$, e $\varphi * T$ é portanto diferenciável, visto que, como acabamos de ver, $\varphi * f$ também o é.

No caso geral, consideremos um sistema numerável de segmentos compactos K_j , tal que $\{\overset{\circ}{K}_j\}$ seja uma cobertura de G , e seja $\{\alpha_j\}$ uma partição da unidade localmente finita associada a esta cobertura.

Para cada índice j , $\alpha_j T$ tem suporte contido em K_j sendo portanto da forma $D_{u_j}^l f$, em que $f \in C(G)$. Assim, $\varphi * \alpha_j T$ é dife-

renciável, e o mesmo acontece portanto com $\varphi * T = \sum_j \varphi * \alpha_j T$, pois que esta soma é localmente finita.

De modo análogo se estabelece que, se $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ e $T \in \tilde{C}(V)$, $T * \varphi$ é diferenciável.

Notas finais.

1. O Teor. 4.2 pode-se generalizar para aplicações regulares não injectivas.

Suponhamos que X é aberto. A cada ponto $x \in X$ façamos corresponder uma vizinhança U_x de modo que a restrição μ_x de μ a U_x seja injectiva. Para toda a distribuição $T \in \tilde{C}(Y)$, as distribuições $\mu_x^*(T)$ definem uma distribuição $\mu(T)$ sobre X , o que se verifica facilmente pelo «princípio du Recollement des Morceaux». Aplicando o princípio enunciado em [15] pág. 155, Nota I, demonstra-se facilmente que μ é contínua.

Se X é um domínio compacto e Y é aberto a demonstração é análoga, devendo-se tomar em cada ponto x da fronteira de X uma vizinhança aberta U_x e uma aplicação regular μ_x de U_x em Y , que coincida com μ em $U_x \cap X$.

Suponhamos finalmente que X e Y são ambos compactos e consideremos um domínio aberto $Z \supset Y$. A aplicação $\mu_1: X \rightarrow Z$, tal que $\mu_1(x) = \mu(x)$, está nas condições do caso precedente e $\mu_1^*(T) = 0$, para toda a distribuição T que se anula em K . Então, como $\rho_{Z/Y}$ é um homomorfismo, existe uma aplicação μ^* tal que $\mu^* \circ \rho_{Z/Y} = \mu_1^*$ que é precisamente a aplicação procurada.

2. O processo utilizado no n.º 7, para definir as distribuições sobre um segmento, não se pode aplicar às variedades de classe C^p , $p < +\infty$. Com efeito, neste caso existem pares de cartas $\Phi: X \rightarrow K$, $\Psi: Y \rightarrow K$, para as quais, $h_{\Phi^{-1}\Psi}$ não é indefinidamente diferenciável e portanto não induz um isomorfismo vectorial topológico de $\tilde{C}(X)$ sobre $\tilde{C}(Y)$ nas condições do Teor. 5.3, condição essencial para que o problema 7.1 tenha solução.

No entanto pode-se demonstrar que $h_{\Phi^{-1}\Psi}$ induz um isomorfismo de $C_p(X)$ (espaço das distribuições de ordem p) sobre $C_p(Y)$, o que permite introduzir numa tal variedade, pelo mesmo processo que aqui utilizamos, distribuições até a ordem p .

RÉSUMÉ

L'objet principal de ce travail est la construction d'une Théorie Directe des Distributions sur une variété différentiable, c'est à dire sans dualité. On peut la considérer comme une généralisation de la Théorie Directe de M. SEBASTIÃO E SILVA aux variétés différentiables.

Dans l'Introduction, nous exposons le plan du travail et nous faisons remarquer que notre notion de distribution sur une variété différentiable ne s'identifie pas, en général, avec celle de M. SCHWARTZ, *puisque nous généralisons la notion de fonction continue tandis que M. SCHWARTZ généralise la notion de mesure*. Cependant, si dans la variété il existe un élément de volume privilégié les deux notions peuvent être identifiées par un isomorphisme canonique.

Nous rappelons ensuite, 2, quelques notions et résultats de la Théorie des Espaces Localement convexes et de la Théorie des Distributions sur R^n qui nous supposons essentielles pour une bonne compréhension de ce travail. Les autres notions préliminaires comme celles qui se rapportent aux variétés sont introduites seulement lorsqu'elles sont nécessaires.

Dans le § 1 nous étudions les changements de variables pour les distributions dans R^n d'après notre point de vue, [9].

Nous définissons le changement de variables comme un prolongement continu du changement de variables usuel pour les fonctions continues. D'une façon plus précise, nous établissons, Théorème 4. 1, que, *si X, Y sont deux domaines de R^n , chacun d'eux étant ouvert ou compact, on peut faire correspondre à toute application régulière $\mu : X \rightarrow Y$ une et une seule application linéaire continue de l'espace $\tilde{C}(Y)$ des distributions sur Y dans l'espace $\tilde{C}(X)$ des distributions sur X telle que l'on a $\mu^*(f) = f \circ \mu$, pour toute fonction continue f sur Y . En outre, si μ est un homéomorphisme, μ^* est un isomorphisme vectoriel topologique de $\tilde{C}(Y)$ sur $\tilde{C}(X)$.*

Les propriétés usuelles du changement de variables, en particulier la règle de dérivation des fonctions composées et la règle du changement de variables pour les intégrales multiples sont conservées.

On obtient aisément la formule suivante, pour la transformation de la distribution de DIRAC,

$$\mu^* [\delta_Y(\hat{y} - v)] = |J_{\mu^{-1}}(v)| \cdot \delta_X(\hat{x} - \mu^{-1}(v)),$$

qui joue un rôle décisif dans l'étude des applications linéaires continues, qui nous faisons au § III.

Dans le § II, 6-13, nous définissons les distributions sur une variété différentiable et nous établissons leurs propriétés essentielles.

Dans le sous-paragraphe 6 nous rappelons des notions sur les variétés différentiables qui seront utilisées dans la suite. Il convient de remarquer que nous appelons *segment ouvert* d'une variété différentiable V tout ouvert de V qui soit isomorphe (comme variété différentiable) à un domaine ouvert de \mathbb{R}^n et nous appelons *segment compact* tout domaine compact de V qui soit contenu dans un segment ouvert. Une carte de V sera toujours considérée comme un isomorphisme $\Phi: X \rightarrow K$ d'un domaine X de \mathbb{R}^n sur un segment ouvert ou compact K de V .

Nous faisons quelques rappels sur les notions d'espace tangent, champ de vecteurs différentiable et de mesure à valeurs scalaires ou à valeurs dans un espace localement convexe complet par rapport aux suites. Nous disons qu'une mesure θ est *différentiable* si elle est définie, dans chaque carte Φ , par une densité θ_Φ différentiable.

Dans le sous-paragraphe 7 nous définissons les distributions sur un segment compact ou ouvert K de V . L'espace $\tilde{C}(K)$ de ces distributions est défini par les conditions suivantes, (cf. Prob. 7. 1): (a) $\tilde{C}(K)$ contient $C(K)$ comme sous-espace vectoriel; (b) pour toute carte $\Phi: X \rightarrow K$, il existe un isomorphisme vectoriel topologique $\Phi^*: \tilde{C}(K) \rightarrow \tilde{C}(X)$ tel que l'on a $\Phi^*(f) = f \circ \Phi$, pour toute fonction $f \in C(K)$.

On démontre d'une façon presque triviale, que $\tilde{C}(K)$ existe et est univoquement déterminé, à un isomorphisme près, mais dans la démonstration intervient, d'une façon décisive, les résultats sur les changements de variables déjà signalés, et par conséquent le fait que V est différentiable (indéfiniment différentiable).

Pour une variété de classe C^p , $p < +\infty$, on peut définir par la même méthode les distributions d'ordre $\leq p$.

On voit que le principe conducteur qui règle la construction de $\tilde{C}(K)$ a été la conservation des propriétés du changement de

variables. Cette permanence est bien évidente dans l'énoncé du Théorème 8.1 :

Si K, L sont des segments de V , on peut faire correspondre à toute application régulière $\mu: K \rightarrow L$ une et une seule application linéaire continue $\mu^: \tilde{C}(L) \rightarrow \tilde{C}(K)$ telle que l'on a, pour toute fonction $f \in C(L)$, $\mu^*(f) = f \circ \mu$.*

On peut alors définir l'image $\mu^*(T) = T \circ \mu$ d'une distribution $T \in \tilde{C}(L)$. En particulier, si K' et K sont deux segments de V tels que $K' \subset K$, on définit la restriction $T|_{K'}$ d'une distribution $T \in \tilde{C}(K)$ à K' , comme l'image de T par l'inclusion $i: K' \rightarrow K$.

Le concept de restriction permet de définir les distributions sur un ouvert Ω de V par une méthode analogue à celle que M. SEBASTIÃO E SILVA a usé pour obtenir les distributions sur un ouvert de R^n à l'aide des distributions sur des intervalles compacts. On définit ainsi l'espace $\tilde{C}(\Omega)$ des distributions sur Ω comme étant la limite projective des espaces $\tilde{C}(K)$, où K est un segment compact quelconque contenu dans Ω , par rapport aux opérateurs de restriction $\rho_{KK'}$. Une distribution sur Ω est donc une famille $\{T_K\}$ qu'on obtient en faisant correspondre à tout segment compact $K \subset \Omega$ une distribution $T_K \in \tilde{C}(K)$ de telle façon que soit vérifié le principe de compatibilité suivant: $\rho_{KK'}(T_K) = T_{K'}$, si $K' \subset K$.

Dans le sous-paragraphe 11 on obtient à nouveau une généralisation du Théorème des changements de variables 4.1 pour toute application régulière d'une variété V dans une variété W . On définit le concept de restriction et on démontre que le principe de recollement des morceaux de M. SHWARTZ est conservé. Ceci permet de définir de la façon usuelle le support d'une distribution T sur V comme étant le complémentaire du plus grand ouvert où T est nulle.

La multiplication d'une distribution par une fonction différentiable est définie d'abord pour les segments de V , dans le sous-paragraphe 9, d'une façon presque triviale, et après, dans 12, pour les distributions sur V d'une façon aussi immédiate. En même temps, et par la même méthode, nous définissons la dérivée d'une distribution par rapport à un champ de vecteurs différentiable, notion que nous utilisons d'une façon systématique dans les Groupes de Lie, 20.

Dans le sous-paragraphe 13 nous étudions quelques propriétés topologiques non triviales de l'espace $\tilde{C}(V)$.

Ainsi nous démontrons que $\tilde{C}(V)$ est un espace du type L_c , Cf. [14], c'est à dire, pour qu'une application linéaire Θ de $\tilde{C}(V)$ dans un espace localement convexe quelconque soit continue, il faut et il suffit que pour toute suite de distributions $T_n \in \tilde{C}(V)$ convergent vers zéro, $\Theta(T_n)$ tend aussi vers zéro.

Ainsi, $\tilde{C}(V)$ est un espace bornologique et par conséquent tonnelé, parce qu'il est complet, PROP. 13. 6.

D'autre part, on démontre aisément que toute partie bornée de $\tilde{C}(V)$ est relativement compacte. Alors $\tilde{C}(V)$ est un espace de Montel et par suite réfléxif.

Le paragraphe III, 14-20, est consacré à l'Analyse linéaire des distributions, avec quelques applications aux Groupes de Lie. C'est la partie la plus importante et la plus délicate de ce travail.

Le problème fondamental est la détermination des applications linéaires continues de $\tilde{C}(V)$ dans un espace localement convexe E séparé et complet par rapport aux suites, problème qui a été déjà résolu par M. SEBASTIÃO E SILVA pour le cas où V est un domaine ouvert ou compact de R^n , comme nous rappelons dans le Théorème 2. 1.

Nous commençons par généraliser ce Théorème au cas des segments compacts de V :

Si K est un segment compact de V , toute carte $\Phi: X \rightarrow K$ induit un isomorphisme vectoriel $\Theta \leftrightarrow \theta_\Phi$ de l'espace $\mathcal{L}[\tilde{C}(K); E]$ des applications linéaires continues de $\tilde{C}(K)$ dans E sur l'espace $\mathcal{D}(K, E)$ des fonctions différentiables sur V , à valeurs dans E , et à support contenu dans K .

Cet isomorphisme est défini par les formules réciproques:

$$\theta_\Phi(u) = \Theta[\partial_K(\Phi; u)]$$

$$\Theta(T) = \int_x T[\Phi(x)] \theta_\Phi[\Phi(x)] dx$$

où $\partial_K(\Phi; u)$ est la distribution sur K dont l'image par Φ est la distribution de Dirac $\delta_x(\hat{x} - \Phi^{-1}(u))$.

Cet isomorphisme n'est pas canonique, il dépend de la carte Φ . Si Φ, Ψ sont deux cartes de K , on déduit aisément de la formule de transformation de la distribution de Dirac :

$$\theta_\Phi(u) = |J_{\Psi^{-1}\Phi}|_u \theta_\Psi(u).$$

Pour le cas des applications linéaires continues $\Theta: \tilde{C}(V) \rightarrow E$, nous considérons un système dénombrable de segments compacts K_j , dont les intérieurs $\overset{\circ}{K}_j$ constituent un recouvrement de V , et une partition localement finie de l'unité $\{\alpha_j\}$ associée à ce recouvrement. On a donc la décomposition suivante :

$$\Theta(T) = \sum_j \Theta(\alpha_j T);$$

ce que réduit la détermination de Θ à la détermination des applications $T \rightarrow \Theta(\alpha_j T)$.

À cet effet on établit le lemme 15. 1 :

À chaque segment compact K de V et à chaque carte $\Phi: X \rightarrow K$ correspond une et une seule fonction $\theta_\Phi \in C^\infty(K; E)$, telle que l'on a, pour toute fonction $\alpha \in \mathcal{D}(K)$,

$$\Theta(\alpha T) = \int_X T[\Phi(x)] \alpha[\Phi(x)] \theta_\Phi[\Phi(x)] dx.$$

En outre, on déduit aisément que, pour deux cartes quelconques Φ, Ψ de K , les fonctions θ_Φ, θ_Ψ sont relationées par la formule (14. 2'). Alors, les fonctions θ_Φ sont les densités, par rapport aux cartes Φ , d'une mesure différentiable θ sur V à valeurs dans E que nous appelons «*indicatrice de Θ* ».

Si l'on fait correspondre à tout indice j une carte $\Phi_j: X_j \rightarrow K_j$ on a

$$(15. 1') \dots \Theta(T) = \sum_j \int_{X_j} T[\Phi_j(x)] \alpha_j[\Phi_j(x)] \theta_{\Phi_j}[\Phi_j(x)] dx,$$

ou encore

$$\Theta = \int_V T d\theta,$$

en définissant l'intégrale $\int_V T d\theta$ d'une distribution $T \in \mathcal{C}(V)$,

par rapport à une mesure différentiable θ sur V à valeurs dans E , comme la somme de la série (15.1') lorsque telle somme existe et soit indépendant du recouvrement $\{K_j\}$ et de la partition $\{\alpha_j\}$ considérés.

On désigne par δ l'indicatrice de l'application identique de $\tilde{C}(V)$. C'est une mesure différentiable sur V à valeurs dans $\tilde{C}(V)$. Pour toute carte $\Phi: X \rightarrow K$ et tout point $u \in K$, la densité $\delta(\Phi; u)$ de δ par rapport à Φ est nulle si u est frontière à K et si u est intérieur à K , c'est la distribution sur V de support $\{u\}$ qui prolonge $\Phi^*[\delta_X(\hat{x} - \Phi^{-1}(u))]$.

On a ainsi le Théorème suivant :

THÉORÈME 15.2. *Soit E un espace localement convexe, séparé et complet par rapport aux suites. Il existe un isomorphisme $\alpha: \Theta \rightarrow \theta$ de l'espace $\mathcal{L}[\tilde{C}(V); E]$ des applications linéaires continues de $\tilde{C}(V)$ dans E , sur un sous-espace de l'espace $\mathfrak{M}^\infty(V; E)$ des mesures différentiables à valeurs dans E . Cet isomorphisme et son réciproque sont définis par les formules*

$$(15.8) \quad \dots \quad \begin{cases} \Theta(T) = \int_V T d\theta \\ \theta_\Phi(u) = \Theta[\delta(\Phi, u)] \end{cases}$$

Si V est compact ou E est sous-normable on a les résultats suivants :

THÉORÈMES 15.3 ET 15.4. *Les formules (15.8) déterminent un isomorphisme de $\mathcal{L}[\tilde{C}(V); E]$ sur $\mathfrak{M}^\infty(V; E)$ (respect. sur le sous-espace $\mathcal{D}^*(V, E)$ de $\mathfrak{M}^\infty(V; E)$ des mesures à support compact) si V est compact (respect. si E est sous-normable).*

Dans le cas particulier où E est la droite complexe C on obtient le résultat suivant :

Si $E = C$, les formules (15.8) définissent un isomorphisme vectoriel de $\mathcal{D}^*(V) = \mathcal{D}^*(V; C)$ sur le dual de $\tilde{C}(V)$, ce que permet d'identifier ces espaces. Avec cette identification toute mesure $\theta \in \mathcal{D}^*(V)$ est une forme linéaire continue sur $\tilde{C}(V)$,

$$(15.9) \quad \dots \quad \langle \theta, T \rangle = \int_V T d\theta.$$

Comme $\tilde{C}(V)$ est réflexif, si l'on muni $\mathcal{D}^*(V)$ avec la topologie fort τ_b , $\tilde{C}(V)$ est aussi le dual de $\tilde{C}(V)$. Ainsi, toute distribution T est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}^*(V)[\tau_b]$ définie par (15. 9).

Dans le sous-paragraphe 16 nous étudions $\mathcal{D}^*(V)$ comme dual fort de $\tilde{C}(V)$.

Soit $\Delta_1, \dots, \Delta_m, \dots$ une suite de compacts de V croissante et dont la réunion soit V et soit $\mathcal{D}^*(\Delta_m)$ le sous-espace de $\mathcal{D}^*(V)$ des mesures à support contenu dans Δ_m . La topologie induite par $\mathcal{D}^*(V)$ est, comme nous démontrons dans le Lemme 16. 1, la topologie de la convergence uniforme pour chaque dérivée et chaque carte Φ_j , c'est à dire elle est définie par les semi-normes

$$p_{\Phi_j, \Delta_m}^r(\vartheta) = \sup_{x \in X_j} |D_x^r \vartheta_{\Phi_j}(\Phi_j(x))|.$$

On montre, en outre, que $\mathcal{D}^*(V)$ est la limite inductive des espaces $\mathcal{D}^*(\Delta_m)$, (Théorème 16. 3).

On a ainsi le résultat suivant :

Les distributions T sur V peuvent être interprétées comme des formes linéaires $\langle \vartheta, T \rangle$ sur $\mathcal{D}^(V)$ telles que $\langle \vartheta_p, T \rangle \rightarrow 0$ pour toute suite de mesures ϑ_p vérifiant les conditions suivantes :*

a) *Les supports des mesures ϑ_p sont contenus dans un compact fixe de V .*

b) *Pour tout segment compact K de V et toute carte $\Phi: X \rightarrow K$, $\vartheta_{p, \Phi}[\Phi(x)]$ et toutes leurs dérivées convergent uniformément vers zéro.*

Dans le sous-paragraphe 17 nous étudions le cas où V possède un élément de volume privilégié σ , c'est à dire, une mesure à valeurs réels différentiable et positive. Alors, on peut faire correspondre biunivoquement, de façon canonique, à chaque mesure $\vartheta^* \in \mathfrak{M}^\infty(V, E)$ une fonction $\vartheta \in C^\infty(V, E)$ à l'aide de la relation $\vartheta^* = \vartheta \sigma$. Si ϑ^* est l'indicatrice d'une application linéaire continue $\Theta: \tilde{C}(V) \rightarrow E$, ϑ est dite l'indicatrice de Θ par rapport à σ ou simplement indicatrice de Θ , s'il n'y a pas de confusion possible.

On définit l'intégrale d'une distribution $T \in \tilde{C}(V)$ par rapport à une fonction $\vartheta \in C^\infty(V, E)$ comme l'intégrale de T par

rapport à θ^* , c'est à dire,

$$\int_V T \theta d\sigma = \int_V T d\theta^*.$$

Si $u \in V$, la distribution $\frac{1}{\sigma_\Phi(u)} \delta(\Phi, u)$, où Φ est une carte sur un segment K tel que $u \in K$, ne dépend pas de Φ . On appelle cette distribution, distribution de DIRAC sur V au point u , et on la représente par $\delta(\hat{v}, u)$.

Les résultats relatifs aux Théorèmes 15. 2, 15. 3, 15. 4 peuvent être énoncés de la façon suivante :

THÉORÈME 17. 1. *Soit V une variété différentiable munie d'un élément de volume σ . Il existe alors un isomorphisme vectoriel $\alpha : \Theta \rightarrow \theta$ de $\mathcal{L}[\tilde{C}(V); E]$ sur un sous-espace de $C^\infty(V, E)$, qui est $C^\infty(V, E)$ lui-même si V est compact, ou $\mathcal{D}(V, E)$ si E est sous-normable. Cette isomorphisme et l'isomorphisme réciproque sont définis par les formules*

$$(17. 6) \dots \begin{cases} \theta(u) = \Theta[\delta(\hat{v}, u)] \\ \Theta(T) = \int_V T(u) \theta(u) d\sigma(u). \end{cases}$$

Si E est la droite complexe C , on déduit, en particulier, que les espaces $\mathcal{D}(V)$ et $\tilde{C}(V)$ constituent un système dual par rapport à la forme bilinéaire

$$\langle \theta, T \rangle = \int_V T \theta d\sigma$$

Ainsi, toute distribution $T \in \tilde{C}(V)$ peut être interprétée comme une forme linéaire sur $\mathcal{D}(V)$ continue par rapport à la topologie de la convergence uniforme pour chaque dérivée, c'est à dire, $\langle \theta_p, T \rangle \rightarrow 0$, pour toute suite de fonctions $\theta_p \in \mathcal{D}(V)$ à supports contenus dans un compact Δ de V et telles que, pour toute carte Φ , les fonctions $\theta_p \circ \Phi$ convergent uniformément vers zéro, ainsi comme toutes leurs dérivées.

On retrouve ainsi la définition de M. SCHWARTZ [11].

Dans le sous-paragraphe 18 nous étudions quelques propriétés de la distribution de Dirac dans une variété avec un élément de

volume, qui généralisent les propriétés bien connues de la distribution de Dirac dans R^n .

Dans les sous-paragraphes finales 19-20 nous appliquons la Théorie développée dans les paragraphes précédents aux distributions sur un groupe de Lie. C'est un étude bref, où le but essentiel a été l'étude de la convolution comme application linéaire continue qui permute avec les translations.

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. BOURBAKI, *Topologie générale* Act. Scient. Ind. n.º 1141, Hermann, Paris, 1951.
- [2] ———, *Espaces vectoriels topologiques*, Act. Scient. Ind. n.ºs 1189 (1953), 1229 (1955), Hermann, Paris.
- [3] CHEVALEY, *Lie Groups*, Princeton Univ. Press, 1946.
- [4] P. M. COHN, *Lie Groups*, Cambridge, Univ. Press, 1957.
- [5] J. DIEUDONNÉ, *Une généralisation des espaces compacts*, Journal de Math. pures et appliquées, **23** (1944), p. 108-139.
- [6] A. GROTHENDIECK, *Espaces vectoriels topologiques*, Memoirs, Amer. Math. Soc. (1955).
- [7] K. NOMIZU, *Lie Groups and Differential Geometry*, The Math. Society of Japan 1956.
- [8] G. RHAM, *Variétés Différentiables*, Act. Scient. Ind. 1222, Hermann, Paris, 1955.
- [9] J. SANTOS GUERREIRO, *Les Changements de Variables en Théorie des Distributions I* «Portugaliae Mathematica, », **16** (1957), p. 57-80, Lisboa, II, em publicação.
- [10] ———, *La multiplication des distributions comme application linéaire continue*, Portugaliae Mathematica, **18** (1959), p. 55-67.
- [11] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Act. Scient. Ind. 1245, I, (1957), 1122, II, (1951), Hermann, Paris.
- [12] ———, *Equaciones Diferenciales Parciales Elipticas*, Univ. Nacional de Colombia, 1956.
- [13] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Integração e derivação em espaços de Banach*, Rev. Fac. Ciências Lisboa, 2.ª Série A, **1** (1950).
- [14] ———, *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*, Rend. Mat. e Applic., Série V, **14**, Roma, p. 389-410 (1955).
- [15] ———, *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions*, Rev. Fac. Ciências Lisboa, 2.ª Série, A, **14**, p. 79-186 (1955).
- [16] ———, *Sur la définition et la structure des distributions vectoriels*, Portugaliae Mathematica, **19** (1960), Lisboa.
- [17] A. WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques*, Act. Scient. Ind. 1145, Hermann, Paris, 1953.

ERRATA⁽¹⁾

Pág.	Linha	Onde se lê	Deve ler-se
8	8	(D4)...	(D4) Se $T \in \tilde{C}(X)$ e $\tilde{D}_i T = 0$, então para toda a função $f \in C(X)$ e todo o sistema de inteiros p tal que $T = \tilde{D}^p f$, existe um sistema de inteiros $q \leq p$ e uma função $f' \in C(X)$, independente de x_i em cada intervalo $I \subset X$, tais que $T = \tilde{D}^q f'$.
9	11	$I^p f - I^q g$	$I^q f - I^p g$
27	11	$\langle \mu^*(T), \varphi \rangle = \dots$	$\langle \mu^*(T), \varphi \rangle = \langle T, \int_{J_{\mu^{-1}}} \mu^{*-1}(\varphi) \rangle$
53	7	Teor. 8	Teor. 7
53	16, 29	$\tilde{C}(V)$	$\tilde{C}(\Omega)$
54	3	Lema 4. 1	Lema 13. 4
54	17	$T' \notin \mathfrak{A}$	$T' \notin \mathfrak{R}(\mathfrak{A})$
54	20	também...	também $\tilde{T}' \notin \mathfrak{A}' = \mathfrak{R}_k^{-1}[\mathfrak{R}_k(\mathfrak{A})]$ e como \mathfrak{A}' é aberto $\tilde{T}' \notin \mathfrak{A}'$
57	5	[1]	[2]
58	12	ω_Φ	θ_Φ
59	30	Prop. 13. 6	Prop. 13. 5
59	29	$\mathfrak{R}_k^{-1}(\{0\})$	\mathfrak{R}_k
60	8	$z(u) \theta_\Phi z(u) = \dots$	$z(u) \theta_\Phi(u)$
61	24	(15. 6)	(15. 1')
61	29	$C(V)$	$\tilde{C}(V)$
66	22	$C(K)$	$\tilde{C}(K)$
67		No enunciado e demonstração do Lema 16. 1 substituir a ordem de derivação $n = (n_1, \dots, n_s)$ por $r = (r_1, \dots, r_s)$.	
70	8	$d\varphi$	$d\sigma$
71	12	medida	função
79		Fórmula (20. 5)...	$j^*[\delta(u^{-1}\hat{x})] = \Delta(u)\delta(u\hat{x})$

(1) Além das que indicamos aqui há outras gralhas de menor importância que o leitor facilmente corrige.