

SEYMOUR LIPSCHUTZ



TOPOLOGIA GERAL

**Resumo da teoria
650 problemas resolvidos**

Traduzido por
ALFREDO ALVES DE FARIA

COLEÇÃO SCHAUM

EDITORA MCGRAW-HILL DO BRASIL, LTDA./MEC

FICHA CATALOGRÁFICA

(Preparada pelo Centro de Catalogação-na-fonte,
Câmara Brasileira do Livro, SP)

L744t Lipschutz, Seymour.
Topologia geral: resumo da teoria, 650 problemas resolvidos, 391 problemas propostos; tradução de Alfredo Alves de Farias. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil; Brasília, INL, 1973.
p. ilustr. (Coleção Schaum)

1. Topologia I. Brasil. Instituto Nacional do Livro,
co-ed. II. Título. III. Série: Schaum.

CCF/CBL/SP-73-0635

17. CDD:513.83
18. :514.3
CDU:513.83

Índices para o catálogo sistemático (CDD):

1. Topologia dos espaços : Matemática 513.83 (17.)
514.3 (18.)
2. Topologia geral : Matemática 513.83 (17.)
514.3 (18.)

SEYMOUR LIPSCHUTZ Ph. D.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO
POLYTECHNIC INSTITUTE OF BROOKLIN

Topologia Geral

Resumo da Teoria
650 Problemas Resolvidos
391 Problemas Propostos

Tradução

de

ALFREDO ALVES DE FARIAS

Assistente de Ensino da Escola de Engenharia
da
Universidade de Minas Gerais

EDITORA MCGRAW-HILL DO BRASIL, LTDA.

SÃO PAULO — RIO DE JANEIRO — BELO HORIZONTE

**“EM CONVÊNIO COM O INSTITUTO NACIONAL DO
LIVRO — MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA”**

A edição original desta obra foi publicada nos E. U. A., por
Schaum Publishing Co. com o título

SCHAUM'S OUTLINE OF THEORY AND PROBLEMS OF GENERAL TOPOLOGY

Copyright © 1965 by McGraw-Hill, Inc.

Copyright © 1971 da Editora McGraw-Hill do Brasil, Ltda.

Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida, guardada pelo sistema "retrieval" ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, seja este eletrônico, mecânico, de fotocópia, de gravação, ou outros, sem prévia autorização por escrito da Editora.

"Este livro foi co-editado com o Instituto Nacional do Livro/MEC dentro do Programa do Livro-Texto para o Ensino Superior; patrocinado pelo Ministério do Planejamento e Coordenação Geral."

1973

Todos os direitos para língua portuguesa reservados pela

EDITORA MCGRAW-HILL DO BRASIL, LTDA.

Rua Tabapuã, 1105	Av. R. Branco, 156 s/2614	Av. Af. Pena, 748, s/1012
SÃO PAULO	RIO DE JANEIRO	BELO HORIZONTE
EST. DE SÃO PAULO	GUANABARA	MINAS GERAIS

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Prefácio da Edição Brasileira

O objetivo desta nota não é propriamente uma apresentação do texto aos leitores de língua portuguesa, de vez que o original inglês já é bastante conhecido entre nós. Nossa meta é procurar localizar a "Topologia Geral" de Seymour Lipschutz no nosso ensino universitário. Trata-se de um livro planejado sob forma de problemas, de modo a levar o estudante a uma maior participação nas aulas. Embora com esse aspecto, convém salientar que os teoremas centrais da Topologia Geral não são sacrificados, os quais aparecem expostos de maneira inteligível ao nível de nossos cursos de graduação. Portanto, ele pode ser adotado com sucesso nos cursos de graduação de nossas Universidades, após, evidentemente, certo número de cursos básicos — de modo mais preciso, no quinto ou sexto período da graduação em Matemática. É importante lembrar, todavia, que os capítulos 1, 2 e 3 podem ser lidos, com proveito, pelos estudantes que iniciam seus estudos em nível de graduação, isto é, no primeiro semestre da Universidade. A leitura do capítulo 4, juntamente com o apêndice, é aconselhável àqueles que fazem pela primeira vez o curso de Análise real. Os restantes capítulos constituem o curso de Topologia Geral propriamente dito.

Rio de Janeiro, 27 de Novembro de 1970

Luiz Adauto da Justa Medeiros
Professor do Centro Brasileiro de Pesquisas
Físicas e da Universidade Federal
do Rio de Janeiro

ÍNDICE

Capítulo	Página
1 CONJUNTOS E RELAÇÕES.....	13
Conjuntos. Subconjuntos e superconjuntos. Operações com conjuntos. Conjunto produto. Relações. Relações de equivalência. Composição de relações.	
2 FUNÇÕES.....	33
Funções. Conjuntos indexados. Produtos cartesianos. Operações generalizadas. Funções de conjunto associadas. Álgebra das funções reais.	
3 CARDINALIDADE, ORDEM.....	51
Conjuntos equivalentes. Conjuntos enumeráveis e contáveis. O "continuum". Teorema de Schroeder-Bernstein. Cardinalidade. Conjuntos parcialmente ordenados. Subconjuntos de conjuntos ordenados. Primeiro e último elementos. Elementos maximal e minimal. Cota superior e inferior. Lema de Zorn.	
4 TOPOLOGIA DA RETA E DO PLANO.....	70
Reta real. Conjuntos abertos. Pontos de acumulação. O teorema de Bolzano-Weierstrass. Conjuntos fechados. O teorema de Heine-Borel. Seqüências. Seqüências convergentes. Subseqüências. Seqüências de Cauchy. Completicidade. Funções contínuas. Topologia do plano.	
5 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS. DEFINIÇÕES.....	94
Espaços topológicos. Pontos de acumulação. Conjuntos fechados. Fecho de um conjunto. Interior, exterior, fronteira. Vizinhanças e sistemas de vizinhanças. Seqüências convergentes. Topologias mais finas e menos finas. Subespaços, topologia relativa. Definições equivalentes de topologias.	
6 BASES E SUB-BASES.....	121
Base de uma topologia. Sub-bases. Topologias geradas por classes de conjuntos. Bases locais.	
7 CONTINUIDADE E EQUIVALÊNCIA TOPOLÓGICA.....	133
Funções contínuas. Funções contínuas e proximidade arbitrária. Continuidade em um ponto. Continuidade seqüencial em um ponto. Funções abertas e fechadas. Espaços homeomorfos. Propriedades topológicas. Topologias induzidas por funções.	

8 ESPAÇOS MÉTRICOS E ESPAÇOS NORMADOS..... 150

Métricas. Distância entre conjuntos, diâmetros. Esferas abertas. Topologias métricas, espaços métricos. Propriedades de topologias métricas. Métricas equivalentes. O problema da metrização. Espaços métricos isométricos. O espaço euclidiano E^m . Espaço de Hilbert. Convergência e continuidade em espaços métricos. Espaços normados.

9 ESPAÇOS CONTÁVEIS..... 175

Espaços contáveis de 1.^a espécie e de 2.^a espécie. Teoremas de Lindelöf. Espaços separáveis. Propriedades hereditárias.

10 AXIOMAS DE SEPARAÇÃO..... 185

Espaços T_1 . Espaços de Hausdorff. Espaços regulares. Espaços normais. Lema de Urysohn e o teorema da metrização. Funções que separam pontos. Espaços completamente regulares.

11 COMPACIDADE..... 199

Coberturas. Conjuntos compactos. Subconjuntos de espaços compactos. Propriedade da intersecção finita. Compacidade e espaços de Hausdorff. Conjuntos seqüencialmente compactos. Conjuntos contavelmente compactos. Espaços localmente compactos. Compactificação. Compacidade em espaços métricos. Conjuntos totalmente limitados. Números de Lebesgue para coberturas.

12 ESPAÇO PRODUTO..... 218

Topologia produto. Base para uma topologia produto finita. Sub-base definidora e base definidora para a topologia produto. Teorema do produto de Tychonoff. Espaço produto métrico. O conjunto de Cantor.

13 CONEXÃO 235

Conjuntos separados. Conjuntos conexos. Espaços conexos. Conexão na reta real. Componentes. Espaços localmente conexos. Trajetórias. Conjuntos conexos por arcos. Trajetórias homotópicas. Espaços simplesmente conexos.

14 ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS..... 252

Seqüências de Cauchy. Espaços métricos completos. Princípio dos conjuntos fechados e encaixados. Completicidade e função contração. Completamentos. O teorema da categoria de Baire. Completicidade e compacidade.

15 ESPAÇOS DE FUNÇÕES..... 266

Espaços de funções. Topologia dos abertos pontuais. Convergência pontual. Convergência uniforme. O espaço de funções $C[0, 1]$. Limi-

tação uniforme. Equicontinuidade. O teorema de Ascoli. Topologia dos abertos compactos. Topologia da convergência compacta. Funcionais em espaços normados.

Apêndice — PROPRIEDADES DOS NÚMEROS REAIS.....	287
ÍNDICE REMISSIVO.....	299
ÍNDICE DE SÍMBOLOS.....	12

Índice de Símbolos

$(X, \mathcal{T})$	espaço topológico,	e_x	função avaliadora,
(X, d)	espaço métrico,	$\mathcal{F}(X, Y)$	classe de funções de X em Y ,
$\ \dots \ $	norma,	$F(A, B)$	classe de funções de A em B ,
$\lesssim$	menos fina,	$\Longleftrightarrow$ (em inglês, <i>iff</i>)	se e somente se (se e só se)
$\Rightarrow$	acarreta ou implica	$\inf(A)$	ínfimo de A ,
$\exists$	existe,	$\text{int}(A)$	interior de A ,
$\forall$	para todo,	$\mathbb{N}$	conjunto dos inteiros positivos,
$\setminus$	(e.g. $A \setminus B$), diferença,	$\mathcal{N}_p$	sistema de vizinhanças de p ,
A'	conjunto derivado de A ,	$\mathcal{P}(A)$	conjunto das partes de A ,
$\bar{A}$ ou A^-	fecho de A ,	$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais,
$\overset{\circ}{A}$ ou A°	interior de A ,	$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais,
A°	complemento de A ,	$\mathbb{R}^m$	espaço euclidiano E^m ,
$\prod \{A_i : i \in I\}$ ou $\prod_{i \in I} A_i$ ou $\prod_i A_i$	produto cartesiano,	$\mathbb{R}^\infty$	espaço l_2 ,
π_i	i^{a} função projeção,	$S(p, \delta)$	esfera aberta,
$\langle \dots, \dots \rangle$	par ordenado,	$ $	tal que,
$\emptyset$	conjunto vazio,	$\sup(A)$	supremo de A ,
$b(A)$	fronteira de A ,	$\mathcal{T}$	topologia,
$C[0, 1]$	funções contínuas em $[0, 1]$,	$\mathcal{T}_A$	topologia relativa em A ,
$d(A)$	diâmetro de A ,	$\mathcal{U}$	topologia usual,
$d(a, b)$	distância de a a b ,	$\mathbb{Z}$	o conjunto dos inteiros,
$\mathcal{D}$	topologia discreta,		
$\text{ext}(A)$	exterior de A ,		

Índice Remissivo

- Abertas, funções, 136
- Abertos pontuais, topologia dos, 272
- Absoluto, valor, 290
- Acumulação, ponto de, 71, 79, 95
- Aderente, ponto, 98
- Aleph zero, 51
- Alexandrov, compactificação, 206
- Álgebra
 - das funções reais, 39, 46, 49
 - dos conjuntos, 17
- Algébricos, números, 59
- Anti-simétrica, relação, 54
- Arbitrária, proximidade, 135
- Arquimediano ordenado, axioma, 292, 295
- Arcos, conjuntos conexos por, 240
- Ascoli, teorema de, 271, 280
- Axioma da Escolha, 57
 - de corpo, 287, 293, 297
 - do extremo superior, 291, 292, 295, 298
- Axiomas da separação, 185

- Baire, teorema da categoria de, 256, 263
- Banach, espaço de, 257
- Base
 - de uma topologia, 121, 130
 - local, 123, 129
- Bicompacto, 203
- Bicontínua, função, 137
- Binária, relação, 18
- Bola, vizinhança esférica ou, 152
- Bolzano-Weierstrass, teorema de, 72, 83, 204

- Cantor, conjunto de, 224, 230
 - teorema de, 54, 63
- Característica, função, 49
- Cardinal, número, 53
- Cardinalidade, conceito de, 53
 - contínuo, 61
- Cartesiano
 - plano, 18
 - produto, 35
- Categoria, teorema da, 256
- Cauchy, sequência de, 76, 252, 257
- Cauchy-Schwarz, desigualdade de, 168
- Classes, 15

- Cobertura, 199
- Co-domínio, 33
- Cofinita, topologia, 95
- Coleções, 15
- Compacidade, 199, 202, 206, 210, 213
 - e espaços de Hausdorff, 202, 203
 - em espaços métricos, 206, 213
- Comparação de topologias, 101
- Completados, 261
- Completamento, 256
- Componentes, 239, 246, 251
- Composição de relações, 21, 24
- Conexão, 231
 - na reta real, 238
- Conexos
 - espaços localmente, 239, 250
 - espaços simplesmente, 242
- Conjunto
 - de Cantor, 224, 225, 230
 - universal, 15
 - vazio, 15
- Conjuntos
 - abertos, 80, 103
 - abertos em $\mathbb{R}$, 70
 - conexos por arcos, 240, 243, 248, 251
 - contáveis, 51
 - densos, 108, 183
 - derivados, 106
 - enumeráveis, 51, 57
 - equivalentes, 51, 57
 - fechados, 72, 92
 - indexados, 35, 43, 48
 - localmente compactos, 204
 - operações de, 15, 23
 - ordenados, 64, 68
 - parcialmente ordenados, 54
 - produto, 24
 - separados, 235, 243
 - seqüencialmente compactos, 203, 210
 - totalmente limitados, 206, 216
 - e relações, 13
- Continuidade, 89, 92, 133
 - em um ponto, 135, 142
 - seqüencial em um ponto, 135
- Contínuo, 52, 69
 - hipótese de, 54
- Contrações, 254
 - espaços métricos completos e, 254

Construção dos números reais, 257

Convergência

compacta, 272, 281

de seqüência de funções, 284

pontual, 268, 274

uniforme, 276

Cubo de Hilbert, 173

Desigualdade e números positivos, 293, 297

Diâmetros, 151, 171

Distância entre conjuntos, 151, 171

Elemento

maximal, 56

minimal, 56

primeiro e último, 56

Equicontinuidade, 270

Equivalência, 133

relações de, 20

Esferas abertas, 152, 163

Espaço

de Hausdorff, 186, 191, 197

de Hilbert, 158, 172

de Lindelöf, 184

euclidiano m -dimensional, 157, 172

homeomorfo, 136

produto, 218, 226, 231

topológico, 94

Espaços

compactos, 208, 216

conexos, 236

conexos localmente, 250

conexos totalmente, 249

métricos completos, 251, 253, 259, 265

métricos completos e compactos, 266

métricos completos e compacidade, 264

normais, 187, 192

regulares, 187, 196

regulares completamente, 189, 196

Fechada, trajetória, 242

Fechadas, funções, 136

Fechados,

conjuntos, 72, 96

intervalos, 13

Fecho de um conjunto, 97, 108

Finito, base para uma topologia produto, 219

Fronteira, 98, 99, 110

Funcionais em espaços normais, 273, 283, 286

Funções, 33

abertas, 136, 144, 148

biunívocas, 34, 42, 48

contínuas, 77, 134, 139, 147

de conjunto associadas, 37, 45

fechadas, 136, 144, 148

inversas, 34, 48

que separam pontos, 189

sobre, 34, 42, 48

Heine-Borel, teorema de, 73

Homeomorfismo, 144

Ínfimo, 56

Interior, 98, 110

Intervalos

abertos, 13

fechados, 13

semi-abertos, 13

Interseção finita, propriedade da, 201

Lema de Urysohn, 188, 192, 198

Limitação uniforme, 270

Limitada, função, 39

Limitado, conjunto totalmente, 206

Métricas, 150, 161

equivalentes, 156, 166, 172

Metrização, o problema da, 156

Operações

com conjuntos, 15

generalizadas, 36, 43

Ordem, 51, 289

Pontos de acumulação, 71, 79, 95

Princípio dos conjuntos fechados encaixados, 253

Produto de conjuntos, 17

Produtos

cartesianos, 35

finitos, 233

Propriedade

- da intersecção finita, 201
- dos intervalos encaixados, 292,2

Propriedades

- topológicas, 137, 148
- de topologias métricas, 154
- dos números reais, 287

Proximidade arbitrária, 134

Quase todos, 75

Relações, 18

- de equivalência, 20
- reflexivas, 20
- simétricas, 20
- transitivas, 20

Reta real, 70

Separabilidade, 181

Seqüências, 74, 85

- convergentes, 74, 100
- de Cauchy, 76

Sub-base definidora para a topologia produto, 220

Sub-bases, 122, 127, 131

Subconjuntos, 14, 22

- de conjuntos ordenados, 55
- de espaços compactos, 201

Subespaços, 101, 113

Subseqüências, 75

Superconjuntos, 14

Supremo, 56

Teorema

- de Bolzano-Weirstrass, 72, 83, 204
- de Heine-Borel, 73
- de Lindelöf, 176
- de Schroder, Bernstein, 53
- do produto de Tychnoff, 223

Topologia

- aberto pontual, 266, 274
- arbitrária, 233
- da reta e do plano, 70
- gerada por classes de conjuntos, 123, 127
- induzida por função, 138, 146, 148
- métrica, 154, 164, 172
- produto, 218
- relativa, 101

Trajetoórias, 240

- homeomórficas, 241

Tychnoff, teorema de, 223, 228

Urysohn, lema de, 188, 192, 198

Valor absoluto, 290, 295, 298

Vizinhança, 100, 112

- sistemas de, 100, 112

Zorn,

- lema de, 57, 69
- aplicações do lema de, 66