Parece que essas estimativas também estão em direção a 12. Aqui está a fórmula para a soma dos retângulos de extremos direitos:

A regra dos triângulos retângulos: Você pode aproximar a área exata sob uma curva entre a e b, $\int_a^b f(x)\,dx$, com a soma dos retângulos certos dados pela seguinte fórmula. Em geral, quanto mais retângulos, melhor é a estimativa.

$$R_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots\ldots\ldots + f(x_n)\right]$$

onde n é o número de retângulos, $\frac{b-a}{n}$ é a largura de cada retângulo, e os valores da função são as alturas dos retângulos.

Agora se você comparar essa fórmula com a fórmula para a soma dos retângulos com extremos esquerdos (no tópico "Área aproximada pela soma dos extremos esquerdos"), você tem a imagem completa sobre esses subscritos. As duas fórmulas são a mesma exceto por uma coisa. Olhe para as somas dos valores da função em ambas as fórmulas. A fórmula para a soma dos extremos direitos tem um valor, $f(x_n)$, que a fórmula da soma dos extremos esquerdos não tem, e a fórmula da soma dos extremos esquerdos tem um valor, $f(x_0)$, que a fórmula da soma dos extremos direitos não tem. Todos os valores da função entre esses dois aparecem nas duas fórmulas. Você pode entender melhor comparando os três retângulos com extremos esquerdos da Figura 13-6 com os três retângulos com extremos direitos da Figura 13-8. Suas áreas e totais, que nós calculamos mais cedo, são:

Três retângulos com extremos esquerdos: $1 + 2 + 5 = 8$

Três retângulos com extremos direitos: $2 + 5 + 10 = 17$

As somas das áreas são as mesmas exceto pelo retângulo com extremo esquerdo mais à esquerda e pelo retângulo com extremo direito mais à direita. Ambas as somas incluem os retângulos com áreas de 2 e 5. Se você olhar para como os retângulos são construídos, você poderá ver que o segundo e terceiro retângulos na Figura 13-6 são iguais ao primeiro e segundo retângulos na Figura 13-8.

Uma última coisa sobre isso. A diferença entre a área total do retângulo com extremo direito (17) e a área total do retângulo com extremo esquerdo (8) – isto é, 17 menos 8, ou 9, caso você ame cálculo mas ainda não aprendeu a subtração básica – vem da diferença entre as áreas dos dois retângulos "finais" discutidos agorinha – 10 menos 1 também é 9. Todos os outros retângulos são repetidos, não importa quantos retângulos você tenha.

Área aproximada pela soma dos pontos médios

Uma terceira maneira de aproximar áreas com retângulos é fazer cada retângulo cruzar a curva no ponto médio da sua parte superior. A soma do ponto médio é uma *melhor* estimativa da área do que a soma esquerda ou direita. A Figura 13-9 mostra por que.

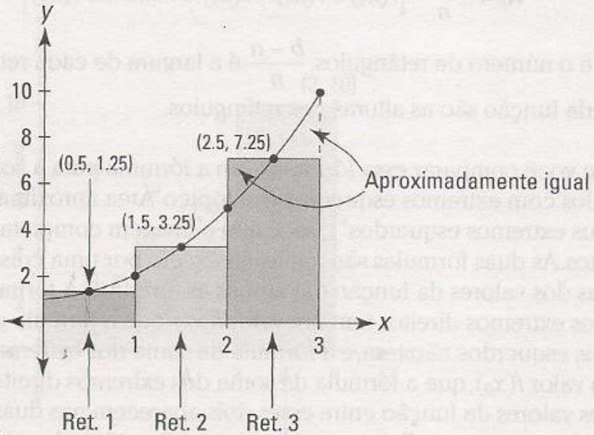


Figura 13-9: Três pontos médios dos retângulos lhe dão uma melhor estimativa da área sob $f(x) = x^2 + 1$.

Você pode ver na Figura 13-9 que a parte de cada retângulo que está acima da curva aparenta ter o mesmo tamanho que a lacuna entre o retângulo e a curva. A soma do ponto médio produz uma boa estimativa porque esses dois erros cancelam, em linhas gerais, um ao outro.

Para os três retângulos da Figura 13-9, as larguras são iguais a 1 e as alturas são $f(0.5) = 1.25$, $f(1.5) = 3.25$, e $f(2.5) = 7.25$. A área total chega a 11,75. A Tabela 13-3 lista as somas dos pontos médios para o mesmo número de retângulos na Tabela 13-1 e 13-2.

Tabela 13-3 Estimativas para a área sob $f(x) = x^2 + 1$ dadas pelos números crescentes dos "pontos médios" dos retângulos

Número de retângulos	Área estimada
3	11.75
6	11.9375
12	~11.9844
24	~11.9961
48	~11.9990
96	~11.9998
192	~11.9999
384	~11.99998

Se você tem qualquer dúvida que as somas dos extremos esquerdos e direitos nas Tabelas 13-1 e 13-2 estão na direção de 12, a Tabela 13-3 deve refutá-las. Sim, de fato, a área exata é 12 – desculpe entregar o final. E para ver quão rápido as aproximações do ponto médio se aproximam da resposta exata de 12 do que as aproximações esquerda ou direita, compare as três tabelas. O erro com os 6 pontos médios dos retângulos é mais ou menos o mesmo erro com 192 retângulos esquerdos ou direitos! Aqui está a bobagem.

BOBAGEM MATEMÁTICA

A regra do ponto médio: Você pode aproximar a área exata sob uma curva entre a e b, $\int_a^b f(x)\,dx$, com a soma dos *pontos médios* dos retângulos dados pela seguinte fórmula. Em geral, quanto mais retângulos, melhor é a estimativa.

$$M_n = \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+\ldots\ldots\ldots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]$$

onde n é o número de retângulos, $\frac{b-a}{n}$ é a largura de cada retângulo, e os valores da função são as alturas dos retângulos.

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

Todas as três somas – esquerda, direita e ponto médio – são chamadas de *somas de Riemann* em homenagem ao matemático G.F.B. Riemann (1826-66). Basicamente, qualquer soma aproximada feita de retângulos é uma soma de Riemann, incluindo somas estranhas consistidas de retângulos de larguras desiguais. Com sorte, você não vai ter que lidar com essas somas nesse livro ou em qualquer curso de cálculo.

A soma esquerda, direita e ponto médio nas Tabelas 13-1, 13-2, e 13-3 estão todas seguindo na direção de 12, e se você puder dividir a área em um número infinito de retângulos, você obterá a área exata de 12. Mas eu estou me excedendo.

Ficando sofisticado com a notação somatória

Antes que eu entre na definição formal da *integral definida* – isto é, a incrível ferramenta do cálculo que corta mais ou menos uma área em um número infinito de retângulos e com isso você tem a área *exata* – há mais uma coisa para tomar cuidado: a notação somatória.

Resumindo os conceitos básicos

Para somar séries longas de números como as áreas do retângulo em uma soma esquerda, direita e ponto médio, a notação somatória ou sigma é útil.

Digamos que você quisesse somar os 100 primeiros múltiplos de 5 – isto é, de 5 até 500. Você poderia escrever essa soma da seguinte forma:

$$5 + 10 + 15 + 20 + 25 + ... + 490 + 495 + 500$$

Mas com a notação sigma (sigma, $\sum$, é a 18ª letra do alfabeto grego – não diga!) a soma fica muito mais condensada e eficiente, e, vamos ser honestos, parece muito legal:

$$\sum_{i=1}^{100} 5i$$

Essa notação diz para você apenas inserir 1 no lugar de i em $5i$, depois inserir 2 no lugar de 1 em $5i$, depois 3, depois 4, e assim até chegar a 100. Depois você soma os resultados. Então isto é 5×1 mais 5×2 mais 5×3, e assim por diante, até 5×100. Isso é a mesma coisa que escrever a soma da maneira longa. A propósito, a letra i não tem significância. Você pode escrever a soma com um j, $\sum_{j=1}^{100} 5j$, ou qualquer outra letra que você gostar.

Aqui tem mais um. Se você quiser somar $10^2 + 11^2 + 12^2 + ... + 29^2 + 30^2$, você pode escrever a soma com a notação sigma como segue:

$$\sum_{k=10}^{30} k^2$$

É realmente simples.

Escrevendo as somas de Riemann com a notação sigma

Você pode usar a notação sigma para escrever a soma dos extremos direitos para a curva $x^2 + 1$ nos tópicos de "Área aproximada". A propósito, você não precisa da notação sigma para o cálculo que se segue. É apenas uma "conveniência" – sim, certo. Cruze os dedos e torça para que o seu professor decida não abordar o que se segue. Fica muito difícil.

Lembre-se da fórmula para a soma dos extremos direitos do tópico anterior "Área aproximada pela soma dos extremos direitos":

$$R_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_n)\right]$$

Aqui está a mesma fórmula escrita com a notação sigma:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right) \right]$$

Agora resolva isso para os seis retângulos direito na Figura 13-10.

Você está descobrindo a área sob $x^2 + 1$ entre 0 e 3 com seis retângulos, então a largura de cada, $\frac{b-a}{n}$, é $\frac{3-0}{6}$, ou $\frac{3}{6}$, ou $\frac{1}{2}$. Assim, agora você tem

$$R_n = \sum_{i=1}^{6} \left[f(x_i) \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \right]$$

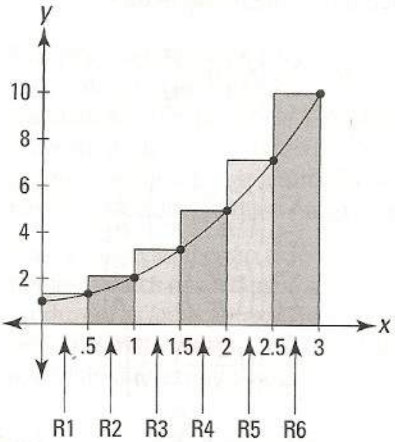


Figura 13-10: Seis retângulos direitos aproximam a área sob $f(x) = x^2 + 1$ entre 0 e 3.

Agora, devido ao fato de a largura de cada retângulo ser $\frac{1}{2}$, os lados direitos dos seis retângulos caem nos seis primeiros múltiplos de $\frac{1}{2}$: 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, e 3. Esses números são as coordenadas x dos seis pontos x_1 até x_6; eles podem ser gerados pela expressão $\frac{1}{2}i$, onde i é igual de 1 até 6. Você pode verificar que isso funciona inserindo 1 no lugar de i em $\frac{1}{2}i$, depois 2, depois 3, até 6. Então agora você pode substituir o x_1 na fórmula por $\frac{1}{2}i$, dando a você

$$R_6 = \sum_{i=1}^{6} \left[f\left(\frac{1}{2}i \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \right]$$

Nossa função, $f(x)$, é $x^2 + 1$ então $f\left(\frac{1}{2}i\right) = f\left(\frac{1}{2}i\right)^2 + 1$, e assim você pode agora escrever

$$R_6 = \sum_{i=1}^{6} \left[\left(\left(\frac{1}{2}i \right)^2 + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \right]$$

Se você colocar 1 no lugar de i, depois 2, depois 3, e assim por diante até 6 e fizer os cálculos, você obtém a soma das áreas dos retângulos na Figura 13-10. Essa notação sigma é apenas uma maneira sofisticada de escrever a soma dos seis retângulos.

Estamos nos divertindo? Espera aí, fica mais difícil – desculpe. Agora você vai escrever a soma geral para um número desconhecido (n) de retângulos direitos. O intervalo total da área em questão é 3, certo? Você divide esse intervalo pelo número de retângulos para obter a largura de cada retângulo. Com 6 retângulos, a largura de cada um é $\frac{3}{6}$; com n retângulos, a largura de cada um é $\frac{3}{n}$. E os lados direitos dos n retângulos são gerados por $\frac{3}{n}i$, para i igual de 1 até n. Isso te dá

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(\frac{3}{n}i\right) \cdot \frac{3}{n} \right]$$

Ou, porque $f(x) = x^2 + 1$,

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\left(\frac{3}{n}i\right)^2 + 1 \right) \cdot \frac{3}{n} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\left(\frac{9i^2}{n^2}\right) + 1 \right) \cdot \frac{3}{n} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{27i^2}{n^3} \right) + \frac{3}{n} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{27i^2}{n^3} + \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n} \qquad \text{(acredite em mim)} \\ &= \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 \end{aligned}$$

Para esse último passo, extraia o $\frac{27}{n^3}$ e o $\frac{3}{n}$ através dos sinais do somatório – é permitido que você extraia qualquer coisa exceto por uma função de i, também conhecida como *índex da somatória*. Além disso, o segundo somatório no último passo tem apenas 1 depois dele e não um i. Então não há nenhum lugar para inserir os valores de i. Essa situação pode parecer um pouco estranha, mas tudo o que você faz é somar n 1s, que é igual a n (Eu faço isso abaixo, no próximo passo).

Você agora chegou a um passo crítico. Com um truque você vai transformar a soma de Riemann anterior em uma fórmula em função de n. Essa fórmula é o que você usa para obter a área exata sob a curva no próximo tópico, chamado apropriadamente de "Encontrando a área exata com a integral definida".

Agora, como quase ninguém sabe, a soma dos primeiros n números ao quadrado, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2$, é igual a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (A propósito, esse três pares, você pode facilmente converter o problema em um desses pares usando as identidades trigonométricas como $\text{sen}(x) = \frac{1}{\text{cosec }(x)}$ e $\text{tg}(x) = \frac{\text{sen }(x)}{\cos (x)}$ (veja a folha de consulta para mais identidades trigonométricas úteis). Por exemplo,

$$\int \text{sen}^2(x) \sec(x)\text{tg}(x)dx$$

$$= \int \text{sen}^2(x) \frac{1}{\cos (x)} \cdot \frac{\text{sen }(x)}{\cos (x)} dx$$

$$= \int \frac{\text{sen}^3 (x)}{\cos^2 (x)} dx$$

Depois de fazer qualquer conversão necessária, você obtém um dos três casos a seguir:

$$\int \text{sen}^m(x) \cos^n(x)\, dx$$

$$\int \sec^m(x)\, \text{tg}^n(x)\, dx$$

$$\int \text{cosec}^m(x)\, \text{cotg}^n(x)\, dx$$

onde m ou n é um inteiro positivo.

DICA

Potências positivas de funções trigonométricas são, via de regra, mais desejáveis do que potências negativas, então, por exemplo, você quer converter $\int \text{sen}^{-2}(x)\, \text{tg}^{-2}(x)\, dx$ em $\int \text{cosec}^2(x)\, \text{cotg}^2(x)\, dx$.

A idéia básica com a maioria das integrais trigonométricas a seguir é organizar o integrando para que você possa fazer uma útil substituição em u e então integrar com a regra inversa da potência. Você vai ver o que eu quero dizer em um minuto.

A propósito, apesar de a lista de casos a seguir ser cansativa, ela não é completa. A meu ver, passar por todas as possibilidades seria tanto cruel quanto masoquista. Se seu professor lhe der integrais não abordadas pelos casos a seguir, boa sorte!

Integrais contendo senos e cossenos

Esse tópico cobre as integrais contendo – você consegue adivinhar? – senos e cossenos.

Caso 1: A potência do seno é ímpar e positiva

Se a potência do seno for ímpar e positiva, remova um fator seno e coloque na frente do resto da expressão, transforme os fatores seno restantes (pares) em cossenos com a identidade Pitagoreana, e depois integre com o método da substituição onde $u = \cos(x)$.

No caso 2 é $\text{sen}(\theta) = \frac{u}{a}$.

No caso 3 é $\text{tg}(\theta) = \frac{u}{a}$.

O fato do u ficar no numerador dessa fração $\frac{u}{a}$ deve ser fácil de lembrar porque u é uma expressão com x e algo do tipo $\frac{3x}{2}$ é de certa forma mais simples e natural de se ver do que $\frac{2}{3x}$. Então apenas lembre que o x fica na parte superior.

DICA

Para todos os três casos, o passo 3 sempre envolve colocar o radical sobre o a. Os três casos são dados abaixo, mas você não precisa decorar as funções trigonométricas nessa lista porque você vai saber qual delas você tem apenas olhando para o triângulo – supondo que você saiba *SohCahToa* e as funções trigonométricas recíprocas (volte para o Capítulo 6 se você não souber). Eu deixei de fora o que vai dentro do radical porque na hora que você estiver fazendo o passo 3, você já vai ter a expressão do radical correta.

No caso 1 é $\sec(\theta)\ \frac{\sqrt{\ }}{a}$.

No caso 2 é $\cos(\theta)\ \frac{\sqrt{\ }}{a}$.

No caso 3 é $\text{tg}(\theta)\ \frac{\sqrt{\ }}{a}$.

Resumindo, apenas lembre-se de $\frac{u}{a}$ para o passo 1 e $\frac{\sqrt{\ }}{a}$ para o passo 3.

Caso 2: Senos

Integre $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$, reescrevendo primeiro como $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4^2-x^2}}$ para que se enquadre na forma $\sqrt{a^2-u^2}$, onde $a = 4$ e $u = x$.

1. Desenhe um triângulo retângulo onde $\text{sen}(\theta) = \frac{u}{a}$, que é $\frac{x}{4}$.

Seno é igual a $\frac{\text{O}}{\text{H}}$, então o lado *oposto* é x e a *hipotenusa* é 4. O comprimento do lado adjacente é então automaticamente igual ao seu radical, $\sqrt{16-x^2}$. Você deve confirmar isso com o teorema de Pitágoras. Veja a Figura 15-9.

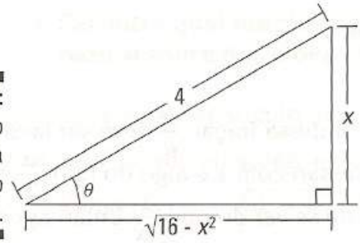


Figura 15-9: Um triângulo SohCahToa para o caso de $\sqrt{a^2 - u^2}$.

2. Resolva a sen(θ) = $\frac{x}{4}$ em função de x, diferencie, e ache o valor de dx.

$$\frac{x}{4} = \text{sen}(\theta)$$
$$x = 4\text{sen}(\theta)$$
$$\frac{dx}{d\theta} = 4\cos(\theta)$$
$$dx = 4\cos(\theta)d\theta$$

3. Encontre qual função trigonométrica é igual ao radical sobre o *a*, e depois ache o valor do radical.

Olhe para o triângulo da Figura 15-9. O radical $\sqrt{16 - x^2}$, sobre o *a*, 4, é $\frac{A}{H}$, que, você conhece do *SohCahToa*, é igual ao *cosseno*. Então isso lhe dá

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4}, \text{ e assim}$$

$$\sqrt{16 - x^2} = 4\cos(\theta)$$

4. Use os resultados dos passos 2 e 3 para fazer substituições no problema original e depois integre.

Note que nesse problema em particular você tem que fazer três substituições, não apenas duas como no primeiro exemplo. Dos passos 2 e 3 você tem

$$x = 4\text{sen}(\theta),\ dx = 4\cos(\theta)d\theta,\ \text{e}\ \sqrt{16 - x^2} = 4\cos(\theta),\ \text{então}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16 - x^2}} = \int \frac{4\cos(\theta)d\theta}{(4\,\text{sen}(\theta))^2\, 4\cos(\theta)}$$
$$= \int \frac{d\theta}{16\,\text{sen}^2(\theta)}$$
$$= \frac{1}{16}\int \text{cosec}^2(\theta)d\theta$$
$$= -\frac{1}{16}\text{cotg}(\theta) + C$$

5. O triângulo mostra que cotg(θ) $\frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}$. Agora, substitua de volta para a sua resposta final.

$$= -\frac{1}{16} \cdot \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} + C$$
$$= -\frac{\sqrt{16 - x^2}}{16x} + C$$

É muito fácil.

Caso 3: Secantes

Tendo em vista o tempo – e a sensatez – eu vou pular esse caso. Você não vai ter nenhum problema com esse caso porque a esta altura você já está *perito* nos casos 1 e 2, e todos os passos para o caso 3 são basicamente os mesmos.

Tente essa aqui. Integre $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$. Eu vou começar para você. No passo1, você desenha um triângulo, onde $\sec(\theta) = \frac{u}{a}$, isto é $\frac{x}{3}$. Agora continue daqui. Aqui está a resposta (não vale olhar se você ainda não tiver terminado): $\sqrt{x^2-9} - 3\,arc\text{tg}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\right) + C$.

Os As, Bs, e Cxs das frações parciais

Logo quando você pensou que não podia ficar pior do que as subs-tituições trigonométricas, eu apareço com a técnica das frações parciais.

Você usa o método das frações parciais para integrar funções racionais do tipo $\frac{6x^2+3x-2}{x^3+2x^2}$. A idéia básica é desfazer o resultado da soma de uma fração: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$; para que você divida $\frac{5}{6}$ em $\frac{1}{2}$ mais $\frac{1}{3}$. Você começa com uma fração do tipo $\frac{17}{20}$ e a divide em uma soma de frações, $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$, só que você está lidando com funções racionais complicadas e não frações numéricas simples.

Antes de usar a técnica das frações parciais, você tem que verificar que o seu integrando é uma fração "própria" – isto é, uma onde o grau do numerador seja menor que o grau do denominador. Se o integrando for "impróprio", como em $\int \frac{2x^3+x^2-10}{x^3-3x-2}\,dx$, você tem que primeiro fazer a divisão polinomial longa para transformar a fração imprópria em uma soma de um polinômio (o que, às vezes, vai ser apenas um número) e uma fração própria. Aqui está a divisão para essa fração imprópria (sem explicação).

Basicamente, funciona como uma divisão longa regular.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\quad\quad\quad\quad 2 \\
x^3-3x-2 & 2x^3+x^2+0x-10 \\
 & \underline{2x^3 \quad\quad -6x-4} \\
 & \quad\quad x^2+6x-6
\end{array}
$$

Com a divisão regular, se você dividir 23 por 4, você obterá um quociente igual a 5 e um resto de 3, que te diz que $\frac{23}{4}$ é igual a 5 + $\frac{3}{4}$, ou $5\frac{3}{4}$. O resultado da divisão polinomial acima diz a você a mesma coisa. O quociente é igual a 2 e o resto é igual a $x^2 + 6x - 6$, assim $\frac{2x^3 + x^2 - 10}{x^3 - 3x - 2}$ é igual a $2 + \frac{x^2 + 6x - 10}{x^3 - 3x - 2}$. O problema original, $\int \frac{2x^3 + x^2 - 10}{x^3 - 3x - 2}\,dx$, se torna então $\int 2dx + \int \frac{x^2 + 6x - 6}{x^3 - 3x - 2}\,dx$. A primeira integral é simplesmente $2x$. Você vai então fazer a integral segunda com o método da fração parcial. Aqui está como funciona. Primeiro um exemplo básico e depois um mais avançado.

Caso 1: O denominador contém apenas funções lineares

Integre $\int \frac{5}{x^2 + x - 6}\,dx$. Esse é um problema do caso 1 porque o denominador fatorado (veja o passo 1) contém apenas fatores *lineares* – em outras palavras, polinômios de *primeiro* grau.

1. **Fatore o denominador.**

$$\frac{5}{x^2 + x - 6} = \frac{5}{(x-2)(x+3)}$$

2. **Divida as frações da direita em uma soma de frações, onde cada fator do denominador no passo 1 se torne o denominador de uma fração separada. Depois coloque incógnitas no numerador de cada fração.**

$$\frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

3. **Multiplique ambos os lados dessa equação pelo denominador do lado esquerdo.**

   Isso é álgebra I, então você não espera que eu vá mostrar os passos. Certo?

$$5 = \mathrm{A}(x+3) + \mathrm{B}(x-2)$$

4. **Tire as raízes dos fatores lineares e os insira – um de cada vez – em x na equação do passo 3, e ache os valores das incógnitas.**

Se $x = 2$	Se $x = -3$
$5 = A(2+3) + B(2-2)$	$5 = A(-3+3) + B(-3-2)$
$5 = 5A$	$5 = -5B$
$A = 1$	$B = -1$

5. **Coloque esses resultados em A e B na equação do passo 2.**

$$\frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{(x-2)} + \frac{-1}{(x+3)}$$

6. Separe a integral original nas frações parciais do passo 5 e você está dispensado.

$$\int \frac{5}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{-1}{x+3}\,dx$$
$$= \ln|x-2| - \ln|x+3| + C$$
$$= \ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C \quad \text{(o log de uma regra do quociente)}$$

Caso 2: O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis

Às vezes você não pode fatorar um denominador até chegar aos fatores lineares porque alguns quadrados são irredutíveis – como números primos, eles não podem ser divididos. Você pode facilmente verificar se um quadrado ($ax^2 + bx + c$) é redutível ou não verificando seu delta, $b^2 - 4ac$. Se o delta for negativo, o quadrado é irredutível. Usando a técnica das frações parciais com quadrados irredutíveis é um pouco diferente.

Aqui está um problema: Integre $\int \frac{5x^3+9x-4}{x(x-1)(x^2+4)}\,dx$.

1. Fatore o denominador.

Já está feito! Não diga que nunca fiz nada por você.

2. Divida a fração em uma soma de "frações parciais".

Se você tiver um fator quadrado irredutível (como o x^2+4), o numerador para essa fração parcial precisa de duas incógnitas na forma $Ax + B$.

$$\frac{5x^3+9x-4}{x(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2-4}$$

3. Multiplique ambos os lados dessa equação pelo lado esquerdo do denominador.

$$5x^3+9x-4 = A(x-1)(x^2+4) + B(x)(x^2+4) + (Cx+D)(x)(x-1)$$

4. Tire as raízes dos fatores lineares e coloque-os – um de cada vez – no lugar de *x* na equação do passo 3, e depois resolva.

Se $x = 0$	Se $x = 1$,
$-4 = -4A$	$10 = 5B$
$A = 1$	$B = 2$

Ao contrário do exemplo do caso 1, você não pode achar todos os valores das incógnitas inserindo as raízes dos fatores lineares, então você vai ter que ter mais trabalho.

5. Insira na equação do passo 3 os valores conhecidos de A e B e quaisquer dois valores para x não usados no passo 4 (números pequenos tornam os cálculos mais fáceis) para obter um sistema com duas equações em C e D.

$A = 1$ e $B = 2$, então

Se $x = -1$	Se $x = 2$
$-18 = -10 - 10 - 2C + 2D$	$54 = 8 + 32 + 4C + 2D$
$2 = -2C + 2D$	$14 = 4C + 2D$
$1 = -C + D$	$7 = 2C + D$

6. Resolva o sistema: $1 = -C + D$ e $7 = 2C + D$.

Você obtém $C = 2$ e $D = 3$. Faça-me um favor e verifique os meus cálculos.

7. Separe a integral original e integre.

Usando os valores obtidos nos passos 4 e 6, $A = 1$, $B = 2$, $C = 2$, e $D = 3$, e a equação do passo 2, você pode separar a integral original em três pedaços:

$$\int \frac{5x^3 + 9x + 4}{x(x-1)\,(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{2x+3}{x^2+4}\,dx$$

E com a álgebra básica, você pode separar a terceira integral da direita em dois pedaços, resultando na decomposição em fração parcial final:

$$\int \frac{5x^3 + 9x + 4}{x(x-1)\,(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{2x}{x^2-4}\,dx + \int \frac{3}{x^2+4}\,dx$$

As duas primeiras integrais são fáceis. Para a terceira, você usa a substituição com $u = x^2 + 4$ e $du = 2xdx$. A quarta é feita com a regra do arco tangente da folha de consulta.

$$\int \frac{5x^3 + 9x + 4}{x(x-1)\,(x^2+4)}\,dx = \ln|x| + 2\ln|x-1| + \ln|x^2+4| + \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= \ln\left|x\,(x-1)^2\,(x^2+4)\right| + \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Caso 3: O denominador contém fatores lineares ou quadráticos repetidos

Se o denominador tiver qualquer fator repetido, como $(x+5)^4$ aqui está o que você deve fazer.

Digamos que você queira integrhnar $\int \frac{1}{x^2(x-1)^3}\,dx$. O x no denominador tem uma potência igual a 2, então você obtém duas frações parciais para o x (para as potências 1 e 2); o $(x-1)$ tem um potência igual a 3, então você obtém 3 frações parciais para esse fator (para as potências 1, 2, e 3). Aqui está a forma geral para a decomposição em fração parcial: $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-1)}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{(x-1)^3}$. Aqui está outra forma. Você divide $\frac{4x^3-x^2+8}{(2x-3)^2\,(x^2+1)^2}$ em $\frac{A}{(2x-3)}+\frac{B}{(2x-3)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$. Eu estou pulando a solução para esses exemplos. O método é o mesmo dos casos 1 e 2 acima – apenas mais confuso. E, também, eu tenho um avião para pegar – de volta para a ensolarada Flórida.

Bônus: Equacionando coeficientes de termos semelhantes

Aqui está outro método para encontrar a incógnita maiúscula que você deve ter na sua bolsa de truques. Digamos que obtenha a equação a seguir para o passo 3 (isso vem de um problema com dois fatores quadráticos irredutíveis):

$$2x^3+x^2-5x+4=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)\,(x^2+2x+2)$$

Essa equação não tem fatores lineares, então você não pode inserir as raízes para obter as incógnitas. Em vez disso, expanda o lado direito da equação:

$$2x^3+x^2-5x+4=Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+2Cx^2+2Cx+2Cx+Dx^2+2Dx+2D$$

E reúna termos semelhantes: [1]

$$2x^3+x^2-5x+4=(A+C)\,x^3+(B+2C+D)\,x^2+(A+2C+2D)\,x+(B+2D)$$

Depois equacione os coeficientes dos termos semelhantes dos lados esquerdo e direito da equação:

$$\begin{aligned}2&=\mathrm{A}+\mathrm{C}\\1&=\mathrm{B}+2\mathrm{C}+\mathrm{D}\\-5&=\mathrm{A}+2\mathrm{C}+2\mathrm{D}\\4&=\mathrm{B}+2\mathrm{D}\end{aligned}$$

Você então resolve o sistema de equações simultâneas para obter A, B, C, e D.

DICA

Você pode terminar o exemplo do caso 2 usando uma versão mais curta do método para equacionar os coeficientes. Olhe para a equação no passo 3 do caso 2, e equacione os coeficientes do termo x^3 dos lados esquerdo e direito da equação. Você consegue ver, sem realmente fazer a expansão, que na direita você obteria $(A + B + C)x^3$? (Se você não consegue ver isso, pule esse atalho – desculpe por lhe dar esperança). Então, $5x^3 = (A + B + C)\,x^3$, que significa que $5 = A + B + C$, e porque $A = 1$ e $B = 2$ (do passo 4), C deve ser igual a 2. Depois, usando esses valores para A, B, e C, e qualquer valor para x (com exceção de 0 e 1), você obtém D. O que você acha disso para um atalho simples?

DICA

Resumindo, você tem três maneiras para achar o seu A, B, C, e assim por diante: 1) Insira as raízes dos fatores lineares do denominador se houver algum, 2) Insira os outros valores de x e resolva o sistema de equações resultante, e 3) Equacione os coeficientes dos termos semelhantes. Com a prática, você vai ficar bom em combinar esses métodos para rapidamente encontrar as suas incógnitas.

Capítulo 16

Esqueça o Dr. Phill: Use a integral para resolver problemas

Neste capítulo

- Um teorema médio: "Altos e baixos ? Só na montanha russa"
- Somando a área entre as curvas
- Calculando volumes de formatos estranhos: carnes frias, panquecas, e rosquinhas
- Encontrando o comprimento e a área de superfície do arco
- A regra do hospital – caso estudar cálculo o deixe doente
- Conhecendo integrais sem modos
- O paradoxo da corneta de Gabriel

Como eu disse no Capítulo 13, a integração é basicamente apenas somar pequenos pedaços de alguma coisa para obter o total para a coisa toda – pedaços *muito, muito* pequenos, na verdade, pedaços *infinitamente* pequenos. Assim, a integral

$$\int_{5\text{ s.}}^{20\text{ s.}} \textit{pequenos pedaços da distância}$$

diz a você para somar todos os pequenos pedaços da distância viajada durante os 15 segundos de intervalo entre 5 até 20 segundos para obter a distância total viajada durante esse intervalo.

O pequeno pedaço em questão é sempre uma expressão contendo x (ou qualquer outra variável). Para a integral acima, por exemplo, o pequeno pedaço da distância pode ser dado por, digamos, x^2dx. Então a integral definida

$$\int_5^{20} x^2dx$$

daria a você a distância total viajada. Pelo fato de você agora ser um especialista em calcular integrais como a que está acima, seu principal desafio nesse capítulo é simplesmente propor a expressão algébrica para os pequenos pedaços que você está somando.

Nesse capítulo, você usa integrais para resolver diversos problemas geométricos – área, volume, comprimento do arco e área da superfície. Você também descobre como encontrar a altura média da função e um atalho para os problemas envolvendo limites – a regra de L'Hôspital – que você precisa para as integrais *impróprias* (infinitas) no final do capítulo.

O Teorema do Valor Médio para as integrais e valor médio

A melhor maneira de entender o Teorema do Valor Médio para integrais é com um diagrama – olhe a Figura 16-1.

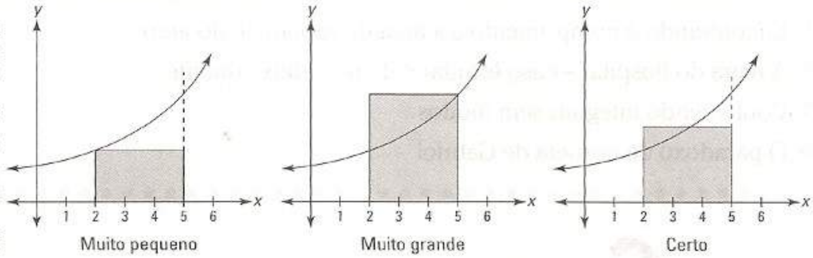


Figura 16-1: Uma "prova" visual do teorema do valor médio para as integrais.

O gráfico da esquerda na Figura 16-1 mostra um retângulo cuja área é claramente *menor que* a área sob a curva entre 2 e 5. Esse retângulo tem uma altura igual ao menor ponto na curva no intervalo de 2 a 5. O gráfico do meio mostra um retângulo cuja altura é igual ao ponto mais alto na curva. Sua área é claramente *maior que* a área sob a curva. A esta altura você está pensando, "Não há um retângulo maior que o menor e menor do que o maior cuja área seja a *mesma* que a área sob a curva?". É claro. E esse retângulo cruza, com certeza, a curva em algum lugar no intervalo. O tão falado "retângulo de valor médio" mostrado à direita resume basicamente o Teorema do Valor Médio para as integrais. É, de verdade, apenas bom senso. Mas aqui está a bobagem.

O Teorema do Valor Médio para integrais: Se $f(x)$ é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então existe um número c no intervalo fechado que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,.\,(b-a)$$

O teorema apenas garante, basicamente, a existência do retângulo de valor médio.

LEMBRE-SE

A *identidade Pitagoreana* diz que, para qualquer ângulo x, $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$. E assim $\text{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ e $\cos^2(x) = 1 - \text{sen}^2(x)$.

Agora integre $\int \text{sen}^3(x)\cos^4(x)dx$.

1. Remova um fator seno e mova para a direita.

$$\int \text{sen}^3(x)\cos^4(x)dx = \int \text{sen}^2(x)\cos^4(x)\text{sen}(x)dx$$

2. Transforme os senos restantes (pares) em cossenos usando a identidade Pitagoreana e simplifique.

$$\begin{aligned}&\int \text{sen}^2(x)\cos^4(x)\text{sen}(x)dx\\ &= \int \left(1 - \cos^2(x)\right)\cos^4(x)\text{sen}(x)dx\\ &= \int \left(\cos^4(x) - \cos^6\right)\text{sen}(x)dx\end{aligned}$$

3. Integre com a substituição, onde $u = \cos(x)$.

$$\begin{aligned}u &= \cos(x)\\ \frac{du}{dx} &= -\text{sen}(x)\\ du &= -\text{sen}(x)dx\end{aligned}$$

DICA

Você pode economizar um pouco de tempo em todos os problemas envolvendo substituição apenas resolvendo em função de du – como eu fiz logo acima – e não se preocupar em resolver em função de dx. Você então ajusta a integral para que ela contenha o du igual a ($-\text{sen}(x)dx$) nesse problema. A integral contém um ($\text{sen}(x)dx$), então você o multiplica por -1 para transformá-lo em $-\text{sen}(x)dx$ e depois recompensa esse -1 multiplicando toda a integral por -1. Isso é simples porque -1 vezes -1 é igual a 1. Isso talvez soe um tanto quanto um atalho, mas poupa tempo uma vez que você se acostuma a ele.

Então, ajuste a sua integral:

$$\begin{aligned}&\int \left(\cos^4(x) - \cos^6(x)\right)\left(\text{sen}(x)dx\right)\\ &= -\int \left(\cos^4(x) - \cos^6(x)\right)\left(-\text{sen}(x)dx\right)\end{aligned}$$

Agora substitua e resolva usando a regra inversa da potência:

$$\begin{aligned}&-\int (u^4 - u^6)du\\ &= -\frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + C\\ &= \frac{1}{7}\cos^7(x) - \frac{1}{5}\cos^5(x) + C\end{aligned}$$

A área do retângulo de valor médio – que é o mesmo que a área sob a curva – é igual ao *comprimento* vezes a *largura*, ou base vezes a *altura*, certo? Então, se você dividir sua área, $\int_a^b f(x)dx$, pela sua base, $(b - a)$, você obterá a sua altura, $f(c)$. Essa altura é o *valor médio* da função sobre o intervalo em questão.

Valor médio: O *valor médio* de uma função $f(x)$ sobre um intervalo fechado $[a, b]$ é

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

que é a altura do retângulo de valor médio.

Aqui está um exemplo. Qual a velocidade média de um carro entre $t = 9$ segundos e $t = 16$ segundos cuja velocidade em *metros por segundo* é dada pela função $f(t) = 30\sqrt{t}$? De acordo com a definição do valor médio, essa velocidade média é dada por $\frac{1}{16-9}\int_9^{16} 30\sqrt{t}\,dt$.

1. Determine a área sob a curva entre 9 e 16.

$$\begin{aligned}&\int_9^{16} 30\sqrt{t}\,dt\\ &= 30\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_9^{16}\\ &= 30\left(\frac{128}{3} - \frac{54}{3}\right)\\ &= 740\end{aligned}$$

Essa área, a propósito, é a distância total viajada de 9 até 16 segundos. Você vê por quê? Considere o retângulo de valor médio para esse problema. Sua altura é a velocidade (porque os valores da função, ou alturas, são velocidades) e sua base é uma quantidade do tempo, então sua área é *velocidade* vezes *tempo* que é igual à distância. Alternativamente, lembre que a posição da derivada é a velocidade (veja o Capítulo 12). Então, a antiderivada da velocidade – o que eu acabei de fazer nesse passo – é a posição, e a variação na posição de 9 até 16 segundos lhe dá a distância total viajada.

2. Divida essa área, distância total, pelo intervalo de tempo de 9 até 16, a saber, 7.

$$\text{Velocidade média} = \frac{\textit{distância total}}{\textit{tempo total}} = \frac{\textit{740 metros}}{\textit{7 segundos}}$$

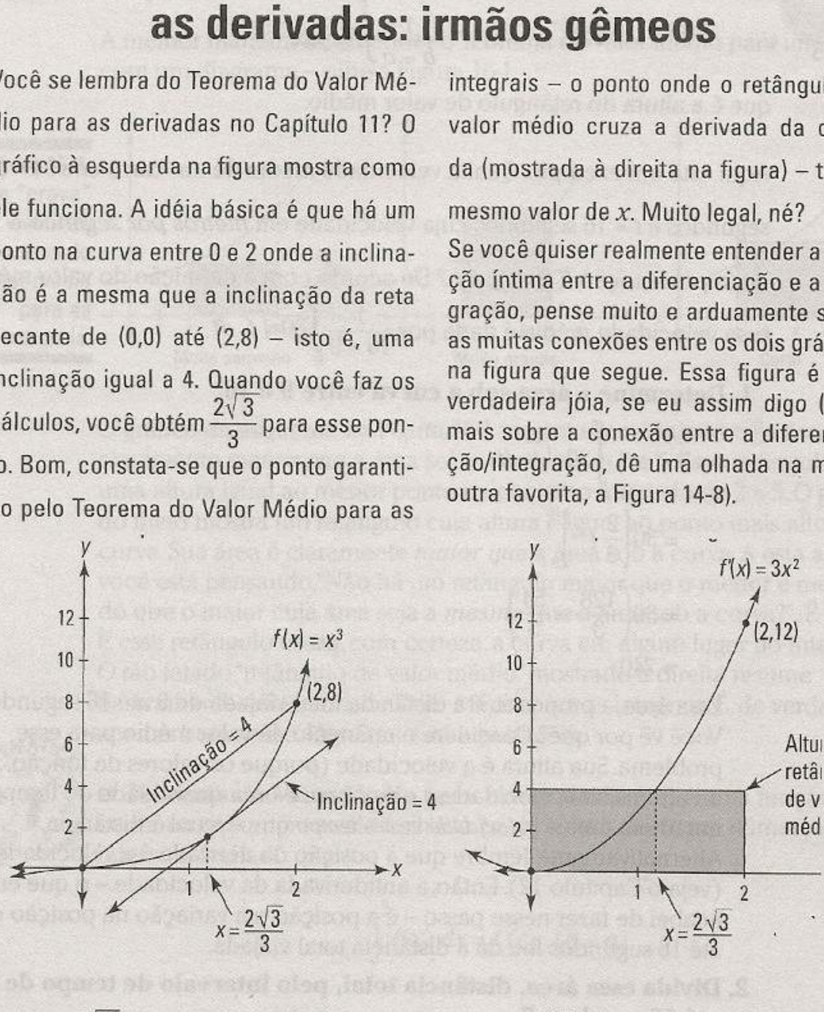
$$\approx 105{,}7\text{metros } \textit{por segundo}$$

A definição de valor médio diz a você para multiplicar a área total por $\frac{1}{b-a}$, que nesse problema é $\frac{1}{16-9}$, ou $\frac{1}{7}$. Mas pelo fato de dividir por 7 ser a mesma coisa que multiplicar por $\frac{1}{7}$, você pode dividir como eu fiz nesse passo. Faz mais sentido pensar nesses problemas em termos da divisão: a *área* é igual à *base* vezes *altura*, então a altura do retângulo de valor médio é igual a sua área *dividida* pela sua base.

O TVM para as integrais e para as derivadas: irmãos gêmeos

Você se lembra do Teorema do Valor Médio para as derivadas no Capítulo 11? O gráfico à esquerda na figura mostra como ele funciona. A idéia básica é que há um ponto na curva entre 0 e 2 onde a inclinação é a mesma que a inclinação da reta secante de (0,0) até (2,8) – isto é, uma inclinação igual a 4. Quando você faz os cálculos, você obtém $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ para esse ponto. Bom, constata-se que o ponto garantido pelo Teorema do Valor Médio para as integrais – o ponto onde o retângulo de valor médio cruza a derivada da curva da (mostrada à direita na figura) – tem o mesmo valor de x. Muito legal, né?

Se você quiser realmente entender a relação íntima entre a diferenciação e a integração, pense muito e arduamente sobre as muitas conexões entre os dois gráficos na figura que segue. Essa figura é uma verdadeira jóia, se eu assim digo (Para mais sobre a conexão entre a diferenciação/integração, dê uma olhada na minha outra favorita, a Figura 14-8).



- Em $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ a inclinação é 4 e esta é a inclinação média de f entre 0 e 2.
- A menor inclinação de f no intervalo é 0.
- A maior inclinação de f no intervalo é 12.
- O aumento total ao longo de f de 0 até 2 é 8.

- Em $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ a altura é 4 e esta é a altura média de f' entre 0 e 2.
- A menor altura de f' no intervalo é 0.
- A maior altura de f' no intervalo é 12.
- A área total sob f' de 0 até 2 é 8.

A área entre duas curvas – duas vezes a diversão

Esse é o primeiro de sete tópicos nesse capítulo onde é pedido que você proponha uma expressão para um pequeno pedaço de alguma coisa, e depois some os pedaços usando a integração. Para esse primeiro tipo de problema, o pequeno pedaço é um retângulo estreito que senta sobre uma curva e sobe até a outra. Aqui está um exemplo: Encontre a área entre $y = 2 - x^2$ e $y = \frac{1}{2}x$ de $x = 0$ até $x = 1$. Veja a Figura 16-2.

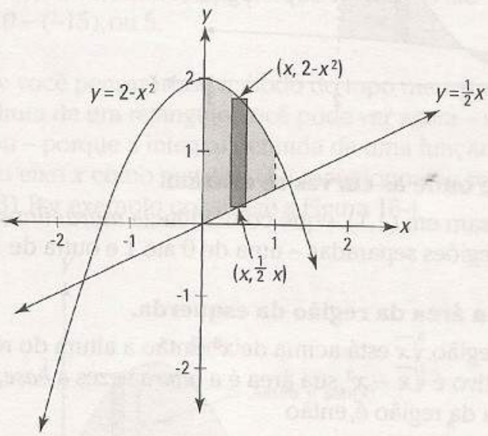


Figura 16-2: A área entre $y = 2 - x^2$ e $y = \frac{1}{2}x$ de $x = 0$ até $x = 1$.

Para obter a altura do retângulo representativo na Figura 16-2, subtraia a coordena y da sua base da coordenada y da sua parte superior – isto é $(2 - x^2) - \frac{1}{2}x$. Sua base é o dx infinitesimal. Então, pelo fato de a *área* ser igual à *altura* vezes a *base*,

$$\textit{Área do retângulo representativo} = \left((2 - x^2) - \frac{1}{2}x\right)dx$$

Agora apenas some as áreas de todos os retângulos de 0 até 1 usando a integração: $\int_0^1 \left((2 - x^2) - \frac{1}{2}x\right)dx$

$$= \left[2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 \quad \text{(regra da potência para todos os três pedaços)}$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - (0 - 0 - 0)$$

$$= \frac{17}{12} \textit{ unidades ao quadrado}$$

Agora para tornar as coisas um pouco mais distorcidas, no próximo problema as curvas se cruzam (veja a Figura 16-3). Quando isso acontece, você tem que dividir o total da área sombreada em regiões separadas antes de integrar. Tente essa aqui: Encontre a área entre $\sqrt[3]{x}$ e x^3 de $x = 0$ até $x = 2$.

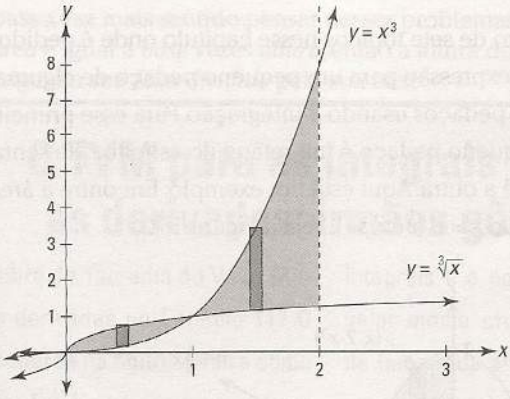


Figura 16-3: Quem está no topo?

1. **Determine onde as curvas se cruzam.**

   Elas se cruzam em (1,1) – que coincidência *maravilhosa*! Então você tem duas regiões separadas – uma de 0 até 1 e outra de 1 até 2.

2. **Descubra a área da região da esquerda.**

   Para essa região, $\sqrt[3]{x}$ está acima de x^3. Então a altura do retângulo representativo é $\sqrt[3]{x} - x^3$, sua área é a *altura* vezes a *base*, ou $(\sqrt[3]{x} - x^3)\,dx$, e a área da região é, então

$$\int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^3)dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) - (0 - 0)$$

$$= \frac{1}{2}$$

3. **Encontre a área da região da direita.**

   Agora, x^3 está acima de $\sqrt[3]{x}$, então a altura de um retângulo é $x^3 - \sqrt[3]{x}$ e assim você tem

$$\int_1^2 (x^3 - \sqrt[3]{x})dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^{4/3}\right]_1^2$$

$$=\left(4-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)$$
$$=4{,}5-1{,}5\sqrt[3]{2}$$

4. Some as áreas das duas regiões para obter a área total.

$$0{,}5+4{,}5-1{,}5\sqrt[3]{2}=5-1{,}5\sqrt[3]{2}\approx 3{,}11 \textit{ unidades ao quadrado}$$

DICA

Note que a altura de um retângulo representativo é sempre seu *topo* menos sua *base*, independentemente de esses números serem positivos ou negativos. Por exemplo, um retângulo que vai de 20 até 30 tem uma altura de 30 – 20, ou 10; um retângulo que vai de –3 até 8 tem uma altura de 8 – (–3), ou 11; e um retângulo que vai de –15 até –10 tem uma altura igual a -10 – (–15), ou 5.

Se você pensar nesse método do topo menos a base para encontrar a altura de um retângulo, você pode ver agora – supondo que você já não viu – porque a integral definida de uma função considera a área abaixo do eixo x como negativa (Eu menciono isso sem explicação no Capítulo 13). Por exemplo, considere a Figura 16-4.

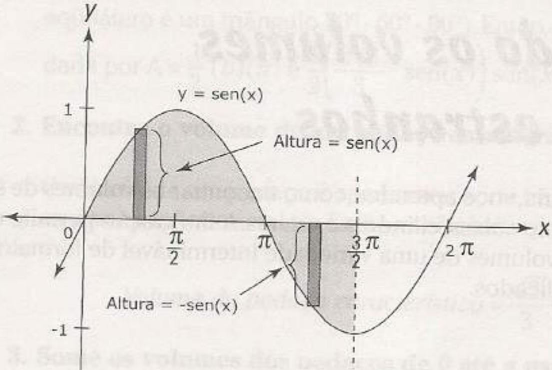


Figura 16-4: Qual é a área sombreada? Dica: não é $\int_0^{3\pi/2}$ sen(x)dx.

Se você quiser a área total da região sombreada mostrada na Figura 16-4, você tem que dividir a área sombreada em dois pedaços separados como você fez no último problema. Um pedaço vai de 0 até π e o outro vai de π até $\frac{3\pi}{2}$.

Para o primeiro pedaço, de 0 até π, o retângulo representativo tem um altura igual a função, $y = \text{sen}(x)$, porque sua parte superior está na função e sua base está no zero – e, é claro, qualquer coisa menos zero é ela mesma. Então a área desse primeiro pedaço é dada pela integral definida $\int_0^{\pi} \text{sen}(x)dx$.

Mas para o segundo pedaço de π até $\frac{3\pi}{2}$, a parte superior do retângulo representativo está no zero – lembre que o eixo x é a linha $y = 0$ – e sua base está em $y = \text{sen}(x)$, então sua altura é $0 - \text{sen}(x)$, ou apenas $-\text{sen}(x)$. Então, para obter a área desse segundo pedaço, você descobre a integral definida do *negativo* da função, $\int_{\pi}^{3\pi/2} -\text{sen}(x)dx$, que é o mesmo que $-\int_{\pi}^{3\pi/2} \text{sen}(x)dx$.

Devido ao fato de essa integral *negativa* lhe dar a área comum, *positiva* do pedaço abaixo do eixo x, a integral definida *positiva* $\int_{\pi}^{3\pi/2} \text{sen}(x)dx$ lhe dá a área *negativa*. É por isso que se você descobrir a integral definida $\int_{0}^{3\pi/2} \text{sen}(x)dx$ sobre todo o intervalo, o pedaço abaixo do eixo x é considerado como uma área negativa, e a resposta lhe dá o líquido da área acima do eixo x menos a área abaixo do eixo – em vez da área total sombreada.

Encontrando os volumes de sólidos estranhos

Em geometria, você aprendeu como encontrar os volumes de sólidos simples como caixas, cilindros e esferas. A integração permite que você calcule os volumes de uma variedade interminável de formatos muito mais complicados.

O método do cortador de carne

Essa metáfora é na verdade muito precisa. Imagine um pedaço grande de carne sendo cortado em pedaços muito finos naqueles cortadores de carne congelada. Essa é a idéia básica aqui. Você fatia um formato tridimensional, depois soma os volumes dos pedaços para determinar o volume total.

Aqui está um problema: Qual é o volume do sólido cujo comprimento corre ao longo do eixo x de 0 até π e cujos cortes transversais perpendiculares ao eixo x são triângulos eqüiláteros tais que os pontos médios das suas bases estejam no eixo x e seus vértices superiores estejam na curva $y = \text{sen}(x)$? Isso é um bocado ou o quê? Esse problema é quase tão difícil de explicar e desenhar como fazê-lo. Dê uma olhada nessa coisa na Figura 16-5.

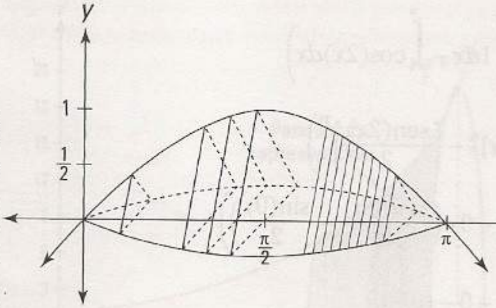


Figura 16-5: Um grande pedaço estranho de carne defumada.

Então, qual é o volume?

1. **Determine a área de qualquer corte transversal.**

   Cada corte transversal é um triângulo eqüilátero com altura igual a $\text{sen}(x)$. Se você fizer a geometria, você vai ver que sua base é $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ vezes sua altura, ou $\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \text{sen}(x)$ (Dica: Metade de um triângulo eqüilátero é um triângulo 30º - 60º - 90º). Então, a área do triângulo, dada por $A = \frac{1}{2}(b)(h)$ é $\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{sen}(x)\right)\text{sen}(x)$, ou $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \text{sen}^2 x$.

2. **Encontre o volume de um pedaço característico.**

   O volume de um pedaço é apenas seu corte transversal vezes sua espessura infinitesimal, dx. Então você obteve o volume

   $$\textit{Volume do pedaço característico} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \text{sen}^2(x)\, dx$$

3. **Some os volumes dos pedaços de 0 até π usando a integração.**

   Se o que vem a seguir parecer um pouco difícil, bem, paciência, é melhor você se acostumar. Afinal de contas, isso é cálculo (Na verdade, não é tão ruim assim se você o fizer pacientemente, passo a passo).

   $$\int_0^\pi \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \text{sen}^2(x)\, dx$$
   $$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^\pi \text{sen}^2(x)dx$$
   $$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}\, dx$$ (integrais trigonométricas com senos e co-senos, caso 3, do Capítulo 15)

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\int_0^\pi 1dx - \int_0^\pi \cos(2x)dx\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left([x]_0^\pi - \left[\frac{\text{sen}(2x)}{2}\right]_0^\pi\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\pi - 0 - \left(\frac{\text{sen}(2\pi)}{2} - \frac{\sin(0)}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}(\pi - 0 - (0 - 0))$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

$$\approx 0{,}91 \textit{ unidades cúbicas}$$

É muito fácil.

O método da pilha de panquecas

A técnica é basicamente a mesma do método do cortador de carne – na verdade, é um caso especial do método do cortador de carne que você usa quando os cortes transversais são círculos. Aqui está como funciona. Encontre o volume do sólido – entre $x = 2$ e $x = 3$ – formado ao girar a curva $y = e^x$ sobre o eixo x. Veja a Figura 16-6.

1. **Determine a área de qualquer corte transversal ou panqueca representativa.**
   Cada corte transversal é um circulo com um raio de e^x. Então, sua área é dada pela fórmula para a área de um círculo, $A = \pi r^2$. Inserindo e^x no lugar de r você tem

$$A = \pi(e^x)^2 = \pi e^{2x}$$

2. **Junte um dx para obter o volume de uma panqueca representativa infinitesimalmente fina.**

$$\textit{Volume da panquenca} = \overbrace{\pi e^{2x}}^{\textit{área}} \cdot \overbrace{dx}^{\textit{profundidade}}$$

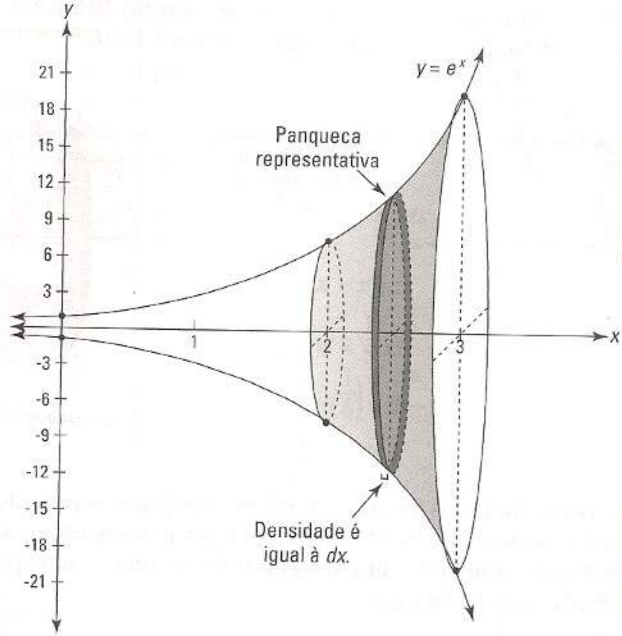


Figura 16-6: Uma pilha de panquecas de lado.

3. Some os volumes das panquecas de 2 até 3 usando a integração.

$$\text{Volume total} = \int_2^3 \pi e^{2x}\,dx$$

$$= \pi \int_2^3 e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[e^{2x}\right]_2^3 \quad \text{(pela substituição com } u = 2x \text{ e } du = 2dx\text{)}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(e^6 - e^4\right)$$

$$\approx 548 \ \textit{unidades cúbicas}$$

O método da pilha de rosquinhas nas quais alguém sentou em cima

Outros livros chamam isso de método da argola, mas qual a diversão disso? A única diferença entre o método da rosquinha e o método da panqueca é que agora cada pedaço tem um furo no meio que você tem que subtrair. Nada além disso.

Aqui vai. Pegue a área delimitada por $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ e crie um sólido girando essa área sobre o eixo x. Veja a Figura 16-7.

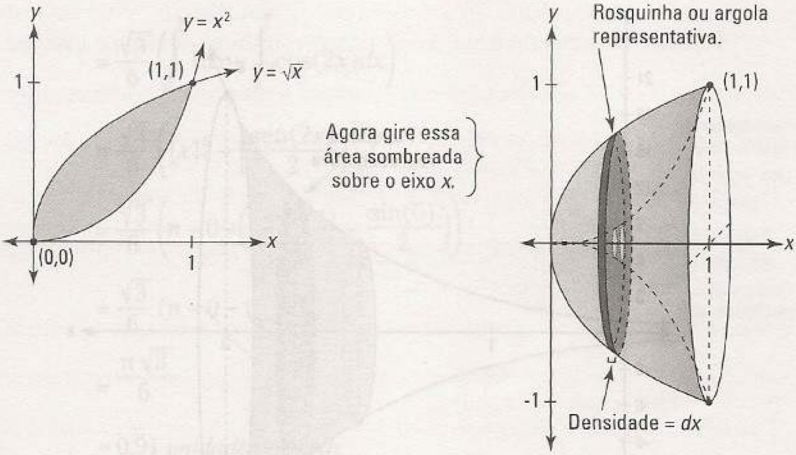


Figura 16-7: Uma pilha de rosquinhas de lado – apenas some os volumes de todas as rosquinhas.

Apenas pense: Todas as forças do universo em desenvolvimento e todas as reviravoltas da sua vida lhe trouxeram para *esse* momento quando você está finalmente apto a calcular o volume desse sólido – algo para o seu diário. Então qual é o volume?

1. **Determine onde as duas curvas se interceptam.**

   Não é preciso muita habilidade para ver que $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ se interceptam em $x = 0$ e $x = 1$ – muito bom isso, não? Então o sólido em questão atravessa o intervalo no eixo x de 0 até 1.

2. **Descubra a área de um corte transversal fino da rosquinha ou da argola.**

   Cada pedaço tem a forma de uma rosquinha – veja a Figura 16-8 – então sua área é igual à área de todo o círculo menos a área do buraco.

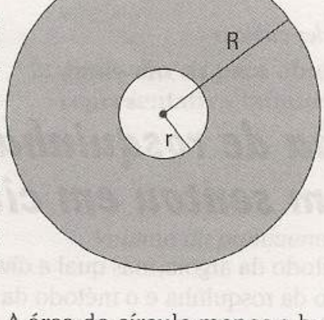


Figura 16-8: A área sombreada é igual a $\pi R^2 - \pi r^2$: o todo menos o buraco – entendeu?

A área do círculo menos o buraco é $\pi R^2 - \pi r^2$, onde R é o raio mais externo (o raio maior) e r é o raio do buraco (o raio menor). Para esse problema, o raio mais externo é $\sqrt{x}$ e o raio do buraco é x^2, então isso lhe dá

$$A = \pi\,(\sqrt{x})^2 - \pi(x^2)^2$$
$$= \pi x - \pi x^4$$

Caso 2: A potência do cosseno é ímpar e positiva

Esse problema funciona exatamente como o Caso 1, exceto que as funções do seno e cosseno são invertidas. Encontre $\int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\text{sen}(x)}}\,dx$.

1. **Remova um fator cosseno e mova para a direita.**

$$\int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\text{sen}(x)}}\,dx = \int \cos^3(x)\left(\text{sen}^{-1/2}(x)\right)dx$$
$$= \int \cos^2(x)\left(\text{sen}^{-1/2}(x)\right)\cos(x)\,dx$$

2. **Transforme os senos restantes (pares) em cossenos usando a identidade Pitagoreana e simplifique.**

$$\int \cos^2(x)\left(\text{sen}^{-1/2}(x)\right)\cos(x)\,dx$$
$$= \int \left(1-\text{sen}^2(x)\right)\left(\text{sen}^{-1/2}(x)\right)\cos(x)\,dx$$
$$= \int \left(\text{sen}^{-1/2}(x) - \text{sen}^{3/2}(x)\right)\cos(x)\,dx$$

3. **Integre com a substituição, onde $u = \text{sen}(x)$.**

$$u = \text{sen}(x)$$
$$\frac{du}{dx} = \cos(x)$$
$$du = \cos(x)\,dx$$

Agora substitua:

$$= \int \left(u^{-1/2} - u^{3/2}\right)du$$

E termine a integração como no Caso 1.

Caso 3: As potências do seno e do cosseno são pares e não negativas

Aqui você transforma o integrando em potências ímpares dos cossenos usando as identidades trigonométricas a seguir:

LEMBRE-SE

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Depois você termina o problema como no Caso 2. Aqui está um exemplo:

$$\int \text{sen}^4(x)\cos^2(x)\,dx$$
$$= \int \left(\text{sen}^2(x)\right)^2 \cos^2(x)\,dx$$
$$= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos(2x)-\cos^2(2x)+\cos^3(2x)\right)dx \text{ (É apenas álgebra!)}$$
$$= \frac{1}{8}\int 1\,dx - \frac{1}{8}\int \cos(2x)\,dx - \frac{1}{8}\int \cos^2(2x)\,dx + \frac{1}{8}\int \cos^3(2x)\,dx$$

3. Multiplique essa área pela profundidade, *dx*, para obter o volume de uma rosquinha representativa esmagada.

$$Volume = (\pi x - \pi x^4)dx$$

4. Some os volumes das rosquinhas finas como papel de 0 a 1 pela integração.

$$\begin{aligned}
Volume\ total &= \int_0^1 (\pi x - \pi x^4)dx \\
&= \pi \int_0^1 (x - x^4)dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 \\
&= \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - (0 - 0)\right] \\
&= \pi \left(\frac{3}{10}\right) \\
&= \frac{3\pi}{10} \\
&\approx 0{,}94 \textit{ unidades cúbicas}
\end{aligned}$$

DICA

Preste atenção ao simples fato de a área da rosquinha ou argola ser a área de todo o disco, πR^2, menos a área do buraco, πr^2: $A = \pi R^2 - \pi r^2$. Quando você integra, você obtém $\int_a^b (\pi R^2 - \pi r^2)dx$. Isso é o mesmo, é claro, que $\pi \int_a^b (R^2 - r^2)dx$, que é a fórmula dada na maioria dos livros. Mas se você apenas aprender isso automaticamente, você talvez esqueça. Você vai lembrar melhor como fazer esses problemas se você entender a simples idéia do círculo grande menos o círculo pequeno.

O método das bonecas russas aninhadas uma dentro da outra

Agora você vai cortar um sólido em cilindros concêntricos finos e depois somar os volumes de todos os cilindros. É mais ou menos como essas bonecas russas cabem uma dentro da outra. Ou imagine uma lata de sopa que de alguma forma tem muitos rótulos, cada um cobrindo o outro de baixo. Ou pense naquelas brincadeiras de embrulhar caixas com vários papéis de presente. Cada rótulo da lata de sopa ou pedaço de papel é uma casca – antes de você rasgá-la, é claro. Depois que você rasga, é um retângulo comum.

Aqui está um problema: Um sólido é criado pegando-se a área limitada pelo eixo x, as linhas $x = 2$ e $x = 3$, e $y = e^x$, e depois girando ela sobre o eixo y. Veja a Figura 16-9.

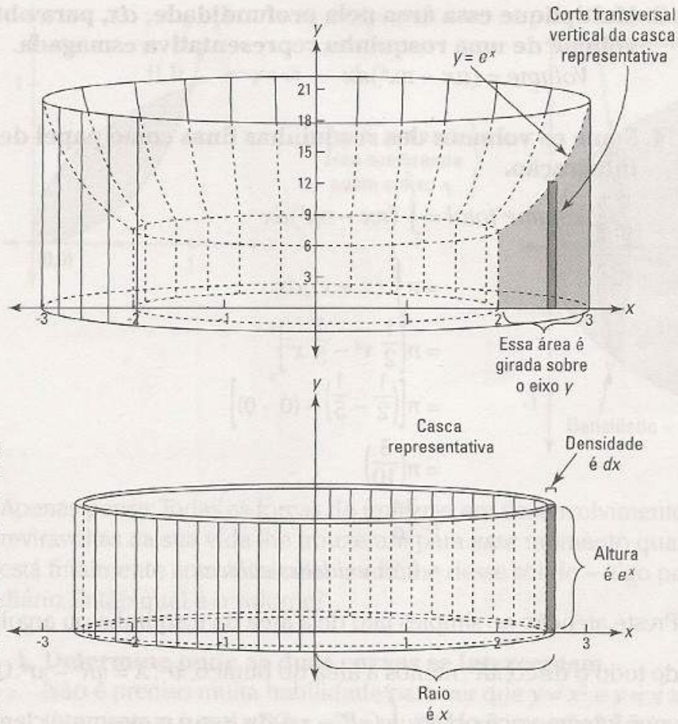


Figura 16-9: Um formato mais ou menos como o Coliseu e uma das suas cascas representativas.

Qual é o volume?

1. **Determine a área de uma casca cilíndrica representativa.**

   DICA

   Ao imaginar uma casca representativa, concentre-se em uma casca que não está em nenhum lugar em particular. A Figura 16-9 mostra esse tipo de casca comum. Seu raio é desconhecido, x, e sua altura é a altura da curva em x, a saber, e^x. Se, em vez disso, você usar uma casca especial como a casca mais externa com um raio de 3, você vai mais facilmente cometer o erro de pensar que uma casca representativa tem algum raio *conhecido* como 3 ou uma altura *conhecida* como e^x. Tanto o raio quanto a altura são *desconhecidas* (Esse mesmo conselho se aplica aos problemas da panqueca e da rosquinha).

   Cada casca representativa, como o rótulo da lata de sopa ou o papel adesivo da fibra, é apenas um retângulo cuja área é, é claro, *comprimento* vezes *largura*. O rótulo retangular da lata de sopa envolve toda a lata, então seu comprimento é a circunferência da lata, a saber, $2\pi r$; a largura do rótulo é a altura da lata. Então agora você tem a fórmula geral para a área da casca representativa:

   $$\begin{aligned} \text{Área} &= \text{comprimento} \cdot \text{largura} \\ &= 2\pi r \,.\, h \end{aligned}$$

Para o problema atual, você insere x para o raio e e^x para a altura, dando a você a área da casca representativa:

$$\text{Área de concha} = 2\pi x \cdot e^x$$

2. **Multiplique a área pela espessura da casca, dx, para obter o volume.**

$$\text{Volume da casca infinitesimal} = 2\pi x e^x dx$$

3. **Some os volumes de todas as cascas de 2 até 3 usando a integração.**

$$\begin{aligned}\text{Volume total} &= \int_2^3 2\pi x e^x dx \\ &= 2\pi \int_2^3 x e^x dx \\ &= 2\pi \left[x e^x - e^x \right]_2^3 \qquad \text{(integração por partes)} \\ &= 2\pi \left(3e^3 - e^3 - \left(2e^2 - e^2\right) \right) \\ &= 2\pi \left(2e^3 - e^2 \right) \\ &\approx 206 \text{ unidades cúbicas}\end{aligned}$$

DICA

Com os métodos do cortador de carne, da panqueca e da rosquinha, é geralmente muito óbvio quais devem ser os limites da integração (lembre-se que os *limites da integração* são, por exemplo, o 1 e o 5 em $\int_1^5$). Com as cascas cilíndricas, no entanto, não é sempre tão claro. Aqui vai uma dica. Você integra da margem *direita* do cilindro menor para a margem *direita* do cilindro maior (como de 2 para 3 no problema anterior). E note que você nunca integra da margem esquerda para a margem direita do cilindro maior (como de -3 para 3).

Analisando o comprimento do arco

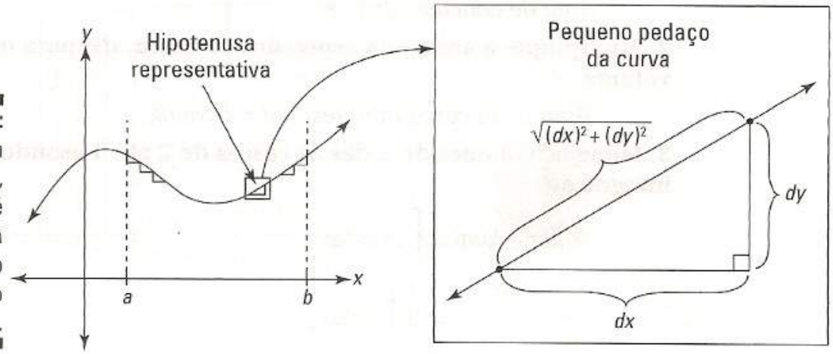
Até agora nesse capítulo, você somou as áreas de retângulos finos para obter a área total, os volumes dos pedaços finos para obter o volume total, e os volumes de cilindros finos para também obter o volume total. Agora, você vai somar pequenos comprimentos ao longo de uma curva, de um "arco", para obter o comprimento total.

Eu poderia apenas lhe dar a fórmula para o comprimento do arco, mas eu prefiro mostrar a você porque ela funciona e como derivá-la. Você tem sorte.

A idéia é dividir o comprimento da curva em pedaços pequenos, descobrir o comprimento de cada pedaço, e depois somar todos os comprimentos.

A Figura 16-10 mostra como cada pedaço de uma curva pode ser aproximado pela hipotenusa de um pequeno triângulo retângulo.

Figura 16-10: O Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, é a chave para a fórmula do comprimento do arco.



Você pode imaginar que à medida que você amplia cada vez mais, dividindo a curva em mais e mais pedaços, as pequenas seções ficam cada vez mais retas e a hipotenusa cada vez mais se aproxima da curva. É por isso – quando esse processo de somar pedaços cada vez menores é levado ao limite – que você obtém o comprimento *exato* da curva.

Então, tudo o que você tem a fazer é somar todas as hipotenusas ao longo da curva entre seus pontos de partida e de chegada. Os comprimentos das partes de cada triângulo infinitesimal são dx e dy, e assim o comprimento da hipotenusa – dada pelo Teorema de Pitágoras – é

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Para somar todas as hipotenusas de a até b ao longo da curva, você apenas integra:

$$\int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Um pequeno ajuste e você tem a fórmula para o comprimento do arco. Primeiro, fatore o $(dx)^2$ dentro da raiz quadrada e simplifique:

$$\int_a^b \sqrt{(dx)^2 \left[1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right]} = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}$$

Agora você pode tirar a raiz quadrada de $(dx)^2$ – isto é, dx, é claro – e trazer para fora do radical, e, voilà, você obteve a fórmula.

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

Comprimento do arco: O *comprimento do arco* ao longo da curva, $y = f(x)$, de a até b, é dado pela integral a seguir:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,(dx)$$

A expressão dentro dessa integral é simplesmente o comprimento de uma hipotenusa representativa.

Tente esse aqui: Qual é o comprimento ao longo de $y = (x-1)^{3/2}$ de $x = 1$ até $x = 5$?

Tire a derivada da sua função.

$$y = (x-1)^{3/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(x-1)^{1/2}$$

Insira isso na fórmula e integre.

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,(dx)$$

$$= \int_1^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}(x+1)^{1/2}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_1^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x+1)}\,dx$$

$$= \int_1^5 \left(\frac{9}{4}x - \frac{5}{4}\right)^{1/2} dx$$

$$= \left[\frac{4}{9} - \frac{2}{3}\left(\frac{9}{4}x - \frac{5}{4}\right)^{3/2}\right]_1^5$$

(Você viu como eu obtive isso, não viu? É a técnica da integração de adivinhar e verificar com a regra inversa da potência. O $^4/_9$ é a quantidade mudada que você precisa por causa do coeficiente $^9/_4$).

$$= \left[\frac{1}{27}(9x-5)^{3/2}\right]_1^5 \text{ (Perguntas algébricas são estritamente proibidas!)}$$

$$= \frac{1}{27}\left(\sqrt{40}\right) - \frac{1}{27}\cdot 8$$

$$= \frac{8}{27}\left(\left(\sqrt{10}\right) - 1\right)$$

$$\approx 9{,}07 \textit{ unidades}$$

Agora se você alguma vez se achar em uma rua com o formato $y = (x-1)^{3/2}$ e o seu hodômetro estiver quebrado, você pode descobrir o comprimento exato do seu percurso. Seus amigos irão ficar muito impressionados – ou muito preocupados.

Superfícies de revolução – passe a garrafa de pessoa para pessoa

Uma superfície de revolução é uma superfície tridimensional com um corte transversal circular, como um vaso ou um sino ou uma garrafa de vinho. Para esses problemas, você divide a superfície em faixas circulares estreitas, descobre a área da superfície de uma faixa representativa, e depois apenas soma as áreas de todas as faixas para obter a área total da superfície. A Figura 16-11 mostra esse tipo de forma com uma faixa representativa.

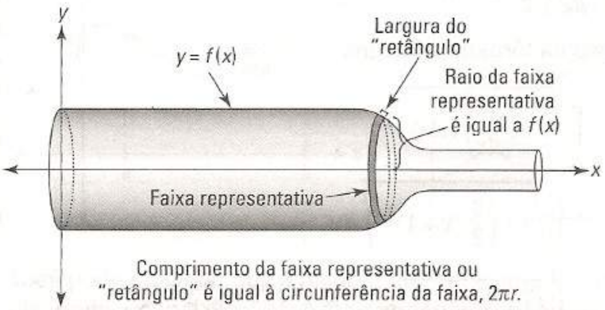


Figura 16-11: O problema da garrafa de vinho. Se você estiver cansado de cálculo, relaxe e dê uma olhada no livro Vinho Para Leigos – é um Best seller.

Qual é a área da superfície de uma faixa representativa? Bom, se você cortar a faixa e a desenrolar, você obtém um tipo de retângulo longo, estreito cuja área, é claro, é o *comprimento* vezes a *largura*. O retângulo envolve toda a superfície circular, então seu comprimento é a circunferência do corte transversal circular, ou $2\pi r$, onde r é a altura da função (para problemas de tipos de jardim, de qualquer maneira). A largura do retângulo ou faixa é a mesma que o comprimento da hipotenusa infinitesimal que você usou no tópico do comprimento do arco, a saber, $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Assim, a área da superfície de uma faixa representativa, do *comprimento* vezes a *largura*, é $2\pi r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, o que nos trás para a fórmula.

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

Superfície de revolução: A superfície gerada girando a função, $y = f(x)$, sobre um eixo tem uma área de superfície – entre a e b – dada pela integral a seguir:

$$\int_a^b 2\pi r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_a^b r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Se o eixo da revolução for o eixo x, r será igual a $f(x)$ – como mostrado na Figura 16-11. Se o eixo de revolução for alguma outra linha, como $y = 5$, é um pouco mais complicado – algo para se estar ansioso.

Agora tente um: Qual é a área da superfície – entre $x = 1$ e $x = 2$ – da superfície gerada girando-se $y = x^3$ sobre o eixo x. Veja a Figura 16-12.

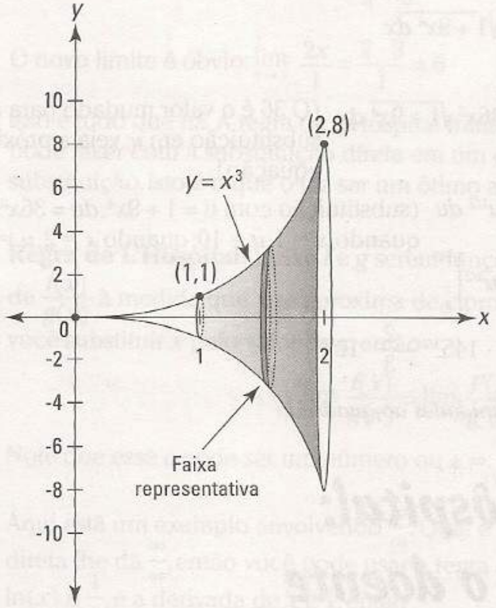


Figura 16-12: Uma superfície de revolução – essa tem um formato parecido com a parte final de uma trombeta.

1. **Pegue a derivada da sua função.**

$$y = x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Agora você pode terminar o problema apenas inserindo tudo na fórmula, mas eu quero fazer isso passo a passo para reforçar a idéia que toda vez que você integra, você escreve um pequeno pedaço representativo de algo – isso é o integrando – depois você soma todos esses pequenos pedaços pela integração.

2. **Descubra a área da superfície de uma faixa representativa estreita.**

O raio da faixa é x^3, então sua circunferência é $2\pi x^3$ – isto é, o "comprimento" da faixa. Sua largura, uma hipotenusa minúscula, é $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{[1 + (3x^2)^2}\, dx$. E, assim, sua área – *comprimento* vezes *largura* – é $2\pi x^3 \sqrt{[1 + (3x^2)^2}\, dx$

Some as áreas de todas as faixas de 1 até 2 usando a integração.

$$\int_1^2 2\pi x^3 \sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 x^3 \sqrt{1+9x^4\,dx}$$

$$= \frac{2\pi}{36} \int_1^2 36x^3 \sqrt{1+9x^4}\,dx$$ (O 36 é o valor mudado para a substituição em u; veja a próxima linha da equação)

$$= \frac{\pi}{18} \int_{10}^{145} u^{1/2}\,du$$ (substituição com $u = 1+9x^4, du = 36x^3dx$; quando, $x = 1, u = 10$; quando $x = 2, u = 145$)

$$= \frac{\pi}{18} \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{10}^{145}$$

$$= \frac{\pi}{18} \left(\frac{2}{3} \cdot 145^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot 10^{3/2}\right)$$

$\approx 199{,}5$ *unidades ao quadrado*

Regra de L'Hôspital: Cálculo para o doente

A regra de L'Hôspital é um ótimo atalho para fazer problemas envolvendo limites. Você se lembra dos limites – dos Capítulos 7 e 8 – como $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$? A propósito, se você estiver se perguntando por que eu estou mostrando isso agora, é porque (a) você talvez precise dele algum dia para resolver algum problema de integral imprópria (o assunto do próximo tópico desse capítulo), apesar de não fazermos esse tipo de problema, e (b) você também precisa dele para alguns problemas de séries infinitas no Capítulo 17.

Assim como a maioria dos problemas envolvendo limites – não considerando os problemas óbvios – você não pode fazer $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ com a substituição direta: inserindo 3 no lugar de x, você obtém $\frac{0}{0}$, que é indefinido. No Capítulo 8, você fatorou o numerador em $(x-3)(x+3)$ e depois cancelou o $(x-3)$. Isso lhe deixou com $\lim_{x\to 3}(x+3)$, que é igual a 6.

Agora veja como é fácil pegar o limite com a regra de L'Hôspital. Apenas pegue a derivada do numerador e do denominador. Não use a regra do quociente; apenas pegue as derivadas do numerador e do denominador separadamente. A derivada de $x^2 - 9$ é $2x$ e a derivada de $x - 3$ é 1. A regra de L'Hôspital deixa você substituir o numerador e o denominador pelas suas derivadas assim:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2x}{1}$$

O novo limite é óbvio: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{1}=\dfrac{2\cdot 3}{1}=6$

Isso é tudo que há. A regra de L'Hôspital transforma o limite que você não pode fazer com a substituição direta em um que você pode fazer com a substituição. Isto é o que o faz ser um ótimo atalho.

Regra de L'Hôspital: Deixe f e g serem funções diferenciáveis. Se o limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ à medida que x se aproxima de c produzir $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ quando você substituir x pelo valor de c, então

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Note que esse c pode ser um número ou $\pm\infty$.

Aqui está um exemplo envolvendo $\dfrac{\infty}{\infty}$: Qual é o $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$? A substituição direta lhe dá $\dfrac{\infty}{\infty}$, então você pode usar a regra de L'Hôspital. A derivada de $\ln(x)$ é $\dfrac{1}{x}$, e a derivada de x é 1, então

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1}=\frac{0}{1}=0$$

Tente outro: Avalie $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$. A substituição lhe dá $\dfrac{0}{0}$, então a regra de L'Hôspital se aplica. A derivada de $e^{3x}-1$ é $3e^{3x}$ e a derivada de x é 1, assim

$$\lim_{x\to 0}=\frac{e^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}=\frac{3e^{3x}}{1}=\frac{3\cdot 1}{1}=3$$

A bobagem diz que para usar a regra de L'Hôspital, a substituição deve produzir ou $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Você deve obter uma dessas formas "indetermináveis" aceitáveis para aplicar o atalho. Não se esqueça de verificar isso.

Colocando as formas inaceitáveis em forma

Se a substituição produzir uma das formas inaceitáveis, $\pm\infty\cdot 0$ ou $\infty-\infty$, você tem que primeiro ajustar o problema para obter uma forma aceitável antes de suar a regra de L'Hôspital.

Por exemplo, encontre $\lim_{x \to \infty}(e^{-x}\sqrt{x})$. A substituição lhe dá $0 \cdot \infty$, então você teve que ajustar ele:

$$\lim_{x \to \infty}(e^{-x}\sqrt{x}) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{e^{x}}\right)$$

Agora você tem o caso $\frac{\infty}{\infty}$, então você está pronto para usar a regra de L'Hôspital. A derivada de $\sqrt{x}$ é $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, e a derivada de e^x é e^x, então

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{e^{x}}\right) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^{\infty}}\right) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\infty}}}{e^{\infty}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\infty} = \frac{0}{\infty} = 0$$

Mais três formas inaceitáveis

Quando a substituição produzir $1^{\pm\infty}$, 0^0, ou ∞^0, use o truque do logaritmo a seguir para obter uma forma indeterminada aceitável. Por exemplo, encontre $\lim_{x \to 0^+}(\text{sen}x)^x$ (lembre-se do Capítulo 7 que o $\lim_{x \to 0^+}$ significa que x se aproxima de 0 apenas pela direita; este é um limite *de um lado*). A substituição lhe dá 0^0, então você faz o seguinte.

1. Iguale o limite a *y*.

$$y = \lim_{x \to 0^+}(\text{sen}x)^x$$

2. Tire o log de ambos os lados.

$$\ln(y) = \ln\left(\lim_{x \to 0^+}(\text{sen}x)^x\right)$$

$$\ln(y) = \lim_{x \to 0^+}\left(\ln(\text{sen}x)^x\right) \qquad \text{(leve em conta o que eu digo)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+}\left(x\ln(\text{sen}x)\right) \qquad \text{(É melhor revisar as regras dos logaritmos no Capítulo 4 se você não entender isso)}$$

3. Esse limite é um caso $0 - \infty$, então ajuste ele.

$$= \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\ln(\text{sen}x)}{\frac{1}{x}}\right)$$

4. Agora você tem um caso $\frac{-\infty}{\infty}$, então você pode usar a regra de L'Hôspital.

A derivada de $(\ln(\text{sen}(x))$ é $\frac{1}{(\text{sen}x)} \cdot \cos(x)$, ou $\text{cotg}(x)$, e a derivada de $\frac{1}{x}$ é $-\frac{1}{x^2}$, então

O primeiro nessa seqüência de integrais é óbvio; o segundo é uma regra inversa simples com um pequeno ajuste para o 2; você faz a terceira integral usando a identidade $\cos^2(x)$ uma segunda vez; e a quarta integral é feita seguindo os passos no Caso 2. Faça isso. Sua resposta final deve ser

$$\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(4x) - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2x) + C$$

Um verdadeiro passeio.

Integrais contendo secantes e tangentes

Pronto para um choque? Esse tópico é sobre integrais contendo secantes e tangentes.

Caso 1: A potência da tangente é ímpar e positiva

Integre $\int \sqrt{\sec(x)}\, \operatorname{tg}^3(x)dx$

1. Remova um fator secante-tangente e mova para a direita.

Primeiramente, reescreva o problema: $\int \sqrt{\sec(x)}\, \operatorname{tg}^3(x)dx = \int \sec^{1/2}(x) \operatorname{tg}^3(x)dx$.

Agora, tirar o fator secante-tangente de $\sec^{1/2}(x)\tan^3(x)$ pode parecer como tentar tirar leite das pedras porque $\sec^{1/2}(x)$ tem uma potência menor do que $\sec^1(x)$, mas funciona:

$$\int \sec^{1/2}(x)\operatorname{tg}^3(x)dx = \int \left(\sec^{-1/2}(x)\operatorname{tg}^2(x)\right)\sec(x)\operatorname{tg}(x)dx$$

2. Transforme as tangentes restantes (pares) em secantes usando a versão da tangente-secante da identidade Pitagoreana.

DICA

Uma maneira fácil de lembrar a versão tangente-secante da identidade Pitagoreana é começar com a versão seno-cosseno, $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, e dividir ambos os lados dessa equação por $\cos^2(x)$. Isso produz $\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$. Para produzir a versão cotangente-cosecante, divida ambos os lados de $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ por $\operatorname{sen}^2(x)$. O resultado é $1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$.

A identidade Pitagoreana é $\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$, e assim $\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$. Agora faça a troca.

$$\begin{aligned}
&\int \left(\sec^{-1/2}(x)\operatorname{tg}^2(x)\right)\sec(x)\operatorname{tg}(x)dx \\
&= \int \left(\sec^{-1/2}(x)\left(\sec^2(x) - 1\right)\right)\sec(x)\operatorname{tg}(x)dx \\
&= \int \left(\sec^{3/2}(x) - \sec^{-1/2}(x)\right)\sec(x)\operatorname{tg}(x)dx
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\text{cotg}x}{\frac{-1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{-x^2}{\text{tg}(x)}\right)$$

5. Esse é um caso $\frac{0}{0}$, então usa a regra de L'Hôspital de novo.

$$= \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{-2x}{\sec^2 x}\right)$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

Calma! Essa ainda não é a resposta

6. Ache o valor de *y*.

Você pode ver que a resposta de 0 no passo 5 é a resposta para a equação lá de trás no passo 2: $\ln(y) = \ln\left(\lim_{x \to 0^+}(\text{sen}x)^x\right)$? Então, o 0 no passo 5 diz a você que

$\ln(y) = 0$. Agora ache o valor de y:

$$\ln(y) = 0$$

$$y = 1$$

Pelo fato de você ter igualado o limite a y no passo 1, isso, finalmente, é a sua resposta:

$$\lim_{x \to 0^+}(\text{sen}x)^x = 1$$

ATENÇÃO!

Não cometa o erro de pensar que você pode usar aritmética básica ou as leis dos expoentes ao lidar com qualquer forma indeterminada aceitável ou inaceitável. Pode parecer que $\infty - \infty$ deva ser igual a zero, por exemplo, mas não é. Da mesma maneira, $0 \cdot \infty \neq 0$, $\frac{0}{0} \neq 1$, $0^0 \neq 1$, $\infty^0 \neq 1$, e $1^\infty \neq 1$.

Integrais impróprias: basta olhar para a maneira como a integral está segurando o seu garfo!

Integrais definidas são *impróprias* quando elas vão infinitamente para cima, para baixo, para a direita, ou para a esquerda. Elas vão infinitamente longe para cima ou para baixo em problemas do tipo $\int_2^4 \frac{1}{x-3}dx$ que tem uma ou mais assíntotas verticais. Elas vão infinitamente longe à direita ou à esquerda em problemas do tipo $\int_5^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$, ou $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$, onde um ou ambos os limites da integração são infinitos (Há outros poucos tipos estranhos de integrais impróprias, mas elas são raras – não se preocupe com elas). Faria sentido apenas usar o termo *infinito* em vez de *impróprio* para descrever essas integrais, exceto pelo fato marcante de que muitas dessas integrais "infinitas" têm uma área *finita*. Mais sobre isso em um minuto.

Você revolve ambos os tipos de integrais impróprias transformando-as em problemas envolvendo limites. Você somente não pode fazê-los da forma regular. Dê uma olhada em alguns exemplos.

Integrais impróprias com assíntotas verticais

Uma assíntota vertical pode estar na margem da área em questão ou no meio dela.

Uma assíntota vertical em um dos limites da integração

Qual é a área sob $y = \frac{1}{x^2}$ de 0 até 1? Essa função é indefinida em $x = 0$, e ela tem uma assíntota vertical aí. Então você tem que transformar a integral definida em um limite:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$ (a área em questão é a direita do zero, então *c* se aproxima do zero pela direita)

$$= \lim_{c \to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_c^1$$ (regra inversa da potência)

$$= \lim_{c \to 0^+} \left((-1) - \left(-\frac{1}{c}\right)\right)$$

$$= -1 - (-\infty)$$

$$= -1 + \infty$$

$$= \infty$$

Essa área é infinita, o que provavelmente não o surpreende porque a curva sobe infinitamente. Mas fique calmo, apesar do fato de a próxima função também subir infinitamente em $x = 0$, sua área é infinita!

Encontre a área sob $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ de 0 até 1. Essa função também é indefinida em $x = 0$, então o processo é o mesmo do exemplo anterior.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_c^1$$ (regra inversa da potência)

$$= \lim_{c \to 0^+} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} c^{2/3} \right)$$
$$= \frac{3}{2} - 0$$
$$= \frac{3}{2}$$

Convergência e divergência: Você diz que a integral imprópria *converge* se o limite existir, isto é, se o limite for igual a um número finito como no segundo exemplo. Caso contrário, a integral imprópria é diga *divergente* – como no primeiro exemplo. Quando uma integral imprópria diverge, a área em questão (ou parte dela) é igual a ∞ ou $-\infty$.

Uma assíntota vertical entre os limites da integração

Se o ponto indefinido do integrando estiver em algum lugar entre os limites da integração, você divide a integral em duas – no ponto indefinido – e depois transforma cada integral em um limite e começa daí. Avalie $\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$. Esse integrando é indefinido em $x = 0$.

1. **Divida a integral em duas no ponto indefinido.**

$$\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx + \int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$$

2. **Transforme cada integral em um limite e avalie.**

Para a integral $\int_{-1}^{0}$, a área é à esquerda do zero, então c se aproxima do zero pela esquerda. Para a integral $\int_{0}^{8}$, a área é à direita do zero, então c se aproxima do zero pela direita.

$$= \lim_{c \to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx \quad + \quad \lim_{c \to 0^+} \int_{c}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$$
$$= \lim_{c \to 0^-} \left[\frac{3}{2} x^{2/3} \right]_{-1}^{c} \quad + \quad \lim_{c \to 0^+} \left[\frac{3}{2} x^{2/3} \right]_{c}^{8}$$
$$= \lim_{c \to 0^-} \left(\frac{3}{2} c^{2/3} - \frac{3}{2} \right) \quad + \quad \lim_{c \to 0^+} \left(6 - \frac{3}{2} c^{2/3} \right)$$
$$= -\frac{3}{2} \quad + \quad 6$$
$$= 4{,}5$$

Se você falhar em notar que a integral tem um ponto indefinido entre os limites da integração, e você integrar da maneira comum, você talvez obtenha a resposta errada. O problema acima, $\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$, acontece de dar certo se você o fizer da maneira comum. No entanto, se você fizer $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$ da maneira comum, você não apenas obtém a resposta errada como também uma resposta totalmente absurda de 2 *negativo*, apesar do fato de a função ser positiva de -1 até 1. Moral da história: *não arrisque*.

ATENÇÃO!

Se uma das partes da integral dividida divergir, a integral original diverge. Você não pode obter, digamos, $-\infty$ para uma parte e ∞ para a outra parte e depois somar para obter zero.

Integrais impróprias com um ou dois limites infinitos de integração

Você faz essas integrais impróprias transformando-as em limites onde c se aproxima do infinito ou do infinito negativo. Aqui estão dois exemplos: $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ e $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$.

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx &= \lim_{c \to \infty} \int_{1}^{c} \frac{1}{x^2}\, dx \\
&= \lim_{c \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^c \\
&= \lim_{c \to \infty} \left(-\frac{1}{c} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) \\
&= 0 - (-1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Então essa integral imprópria *converge*.

Na próxima integral, o denominador é menor – x em vez de x^2 – e assim a fração é *maior*, então você esperaria $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ ser maior que $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$, o que é. Mas não é apenas maior, é *muito, muito* maior.

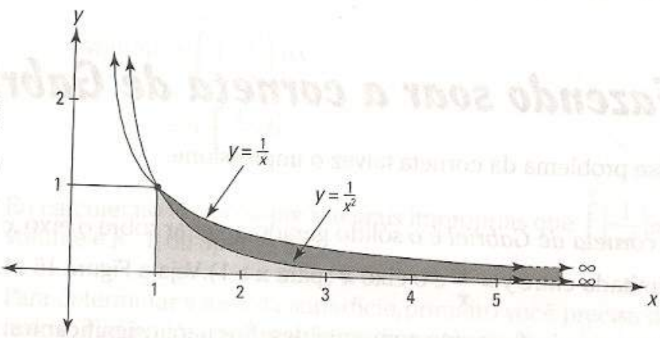
$$\begin{aligned}
\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx &= \lim_{c \to \infty} \int_{1}^{c} \frac{1}{x}\, dx \\
&= \lim_{c \to \infty} [\ln x]_1^c \\
&= \lim_{c \to \infty} (\ln c - \ln 1)
\end{aligned}$$

$$= \infty - 0$$
$$= \infty$$

Essa integral imprópria *diverge*.

A Figura 16-13 mostra essas duas funções. A área sob $\frac{1}{x^2}$ de 1 até ∞ é a mesma que a área do quadrado 1 por 1 – a grosso modo, 1 centímetro ao quadrado. A área sob $\frac{1}{x}$ de 1 até ∞ é *muito, muito* maior – na verdade, é infinitamente maior do que quadrado grande o suficiente para cercar a galáxia da via láctea. Seus formatos são muito parecidos, mas suas áreas não poderiam ser mais diferentes.

Figura 16-13: A área sob $\frac{1}{x^2}$ de 1 até ∞ e a área sob $\frac{1}{x}$ de 1 até ∞.



A propósito, essas duas funções aparecem novamente no Capítulo 17 em séries infinitas. Decidir se uma série infinita converge ou diverge – uma característica distinta bastante parecida com a diferença entre essas duas funções – é um dos tópicos principais do Capítulo 17.

Quando ambos os limites da integração forem infinitos, você separa a integral em duas e transforma cada parte em um limite. Separar a integral em $x = 0$ é conveniente porque o zero é um número fácil de lidar, mas você pode dividir em qualquer lugar que você quiser. Zero talvez pareça uma boa escolha porque parece estar no meio entre $-\infty$ e ∞. Mas isto é uma ilusão porque não há meio entre $-\infty$ e ∞, ou você poderia dizer que qualquer ponto no eixo x é o meio.

Aqui está um exemplo: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

1. Divida a integral em duas.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

2. Transforme cada parte em um limite.

$$= \lim_{c \to -\infty} \int_c^0 \frac{1}{x^2+1}\,dx + \lim_{c \to \infty} \int_0^c \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

3. Avalie cada parte e some os resultados.

$$= \lim_{c \to -\infty} [\text{arctg}(x)]_c^0 + \lim_{c \to -\infty} [\text{arctg}(x)]_0^c$$

$$= \lim_{c \to -\infty} (\text{arctg}(0) - \text{arctg}(c)) + \lim_{c \to \infty} (\text{arctg}(c) - \text{arctg}(0))$$

$$= \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$

$$= \pi$$

ATENÇÃO!

Se qualquer "pedaço" da integral divergir, o todo diverge.

Fazendo soar a corneta de Gabriel

ATENÇÃO!

Esse problema da corneta talvez o impressione.

A *corneta de Gabriel* é o sólido gerado ao girar sobre o eixo x a região ilimitada entre $y = \frac{1}{x}$ e o eixo x (para $x \geq 1$). Veja a Figura 16-14.

Tocar esse instrumento apresenta desafios não insignificantes: 1) Não tem parte final para você colocar na boca; 2) Mesmo se tivesse, levaria muito tempo para chegar ao final; 3) Mesmo se você conseguisse chegar ao final e colocá-lo na sua boca, você não poderia soprar ar nenhum através dela porque o buraco é infinitamente pequeno; 4) Mesmo que você conseguisse assoprar a corneta, seria um tanto quanto inútil porque levaria muito tempo para o som sair. Existem dificuldades adicionais – peso infinito, não cabe no universo, e assim por diante – mas eu desconfio que você tenha entendido totalmente.

Acredite ou não, a corneta de Gabriel tem um volume finito, mas uma área de superfície *infinita*!

Você usa o método da panqueca para descobrir seu volume (veja o tópico da pilha de panquecas). Lembre-se que o volume de cada panqueca representativa é $\pi r^2 dx$. Para esse problema, o raio é $\frac{1}{x}$, então o pequeno pedaço do volume é $\pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$. Você encontra o volume total somando os pequenos pedaços entre 1 e ∞.

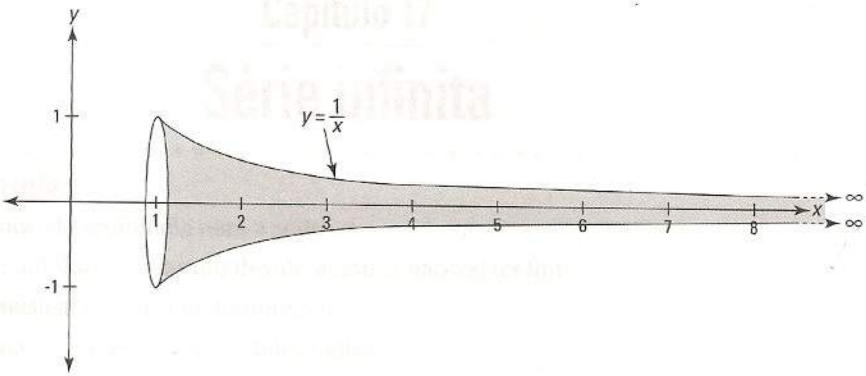


Figura 16-14: A corneta de Gabriel.

$$\text{Volume} = \int_1^{\infty} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$
$$= \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

Eu calculei no tópico sobre integrais impróprias que $\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx = 1$, então o volume é $\pi \cdot 1$, ou apenas π.

Para determinar a área da superfície, primeiro você precisa da derivada da função (veja o tópico "Superfícies de revolução"):

$$y = \frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

Agora insira tudo na fórmula da área da superfície:

$$\textit{Área da superfície} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx$$
$$= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\, dx$$

Nós determinamos que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \infty$, e pelo fato de $\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}$ ser sempre maior que $\frac{1}{x}$ no intervalo $[1, \infty)$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}$ também deve ser igual a ∞. Finalmente, 2π vezes ∞ continua sendo ∞, é claro, então a área da superfície é infinita.

Pergunta bônus para aqueles com propensão filosófica: Supondo que Gabriel seja onipotente, poderia ele superar as dificuldades mencionadas acima e assoprar sua corneta? *Dica*: Todo o cálculo do mundo não vai lhe ajudar com essa aqui.

Capítulo 17
Série infinita

Neste capítulo

- Continuando da seqüência para a série
- Uma série infinita – o atrasado devido à chuva não vai ter fim
- Ficando musical com a série harmônica
- Dando uma boa olhada na série telescópica
- Testando em busca de convergência
- Torcendo pelo teste da raiz
- Analisando série alternativa

Assim como quase que completamente com todos os tópicos, o assunto desse capítulo envolve a idéia do infinito – especificamente, séries que continuam para o infinito. Uma série infinita é a soma de uma lista sem fim de números como $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$. Pela lista *não* ter fim, não é surpreendente que esse tipo de soma possa ser infinita. O que é incrível é que algumas séries infinitas somam um número *finito*. Esse capítulo abrange dez testes para decidir se a soma de uma série é finita ou infinita.

O que você faz nesse capítulo é muito fantástico quando você pensa sobre isso. Considere as séries 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + ... Se você se distanciar o suficiente, você vai encontrar um número que tem tantos zeros à direita do ponto decimal que mesmo que cada zero fosse tão pequeno quanto um próton, não haveria espaço suficiente em todo o universo apenas para escrevê-lo! Por nosso universo ser tão vasto, qualquer coisa nele – digamos o número de partículas elementares – é uma gota d'água no oceano perto das coisas que você vê nesse capítulo. Na verdade, nem mesmo uma gota d'água no oceano, porque perto do infinito, qualquer coisa finita soma *nada*. Você já deve ter provavelmente ouvido Carl Sagan se emocionar com os "bilhões e bilhões e bilhões" de estrelas na nossa galáxia. "bilhões e bilhões" – *pffffft*.

Seqüência e série: O que elas são

Aqui está uma *seqüência*: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$. Transforme as vírgulas em sinais de adição e você tem uma *série*: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$. Muito simples, hein? Investigar as séries é o que esse capítulo vai fazer, mas eu preciso discutir brevemente a seqüência para criar a base para série.

Amarrando as seqüências

Uma *seqüência* é simplesmente uma lista de números. Uma *seqüência infinita* é uma lista de números *sem fim*. Esse é o único tipo que nos interessa, e toda vez que o temo *seqüência* (ou *série*) é usado sozinho, ele significa uma seqüência infinita (ou série infinita).

Aqui está a forma geral para a seqüência:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n,$$

onde *n* vai de 1 (geralmente) até o infinito (algumas vezes *n* começa no zero ou outro número). O quarto *termo* da seqüência, por exemplo, é a_4 (lê-se "*a* índice 4"); o *n*-ésimo termo é a_n (lê-se "*a* índice *n*"). A coisa com a qual nós nos preocupamos é o que acontece com uma seqüência infinitamente distante à direita, ou como os matemáticos dizem, "no limite". Uma notação abreviada para essa seqüência é $\{a_n\}$.

Bem lá atrás, na introdução, eu discuti a seguinte seqüência. É definida pela fórmula $a_n = \frac{1}{2^n}$:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}$$

O que acontece com essa seqüência no limite é óbvio. Cada termo fica cada vez menor, certo? E se você se distanciar o suficiente, você pode encontrar um termo tão perto do zero como você quer, certo? Então,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Lembre dos Capítulos 7 e 8 como interpretar esse limite. À medida que *n* se aproxima do infinito (mas nunca chega lá), a_n fica cada vez mais perto de zero.

Convergência e divergência de seqüências

Devido ao fato de o limite da seqüência anterior ser um número *finito*, você diz que a seqüência *converge*.

3. Resolva pela substituição com $u = \sec(x)$ e $du = \sec(x)\text{tg}(x)dx$.

$$= \int \left(u^{3/2} - u^{-1/2}\right)du$$
$$= \frac{2}{5}u^{5/2} - 2u^{1/2} + C$$
$$= \frac{2}{5}\sec^{5/2} - 2\sec^{1/2}(x) + C$$

Caso 2: A potência da secante é par e positiva

Encontre $\int \sec^4(x)\text{tg}^4(x)\,dx$.

1. Remova um fator $\sec^4(x)$ e mova para a direita.

$$= \int \sec^2(x)\text{tg}^4(x)\sec^2(x)dx$$

2. Transforme as secantes restantes em tangentes usando a identidade Pitagoreana, $\sec^2(x) = \text{tg}^2(x) + 1$.

$$= \int \left(\text{tg}^2(x) + 1\right)\text{tg}^4(x)\sec^2(x)dx$$
$$= \int \left(\text{tg}^6(x) + \text{tg}^4(x)\right)\sec^2(x)dx$$

3. Resolva pela substituição, onde $u = \text{tg}(x)$ e $du = \sec^2(x)dx$.

$$= \int \left(u^6 - u^4\right)du$$
$$= \frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{5}u^5 + C$$
$$= \frac{1}{7}\text{tg}^7(x) + \frac{1}{5}\text{tg}^5(x) + C$$

Caso 3: A potência da tangente é par e positiva e não há fatores com secante

Integre $\int \text{tg}^6(x)\,dx$.

1. Transforme um fator $\text{tg}^2(x)$ em secantes usando a identidade Pitagoreana, $\text{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$.

$$= \int \text{tg}^4(x)(\sec^2(x) - 1)dx$$

2. Distribua e separe a integral.

$$= \int \text{tg}^4(x)\sec^2(x)\,dx - \int \text{tg}^4(x)dx$$

3. Resolva a primeira integral como no passo 3 do Caso 2 para secantes e tangentes.

Você deve obter $\int \text{tg}^4(x)\sec^2(x)\,dx = \frac{1}{5}\text{tg}^5(x) + C$.

4. Para a segunda integral do passo 2, volte para o passo 1 e repita o processo.

Para esse pedaço do problema, você obtém

$$-\int \text{tg}^4(x)dx = -\int \text{tg}^2(x)\sec^2(x)dx + \int \text{tg}^2(x)dx$$

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

Convergência e divergência de uma seqüência: Para qualquer seqüência $\{a_n\}$, se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, onde L é um número real, então a seqüência *converge* para L. Caso contrário, a seqüência *diverge*.

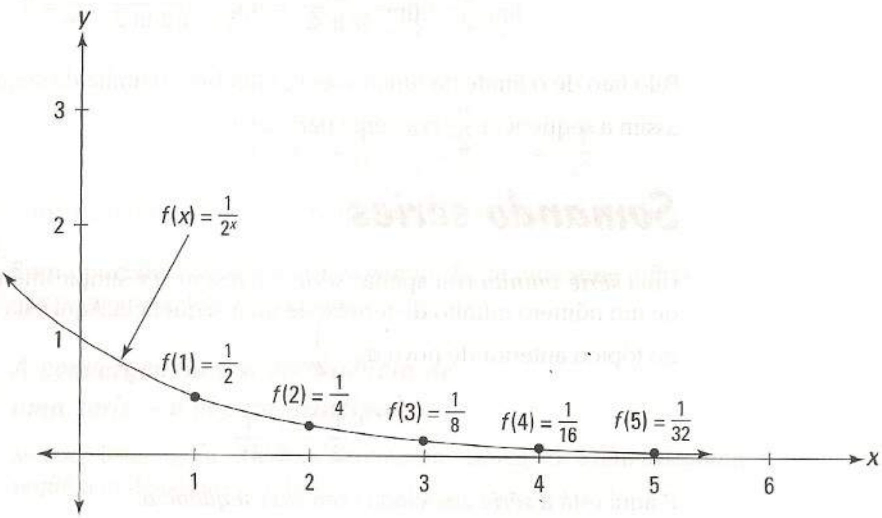
As seqüências que convergem, de certa forma, se estabilizam em um número em particular – mais ou menos alguma quantia minúscula – depois que você se distancia o suficiente à direita. As seqüências que divergem nunca se estabilizam. Ao contrário, as seqüências divergentes podem...

- Aumentar para sempre, nesse caso $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Diz-se que esse tipo de seqüência "explode". Uma seqüência também pode ser igual ao infinito negativo no limite.
- Oscilar (ir para cima e para baixo) como a seqüência $1, -1, 1, -1, 1, -1$ ...
- Não exibir padrão nenhum – isso é raro

Seqüências e funções andam de mãos dadas

A seqüência $\left\{\frac{1}{2^n}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}$ pode ser pensada como um conjunto infinito de pontos descontínuos (*descontínuo* é uma palavra matemática sofisticada para *separado*) ao longo da função contínua $f(x) = \frac{1}{2^x}$. A Figura 17-1 mostra a curva $f(x) = \frac{1}{2^x}$ e os pontos na curva que marcam a seqüência.

Figura 17-1: Os pontos da curva $f(x) = \frac{1}{2^x}$ formam a seqüência $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$.



A seqüência é formada pelos outputs (os valores de y) da função onde os inputs (os valores de x) são inteiros positivos (1,2,3,4,...).

A seqüência e a função relacionada andam de mãos dadas. Se o limite da função, à medida que x se aproxima do infinito, é algum número finito, L, então o limite da seqüência também é L, e assim, a seqüência converge para L. Também o gráfico desse tipo de par de funções convergente/seqüência tem uma assíntota horizontal em L; o gráfico na Figura 17-1 tem uma assíntota com a equação $y = 0$.

Determinando limites com a regra de L'Hôspital

Lembra-se da regra de L'Hôspital do Capítulo 16? Você vai usá-la agora para encontrar os limites da seqüência. A seqüência $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ converge ou diverge? Inserindo 1, depois 2, depois 3, e assim sucessivamente, em $\frac{n^2}{2^n}$, você gera alguns primeiros termos da seqüência:

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, \frac{64}{256}, \ldots$$

O que você acha? Depois de subir por alguns termos, a seqüência desce e parece que vai continuar descendo – parece que ela vai convergir para zero. A regra de L'Hôspital prova isso. Você usa a regra para determinar o limite da função $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$, que anda de mãos dadas com a seqüência $\frac{n^2}{2^n}$.

LEMBRE-SE

Para usar a regra de L'Hôspital, pegue a derivada do numerador e a derivada do denominador.

Para esse problema, você tem que usar a regra de L'Hôspital duas vezes:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{2^x \ln 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{2^x \ln 2 \ln 2} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Pelo fato de o limite da função ser 0, e também o limite da seqüência, e assim a seqüência $\frac{n^2}{2^n}$ converge para zero.

Somando séries

Uma *série infinita* (ou apenas *série* em resumo) é simplesmente a soma de um número infinito de termos de uma seqüência. Aqui está a seqüência do tópico anterior de novo, $a_n = \frac{1}{2^n}$:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

E aqui está a *série* associada com essa *seqüência*:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Você pode usar uma notação sofisticada, usando o sigma para escrever essa soma em uma forma mais compacta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

O símbolo de somatória diz para você inserir 1 no lugar de n, depois 2, depois 3, e assim sucessivamente, e depois somar todos os termos (mais sobre notação sigma no Capítulo 13). Um procurador de defeitos pode observar que você, na verdade, não pode somar um número infinito de termos. Ok. Então aqui está o detalhe para os procuradores de defeitos. Uma soma infinita é tecnicamente um limite. Em outras palavras,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{b \to \infty} \sum_{n=1}^{b} \frac{1}{2^n}$$

Para encontrar a soma infinita, você pega o limite – do mesmo jeito que você faz para as integrais (veja o Capítulo 16) impróprias (indefinidas). Daqui em diante, de qualquer forma, eu só escrevo somas infinitas como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ e abro mão da bobagem do limite.

Somas parciais

Continuando com a mesma série, dê uma olhada em como a soma cresce listando a "soma" de um termo (tipo o som de uma mão aplaudindo), a soma de dois termos, três termos, quatro, e assim sucessivamente:

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

Cada uma dessas somas é chamada de *soma parcial* da série.

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

Soma parcial: A *n-ésima soma parcial*, S_n, de uma série infinita é a soma dos primeiros n termos da série.

A convergência e a divergência de uma série – o evento principal

Se você listar agora as somas parciais anteriores, você tem a seguinte *seqüência* de somas parciais:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$$

O ponto principal desse capítulo é descobrir se esse tipo de seqüência de somas parciais *converge* – se move em direção a um número finito – ou *diverge*. Se a seqüência de somas parciais convergir, você diz que a série converge; caso contrário, a seqüência de somas parciais diverge e você diz que a série diverge. O resto desse capítulo é dedicado às muitas técnicas usadas para fazer essa determinação.

A propósito, se você estiver um pouco confuso pelos termos *seqüência* e *série* e a conexão entre eles, você não está sozinho. Manter as idéias certas não é fácil. Para começar, note que existem duas seqüências associadas com toda e qualquer série. Com a série $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$..., por exemplo, você tem a seqüência subjacente, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$..., e também a seqüência de somas parciais, $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}$... Não é uma má idéia tentar manter essas coisas corretas, mas tudo que você realmente precisa se preocupar é se as *séries* somam um número finito ou não. Se ela somar, ela *converge*; se não, ela *diverge*. A razão para entrar na noção um tanto quanto confusa de uma *seqüência* de somas parciais é que as definições de convergência e divergência são baseadas no comportamento da seqüência, e não da série. Mas – eu espero que seja óbvio – as idéias são mais importantes do que a terminologia, e de novo, a *idéia* importante que você precisa observar é se a série soma ou não um número finito.

E a série anterior? Ela converge ou diverge? Não precisaria ter muita imaginação para ver o padrão a seguir:

$$S_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$
$$S_2 = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$
$$S_3 = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$
$$S_4 = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$$
$$\vdots$$
$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Encontrar o limite dessa seqüência de somas parciais é óbvio:

$$\lim_{n\to\infty} Sn = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

Então, essa série converge para 1. Em símbolos,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$$

A propósito, isso talvez faça você se lembrar do paradoxo sobre andar em direção a uma parede, onde seu primeiro passo é metade da distância da parede, seu segundo passo é metade da distância restante, seu terceiro passo é metade da distância restante, e assim sucessivamente. Você vai conseguir chegar à parede? Resposta: Depende. Mais sobre isso depois.

Convergência ou divergência? Essa é a questão

Esse tópico contém nove maneiras de determinar se uma série converge ou diverge. No próximo tópico sobre *séries alternadas*, eu olho a décima maneira, e depois eu resumo todas as dez no tópico final.

Um teste de divergência óbvio: o teste do *n*-ésimo termo

Se os termos individuais de uma série (em outras palavras, os termos da seqüência adjacente da série) não convergirem para zero, então a série deve divergir. Esse é o teste do *n*-ésimo termo para divergência.

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

O teste do *n*-ésimo termo: Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então $\sum a_n$ diverge (Eu suponho que você descobriu isso com esse símbolo de somatória sem nada, n vai do 1 até o infinito).

Se você pensar bem, é apenas bom senso. Quando uma série converge, a soma se concentra em certo número. A única maneira que isso pode acontecer é quando os números que estão sendo adicionados estão ficando infinitesimalmente menores – como na série sobre a qual eu venho falando: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$. Imagine, em vez disso, que os termos de uma série estejam convergindo, digamos, para 1, como na série $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\cdots$, gerada pela fórmula $a_n=\frac{n}{n+1}$. Nesse caso, quando você soma os termos, você está somando números extremamente perto de 1 repetidas vezes para sempre – e isso deve somar ao infinito. Então, para que uma série seja convergente, os termos da série devem convergir para zero. Mas tenha certeza que você entendeu o que o teste do *n*-ésimo termo *não* diz.

ATENÇÃO!

Quando os termos de uma série convergem para zero, isso *não* garante que a série converge. Na linguagem lógico-matematicalesa – o fato de que os termos de uma série convergem para zero é uma condição *necessária*, mas *não suficiente* para concluir que a série converge para uma soma finita.

Pelo fato de esse teste ser geralmente muito fácil de aplicar, deveria ser uma das primeiras coisas que você verifica ao tentar determinar se uma série converge ou diverge. Por exemplo, se lhe pedem para determinar se $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge ou diverge, note que cada termo dessa série é um número maior do que 1 sendo elevado a uma potência positiva. Isso sempre resulta em um número maior do que 1 e, assim, os termos dessa série não convergem para zero, e a série deve então divergir.

DICA

O teste do *n*-ésimo termo não funciona apenas para série positiva comum como as desse tópico, mas ele também funciona para séries com termos positivos e negativos (Mais sobre isso no final deste capítulo no tópico sobre "Séries Alternadas").

Três séries básicas e seus testes de convergência/divergência

Séries geométricas e as chamadas séries-*p* são relativamente simples, porém são séries importantes que você pode usar como referência ao determinar a convergência ou divergência de séries mais complicadas. Séries telescópicas não aparecem muito, mas muitos livros de cálculo as descrevem. Então quem sou eu para me opor à tradição?

Série geométrica

Uma série geométrica é uma série na forma:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

O primeiro termo, *a*, é chamado de *primeiro termo*. Cada termo depois do primeiro é igual ao termo antecedente multiplicado por *r*, que é a *razão*. Por exemplo, se *a* for 5 e *r* for 3, você tem

$$\begin{aligned} &5 + 5\,.\,3 + 5\,.\,3^2 + 5\,.\,3^3 + \ldots \\ &= 5 + 15 + 45 + 135 + \ldots \end{aligned}$$

Você apenas multiplica cada termo por 3 para obter o próximo termo. A propósito, o 3 nesse exemplo é chamado de *razão* porque a razão de qualquer termo *dividido* pelo seu termo antecessor é igual a 3, mas eu acho que faz muito mais sentido pensar no 3 como o seu *multiplicador*.

Se a for 100 e r for 0.1, então você tem

$$100 + 100 \,.\, 0{,}1 + 100 \,.\, 0{,}1^2 + 100 \,.\, 0{,}1^3 + 100 \,.\, 0{,}1^4 + \ldots$$
$$= 100 + 10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots$$

Se isso te faz lembrar de alguma coisa, você tem uma boa memória. É a série para o paradoxo de Aquiles versus a tartaruga (volte até o Capítulo 2).

E se a for ½ e r também for ½, você tem a série que eu tanto venho falando:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

A regra da convergência/divergência para série geométrica é muito fácil.

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

Regra da série geométrica: Se $0 < |\,r\,| < 1$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ converge para $\frac{a}{1-r}$. Se $|\,r\,| \geq 1$, a série diverge (Note que essa regra funciona quando $-1 < r < 0$, neste caso você obtém uma *série alternada*; mais sobre isso no final desse capítulo).

No primeiro exemplo, $a = 5$ e $r = 3$, então a série diverge. No segundo exemplo, a é 100 e r é 0.1, então a série converge para $\frac{100}{1-0{,}1} = \frac{100}{0{,}9} = 111^1/_9$. Essa é a resposta para o problema de Aquiles versus a tartaruga: Aquiles ultrapassa a tartaruga depois de correr $100^1/_9$ metros. E no terceiro exemplo, $a = ½$ e $r = ½$, então a série converge para $\frac{½}{1-½} = 1$. Essa é a distância que você anda se você começar a 1 jarda da parede, depois dê uma passo e fique a meia distância da parede, depois metade da distância restante, e assim sucessivamente. Você dá um número infinito de passos, mas viaja uma mera jarda. E quanto tempo vai levar para chegar à parede? Bem, se você mantiver uma velocidade constante e não pausar entre os passos (o que, é claro, é impossível), você vai chegar lá no mesmo tempo que você levaria para andar toda uma jarda. Se você pausar entre os passos, mesmo que por um bilionésimo de segundo, você *nunca* vai chegar à parede.

Série-p

Uma série-p é da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{n^p} + \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots$$

(onde p é uma potência positiva). A série-p para $p = 1$ é chamada de série *harmônica*. Aqui está ela:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

Embora isso cresça *muito* devagar – depois de 10.000 termos, a soma é somente, mais ou menos, 9,79! – a série harmônica de fato diverge para o infinito.

A propósito, isso é chamado de série *harmônica* porque os números na série têm algo a ver com a maneira que uma corda musical, como a corda de um violão, vibra – não pergunte. Para entusiastas da história, no século 6 a.C., Pitágoras investigou a série harmônica e sua conexão com as notas musicais de uma lira.

Aqui está a regra da convergência/divergência para a série-p:

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

Regra da série-p: A série-p $\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{n^p}$ converge se P > 1 e diverge se P ≤ 1.

Como você pode ver a partir dessa regra, a série harmônica forma a linha divisória da convergência/divergência para a série-p. Qualquer série-p com termos *maiores* do que os termos da série harmônica *diverge*; e qualquer série-p com termos *menores* do que os termos da série harmônica, *converge*.

A série-p para $p = 2$ é outra série comum:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots$$

A regra da série-p diz a você que essa série converge. Isso pode ser mostrado – embora seja além do objetivo desse livro – que a soma converge para $\frac{\pi^2}{6}$. Mas, ao contrário da regra da série geométrica, a regra da série-p apenas diz a você se uma série converge ou não, e não para qual número ela converge.

Série telescópica

Você não vê muitas séries telescópicas, mas a regra da série telescópica é boa para ter na sua bolsa de truques – você nunca sabe quando ela vai ser útil. Considere a seguinte série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots$$

Para ver que essa série é uma série telescópica, você tem que usar a técnica das frações parciais do Capítulo15 – desculpe ter que trazer isso à tona de novo – para reescrever $\frac{1}{n(n+1)}$ como $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Agora você tem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Você vê como todos esses termos vão agora colapsar ou *encurtar*? Os $^1/_2$ se cancelam, os $^1/_3$ se cancelam, os $^1/_4$ se cancelam, e assim sucessivamente. Tudo o que resta é o primeiro termo, 1 (na verdade, é apenas metade de um termo), e o "último" meio-termo, $\frac{1}{n+1}$. Então a soma é simplesmente

$1 - \frac{1}{n+1}$. No limite, à medida que n se aproxima do infinito, $\frac{1}{n+1}$ converge para zero, e assim a soma converge para $1 - 0$, ou 1.

Cada termo em uma série telescópica pode ser escrito como a diferença de dois meios-termos – chame-os de termos h. A série telescópica pode então ser escrita como:

$$(h_1 - h_2) + (h_2 - h_3) + (h_3 - h_4) + (h_4 - h_5) + \ldots + (h_n - h_{n+1})$$

Eu aposto que você está doido por outra regra, então aqui está a próxima.

Regra da série telescópica: Uma série telescópica da forma acima converge se h_{n+1} converge para um número finito. Nesse caso, a série converge para $h_1 - \lim_{n \to \infty} h_{n+1}$. Se h_{n+1} diverge, a série diverge.

Note que essa regra, como a regra para a série geométrica, permite que você determine qual número uma série telescópica convergente converge. Essas são as únicas duas regras que eu falo que você pode fazer isso. As outras regras para determinar a convergência ou divergência não permitem que você determine para onde uma série convergente converge. Mas, ei, você sabe o que eles dizem, "dois dentre dez não é tão ruim".

Três testes de comparação para convergência/divergência

Digamos que você esteja tentando descobrir se uma série converge ou diverge, mas ela não se encaixa em nenhum dos testes que você conhece. Não se preocupe. Você encontra uma série padrão que você sabe que converge ou diverge e depois compara a sua nova série com o padrão conhecido. Para os três testes a seguir, se o padrão convergir, sua série converge; e se o padrão divergir, sua série diverge.

O teste da comparação direta

Essa é uma regra simples e de bom senso. Se você tem uma série que é *menor* que uma série padrão convergente, então a sua série também deve convergir. E se sua série for *maior* que a série padrão divergente, então a sua série também deve divergir. Aqui está a bobagem.

Teste da comparação direta: Deixe que $0 \geq a_n \geq b_n$ para todo n.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

O que você acha de um exemplo? Determine se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+3^n}$ converge ou diverge. Muito fácil. Essa série lembra a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, que é uma série com *r* igual a $1/3$ (Note que você pode reescrever isso na forma padrão da série geométrica como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Porque $0 < |r| < 1$, essa série converge. E porque $\frac{1}{5+3^n}$ é *menor* do que $\frac{1}{3^n}$ para todos os valores de n, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+3^n}$ também deve convergir.

Aqui está outro exemplo: O $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge ou diverge? Essa série lembra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, a série-*p* harmônica que é conhecida por divergir. Porque $\frac{\ln n}{n}$ é *maior* que $\frac{1}{n}$ para todos os valores de $n \geq 3$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ também deve divergir. A propósito, se você estiver pensando porque eu posso considerar apenas os termos onde $n \geq 3$, aqui está o porquê:

Para qualquer um dos testes de convergência/divergência, você pode desconsiderar *qualquer* número de termos no começo de uma série. E se você estiver comparando duas séries, você pode ignorar qualquer número de termos do começo de qualquer uma ou de ambas as séries – e você pode ignorar um número diferente de termos em cada uma das duas séries.

Essa total desconsideração de termos iniciantes inocentes é permitida porque os primeiros, digamos, 10 ou 1000 ou 1.000.000 termos de uma série sempre somam um número finito e assim nunca tem qualquer efeito em se uma série converge ou diverge. Note, no entanto, que desconsiderando um número de termos *afetaria* o total para o qual uma série convergente converge.

O teste da comparação direta diz a você *nada* se uma série que você esteja investigando for *maior* que uma série *convergente* conhecida ou *menor* que uma série *divergente* conhecida.

Por exemplo, digamos que você queira determinar se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10+\sqrt{n}}$ converge. Essa série lembra a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, que é uma série-*p* com *p* igual a $1/2$. O teste da série-*p* diz que essa série diverge, mas isso não te ajuda porque sua série é *menor* do que esse padrão divergente conhecido.

Em vez disso, você deve comparar sua série com a série harmônica divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Sua série, $\frac{1}{10+\sqrt{n}}$, é maior do que $\frac{1}{n}$ para todo $n \geq 14$ (dá um pouco de trabalho demonstrar isso; tente). Porque a sua série é *maior* do que a série harmônica *divergente*, sua série também deve divergir.

O teste da comparação do limite

A idéia por trás desse teste é que se você pegar uma série convergente conhecida e multiplicar cada um dos seus termos por algum número,

5. Repita o passo 3 para $-\int tg^2(x)sec^2(x)dx$ (usando o Caso 2 (passo 3) para secantes e tangentes de novo).

$$-\int tg^2(x)sec^2(x)dx = -\frac{1}{3}\ tg^3(x) + C$$

6. Use a identidade Pitagoreana para transformar a $\int tg^2(x)dx$ do passo 4 em $\int sec^2(x)dx - \int 1dx$.

Ambas as integrais podem ser feitas com regras inversas simples da diferenciação. Depois de coletar todos esses pedaços – pedaço 1 do passo 3, pedaço 2 do passo 5, e pedaços 3 e 4 do passo 6 – sua resposta final deve ser $\int tg^6(x)dx = \frac{1}{5}\ tg^5(x) - \frac{1}{3}\ tg^3(x) + tg(x) - x + C$.

Muito fácil.

Integrais contendo co-secantes e cotangentes

Integrais com co-secante e cotangente funcionam exatamente como os três casos pra secantes e tangentes – você apenas usa uma forma diferente da identidade Pitagoreana: $1 + cotg^2(x) = csc^2(x)$. Tente essa aqui – integre $\int \frac{cotg^3(x)}{\sqrt{cosec(x)}}d\,x$. Se você obtiver $-2sen^{1/2}(x) - \frac{2}{3}$ $cosec^{3/2}(x) + C$, siga em frente e retire o prêmio de \$200.

DICA

Se você tiver um problema secante-tangente ou co-secante-cotangente que não se enquadra em nenhum dos casos discutidos no tópico anterior ou se estiver confuso com o problema, tente transformá-lo em senos e cossenos e resolva com um dos métodos seno-cosseno ou com identidades do tipo $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$ e $cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}$.

Por exemplo, $\int \frac{tg^4(x)}{sec^2(x)}\,dx$ não se enquadra em nenhum dos casos discutidos, mas você pode transformá-la em $\int \frac{sen^4(x)}{cos^2(x)}dx$. Essa não se enquadra em nenhum dos três casos seno-cosseno, mas você pode usar a identidade Pitagoreana para transformá-la em $\int \frac{(1 - cos^2(x))^2}{cos^2(x)}\,dx = \int \frac{1 - 2cos^2(x) + cos^4(x)}{cos^2(x)}dx$. Isso se separa em $\int sec^2(x)dx - \int 2dx + \int cos^2(x)$ dx, e o resto é fácil. Tente. E veja se você pode diferenciar seu resultado e chegar de volta ao problema original.

então essa série também converge. E não importa se esse multiplicador é, digamos, 110, ou 10.000, ou $^1/_{10.000}$ porque qualquer número, grande ou pequeno, vezes a soma finita da série original ainda é um número finito. A mesma coisa vale para uma série divergente multiplicada por qualquer número. Essa nova série também diverge porque qualquer número, grande ou pequeno, vezes o infinito ainda é igual ao infinito. Isso é muito simplificado – é somente no limite que a série é tipo um múltiplo da outra – mas isso transmite o princípio básico.

Você pode descobrir se esse tipo de conexão existe entre duas séries olhando para a relação entre os n-ésimos termos das duas séries à medida que n se aproxima do infinito. Aqui está o teste.

Teste da comparação do limite: Para duas séries, $\sum a_n$ e $\sum b_n$ se $a_n > 0, b_n > 0$, e $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$, onde L é *finito* e *positivo*, então ou as duas séries convergem ou as duas divergem.

Esse é um bom teste para usar quando você não pode usar o teste da comparação direta para sua série porque vai para o lugar errado – em outras palavras, sua série é *maior* que uma série *convergente* conhecida ou *menor* que uma série *divergente* conhecida.

Aqui está um exemplo: A $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$ converge ou diverge? Essa série lembra a série-p convergente, $\frac{1}{n^2}$, então esse é o seu padrão. Mas você não pode usar o teste da comparação direta porque os termos da sua série são *maiores* do que $\frac{1}{n^2}$. Em vez disso, você usa o teste da comparação do limite.

Pegue o limite da relação dos n-ésimos termos das duas séries. Não importa quais séries você coloca no numerador e no denominador, mas colocando a conhecida série padrão no denominador faz com que esses tipos de problemas fiquem mais fáceis de fazer e de adivinhar os resultados.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2-\ln n}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-\ln n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-\frac{1}{n}} \quad \text{(Regra de L'Hôspital)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+\frac{1}{n^2}} \quad \text{(Regra de L'Hôspital de novo)}$$

$$= \frac{2}{2+\frac{1}{\infty}}$$

$$= \frac{2}{2+0}$$

$$= 1$$

Porque o limite é finito e positivo e porque a série padrão converge, sua série também deve convergir.

Assim, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$ converge.

DICA

O teste da comparação do limite é um bom teste para séries onde o termo geral é uma função *racional*; em outras palavras, onde o termo geral é o quociente de dois polinômios.

Por exemplo, determine a convergência ou divergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-n+1}{n^3+4n+3}$.

1. **Determine a série padrão.**

   Pegue a maior potência de n no numerador e no denominador – ignorando qualquer coeficiente e todos os outros termos – e simplifique. Dessa forma:[1]

   $$\frac{5n^2-n+1}{n^3+4n+3}\to\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}$$

   Essa é a série padrão, $\frac{1}{n}$, a série harmônica divergente.

2. **Pegue o limite da relação entre os *n*-ésimos termos das duas séries.**

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5n^2-n+1}{n^3+4n+3}}{\dfrac{1}{n}}$$

   $$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3-n^2+n}{n^3+4n+3}$$

   $$=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}\quad\text{(dividindo o numerador e o denominador por } n^3\text{)}$$

   $$=\frac{5-\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{1}{\infty}}{1+\dfrac{4}{\infty}+\dfrac{3}{\infty}}$$

   $$=\frac{5-0+0}{1+0+0}$$

   $$=5$$

3. **Porque o limite do passo 2 é finito e positivo e porque a série padrão diverge, sua série também deve divergir.**

   Assim, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-n+1}{n^3+4n+3}$ diverge.

DICA

O teste da comparação do limite é sempre expresso como aparece no começo dessa seção, mas eu quero mostrar – ignorando de forma imprudente a nobre tradição dos autores de livros de cálculo – que é, de certa forma, incompleto. O limite, L, não precisa ser finito e positivo para o teste funcionar.

Primeiro, se a série padrão é convergente, e você a coloca no denominador do limite, e o limite é *zero*, então a sua série também deve convergir. Note que se o limite é infinito, você não pode concluir nada. E segundo, se a série padrão é divergente, e você a coloca no denominador, e o limite é *infinito*, então sua série também deve divergir. Se o limite é zero, você não aprende nada.

O teste da comparação da integral

O terceiro teste padrão envolve a comparação de séries que você está investigando em relação a sua integral imprópria familiar (veja o Capítulo 16 para mais sobre integral imprópria). Se a integral converge, sua série converge; e se a integral diverge, assim faz a sua série. A propósito, no meu conhecimento, ninguém mais chama isso de teste da comparação da integral – mas deveriam, pois é dessa maneira que funciona.

Aqui está um exemplo. Determine a convergência e a divergência de $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$. O teste da comparação direta não funciona porque a série é *menor* que a série harmônica *divergente*, $\frac{1}{n}$. Tentar o teste da comparação do limite é a próxima escolha natural, mas também não funciona – tente.

Mas se você notar que a série é uma expressão que você sabe como integrar, você terminou (você notou, não foi?). Apenas calcule a integral imprópria familiar com os mesmos limites de integração como os números-índice do somatório – assim:

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln n}\,dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{b}\frac{1}{x\ln x}\,dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b}\frac{1}{u}\,dx \text{ (substituição com } u=\ln x \text{ e } du=\frac{1}{x}\,dx\text{; quando } x=2,\ u=\ln 2\text{, e quando } x=b, u=\ln b)$$

$$=\lim_{b\to\infty}\,[\ln u]_{\ln 2}^{\ln b}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2)\right)$$

$$=\ln(\ln\infty)-\ln(\ln 2)$$

$$=\infty-\ln(\ln 2)$$

$$=\infty$$

Porque a integral diverge, a série diverge.

Depois que você tiver determinado a convergência ou divergência de uma série com o teste da comparação da integral, você pode então usar essa série com um referência para investigar outras séries com o teste da comparação direta ou com o teste da comparação do limite.

Por exemplo, o teste da integral acabou de dizer que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge. Agora você pode usar essa série para investigar $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n - \sqrt{n}}$ com o teste da comparação direta. Você vê o porquê? Ou você pode investigar, digamos, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n - \sqrt{n}}$ com o teste da comparação do limite. Tente.

O teste da comparação da integral é razoavelmente fácil de usar, então não esqueça de se perguntar se você pode integrar a expressão da série ou qualquer coisa parecida com ela. Se puder, BINGO.

A propósito, no Capítulo 16, você vê as duas integrais impróprias a seguir: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$, que diverge e $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$, que converge. Dê uma olhada de novo na Figura 16-13. Agora que você sabe o teste da comparação da integral, você pode apreciar a conexão entre essas integrais e suas séries-p familiares: a série harmônica divergente, $\frac{1}{n}$, e a série-p convergente, $\frac{1}{n^2}$.

Aqui está a bobagem para o teste da comparação da integral. Note o detalhe.

Teste da comparação da integral: Se $f(x)$ for positivo, contínuo, e descrente para todo $x \geq 1$ e se $a_n = f(n)$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ou ambos convergem ou ambos divergem.

Os dois testes do "R": Razão e raízes

Ao contrário dos três testes referenciais dos tópicos anteriores, o teste da razão e da raiz não comparam uma nova série a um padrão conhecido. Elas funcionam olhando apenas para a natureza da série que você está tentando descobrir. Elas formam um par coeso porque os resultados de ambos os testes dizem a você a mesma coisa. Se sua resposta for menor do que 1, a série converge; se for maior do que 1, a série diverge; e se for exatamente 1, você não aprende nada e deve tentar um teste diferente.

O teste da razão

O teste da razão olha para a razão de um termo de uma série com o seu termo anterior imediato. Se, no limite, essa razão for menor do que 1, a série converge; se for maior do que 1 (isso inclui o infinito), a série diverge; se for igual a 1, o teste é inconclusivo.

O teste da razão funciona especialmente bem com as séries envolvendo *fatoriais* como $n!$ ou onde n estiver na potência como 3^n.

LEMBRE-SE

O símbolo *fatorial*, !, diz a você para multiplicar dessa maneira: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. E note como as coisas cancelam quando você tem fatoriais no numerador e no denominador de uma fração: $\frac{6!}{5!} = \frac{6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 6$ e $\frac{5!}{6!} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{1}{6}$. Em ambos os casos, tudo cancela menos o 6. Da mesma maneira, $\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1$ e $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$; tudo cancela menos o $(n + 1)$. Por fim, parece estranho, mas $0! = 1$ – apenas acredite no que eu digo.

Tente esse aqui: A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ converge ou diverge? Aqui está o que você vai fazer. Olhe para o limite da razão do termo $(n + 1)$ com o n-ésimo termo:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)}}{\frac{3^n}{n!}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 3^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n+1}$$

$$= \frac{3}{\infty + 1}$$

$$= 0$$

Porque o limite é menor do que 1, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ converge.

Aqui está outra série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$. Qual é o seu palpite – ela converge ou diverge? Olhe o limite da razão:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1) \cdot n^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e \qquad \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \text{ é um dos limites para decorar, como discutido no Capítulo 8}\right)$$

$$\approx 2{,}718$$

Porque o limite é maior do que 1, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ diverge.

O teste da raiz

Como o teste da razão, o teste da raiz olha para um limite. Dessa vez você investiga o limite da raiz *n*-ésima do *n*-ésimo termo da sua série. O resultado diz a você a mesma coisa que os resultados do teste da razão: Se o limite for menor do que 1, a série converge; se for maior do que 1 (incluindo o infinito), a série diverge; e se o limite for igual a 1, você não aprende nada.

DICA

O teste da raiz é um bom teste de se tentar se a série envolve potências *n*-ésimas.

Tente esse aqui: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{n^n}$ converge ou diverge? Aqui está o que você tem de fazer:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{2n/n}}{n^{n/n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^2}{n}$$

$$= \frac{e^2}{\infty}$$

$$= 0$$

Porque o limite é menor do que 1, a série converge. A propósito, você também pode fazer essa série com o teste da razão, mas é mais difícil – acredite no que eu digo.

DICA

Algumas vezes é útil dar um palpite instruído sobre a convergência ou divergência de uma série antes que você comece um ou mais testes de convergência/divergência. Aqui está uma dica que ajuda com algumas séries. As expressões a seguir estão listadas da "menor" para a "maior": n^{10}, 10^n, $n!$, n^n (O 10 é um número arbitrário; o tamanho do número não afeta essa ordem). Uma série com uma expressão "menor" sobre uma expressão "maior" converge, por exemplo, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{50}}{n!}$ ou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; e uma série com uma expressão "maior" sobre uma "menor" diverge, por exemplo, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{100^n}$ ou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{25^n}{n^{100}}$.

Série alternada

Nos tópicos anteriores, você estava considerando séries com termos *positivos*. Agora você vai considerar as *séries alternadas* – séries onde os termos alternam entre positivos e negativos – dessa forma:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\ldots$$

Encontrando a convergência absoluta versus a condicional

Muitas séries divergentes com termos positivos convergem se você mudar o sinal dos seus termos para que eles alternem entre positivos e negativos. Por exemplo, você sabe que a série harmônica diverge:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

Mas, se você mudar um ou outro sinal para o negativo, você obtém a *série harmônica alternada*, que *converge*:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

A propósito, ainda que eu não vá mostrar a você como calcular isso, essa série converge para ln 2, que é igual a mais ou menos 0,6931.

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

Uma série alternada é dita ser *condicionalmente convergente* se for convergente como está, mas se tornaria divergente se todos os seus termos se tornassem positivos.

CONCEITO CRÍTICO DE CÁLCULO

Uma série alternada é dita ser *absolutamente convergente* se ela for convergente mesmo que todos os seus termos se tornassem positivos. E qualquer série convergente absoluta é também automaticamente convergente como está.

Aqui está um exemplo. Determine a convergência ou divergência da seguinte série alternada:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\ldots$$

Se todos esses termos fossem positivos, você teria a série geométrica familiar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots$$

que, pela regra da série geométrica, converge para 2. Porque a série positiva converge, a série alternada também deve convergir e você diz que a série alternada é *absolutamente convergente*.

O fato de que a convergência absoluta implica em uma convergência simples é apenas bom senso se você pensar bem. A série geométrica anterior tem termos positivos e converge para 2. Se você tornasse todos os termos negativos, eles somariam -2, certo? Então, se alguns dos termos forem positivos e outros negativos, a série deve convergir para algo entre –2 e 2.

Você notou que a série alternada acima é uma série geométrica do jeito que está com $r = -\frac{1}{2}$? (Lembre que a regra da série geométrica funciona para séries alternadas, assim como para série positiva). A regra dá a sua soma: $\frac{a}{1-r} = \frac{a}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$.

O teste da série alternada

Teste da série alternada: Uma série alternada converge se duas condições forem satisfeitas:

1. O seu *n*-ésimo termo convergir para zero.
2. Seus termos serem não-crescentes – em outras palavras, cada termo é ou menor do que ou maior do que seu antecessor (ignorando o sinal de menos).

Usando esse teste simples, você pode facilmente descobrir que muitas séries alternadas convergem. Os termos têm que apenas convergir para zero e ficarem cada vez menores (eles raramente ficam os mesmos). A série harmônica alternada converge pelo teste:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

Assim como as duas séries a seguir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \ldots$$

ATENÇÃO!

O teste da série alternada pode apenas dizer que uma série alternada converge para ela mesma. O teste não diz nada sobre a série com termos positivos. Em outras palavras, o teste não pode dizer se uma série é absolutamente convergente ou condicionalmente convergente. Para responder a essa pergunta, você deve investigar a série positiva com um teste diferente.

Agora tente alguns problemas. Determine a convergência ou divergência das seguintes séries. Se forem convergentes, determine se a convergência é condicional ou absoluta.

$$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$$

1. Verifique que o *n*-ésimo termo converge para zero.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}\quad\text{(pela Regra de L'Hôspital)}\\&=0\end{aligned}$$

DICA

Sempre verifique o n-ésimo termo primeiro porque se ele não convergir para zero, você já vai ter terminado – a série alternada *e* a série positiva vão ambas divergir. Note que o teste de divergência do *n*-ésimo termo (veja o tópico sobre o teste do *n*-ésimo termo) se aplica às séries alternadas assim como às séries positivas.

2. Verifique se os termos decrescem ou permanecem os mesmos (ignorando os sinais de menos).

Para mostrar que $\frac{\ln n}{n}$ decresce, pegue a derivada da função $f(x) = \frac{\ln n}{n}$. Lembra-se da diferenciação? Eu sei que já faz um tempinho.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}\quad\text{(Regra do quociente)}\\&=\frac{1-\ln x}{x^2}\end{aligned}$$

Isso é negativo para todo $x \geq 3$ (porque o log natural de qualquer coisa 3 ou maior é maior do que 1 e x^2, é claro, é sempre positivo), então a derivada e assim a inclinação da função são negativas, e então a função é decrescente. Finalmente, porque a função é decrescente, os termos da série também são decrescentes. É o suficiente: $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ converge pelo teste da série alternada.