UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

CAMPUS DE JI-PARANÁ

ANDERSON MARCOLINO DE SANTANA

APLICAÇÃO DAS DERIVADAS

JI-PARANÁ, 2010

ANDERSON MARCOLINO DE SANTANA

APLICAÇÃO DAS DERIVADAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca examinadora do Curso de Matemática da Universidade Federal de Rondônia- UNIR, Campus de Ji-Paraná, como exigência parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador:

Prof.º Ms. Reginaldo Tudeia dos Santos.

JI-PARANÁ, 2010

ANDERSON MARCOLINO DE SANTANA

APLICAÇÃO DAS DERIVADAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca examinadora do Curso de Matemática da Universidade Federal de Rondônia- UNIR, Campus de Ji-Paraná, como exigência parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em _____ de _________________ de______

____

Msc. Reginaldo Tudeia dos Santos – Orientador - Universidade Federal de Rondônia Campus de Ji-Paraná.

____

Msc. Marcos Leandro Ohse - Universidade Federal de Rondônia Campus de Ji-Paraná.

____

Msc. Marlos Gomes de Albuquerque - Universidade Federal de Rondônia Campus de Ji-Paraná.

Ji-Paraná, ____ de __________________ de 2010.

DEDICATÓRIA

A minha Família que muito tem ajudado para que a graduação acontecesse, principalmente minha mãe, Maria das Dores Marcolino de Santana, meu pai, Ivanildo, meus irmãos, Alberson Marcolino e Ana Kelly Marcolino, minha sobrinha Ana Karine, Vovó Lourdes e Vovô Marcolino, Tias e Tios, e Tio Alexandre Negreiros Marcolino. Amo muito vocês!

AGRADECIMENTOS

A Deus que até aqui tem me ajudado a superar as dificuldades na trajetória árdua de minha vida.

A minha mãe, Maria das Dores Marcolino de Santana que muito contribuiu para minha formação em quem me espelho.

Aos meus irmãos que sempre pensaram que eu faria medicina, pois acreditaram em minha capacidade, Ana Kelly e Alberson Marcolino de Santana.

Aos meus Tios e Tias, que cuidaram muito de mim enquanto minha mãe trabalhava, Tia Ana Nery, Tia Marta, Tio Samuel, Tio Xandy, Tia Noemia Tavares, Tio Marinaldo.

A todos os meus professores da pré-escola a universidade, pois fizeram parte da minha vida, não podendo esquecer daqueles que foram além de suas obrigações com a nossa turma, como: Ana Fanny Benzi, Marlos Albuquerque, Marcos L. Ohse, Aparecida Augusta, Márcia Uliana e ao meu orientador Reginaldo Tudeia dos Santos.

Amigos e colegas de trabalho, principalmente minha patroa Dona Lourdes Gonçalves Amaral.

Muito Obrigado!

“O que sabemos é uma gota, o que não sabemos é um oceano”.

“Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre ombros de gigantes”.

Isaac Newton

SANTANA, Anderson Marcolino de. Aplicação das Derivadas. 2010. Trabalho de conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Rondônia – Campus de Ji-Paraná. Ji-Paraná- Rondônia, 2010.

RESUMO

O presente trabalho faz inicialmente uma abordagem histórica das derivadas, buscando conhecer onde a mesma surgiu, os principais matemáticos que desenvolveram o cálculo diferencial, e em seguida mostra a definição, os processos de derivação, bem como aplicações. Nestas foram demonstradas algumas aplicações em diversos ramos da ciência, tais como; no próprio ensino da matemática, da física, na economia, com a maximização de lucros e minimização de custos de empresas, nas ciências biologias e até mesmo em situações problema do cotidiano.

PALAVRAS-CHAVE: Aplicação; Derivadas; Cotidiano.

SANTANA, Anderson Marcolino de. Application of Derived. 2010. Completion of Course Work (Graduated in Mathematics) – Department of Mathematics and Statistics from the Universidade Federal de Rondônia – Campus de Ji-Paraná. Ji-Paraná- Rondônia, 2010.

ABSTRACT

This work is initially a historical approach of derived, seeking to know where the same arose, leading mathematicians who have developed the differential calculus, and then shows the definition, derivation, processes and applications. These were demonstrated some applications in various branches of science, such as; on own teaching of mathematics, physics, economy, with the maximization of profits and minimizing costs of enterprises, Sciences biological and even in everyday problem situations.

KEY-WORDS: Application; Derived; Daily.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O conhecimento do processo de derivação é importante em virtude das inúmeras áreas de aplicações em diferentes ramos da ciência. Para tanto seu estudo foi desenvolvido ao longo de 2500 anos, com o auxílio de diversos matemáticos. As idéias foram se aperfeiçoando e o que era apenas o estudo da reta tangente, se transformou em uma magnífica e poderosa ferramenta para resolução de problemas. A definição de derivada como é conhecida hoje, deve-se a Cauchy que a apresentou por volta de 1823, como razão de variação infinitesimal, embora Newton e Leibniz, já no século XVII tenham utilizado os fundamentos desse conceito como método para relacionar problemas de quadraturas e tangentes.

O presente trabalho tem como objetivo mostrar algumas das aplicações das derivadas em diversos ramos das ciências exatas, bem como seu surgimento através da história da matemática. Nele será feita abordagem de conceitos, definições e técnicas de derivação importantes para a aplicação deste conteúdo.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

Na Fundamentação Teórica apresenta a importância da História da Matemática para o ensino e identifica os Aspectos Históricos e conceitos da Diferenciação.

No Processo de Derivação é destacado a Derivada, bem como suas definições e sua interpretação geométrica, as derivadas das funções elementares, regras de derivação e a definição de máximo e mínimo de uma função.

As Aplicações das Derivadas são apresentadas através de problemas do cotidiano, nas seguintes áreas: Matemática com os problemas de otimização, Economia, Física e Ciências Biológicas.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Inicialmente nesta pesquisa será abordado um pouco da história da matemática e em especial sobre a criação das derivadas, suas técnicas e regras até chegar às suas aplicações.

2.1 IMPORTÂNCIA DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos, visto que a recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento.

A Matemática faz parte da história do ser humano, ela foi construída ao longo dos séculos e está viva e em constante transformação. Com a abordagem da História da Matemática, há melhora significativa no aprendizado, pois a história possibilita a visão sobre a natureza do conhecimento matemático e de sua atividade, o que certamente contribui para elaboração de atividades significativas em seu processo de ensino aprendizagem.

No Brasil, uma das sugestões encontradas nos PCN é sobre a forma de abordar os conteúdos de matemática, em sala de aula. Recomenda-se a utilização da história da matemática como recurso pedagógico. Segundo os PCN, este recurso permite que:

> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. (BRASIL, 1997, p. 45)

Segundo Zuffi (2001, p.10), "o conhecimento da gênese histórica dos conceitos matemáticos pode ser uma ferramenta de grande valia para elaboração da linguagem matemática e para compreensão mais profunda desses conceitos. A análise histórica poderá auxiliar na compreensão e na criação Matemática de forma que haja a compreensão de que ela não se dá em um único momento, ela sofre forte influência de fatores socioculturais em sua criação, todos dependendo dos problemas em que as sociedades e a comunidade científica de cada época propõem como relevantes.” Não obstante, o surgimento da derivada percorreu séculos desde suas primeiras noções intuitivas, o qual mostra grande riqueza histórica.

De acordo com Parra e Saiz (2001, p.37) “Um dos objetivos essenciais (e ao mesmo tempo uma das dificuldades principais) do ensino da matemática é precisamente que o que se ensine esteja carregado de significado, e que tenha sentido para o aluno.” Portanto quando o objeto ensinado tem significado para o aluno certamente facilitará a aprendizagem. Contudo é importante dar significado ao que é ensinado, não apenas em matemática, mas em todas as ciências.

2.2 ASPECTO HISTÓRICO DAS DERIVADAS

De acordo com Eves (2002), o século XVII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da matemática, graças, em grande parte, às novas e vastas áreas de pesquisas que nela se abriram. Indubitavelmente, porém, a realização matemática mais notável do período foi à invenção do cálculo, perto do final do século, por Sir Isaac Newton (1642-1727) que desenvolveu métodos analíticos unindo técnicas matemáticas já conhecidas, o que tornou possível a resolução de problemas de vários tipos, como o de encontrar áreas, tangentes e comprimentos de curvas assim como máximos e mínimos de funções, e por Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716) o qual o destino tinha reservado a tarefa de elaborar uma notação apropriada assim como a de nomear o Cálculo Diferencial e Integral. O curioso é que o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu na ordem contrária a apresentada em textos e cursos básicos atuais sobre o assunto, ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e muito depois o cálculo diferencial. A idéia de integração teve origem em processos somatórios ligado ao cálculo de área e de certos volumes. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes e de questões sobre máximos e mínimos. Sendo a diferenciação a operação inversa da integração.

Conforme algumas informações contidas no site História das Derivadas[1] (apud PARANHOS, 2009, p. 1), alguns matemáticos já utilizavam conceitos de cálculo para

[1]História das Derivadas. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.html

resolver problemas, porém de forma imprecisa e não rigorosa. Cavalieri, Isaac Barrow, Pierre de Fermat e Johann Kepler são alguns deles. Porém a sistematização, estruturação e aperfeiçoamento do cálculo só viria mais tarde com Newton e Leibniz que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo: o Diferencial e o Integral. A questão da derivada está intimamente ligada às retas tangentes a curva nos pontos tomados e suas implicações com máximos e mínimos. Os Gregos da Antiguidade já tinham o conceito de reta tangente a uma curva em um ponto. O interesse por tangentes a curvas reapareceu no século XVII, como parte do desenvolvimento da geometria analítica. Como equações eram então utilizadas para descrever curvas, a quantidade e variedade de curvas estudadas aumentaram bastante em comparação àquelas conhecidas na época clássica.

De acordo com Diniz (2006), no século XVII Pierre Fermat (1601 – 1665), foi o primeiro a considerar várias curvas inteiras de uma só vez, as quais foram chamadas parábolas superiores, denominadas curvas da forma $y = kx^n$, onde k é constante e $n = 2, 3, 4,...$ Dessa forma a introdução da álgebra no estudo da geometria de curvas, teve grande contribuição para o desenvolvimento da derivada. Fermat desenvolveu um processo algébrico que determinou os pontos máximos e mínimos sobre uma curva, que na visão geométrica significa encontrar os pontos onde a tangente à curva tem inclinação zero. Já René Descartes (1596-1650) estabeleceu a relação entre a Geometria e a Álgebra, denominada de Geometria Analítica, onde criou um processo para encontrar a tangente a uma curva partindo de dupla raiz, técnica aperfeiçoada por Johan Hudde (1628-1704). No entanto, devido ao trabalho intimamente relacionado com as derivadas, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), que publicou inúmeros trabalhos de alta qualidade em várias áreas da ciência matemática, dentre elas Teoria dos Números, Teoria das Funções, Cálculo das Probabilidades, Teoria dos Grupos, Equações Diferenciais, Mecânica dos fluidos, analítica e celeste, afirmou ser Fermat o criador do cálculo.

Segundo Paranhos (2009), a questão das tangentes a curvas foi de especial importância para Newton ao estudar os movimentos dos planetas. Em 1665 pesquisando o traçado das tangentes e tentando determinar volumes de barris de vinho, criou o método de fluxos ou fluxões atualmente denominado cálculo diferencial. Em 1666 ao pesquisar quadraturas, produziu um manuscrito que chamou de método inverso das fluxões, o que mostra que Newton enxergou o que seus precedentes Fermat, Cavalieri e Barrow não haviam visto, que o traçado das tangentes (derivação) e a quadratura das curvas (integração), são operações inversas uma da outra. O que gerou sua celebre frase: “Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre ombros de gigantes". Todavia, Newton não se interessou em publicar seus trabalhos e manuscritos, eles circulavam apenas entre um pequeno número de pessoas em Cambridge, onde tinha sua cátedra. Ao esconder seus estudos do mundo, Newton corria o risco de ver suas idéias serem redescobertas por outros, o que de fato aconteceu.

Segundo Paranhos (2009), Leibniz, em 1676, durante uma viagem diplomática a Londres visitou a *Royal Society*[2] e teve acesso aos manuscritos de Newton. Escreveu a ele perguntado sobre séries infinitas e recebeu duas cartas, denominadas de Epistola Prior e Posterior, onde Newton revela alguns de seus pensamentos sobre séries infinitas e sobre o método de fluxões. O cálculo diferencial de Leibniz tinha uma fundamentação bem diferente da expressa por Newton. Pois Leibniz não estudou o movimento para chegar ao conceito de derivada e integral. Ele pensou nas variáveis x e y como sendo grandezas que variavam por sucessão de valores infinitamente pequenos. Introduziu dx e dy como sendo a diferença entre esses valores sucessivos.

Diniz (2006) relata que Leibniz, em 1672, enquanto vivia em Paris, encontrou-se com Christiaan Huygens (1629-1695) e com ele aprendeu o método para encontrar tangentes a curvas algébricas, e posteriormente aperfeiçoou fórmulas e notações para a derivada, publicando então seu famoso artigo "*New methods for maximums and minimums, as well as tangents, which is neither impeded by fractional nor irrational quantities, and a remarkable calculus for them*" (Novos métodos para máximos e mínimos, assim como tangentes, os quais não são impedidos por quantidades fracionárias e irracionais, e um cálculo notável para eles) de 1684. Esse artigo trouxe o cálculo para os termos modernos, possibilitando uma pessoa não especialista no assunto, desenvolver problemas de tangentes a partir das fórmulas do cálculo de Leibniz.

Paranhos (2009), revela que houve uma longa e acalorada disputa no meio científico da época sobre quem seria a mais importante autoridade do cálculo. Essa situação chegou a tal ponto que os matemáticos que viviam no Reino Unido se distanciaram durante um período longo dos matemáticos do continente. Enquanto o Cálculo "Leibniziano" ganhava cada vez mais adeptos na Europa, entre esses a família Bernoulli, os matemáticos da "ilha", ficaram isolados e, quando voltaram a estabelecer relações com os europeus do continente, havia não só perdido parte do avanço do cálculo como também não compreendiam muito bem

[2] Sociedade Real de Londres para o Progresso do Conhecimento da Natureza é uma instituição destinada à promoção de conhecimento científico, fundada em 1660.

a notação "Leibniziana", então largamente utilizada. Apesar deste fato, o julgamento tranqüilo da História considera que ambos foram os criadores independentes do cálculo. Newton chegou a ele dez anos antes, Leibniz foi o primeiro a divulgá-lo e sua melhor simbologia perdura até hoje.

Segundo Iezzi (1993), o cálculo da derivada surge no século XVII na Europa, com Sir Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Newton desenvolveu o cálculo com a idéia voltada para taxa de variação (velocidade), e Leibniz com a idéia central do cálculo ser uma diferencial, onde ela é a diferença entre dois valores próximos de uma variável. Leibniz desenvolveu simbologias e fórmulas, estabelecendo a notação $dx, dy, ...,$ para as diferenciais $x, y, ...,$ posteriormente regras como: $da = 0$, se a é constante; $d(u+v) = du + dv; d(uv) = udv + vdu.$ Pelo fato da suspeita de que Leibniz houvesse copiado a idéia de Newton, Leibniz teve um fim obscuro para sua vida, enquanto Newton, um notável professor de matemática foi sepultado como um rei. Porém, hoje em dia sabe-se que os mesmos seguiram linhas diferentes na criação do cálculo, contribuindo extraordinariamente para o desenvolvimento da matemática.

Diniz (2006) elucida que no século XVIII, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) tentou tornar o cálculo mais rigoroso, já que pretendia dar um formato puramente algébrico a derivada, ele desenvolveu a notação usada hoje em dia no cálculo diferencial. Contudo sua base sólida para o cálculo falhou, pois certas propriedades de séries infinitas utilizadas para embasar sua concepção de derivadas foram demonstradas falsas. Porém no século XIX Augustin Louis Cauchy (1789-1857), estabeleceu que a definição de derivada é:

> "O limite de [f(x + i) – f(x)] / i quando i se aproxima de 0. A forma da função que serve como o limite da razão [f(x + i) – f(x)] / i dependerá da forma da função proposta y = f(x). Para indicar sua dependência, dá-se à nova função o nome de função derivada" (DINIZ, 2006).

Posteriormente Cauchy encontrou derivadas de todas as funções elementares e a regra da cadeia. Ele utilizou o trabalho de Lagrange para provar vários teoremas básicos do cálculo, onde a partir desse momento a derivada e o cálculo diferencial passaram a fazer parte rigorosa e moderna do cálculo.

3. PROCESSO DE DERIVAÇÃO

3.1 DEFINIÇÃO DE DERIVADA

Conforme Leithold (1994), a derivada pode ser interpretada geometricamente como a inclinação de uma reta tangente a uma curva. Porém, quando interpretada como taxa de variação ela mostra sua importância em diversos ramos das ciências tais como física, biologia, química, economia, entre outros.

Seja f uma função definida em um intervalo I e x_0 um elemento de I. Chama-se de derivada de f no ponto x_0o limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, se existir e for finito (IEZZI, MURAKAMI, & MACHADO, 1993).

A diferença $\Delta x = x - x_0$ é chamada de acréscimo ou incremento da variável x relativamente ao ponto x_0. A diferença $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ é o acréscimo ou incremento da função f relativamente ao ponto x_0. O quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ recebe o nome de razão incremental de f relativamente ao ponto x_0.

Para se chegar a uma boa definição de reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto do mesmo, deve-se pensar que essa reta tangente é a reta que melhor aproxima o gráfico a vizinhança desse ponto. Assim, a reta tangente pode ser determinada por seu coeficiente angular e pelo ponto de tangência.

Considere a curva de uma função contínua f, onde x_0 e $f(x_0)$ são as coordenadas do ponto A onde se deseja traçar uma reta tangente. Seja agora outro ponto B do gráfico de f, descrito por $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, onde Δx é o deslocamento no eixo das abscissas, ocorrido do ponto A ao ponto B. A reta que passa por A e B é secante à curva $y = f(x)$. A inclinação (coeficiente angular) desta reta é dada pelo quociente de Newton, definido como a razão incremental de f com respeito à variável x, no ponto x_0:(Tangente em A).

Segundo Marques (2006), seja f uma função $y = f(x)$ definida no intervalo (a, b), sendo x_0 e $x_0 + \Delta x$ dois pontos de (a, b), onde Δx denota a variação dos valores de x.

O valor da função passa de $f(x_0)$ para $f(x_0 + \Delta x)$, ocorrendo uma variação, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Situação ilustrada na Figura 1.

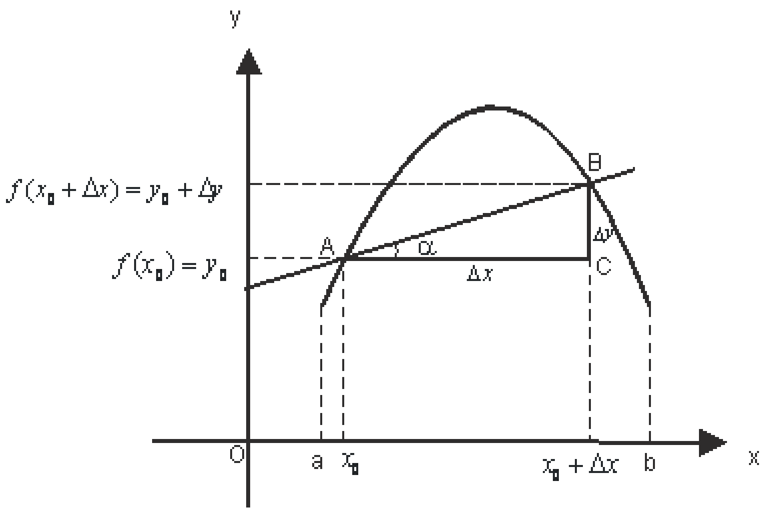

Figura 1 – Ilustração para definição de derivada

Denomina-se taxa média de variação da função o quociente entre Δy e Δx:

$$tg(\propto) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

onde f é uma função definida no intervalo (a, b) e x_0 um ponto desse intervalo, a função é denominada de derivada da função f no ponto x_0, se existir o limite da mesma.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

Este limite é chamado também de taxa de variação instantânea (ou simplesmente, taxa de variação) de y com relação à x no ponto $x = x_0$.

3.2 INTERPRETAÇÃO GEOMETRICA DA DERIVADA

Conforme Leithold (1994), importantes problemas de cálculo envolvem a determinação da reta tangente a uma curva sobre um determinado ponto. Em Geometria Plana a reta tangente a um ponto é a reta que tem um único ponto em comum com a circunferência. Sendo a tangente determinada por sua inclinação ao ponto de tangência.

Para Marques (2006) a derivada pode ser compreendida geometricamente como sendo um método para calcular o coeficiente angular da reta tangente. Considerando $y = f(x)$ uma curva e *P(x_0, y_0)* um ponto sobre o gráfico. Se a função for derivável, a mesma é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P, através do limite:

$$tg(\propto) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3}$$

quando este existir, ver Figura 2.

$$m = tg(\propto) \; e \; y_0 = f(x_0)$$

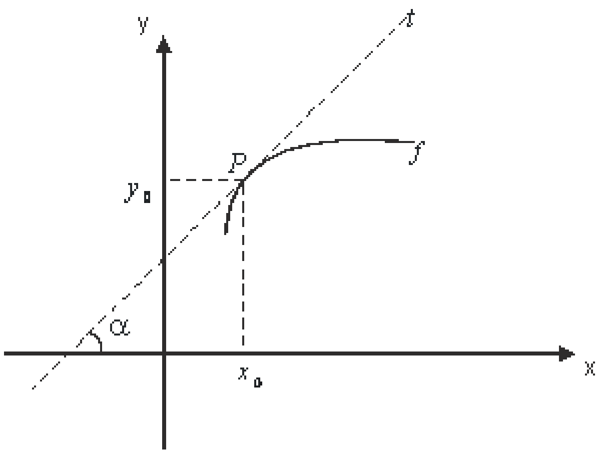

Figura 2 – Esboço do limite da reta tangente

Segundo Iezzi (2004), a derivada de uma função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0.

3.3 DERIVADAS DAS FUNÇÕES ELEMENTARES

Serão demonstradas as derivadas de algumas funções elementares que ajudarão na resolução dos problemas aplicados ao cotidiano.

3.3.1 Derivada da função constante

Dada a função $f(x) = c$, onde $c \in R$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Logo,

$$\boldsymbol{f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0} \tag{4}$$

3.3.2 Derivada da função potência

Dada uma função $f(x) = x^n$, onde $n \in N^*$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta X)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}.\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}.(\Delta x)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}.\Delta x + \binom{n}{3}x^{n-3}.(\Delta x)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(\Delta x)^{n-1}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \binom{n}{1}x^{n-1} = n.x^{n-1}$$

Logo,

$$\boldsymbol{f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}} \tag{5}$$

3.3.3 Derivada da função seno

Dada a função $f(x) = sen(x)$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sen(x + \Delta x) - sen(x)}{\Delta x}$$

Aplicando a identidade trigonométrica $sen(s) - sen(t) = 2 \cdot sen\left(\frac{s-t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{s+t}{2}\right)$, tem-se:

$$\frac{2 \cdot sen\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x + \Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{2. sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right). \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}. \cos\,(x + \frac{\Delta x}{2})$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}. \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos\,(x)$$

Logo,

$$\boldsymbol{f(x) = sen(x) \to f'(x) = \cos\,(x)} \qquad (6)$$

3.3.4 Derivada da função cosseno

Dada a função $f(x) = \cos\,(x)$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cos(x + \Delta x) - cos(x)}{\Delta x}$$

Aplicando a identidade trigonométrica $\cos(s) - \cos(t) = -2 \cdot sen\left(\frac{s+t}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{s-t}{2}\right)$, tem-se:

$$\frac{-2 \cdot sen\left(\frac{x + \Delta x}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{-2. sen\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right). sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= -sen\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right). \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} sen\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = -sen(x)$$

Logo,

$$\boldsymbol{f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -sen(x)} \qquad (7)$$

3.3.5 Derivada da função exponencial

Dada a função $y = a^x$, com $a \in R$ e $0 < a \neq 1$, por derivação implícita temos:

$$y = a^x$$

$$\ln y = \ln a^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln a$$

$$\frac{1}{y} \cdot dy = \ln a \cdot dx$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln a$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot \ln a$$

Logo,

$$\boldsymbol{f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x . \ln a} \qquad (8)$$

No caso particular da função exponencial de base e, $f(x) = e^x$, temos o resultado notável:

$$f'(x) = e^x . \ln e = e^x$$

Logo,

$$\boldsymbol{f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x} \qquad (9)$$

3.4 REGRAS DE DERIVAÇÃO

O processo de cálculo da derivada é denominado derivação. Assim, a derivação é o processo de derivar uma função f' de uma função f. Se uma função possui uma derivada em x_1, ela será derivável em x_1. Isto é, a função f será derivável em x_1 se $f(x_1)$ existir. Uma função será derivável em um intervalo aberto se ela for derivável em todo número no intervalo aberto.

3.4.1 Derivada da Soma ou da Diferença

Sejam duas funções $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis no intervalo aberto I =]a; b[, e $h(x)$ uma função definida pela soma ou pela diferença de $f(x)\ e\ g(x)$, então se $f'(x)\ e\ g'(x)$ existirem, então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

PROVA:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\boldsymbol{h'(x) = f'(x) + g'(x)} \tag{10}$$

Portanto, a derivada da soma de duas funções é a soma de suas derivadas, se elas existirem.

3.4.2 Derivada do Produto

Sejam duas funções $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis no intervalo aberto I =] a;b[, e $h(x)$ uma função definida pelo produto de $f(x)\ e\ g(x)$, ou seja, $h(x) = f(x).g(x)$,então se $f'(x)\ e\ g'(x)$ existirem, então $h'(x) = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$

PROVA:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x). g(x + \Delta x)] - [f(x). g(x)]}{\Delta x}$$

Se $f(x + \Delta x). g(x)$ for somado e subtraído ao numerador, então: $h'(x) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x). g(x + \Delta x)] - f(x + \Delta x). g(x) + f(x + \Delta x). g(x) - [f(x). g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x). \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x). \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x). \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x). \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x)]. \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} [g(x)]. \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

Como f é derivável e contínua em x, logo:

$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x)] = f(x)$, $\lim_{\Delta x \to 0} [g(x)] = g(x)$, $\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \right] = g'(x)$ e

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] = f'(x)$$

Assim, $\boldsymbol{h'(x) = f(x). g'(x) + g(x). f'(x)}$ (11)

Portanto, a derivada do produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função mais a segunda função vezes a derivada de primeira função, se essas derivadas existirem.

3.4.3 Derivada do Quociente

Sejam duas funções $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis no intervalo aberto I =] a; b[, sendo $g(x) \neq 0$ em I. E seja $h(x)$ uma função definida pelo quociente de $f(x)$ e $g(x)$,ou seja, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, então se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, temos que:

$$h'(x) = \frac{g(x). f'(x) - f(x). g'(x)}{[g(x)]^2}$$

PROVA:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x).g(x) - f(x).g(x + \Delta x)}{\Delta x.g(x).g(x + \Delta x)}$$

Se $f(x).g(x)$ for somado e subtraído ao numerador, então:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x).g(x) - f(x).g(x) - f(x).g(x + \Delta x) + f(x).g(x)}{\Delta x.g(x).g(x + \Delta x)}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[g(x).\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - \left[f(x).\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{g(x).g(x + \Delta x)}$$

$$h'(x) = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x).\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x).\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x).\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x)}$$

Como g é derivável em x, então g será contínua em x; assim, temos que $\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$. Além disso, $\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$ e $\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$. Com esses resultados e as definições de $f'(x) e\ g'\ (x)$ obtem-se:

$$h'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{g(x).g(x)}$$

$$\boldsymbol{h'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}} \qquad (12)$$

Portanto, a derivada do quociente de duas funções é a fração tendo como denominador o quadrado do denominador original e como numerador o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, se essas derivadas existirem.

3.4.4 Derivada de uma função composta ou Regra da Cadeia

Segundo o Leithold (1994), a regra da cadeia é considerada um dos importantes teoremas do cálculo, pois é através dela que determinamos a derivada de uma função composta.

Seja $f: A \to B$ uma função dada pela lei $y = f(x)$. Seja $g: B \to C$ uma função dada pela lei $z = g(y)$. Existe a função composta $F: A \to C$ dada pela lei $z = F(x) = g(f(x))$. Supondo que f seja derivável no ponto x e g seja derivável no ponto y tal que $y = f(x)$, provar que F também é derivável em x, e calcular sua derivada. Então:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{13}$$

E, daí, vem:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y = y + \Delta y \tag{14}$$

Também

$$\Delta z = F(x + \Delta x) - F(x) = g\big(f(x + \Delta x)\big) - g\big(f(x)\big) = g(y + \Delta y) - g(y)$$

Então,

$$\frac{\Delta \mathrm{z}}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta x} = \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} . \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

E daí:

$$\frac{\Delta \mathrm{z}}{\Delta x} = \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} . \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Observando a igualdade (I), quando $\Delta x \to 0$, o mesmo o ocorre para Δy; então, fazendo Δx tender a zero na última igualdade:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \mathrm{z}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} . \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] =$$

$$= \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} \right] . \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] =$$

$$= \left[\lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} \right] . \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] = g'(y) . f'(x)$$

Em suma,

$$\boldsymbol{F(x) = g\big(f(x)\big) \rightarrow F'(x) = g'\big(F(x)\big).f'(x)} \tag{15}$$

3.5 MÁXIMOS E MÍNIMOS DE UMA FUNÇÃO

Fermat, em 1963, divulgou um novo método para determinação de tangentes, estudo que levaria aos máximos e mínimos. Em aplicações simples, raramente precisa-se provar que certo valor crítico é um máximo ou um mínimo, porém para ter um embasamento teórico observe as seguintes definições:

Dada uma função$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, um ponto $x_0 \in I$ é chamado de:

- Ponto de máximo relativo (ou local) da função, quando $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$.
- Ponto de mínimo relativo (ou local) da função, quando $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.

O valor $f(x_0)$ é chamado de máximo ou mínimo relativo (ou local) de f, e $(x_0, f(x_0))$ são as coordenadas dos pontos de máximo ou de mínimo relativo de f.

Diz-se que um ponto x_0 é um ponto crítico para a função f quando f é definida em x_0 mas não é derivável em x_0, ou $f'(x_0) = 0$.

Segundo Flemming, Luz e Wagner (2006), o uso da derivada para determinar os máximos e mínimos de uma função pode-se utilizar dois critérios enunciados por dois teoremas:

Teorema 1: Seja y = f(x) uma função contínua em [a,b] e possui derivada em todos os pontos do intervalo (a,b), exceto possivelmente num ponto c ∈ (a,b).

(a) Se f '(x) > 0 para todo x < c e f '(x) < 0 para todo x > c, então y = f(x) tem um máximo relativo em c.

(b) Se f '(x) < 0 para todo x < c e f '(x) > 0 para todo x > c, então y = f(x) tem um mínimo relativo em c.

Teorema 2: Seja y = f(x) uma função derivável num intervalo (a,b), e c ∈ (a,b) é um ponto crítico da função. Se y = f(x) admite derivada de segunda ordem em (a,b), assim:

(a) Se $f''(x) < 0$, $y = f(x)$ tem um valor máximo relativo em c.

(b) Se $f''(x) > 0$, $y = f(x)$ tem um valor mínimo relativo em c.

Conforme Leithold (1994), quão grande foi à contribuição de Pierre de Fermat, pois dentre as aplicações mais notáveis do cálculo estão aquelas que buscam valores de máximos ou mínimos de funções. Pois, dentre as importantes aplicações de máximos e mínimos destacamos os problemas que têm na sua estrutura o valor máximo ou mínimo de algumas variáveis tais como: área, volume, força, potência, tempo, lucro ou custo, dentre outros.

4. APLICAÇÕES DE DERIVADAS

Sabe-se que o mundo é regido por leis naturais e relações sociais que possibilitam um amplo espaço pedagógico para o desenvolvimento de grande parte dos conteúdos de matemática de forma contextualizada. Pode parecer que alguns conteúdos matemáticos não têm aplicação clara e imediata nos problemas cotidianos, o que talvez crie certo desapontamento. Mas, na verdade, a aplicação ocorre como resultado da evolução e desenvolvimento desses conceitos. O mesmo acontece com o cálculo de derivadas que tem importância especial em virtude das inúmeras aplicações em vários campos das ciências, tais como: problemas da física, biologia, química, modelagem matemática, arquitetura, geologia, engenharia e economia.

O estudo da derivada apresenta diversas aplicações práticas, ela é constantemente aplicada em muitos problemas que envolvem o dia-a-dia do ser humano, possibilitando até mesmo resolver situações que envolvam taxas de variação .

4.1 MÁXIMOS E MÍNIMOS

No cotidiano, a derivada pode auxiliar na resolução de inúmeros problemas, como pode ser visto no exemplo a seguir:

Problema da piscina

PROBLEMA1. Deseja-se construir uma piscina com formato quadrangular com capacidade de 32 m^3 de água. Determinar as dimensões da piscina para que seja mínimo o consumo de material utilizado no seu revestimento interno. Ver a ilustração da Figura 3.

Figura 3 - Representação de uma piscina quadrangular

SOLUÇÃO: As dimensões são a, a e y e seu volume é de 32 m³, tem-se:

$$V = a^2 \cdot y = 32 \tag{16}$$

$$y = \frac{32}{a^2}$$

A área total de revestimento da piscina de base quadrangular é $A = 4 \cdot a \cdot y + a^2$, pois se sabe que a área total de um prisma de base quadrangular fechado é $A = 4 \cdot a \cdot y + 2 \cdot a^2$, todavia a piscina não é fechada confirmando a primeira expressão. Substituindo o valor de y.

$$A = 4 \cdot a \cdot \frac{32}{a^2} + a^2 \tag{17}$$

$$A = \frac{128 \cdot a + a^4}{a^2}$$

$$A = \frac{128 + a^3}{a}$$

$$A' = \frac{3 \cdot a^2 \cdot a - (128 + a^3).1}{a^2}$$

$$A' = \frac{2 \cdot a^3 - 128}{a^2} = 0$$

$$2 \cdot a^3 - 128 = 0$$

$$a = 4 \text{ e } y = 2$$

Logo, as dimensões para que se tenha mínimo gasto de material são respectivamente, 4m, 4m e 2m.

Problema do cercado

PROBLEMA 2. Geraldo deseja construir um cercado retangular para por seus pequenos poodles franceses. Quais dimensões devem ter este cercado, sabendo-se que ele possui apenas 1500m de grade de modo que se tenha uma área máxima? Ilustração na Figura 4.

Figura 4 - Representação inicial da área do cercado

SOLUÇÃO:

A variável a ser maximizada é a área do cercado. Aqui, A= x·y, onde x é o comprimento do cercado e y a largura. Mas existem 1500m de grade, e o perímetro do cercado é dado por $2p= 2\cdot x + 2\cdot y$, daí, $2\cdot x + 2\cdot y = 1500$. Resolvendo esta equação $y = 750 - x$, que será substituída na equação $A= x.y$ para obter:

$$A= x\cdot(750-x) = 750\cdot x - x^2 \qquad (18)$$

Assim $A= F(x)$, onde $F(x) = 750\cdot x – x^2$. Visto que as dimensões x e y do cercado não podem ser negativas, pois $x \geq 0$ e $750 – x \geq 0$, isto é, $0 \leq x \leq 750$. Na realidade, procura-se o valor de x que é o máximo de $F(x) = 750\cdot x – x^2$ no intervalo [0, 750]. Aqui, $F'(x) = 750 – 2\cdot x$, logo $x = 375$ dá o único ponto crítico no intervalo aberto (0, 750). Logo, F(x) atinge um valor máximo quando x = 375m e y = 750 – x = 750 – 375= 375m.

Logo, as dimensões são 375m por 375m e cuja área é máxima é de 140625 m^2.

Problema da horta

PROBLEMA 3. Uma dona de casa deseja construir, uma pequena horta de formato retangular em seu quintal. Porém, ela possui apenas 20m de tela para cercá-la. Quais deverão ser as medidas dos lados do retângulo, para que o máximo de espaço seja aproveitado?

SOLUÇÃO:

Como ainda não é conhecida a largura da horta, foi adotado x para representar essa largura, e para manter os 20m de tela, foi posto para o comprimento 10 – x, de tal forma que ao calcular o perímetro do retângulo será mantido os 20m de tela. Circunstância ilustrada pela Figura 5.

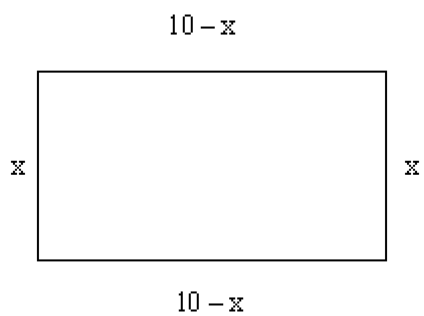

Figura 5 - Representação inicial da área da horta

Como o perímetro é de 20m, as dimensões do retângulo são de 10 – x e x. Calculando a área do retângulo, obtêm-se:

$$A(x) = x \cdot (10 - x) \tag{19}$$

$$A(x) = 10 \cdot x - x^2$$

A área será máxima, quando a tangente tiver inclinação zero.

$$A'(x) = 10 - 2 \cdot x \tag{20}$$

Igualando- se a derivada a zero, $10 - 2 \cdot x = 0$, logo $x = 5$.

Para que seja possível ter o maior aproveitamento da área com os 20m de tela, a dona de casa deverá fazer sua horta com as dimensões de 5m x 5m, onde obterá uma área útil de $25m^2$.

Problema do reservatório de água

PROBLEMA 4. Carlos Antônio precisa fazer um reservatório de água (espécie de tanque) feito com tijolo e cimento revestido de cerâmica, sem tampa, tendo na base um retângulo com comprimento igual ao triplo da largura. Calcule as dimensões que permitem a máxima economia de material para produzir o reservatório de volume de 36 m^3.

SOLUÇÃO:

Indicando-se a largura por x, o comprimento por 3.x e a altura por y, obter-se-á a Figura 6:

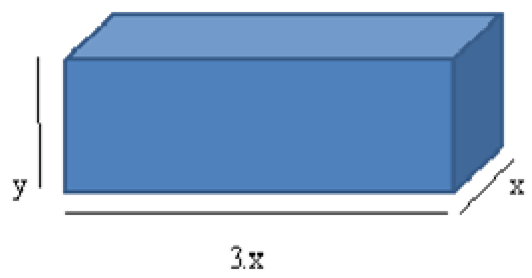

Figura 6 - Representação do reservatório de água

O volume desta caixa é dado por $V = 3 \cdot x \cdot x \cdot y = 3 \cdot x^2 \cdot y$ e então,

$$V = 3 \cdot x^2 \cdot y\ ,\ V = 36\ m^3 \tag{21}$$

$$3 \cdot x^2 \cdot y = 36\ ,\ y = \frac{36}{3 \cdot x^2}$$, ou seja,

$$y = \frac{12}{x^2}$$

A área total da caixa é $A = (3 \cdot x \cdot x + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y)$, logo a área é dada por:

$$A = 3 \cdot x^2 + 8 \cdot x \cdot y \quad (22)$$

Substituindo y na área,

$$A(x) = 3 \cdot x^2 + 8 \cdot x \cdot \frac{12}{x^2} = 3 \cdot x^2 + \frac{96}{x} \quad (23)$$

$$A(x) = \frac{3 \cdot x^3 + 96}{x}$$

Para encontrar o valor máximo ou mínimo é preciso derivar a área e igualar à zero, assim:

$$A'(x) = \frac{(9 \cdot x^2) \cdot x - (3 \cdot x^3 + 96) \cdot 1}{x^2} \quad (24)$$

$$A'^{(x)} = \frac{-3 \cdot x^3 + 9 \cdot x^3 - 96}{x^2} = \frac{6 \cdot x^3 - 96}{x^2}$$

$$A'(x) = 0,$$

$$A'(x) = 6 \cdot x^3 - 96 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2} \cong 2{,}52$$ metros.

Para calcular a altura é só substituir a medida x em $y = \frac{12}{x^2}$, $y = \frac{12}{\sqrt[3]{16}}$, logo, $y = 4{,}76$ metros. Logo, as dimensões que permitem a máxima economia de material para um tanque de volume 36 m^3, são aproximadamente: comprimento, largura e altura, respectivamente, 7,56 m, 2,52 m e 4,76 m.

Problema do suco

PROBLEMA 5. O empresário Augusto deseja lançar um novo suco em lata no mercado. Para isso, foi feito um contrato com uma indústria de embalagens, que deve fabricar recipientes cilíndricos em alumínio com capacidade de 800 cm^3. Qual deve ser a medida R do raio da base e a medida H da altura de cada um desses recipientes cilíndricos de modo que a quantidade de alumínio utilizada para sua fabricação seja mínima?

SOLUÇÃO:

A área total do cilindro é $A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + 2 \cdot \pi \cdot R^2$ e seu volume é $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$, ilustrado na Figura 7.

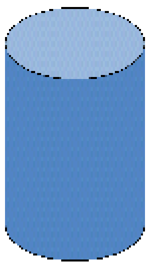

Figura 7 - Representação do recipiente cilíndrico

$$V = 800\ cm^3$$

$$\pi \cdot R^2 \cdot H = 800$$

$$H = \frac{800}{\pi \cdot R^2} \quad (25)$$

Substituindo na fórmula da área a altura tem-se o seguinte:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \frac{800}{\pi \cdot R^2} + 2 \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{1600 \cdot \pi \cdot R}{\pi \cdot R^2} + 2 \cdot \pi \cdot R^2 \quad (26)$$

$$A = \frac{1600}{R} + 2 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$A(R) = \frac{1600 + 2 \cdot \pi \cdot R^3}{R}$$

Derivando a área em relação ao raio e depois igualando a zero,

$$A'(R) = \frac{(6.\pi.R^2) \cdot R - (1600 + 2 \cdot \pi \cdot R^3) \cdot 1}{R^2} \quad (27)$$

$$A'(R) = \frac{4 \cdot \pi R^3 - 1600}{R^2} = 0$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{1600}{4.\pi}}$$

$R = \sqrt[3]{\frac{400}{\pi}}$ cm e para encontrar a altura só substituir em $H = \frac{800}{\pi.R^2}$, assim:

$$H = \frac{800}{\pi.\left[\sqrt[3]{\frac{400}{\pi}}\right]^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\frac{400}{\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{400}{\pi}}} \tag{28}$$

$$H = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{400}{\pi}} \text{ cm.}$$

Logo, as medidas do raio e da altura serão, respectivamente, $\sqrt[3]{\frac{400}{\pi}}$ cm e $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{400}{\pi}}$ cm, que equivalem a 5,03cm e 10,06cm , ou seja, $H = 2 \cdot R$.

Problema do galinheiro

PROBLEMA 6. Um agricultor precisa construir um galinheiro de forma retangular utilizando-se de uma tela de 16m. Sabendo que ele vai usar um muro como fundo do galinheiro, determine as dimensões do mesmo para que sua dimensão seja máxima. Ver Figura 8.

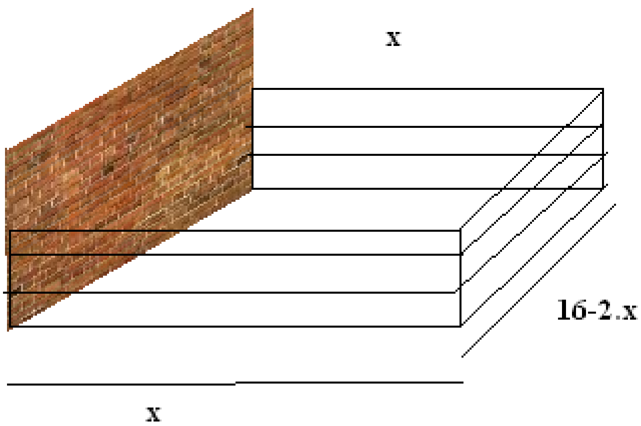

Figura 8 - Ilustração de um galinheiro

SOLUÇÃO:

O comprimento de tela é de 16m e como ele vai aproveitar o muro logo as dimensões do galinheiro serão x m, $16 - 2x$ m, xm.

A área é $A(x) = (16 - 2 \cdot x) \cdot x$ a derivada da área igualada à zero determinará qual o valor das dimensões para que seja máxima a área do galinheiro.

$$A(x) = 16 \cdot x - 2 \cdot x^2 \tag{29}$$

$$A'(x) = 16 - 4 \cdot x = 0$$

$$x = 4$$

Logo as dimensões são 4m e 8m.

4.2 APLICAÇÕES NA ECONOMIA

MARQUES (2006) descreve que problemas em administração e economia, na maioria das vezes envolvem maximização de lucro e receita, e minimização de custos. Podendo então, com o auxilio da derivada, calcular o máximo de lucro que uma indústria pode obter e o menor custo, na confecção do produto.

Segundo MUNEM & FOULIS (1982), em economia, o termo “marginal” é freqüentemente usado como um sinônimo virtual para “derivada de”. Por exemplo, se C é uma função custo tal que $C(x)$ é o custo da produção de x unidades de certa mercadoria, $C'(x)$ é chamado de custo marginal da produção de x unidades e C' é chamada de função custo marginal. Desse modo, o custo marginal é a taxa de variação do custo da produção por variação da produção por unidade.

Problema do lucro

PROBLEMA 7. Sabendo-se que o custo total de produção de x microondas por dia é de R$$\left(\frac{1}{2}\cdot x^2 + 70\cdot x + 50\right)$ e o preço unitário é de R$ $(100 - x)$. Qual deve ser a produção diária para que o lucro seja máximo?

SOLUÇÃO:

O Lucro Total é dado por L = Receita (R) – Custo (C), onde a Receita = P(x).x.

$$C(x) = \left(\frac{1}{2}\cdot x^2 + 70\cdot x + 50\right),\ P(x) = (100 - x) \text{ e } R(x) = 100\cdot x - x^2 \qquad (30)$$

$$L(x) = R(x) - C(x) = [100\cdot x - x^2] - \left[\frac{1}{2}\cdot x^2 + 70\cdot x + 50\right]$$

$$L(x) = 100\cdot x - x^2 - \frac{1}{2}\cdot x^2 - 70\cdot x - 50$$

$$L(x) = -\frac{3}{2}\cdot x^2 + 30\cdot x - 50$$

Calculando a derivada primeira da função lucro, em relação à x ,

$$L'(x) = -3\cdot x + 30 \qquad (31)$$

Para calcular os pontos críticos de L é só igualar $L'(x)$ a zero, ou seja, L'(x) = 0, e vêm $-3.x + 30$ = 0, que resultará em $x = 10$, ponto critico da função. Portanto, é preciso fabricar 10 microondas por dia.

Problema de venda

PROBLEMA 8. No cinema, o preço de um pacote de pipoca é de R$ 4,50. O pipoqueiro pode vender 500 pacotes de pipocas com o custo de R$1,40 por pacote. Para cada centavo que o pipoqueiro baixar no preço do pacote, a quantidade vendida pode aumentar de 50 unidades (pacotes). Que preço de venda maximizará o lucro?

SOLUÇÃO:

Inicialmente, observe que o lucro é de R$ 3,10 por pacote. Se x denotar o número de centavos que o pipoqueiro baixa no preço de cada pacote; o lucro na venda de cada pacote de pipoca será então de $310 - x$ centavos, e a quantidade vendida será $500 + 50x$. O lucro total é, portanto, o lucro por unidade (pacote) vezes a quantidade vendida, ou seja,

$$L = L(x) = (310 - x)\cdot(500 + 50x) = 155000 + 15500x - 500x - 50x^2 \qquad (32)$$

$$L(x) = 155000 + 15000x - 50x^2$$

Agora, deve-se maximizar a função $L(x)$. Como L é uma função polinomial, acontece quando iguala sua derivada à zero (uma vez que a derivada sempre existe) e resolvendo a equação resultante. Sendo:

$$L'(x) = 15000 - 100x \tag{33}$$

$$15000 - 100x = 0 \Leftrightarrow x = 150$$

Como a derivada segunda de L é igual a $L''(x) = -100$, portanto negativa para qualquer valor de x , segue que $x = 150$ é um ponto de máximo. Assim, o preço de venda que dará o maior lucro é de R$ 3,00.

Problema de produção

PROBLEMA 9. O preço da produção de n unidades de carpetes para sala de estar é dado pela função $f(n) = 30 + 20 \cdot n$. Se o preço de venda de cada bateria é $60 - \frac{n}{1000}$, para $n < 50.000$, determine o número de baterias que devem ser fabricadas e vendidas para que o lucro seja máximo.

SOLUÇÃO:

A função lucro será denotada por:

$$L(x) = n.\left(60 - \frac{n}{1000}\right) - f(n) \tag{34}$$

$$L(x) = n \cdot \left(60 - \frac{n}{1000}\right) - [30 + 20 \cdot n]$$

$$L(x) = 60 \cdot n - \frac{n^2}{1000} - 30 - 20 \cdot n$$

$$L(x) = (40.000n - n^2 - 30000)$$

Derivando a função Lucro e igualando a zero para determinar o ponto crítico:

$$L'(x) = 40.000 - 2 \cdot n \tag{35}$$

$$L'(x) = 0$$

$$40.000 - 2 \cdot n = 0$$

$$n = 20.000$$

Sendo assim, o número de carpetes fabricados para que o lucro seja máximo é de 20.000.

4.3 APLICAÇÕES NA FÍSICA

4.3.1 Interpretação Cinemática da Derivada

De acordo com Iezzi, Murakami e Machado (1993), do estudo da Cinemática sabe-se que a posição de um ponto material em movimento, sobre uma curva ξ (trajetória) conhecida, pode ser determinada, em cada instante t, através de sua abscissa s, medida sobre a curva ξ. A função que fornece s em função de t: s= s(t), Chamada de equação horária.

Sendo dado um instante t_0 e sendo t um instante diferente de t_0, chama-se velocidade escalar média do ponto entre os instantes t_0 e t o quociente:

$v_m = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ e chama-se velocidade escalar do ponto no instante t_0 e t o limite:

$$v_{(t_0)} = \lim_{t \to t_0} v_m = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0) \qquad (33)$$

Daí, conclui-se que a derivada da função $s = s(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à velocidade escalar do móvel no instante t_0.

Ainda conforme os autores, sabendo que a velocidade v de um ponto material em movimento pode variar de instante para instante, a equação que fornece a velocidade em função do tempo t : $v = v(t)$, é chamada equação da velocidade do ponto.

Sendo dado um instante t_0 e um instante t, diferente de t_0, chama-se aceleração escalar média do ponto entre os instantes t_0 e t o quociente: $a_m = \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ e chama-se aceleração escalar do ponto no instante t_0 o limite:

$$a_{(t_0)} = \lim_{t \to t_0} a_m = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t_0) \qquad (34)$$

Conclui-se que a derivada da função $v = v(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à aceleração escalar do móvel no instante t_0.

Problema de Lançamento Vertical

PROBLEMA 10. Uma bola de basquete é lançada verticalmente para cima, por um menino, e tem posições s no decorrer do tempo t dadas pela função horária $s(t) = 60 \cdot t - 5 \cdot t^2$ (s em metros e t em segundos). a) Calcule o tempo gasto para atingir a altura máxima. b) Determine a altura máxima em relação ao solo. Ver na Figura 7.

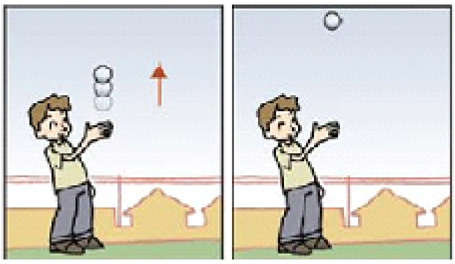

Figura 9 - Lançamento vertical

SOLUÇÃO: Como a função horária é a função que determina o espaço em função do tempo, ao derivar a expressão $s(t) = 60 \cdot t - 5 \cdot t^2$, tem-se a velocidade instantânea em função do tempo, assim, $s'(t) = v(t) = 60 - 10 \cdot t$, igualando a zero a velocidade implica que:

$$v(t) = 0 \tag{36}$$
$$60 - 10 \cdot t = 0$$
$$t = 6\, segundos$$

Para determinar a altura é preciso substituir o tempo na expressão do espaço, tem-se:

$$s(6) = 60 \cdot 6 - 5 \cdot 6^2 \tag{37}$$
$$s(6) = 180\, metros$$

Assim, conclui-se que o tempo gasto para atingir a altura máxima é 6 segundos e a altura máxima em relação ao solo é de 180 metros.

Problema do Deslocamento

PROBLEMA 11. Um móvel desloca-se sobre um seguimento de reta obedecendo à equação horária $s = \cos t$ (Unidades do SI). Determine: a) Sua velocidade instante $t = \frac{\pi}{4}\ segundos$; b) Sua aceleração no instante $t = \frac{\pi}{6}\ segundos$.

SOLUÇÃO:

Derivando-se a função $s(t) = \cos t$, obtém-se como solução da letra "a":

$$s'(t) = v(t) = -\operatorname{sen} t \tag{38}$$
$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$
$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\, m/s$$

Derivando a velocidade em função do tempo tem-se:

$$v'(t) = a(t) = -\cos t \tag{39}$$

$$a\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6}$$

$$a\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ m/s^2$$

Logo sua velocidade e sua aceleração são, respectivamente, $-\frac{\sqrt{2}}{2}\ m/s$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2}\ m/s^2$.

Problema de carga elétrica

PROBLEMA 12. Uma carga elétrica, em Coulombs, transmitida através de um circuito varia de acordo com a função $q(t) = 12 \cdot t^4 - 48 \cdot t^3$. Determinar o tempo t quando a corrente $i = q'(t)$ atinge um valor mínimo.

SOLUÇÃO:

Derivando-se a expressão $q(t) = 12 \cdot t^4 - 48 \cdot t^3$ e em igualando a zero resultará em:

$$q'(t) = 48 \cdot t^3 - 144 \cdot t^2 \qquad (40)$$

$$q'(t) = 0$$

$$48 \cdot t^3 - 144 \cdot t^2 = 0$$

$$t = 0\ segundo \text{ ou } t = 3\ segundos$$

Assim, para $q(0) = 0$ e $q(3) = -324$, logo a solução é $t = 3\ segundos$.

Problema de temperatura

PROBLEMA 13. Flávia Freire, jornalista que apresenta a previsão do tempo no Jornal Hoje, alerta as pessoas que moram na região sul que tirem seus agasalhos do guarda-roupa, pois estava chegando uma frente fria. A temperatura em T graus e t horas após a meia-noite é $T = 0{,}1.(400 - 40t + t^2)\ 0 \leq t \leq 12$. (a) Ache a taxa de variação média de T em relação à t entre 5h e 6h; (b) Ache a taxa de variação de T em relação à t às 5h.

SOLUÇÃO: Este problema envolve taxa de variação da Temperatura em graus em relação ao tempo, logo ao derivar T em relação t:

$$\frac{dT}{dt} = 0{,}1 \cdot (-40 + 2 \cdot t) \qquad (41)$$

$$\frac{dT}{dt} = -4 + 0{,}2 \cdot t$$

Como a na alternativa “a” pede na media de horas entre 5h e 6h, substituindo o $t = 5{,}5\ h$ tem-se que:

$$\frac{dT}{dt} = -4 + 0{,}2 \cdot 5{,}5 \tag{42}$$

$$\frac{dT}{dt} = -4 + 1{,}1$$

$$\frac{dT}{dt} = -2{,}9\ graus$$

Já na alternativa “b” pede-se para calcular em $t = 5\ h$, logo:

$$\frac{dT}{dt} = -4 + 0{,}2 \cdot 5 \tag{43}$$

$$\frac{dT}{dt} = -4 + 1$$

$$\frac{dT}{dt} = -3\ graus.$$

4.4 APLICAÇÕES NAS CIÊNCIAS BIOLÓGICAS

As aplicações das derivadas aparecem como taxas relacionadas onde de acordo como Leithold (1994) sua interpretação mostra sua maior importância.

Problema do crescimento do tumor

PROBLEMA 14. Drª. Cláudia Eller diz ao seu paciente que tem um tumor no corpo e suponha que seja de forma esférica. Ela pergunta para ele: Se quando o raio do teu tumor for 0,5 cm, o raio estiver crescendo a uma taxa de 0,001 cm por dia, qual será a taxa de aumento do volume do tumor naquele instante?

SOLUÇÃO: No tempo t o tumor tem raio r = 0,5 cm, $\frac{dr}{dt}$ = 0,001 cm e volume $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$, então:

$$\frac{dV}{dt} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{dr}{dt} \tag{44}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4 \cdot \pi \cdot (0{,}5)^2 \cdot 0{,}001$$

$$\frac{dV}{dt} = 4 \cdot \pi \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}001$$

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}001.\pi\ cm^3/dia$$

Problema da velocidade

PROBLEMA 15. Durante a tosse há um decréscimo no raio da traquéia de uma pessoa. Suponha que o raio da traquéia seja R cm e que durante a tosse o raio seja de r cm, onde R é uma constante e r uma variável. Pode-se mostrar que a velocidade do ar através da traquéia é uma função de r e se $V(r)$ cm/s for essa velocidade, então$V(r) = kr^2\ (R - r)$ onde k é uma constante positiva e r esta em $\left[\frac{1}{2}R, R\right]$. Determine o raio da traquéia durante a tosse, para a velocidade do ar através da traquéia seja máxima. Ver Figura 9.

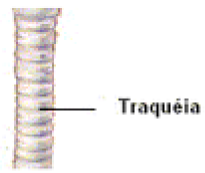

Figura 10 - Traquéia

SOLUÇÃO: Melhorando a expressão $V(r) = kRr^2 - kr^3$, derivando-a e igualando a zero tem-se:

$$V'(r) = 2kRr - 3kr^2 \tag{45}$$

$$V'(r) = 0$$

$$2kRr - 3kr^2 = 0$$

$$kr(2R - 3r) = 0$$

$$kr = 0 \text{ ou } 2R - 3r = 0$$

$$r = 0 \text{ ou } 3 \cdot r = 2R$$

$$r = \frac{2R}{3}$$

A solução do problema é $r = \frac{2R}{3}$, pois $V\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{4kR^3}{27}$ que é a maior velocidade.

Problema da população

PROBLEMA 16. Centenas de animais pertencendo a uma espécie em perigo estão colocadas numa reserva de proteção. Depois de t anos a população p desses animais na reserva é dada por $p = 100 \cdot \frac{t^2 + 5 \cdot t + 25}{t^2 + 25}$. Após quantos anos a população é máxima?

SOLUÇÃO: Derivando-se a expressão da população dessa espécie em relação ao tempo em anos e em seguida igualando a zero tem-se o tempo em que a população é máxima, assim:

$$p = 100 \cdot \frac{t^2 + 5 \cdot t + 25}{t^2 + 25} \tag{46}$$

$$p' = 100 . \frac{(2 \cdot t + 5) \cdot (t^2 + 25) - (t^2 + 5 \cdot t + 25) \cdot 2 \cdot t}{[t^2 + 25]^2}$$

$$p' = 100 \cdot \frac{-5 \cdot t^2 + 125}{[t^2 + 25]^2}$$

$$p' = 500 \cdot \frac{[25 - t^2]}{[t^2 + 25]^2}$$

$$p' = 0$$

$$500 \cdot \frac{[25 - t^2]}{[t^2 + 25]^2} = 0$$

$$[25 - t^2] = 0$$

$$t^2 = 25$$

$$t = 5 \text{ anos.}$$

Logo, no período de 5 anos a população dessa espécie em perigo será máxima.

Problema de crescimento populacional

PROBLEMA 17. Certo lago pode suportar uma população máxima de 20.000 peixes. Se há poucos peixes no lago, a taxa de crescimento populacional será proporcional ao produto da população existente pela diferença da população existente a partir de 20.000. Para que população a taxa de crescimento será máxima? [NOTA: Indique por $f(x)$ a taxa de crescimento para uma população de dimensão x, então $f(x) = kx(20.000 - x)$.

SOLUÇÃO: Derivando a expressão, tem-se:

$$f(x) = kx(20.000 - x) \tag{47}$$

$$f'(x) = 20.000k - 2kx$$

$$2kx = 20.000k$$

$$x = 10.000 \text{ peixes.}$$

Problema de pressão sangüínea

PROBLEMA 18. Suponha que a diminuição na pressão sangüínea de uma pessoa dependa de uma determinada droga que ela deverá tomar. Assim, se x mg da droga forem tomados, a queda da pressão sangüínea será uma função de x. Seja $f(x)$ esta função e $f(x) = \frac{1}{2}x^2\ (k - x)$ onde x está em $[0, k]$ e k é uma constante positiva. Determine o valor de x que cause o maior decréscimo na pressão sangüínea.

SOLUÇÃO:

$$f(x) = \frac{1}{2}k \cdot x^2 - \frac{1}{2}x^3 \tag{48}$$

$$f'(x) = k \cdot x - \frac{3}{2}x^2$$

$$k \cdot x - \frac{3}{2}x^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{3}k$$

Logo o valor de x para que se tenha o maior decréscimo da pressão é $\frac{2}{3}k$.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A História da Matemática é um recurso didático no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. Visto que a recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático facilita o ensino aprendizagem do aluno. A história da criação da Derivada mostra as dificuldades que os matemáticos daquelas épocas passaram, ao tentar resolver problemas de tangências e quadratura do círculo. Não obstante, seu estudo foi desenvolvido ao longo de 2500 anos com o auxílio de diversos matemáticos onde dois matemáticos foram os maiores influenciadores na criação da derivada, Newton e Leibniz.

A Diferenciação está presente não apenas no ensino da matemática como no estudo da inclinação de retas, mas no ensino da física, onde pode ser determinada a velocidade e aceleração de um objeto, por exemplo, na economia empresarial, em atividades como a maximização da capacidade de embalagens e minimização de custos. Como taxa de variação ela mostra sua importância em diversos ramos das ciências tais como física, biologia, química, economia, entre outros.

A finalidade deste trabalho foi de mostrar e fazer uma síntese das derivadas desde os aspectos históricos, das definições e das aplicações desta no cotidiano. O material resultante deste trabalho poderá ser utilizado como fonte de consultas a alunos de diversos cursos de graduação, ao apresentar problemas de diversas áreas os quais antes estavam dispersos.

Entretanto, deve-se ressaltar que as aplicações de derivadas não se delimitam apenas a essas que foram mostradas aqui. Na verdade, a derivada constitui uma ferramenta poderosa para o estudo e análise de funções.

6. REFERÊNCIAS

AYRES JR., Frank; MENDELSON, Elliott. **Cálculo Diferencial e Integral.** (Coleção Schaum). 3ª ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

BRASIL, Ministério de Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental Matemática** - 5ª a 8ª série. Brasília, SEF, 1997.

DINIZ, Geraldo L. **História da Derivada.** Disponível em: http://www.UFMT.br/icet/matematica/geraldo/histderivada.htm. Acesso em 12 de março de 2010, 20:00h.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática.** 2ª Ed. São Paulo: UNICAMP, 2002.

FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flemming; WAGNER, Christian **Cálculo I**, 4ª ed. rev., Palhoça: Unisulvirtual, 2006.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: Ciência e Aplicações.** 2ª ed. 3 Vol. São Paulo: Atual, 2004.'

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 5ª ed. 3 reimp. 8 Vol. São Paulo: Atual, 1993.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3ª ed. 1 Vol. São Paulo: Harbra, 1994.

MARQUES, Jair Mendes. **Matemática Aplicada**. 5. tir. Curitiba: Juruá, 2006.

MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J. **Cálculo.** 1 Vol. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1982.

PARANHOS, Marcos de Miranda. **Geometria Dinâmica e o Cálculo Diferencial e Integral.** São Paulo: PUC-SP, 2009.

PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. **Didática da Matemática**: Reflexões Piscopedagógicas. Ed.: Artmed. Porto Alegre, 2001.

ZUFFI, Edna Maura. **Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função.** Educação Matemática em Revista (São Paulo)**,** São Paulo**,** v. Ano 8, n.9, p. 10-16, 2001.