Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Pos-graduação em Matemática e Estatística - PPGME

Curso de Análise Funcional

**Lista de Exercícios 6**

Professor: Giovany Figueiredo

**As Topologias fraca e fraca $*$ (1ª parte)**

1. Sejam $E$ um espaço normado e $\{\varphi_f\}_{f\in E'}$ a família das aplicações $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$, definidas por $\varphi_f(x) = f(x)$. Mostre que a coleção

$$\sigma(E,E') = \left\{ \bigcup_{q.q.} \left( \bigcap_{finita} \varphi_f^{-1}(W_i) \right) : W_i \subset \mathbb{R} \right\},$$

define uma topologia em $E$ e que essa é a menor topologia que torna contínuas todos os funcionais lineares de $E'$. Tal topologia é conhecida como topologia fraca sobre $E$, induzida pelos elementos de $E'$.

2. Sejam $E$ um espaço normado e $x_0 \in E$. Mostre que a família formada pelos conjuntos

$$V(x_0, f_1, \ldots, f_n, \epsilon) = \{x \in E :\mid f_i(x - x_0) \mid < \epsilon, i \in \{1, \ldots, n\}, f_i \in E' \;\text{ e }\; \epsilon > 0\},$$

define um sistema de vizinhanças local para $x_0$, na topologia fraca.

3. Sejam $E$ um espaço normado munido da topologia fraca, $Z$ um espaço topológico e $\psi : Z \to E$ uma aplicação. Mostre que $\psi$ é contínua se, e somente se, para cada $f \in E'$, a aplicação $\varphi_f \circ \psi : Z \to \mathbb{R}$ é contínua, onde $\{\varphi_f\}_{f\in E'}$ é a família de funcionais lineares contínuos da definição de topologia fraca.

4. Dê exemplo de um espaço normado no qual existe uma sequência que converge fraco, mas não converge forte.

5. Seja $E$ um espaço normado com $\dim E < \infty$. Mostre que as topologias forte, fraca e fraca $*$ sobre $E'$, coincidem.

6. Seja $E$ um espaço normado e $C \subset E$ um conjunto convexo. Mostre que $C$ é fortemente fechado se, e somente se, $C$ é fracamente fechado.

7. Sejam $E$ um espaço normado e $\varphi : E \to \mathbb{R}$ uma função convexa e fortemente semi-contínua inferiormente. Mostre que $\varphi$ é fracamente semicontínua inferiormente.

8. Sejam $E$ um espaço normado e $\{\varphi_x\}_{x\in E}$ a família das aplicações $\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$, definidas por $\varphi_x(f) = f(x)$. Mostre que a coleção

$$\sigma(E', E) = \left\{ \bigcup_{q.q.} \left( \bigcap_{finita} \varphi_x^{-1}(W_i) \right) : W_i \subset \mathbb{R} \right\},$$

define uma topologia em $E'$, que essa é a menor topologia que torna contínuas todos os funcionais $\varphi_x$ e que $\sigma(E', E)$ é menos fina que $\sigma(E', E'')$. Tal topologia é conhecida como topologia fraca $*$ sobre $E'$, induzida pelos elementos de $E$.

9. Sejam $E$ um espaço normado e $f_0 \in E'$. Mostre que a família formada pelos conjuntos

$$V(f_0, x_1, \ldots, x_n, \epsilon) = \{ f \in E' :\mid (f - f_0)(x_i) \mid < \epsilon, i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \in E \ \text{ e } \ \epsilon > 0 \},$$

define um sistema de vizinhanças local para $f_0$, na topologia fraca $*$.

10. Seja $E$ um espaço de Banach com $\dim E = \infty$. Mostre que todo aberto fraco em $E$ contém a translação de um subespaço vetorial de dimensão 1. Conclua que não existem abertos fracos limitados em um espaço normado de dimensão infinita.

11. Seja $(E, \| \,.\, \|)$ um espaço normado com $\dim E = \infty$. Mostre que

a) $\| \cdot \|: E \to \mathbb{R}$ é fortemente contínua, mas não é fracamente contínua.

b) $\| \cdot \|: E \to \mathbb{R}$ é fracamente semi-contínua inferiormente.

c) $\| \cdot \|: E \to \mathbb{R}$ é fraco $*$ semi-contínua inferiormente.

12. Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ sobrejetiva. Mostre que

$$T : (E, \sigma(E, E')) \to (F, \| \cdot \|)$$

não é contínua.

13. Mostre que o conjunto $\{x \in E : \| x \| > 1\}$ é fracamente aberto, sem usar o fato de que seu complementar é fracamente fechado.

14. Seja $E$ um espaço normado. Mostre as aplicações

$$x \mapsto \lambda x \quad \text{e} \quad x \mapsto x + a,$$

são homeomorfismos fracos de $E$ em $\mathbb{R}$ e de $E$ em $E$, respectivamente. Onde $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \neq 0$ e $a \in E$.

15. (Teorema de Mazur)

Sejam $E$ um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge fracamente para $x \in E$. Seja $C$ o conjunto das combinações convexas de termos de $(x_n)$, isto é,

$$C = \left\{ \sum_{j\in J} \lambda_j x_j : J \text{ é finito}, \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{j\in J} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Mostre que existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C$ tal que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge forte para $x$.

16. Mostre que se $u_n \rightharpoonup u$ em $C[a, b]$, então $u_n(t) \to u(t)$, para todo $t$ em $[a, b]$.

17. Sejam $E$ e $F$ espaços normados. Mostre que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se, e somente se, $T : (E, \sigma(E, E')) \to (F, \sigma(F, F'))$ é contínuo.

18. Mostre que uma sequência $(x_n) \subset l_1$ converge fraco se, e somente se, converge forte. Observe que isso não nos permite concluir que as topologias forte e fraca coincidem em $l_1$, visto que $\dim l_1 = \infty$.

19. Sejam $E$ e $F$ espaços normados. Mostre que $T : E \to F$ linear. Mostre que se

$$T : (E, \| \, . \, \|) \to (F, \sigma(F, F')).$$

é contínuo, então $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

20. Seja $E$ um espaço normado reflexivo. Mostre que $\sigma(E', E'') = \sigma(E', E)$.

21. Sejam $E$ um espaço normado e $N$ um subespaço de $E'$. Definimos

$$N^{\perp} = \{x \in E : f(x) = 0, \quad \forall f \in N\}.$$

Mostre que, se $E$ é reflexivo então $\overline{N} = \left(N^{\perp}\right)^{\perp}$.

22. Sejam $E$ um espaço normado e $(x_n) \subset E$. Mostre que $x_n \to x$ se, somente se, $(x_n)$ é limitada e o conjunto

$$\{f \in E' : f(x_n) \to f(x)\}$$

é denso em $E$. Enuncie e prove um resultado análogo para sequências de funcionais convergindo na topologia fraca $*$.

23. Sejam $E$ um espaço normado e $(x_n) \subset E$ uma sequência de Cauchy. Mostre que se $x_n \rightharpoonup 0$, então $x_n \to 0$ em $E$.

24. Mostre que todo espaço normado de dimensão finita é reflexivo.

25. Sejam $E$ e $F$ espaço normados. Mostre que se

$$T : (E, \sigma(E, E')) \to (F', \sigma(F', F''))$$

é contínua, então

$$T : (E, \sigma(E, E')) \to (F', \sigma(F', F))$$

é contínua.

26. Sejam $E$ um espaço normado e $(f_n) \subset E'$. Mostre que

a) $f_n \rightharpoonup^* f \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x), \quad \forall x \in E$;

b) $f_n \to f \Rightarrow f_n \rightharpoonup f \Rightarrow f_n \rightharpoonup^* f$;

c) se $f_n \rightharpoonup^* f$ então $(\| f_n \|)$ é limitado e $\| f \| \leq \liminf \| f_n \|$;

d) se $f_n \rightharpoonup^* f$ e $x_n \to x$, então $f_n(x_n) \to f(x)$.