

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

AGENOR FREITAS DE ANDRADE

**Sobre uma Construção Relacionada ao  
Quadrado Tensorial não-Abeliano de  
um Grupo**

Goiânia  
2011

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**      **Dissertação**      **Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação**

Autor (a):	Agenor Freitas de Andrade		
E-mail:	agenor_andrade@hotmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não		
Vínculo empregatício do autor			
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO   CNPJ:
			00889834/0001-08
Título:	Sobre uma Construção Relacionada ao Quadrado Tensorial não-Abeliano de um Grupo		
Palavras-chave:	Solubilidade; nilpotência; comutador; produto livre; produto tensorial; quadrado tensorial; GAP		
Título em outra língua:	On a Construction Related to the non-Abelian Tensor Square of a Group		
Palavras-chave em outra língua:	Solvability; nilpotency; commutator; free product; tensor product; tensor square; GAP		
Área de concentração:	Álgebra		
Data defesa: (01/07/2011)			
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática		
Orientador (a):	Ricardo Nunes de Oliveira		
E-mail:	ricardo.mat@ufg.br		
Co-orientador (a):*	Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues		
E-mail:	paulo@mat.ufg.br		

\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Liberação para disponibilização?<sup>1</sup>      total      parcial

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

Capítulos. Especifique: \_\_\_\_\_

Outras restrições: \_\_\_\_\_

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

\_\_\_\_\_   
 Assinatura do (a) autor (a)

Data: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

<sup>1</sup> Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

AGENOR FREITAS DE ANDRADE

# Sobre uma Construção Relacionada ao Quadrado Tensorial não-Abeliano de um Grupo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Área de concentração:** Álgebra.

**Orientador:** Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira

**Coorientador:** Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues

Goiânia  
2011

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)**

A543s Andrade, Agenor Freitas de.  
Sobre uma construção Relacionada ao Quadrado Tensorial não-Abeliano de um Grupo [manuscrito] / Agenor Freitas de Andrade. – 2011.  
xv, 104 f. : il., tabs.

Orientador: Prof. Dr.º Ricardo Nunes de Oliveira; Co-orientador: Prof. Dr.º Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2011.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras, abreviaturas, siglas e tabelas.

Apêndices.

1. Matemática-Álgebra 2. Grupos Livres 3. Produtos Livres 4. Produto Tensorial não-Abeliano I. Título.

CDU: 512.541/.543.5:514.743.2

AGENOR FREITAS DE ANDRADE

**SOBRE UMA CONSTRUÇÃO RELACIONADA AO  
QUADRADO TENSORIAL NÃO-ABELIANO DE  
UM GRUPO**

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 01 de julho de 2011, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



**Prof. Dr. Ricardo de Oliveira Nunes**

Instituto de Matemática e Estatística-UFG  
Presidente da Banca



**Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues**

Instituto de Matemática e Estatística-UFG



**Prof. Dr. Norai Romeu Rocco**

Departamento de Matemática-UnB



**Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva**

Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Agenor Freitas de Andrade**

Dedico este trabalho à Ana Júlia, minha linda filha.

---

## Agradecimentos

---

À Deus, pela vida.

À minha linda filha Ana Júlia, pelo simples fato de existir. À minha mulher, Jeisa, por tudo e, principalmente, por abrir mão de sua vida em prol da minha.

Aos meus pais, Eduardo e Wanderly e ao meu irmão Duh (Luiz Eduardo), por terem ajudado, incentivado e auxiliado em todos os momentos e pela compreensão por minha rotineira ausência. Ao meu orientador professor Ricardo pela grandiosa ajuda, por acreditar em mim, e também pela amizade formada no decorrer deste trabalho.

À todos os meu amigos, os quais eu tenho o prazer em citar : Tannery, pela amizade indestrutível e inigualável formada nos tempos de UFMT; Fabrício, pelo companheirismo e amizade formada na faculdade e também pelo futebol aos sábados; Ao Silvio [10], um grande companheiro, do tempo de graduação, de mestrado, da Casa do Estudante e agora também de trabalho, o qual também foi um grande auxiliador em meu estudo.

Aos grandes companheiros de estudo (e de cerveja) que tanto me ajudaram e apoiaram no decorrer do mestrado, Bruno, Caíke, Benedito, Emerson, Sinomar, Sérgio, Lucimeire, Flávio, Márcio, Douglas, e Edvaldo.

Aos inesquecíveis amigos de Cuiabá, formados nos tempos em que eu ainda morava no Edifício Belo Horizonte (BH), companheiros para toda hora, de boas conversas, churrascos, truco e futebol: Luis Otávio, João Victor, Pedro, Dr<sup>o</sup> Leo Perri, Bruno, Amanda, Eduardo-Cabeção Duarte, Eduardo-Duca Rocha, William-Japonês, Eduardo-Valderrama Dall'AgnoI, Otávio, Henrique, Flávia, Gabriel e Fernando.

Ao professor Martinho da Costa Araújo, por me incentivar, ajudar e apoiar à entrar nessa empreitada.

À família de minha mulher, Joelson, Cleonice, Bruna, Gabriela e João Francisco, pelo apoio e também pela vida e educação de minha mulher.

À todos vocês o meu muito obrigado, sem vocês eu não teria chegado onde cheguei.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Um problema matemático deve ser difícil, de modo a nos desafiar, mas não completamente inacessível, ou zombaria de nossos esforços.

**David Hilbert,**  
*Frase dita, durante sua famosa palestra - “Problemas Matemáticos”,  
apresentada em 1900.*

---

## Resumo

---

de Andrade, Agenor Freitas. **Sobre uma Construção Relacionada ao Quadrado Tensorial não-Abeliano de um Grupo**. Goiânia, 2011. 106p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Sejam  $G$  e  $G^\varphi$  grupos isomorfos. Estudaremos o grupo  $\mathcal{V}(G)$  que é uma extensão de grupo do quadrado tensorial não-abeliano de um grupo  $G$ ,  $G \otimes G$ . Olhando para  $\mathcal{V}(G)$  como um operador na classe de grupos, observamos que este operador preserva algumas propriedades do grupo  $G$ , tais como finitude, solubilidade e nilpotência. Ainda para um  $p$ -grupo finito  $G$  encontramos um limitante para ordem de  $G \otimes G$ . Por fim, verificamos computacionalmente, para alguns grupos, que os resultados e também os limitantes para as ordens dos grupos aqui apresentados são de fato respeitados.

### Palavras-chaves

Solubilidade; nilpotência; comutador; produto livre; produto tensorial; quadrado tensorial; GAP

---

## Abstract

---

de Andrade, Agenor Freitas. **Sobre uma Construção Relacionada ao Quadrado Tensorial não-Abeliano de um Grupo**. Goiânia, 2011. 106p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Let  $G$  and  $G^{\mathfrak{q}}$  be isomorphic groups. We study the group  $\mathcal{V}(G)$  which is an extension of the non-abelian tensor square of a group  $G$ ,  $G \otimes G$ . Looking for  $\mathcal{V}(G)$  as an operator in the class of groups, we observe that this operator preserves some properties of the group  $G$  such as finiteness, nilpotency and solubility. For a  $p$ -group finite  $G$  we find an upper bound for the order of  $G \otimes G$ . Finally, we verified computationally, for some groups, and that the results and also the bounds for the orders of the groups shown here are actually respected.

### Keywords

Solvability; nilpotency; commutator; free product; tensor product; tensor square;  
GAP

---

## Introdução

---

Sejam  $G$  e  $H$  dois grupos e suponha que  $G$  age em  $H$  e, vice-versa. Além disso, suponha que tanto  $G$ , como  $H$ , ajam em si mesmos por conjugação, isto é, dados  $g, x \in G$  e  $h, y \in H$  temos  $g^x = x^{-1}gx$  e  $h^y = y^{-1}hy$ . Dessa forma temos uma ação do produto livre  $G * H$  sobre  $G$  e  $H$ . Diremos que as ações de  $G$  sobre  $H$  e de  $H$  sobre  $G$  são **compatíveis** se, dados quaisquer  $g, g_1 \in G$ ,  $h, h_1 \in H$

$$g^{h^{g_1}} = g^{g_1^{-1}hg_1} := \left( (g^{g_1^{-1}})^h \right)^{g_1} \quad (0-1)$$

$$h^{g^{h_1}} = h^{h_1^{-1}gh_1} := \left( (h^{h_1^{-1}})^g \right)^{h_1}. \quad (0-2)$$

Se  $G$  e  $H$  agem um no outro compativelmente, o **produto tensorial não-abeliano** de  $G$  e  $H$ , que generaliza o Produto Tensorial (usual), como introduzido por R. Brown e J-L. Loday em [4], é definido como o grupo gerado por todos os símbolos  $g \otimes h, g \in G, h \in H$ , sujeitos às seguintes relações

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \quad (0-3)$$

$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}), \quad (0-4)$$

para quaisquer  $g, g_1 \in G$  e  $h, h_1 \in H$ .

Em particular, a ação por conjugação de um grupo  $G$  sobre si mesmo sempre satisfaz às equações (0-1) e (0-2) e, então, o **quadrado tensorial não-abeliano**  $G \otimes G$  de um grupo  $G$  sempre pode ser definido.

Estudaremos um grupo,  $\mathcal{V}(G)$ , que está relacionado com o quadrado tensorial não-abeliano, visto que possui um subgrupo  $\Upsilon(G) = [G, G^{\mathfrak{Q}}]$  que é isomorfo à  $G \otimes G$ .

No primeiro capítulo, admitimos alguns fatos básicos para o entendimento do tema estudado, relacionados a assuntos tais como grupos solúveis e nilpotentes; grupos livres e produtos livres; módulo e produto tensorial (de módulos); multiplicador de Schur. Como referência para o estudo desses assuntos recomendamos os livros de Rotman [17],

Robinson [13], Johnson [7], Magnus et. al. [11] e Karpilovsky [8].

O segundo capítulo trata propriamente do produto tensorial não-abeliano de grupos e, em particular, o quadrado tensorial não-abeliano de um grupo. Neste capítulo, definimos o produto tensorial não-abeliano de grupos, e apresentamos algumas propriedades relacionadas com o tema. Todo o capítulo baseia-se nos artigos de R. Brown e J-L. Loday [4] e Gilbert [6].

O terceiro capítulo, ao qual nos dedicamos mais, estão inseridos os resultados principais que foram estudados. Este capítulo baseia-se, principalmente, no artigo de Rocco [15]. Nele estudamos o seguinte grupo:

$$\mathcal{V}(G) = \left\langle G, G^\Phi \mid [g_1, g_2]^{g_3} = [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^\Phi] = [g_1, g_2]^{g_3^\Phi}, \forall g_1, g_2, g_3 \in G \right\rangle.$$

No decorrer deste estudo são observados os seguintes fatos:

- Se  $G$  é finito, então  $\mathcal{V}(G)$  é finito;
- Se  $G$  é um  $\pi$ -grupo finito, então  $\mathcal{V}(G)$  é um  $\pi$ -grupo finito;
- Se  $G$  é solúvel, então  $\mathcal{V}(G)$  é solúvel;
- Se  $G$  é nilpotente, então  $\mathcal{V}(G)$  é nilpotente.

Ainda  $\mathcal{V}(G)$  possui um subgrupo (normal)  $\Upsilon(G)$  que é isomorfo ao quadrado tensorial não-abeliano de um grupo; o isomorfismo é dado por

$$\begin{aligned} \tau: G \otimes G &\longrightarrow \Upsilon(G) \\ g_1 \otimes g_2 &\longmapsto [g_1, g_2]^\Phi. \end{aligned}$$

Além disso, observamos que valem os seguintes teoremas:

**Teorema 0.1.** *Seja  $G$  um grupo nilpotente de classe  $c$  (respectivamente, solúvel, de comprimento derivado  $l$ ). Então  $\mathcal{V}(G)$  é nilpotente de classe no máximo  $c + 1$  (respectivamente, solúvel, de comprimento derivado no máximo  $l + 1$ ).*

**Teorema 0.2.** *Seja  $G$  um  $p$ -grupo finito de ordem  $p^n$  com  $G'$  de ordem  $p^m$ . Então  $\mathcal{V}(G)$  é um  $p$ -grupo de ordem dividindo  $p^{n^2+2n-mn}$ .*

Ainda para  $p$ -grupos finitos observamos também que vale o seguinte resultado:

**Corolário 0.3.** *Seja  $G$  um  $p$ -grupo finito de ordem  $p^n$  e  $G'$  de ordem  $p^m$ . Suponha que  $d = d(G)$  seja o número mínimo de geradores de  $G$ . Então*

$$p^{d^2} \leq |G \otimes G| \leq p^{n(n-m)}.$$

Por fim, no Capítulo 04, apresentamos alguns comandos básicos relacionados ao Sistema GAP, os quais foram utilizados no desenvolvimento da rotina, apresentada no Apêndice B. Ainda no Capítulo 04, utilizamos dessa mesma rotina, para calcularmos os grupos  $\mathcal{V}(G)$  e  $\Upsilon(G)$ , para alguns grupos, onde observamos que os resultados e as cotas apresentadas no decorrer do Capítulo 03 são todos satisfeitos. Para maiores informações sobre o GAP, consultar [19] e [20].

O Apêndice A traz alguns resultados mais recentes sobre o tema estudado, inclusive alguns melhoramentos das cotas estipuladas no artigo o qual estudamos. E por último, o Apêndice B, como já mencionado acima, apresenta o algoritmo que utilizamos, para via GAP, calcularmos os grupos  $\mathcal{V}(G)$  e  $\Upsilon(G)$ .

---

# Sumário

---

1	Preliminares	15
1.1	Fatos Básicos	15
1.2	Grupos Livres	15
1.2.1	Definição e Propriedades Elementares	15
1.2.2	A Existência de $F(X)$	17
1.2.3	Apresentações de Grupos	21
1.3	Produtos Livres	24
2	O Produto Tensorial não-Abeliano de um Grupo	27
2.1	O Produto Tensorial não-Abeliano	27
2.2	O Quadrado Tensorial não-Abeliano	37
3	O Grupo $\mathcal{V}(G)$ e suas Propriedades	39
3.1	Definição e Resultados Preliminares	39
3.2	Os Resultados Principais	64
4	O sistema GAP e alguns exemplos envolvendo o grupo $\mathcal{V}(G)$	86
4.1	O Sistema GAP	86
4.2	Listas	87
4.3	Aplicações	88
4.4	Grupos e Homomorfismos de Grupos	90
4.4.1	Propriedades dos Grupos	91
4.4.2	Homomorfismos de Grupos	92
4.5	Grupos Livres	93
4.5.1	Categorias de Palavras Associadas	93
4.6	Grupos Finitamente Apresentados	93
4.6.1	Criando Grupos Finitamente Apresentados	94
4.6.2	Convertendo Grupos para Grupos Finitamente Apresentados	95
4.7	Produto de Grupos	95
4.7.1	Produto Direto	95
4.7.2	Produto Semidireto	96
4.7.3	Produto Livre	96
4.8	Alguns Exemplos para o Grupo $\mathcal{V}(G)$	96
A	Atualizações e Melhoramentos de Cotas	100
B	Um Algoritmo para o Grupo $\mathcal{V}(G)$	103
	Referências Bibliográficas	105

---

## Preliminares

---

### 1.1 Fatos Básicos

Iremos ao longo desta dissertação admitir algumas definições e resultados referentes à diversos temas abordados, entre eles destacamos os seguintes: grupos solúveis, nilpotentes, subgrupo de Frattini; módulos e produto tensorial de módulos e por fim sobre o multiplicador de Schur. Os resultados utilizados no decorrer deste texto podem (e são) encontrados nos livros de Rotman [17], Robinson [13], Johnson [7], Magnus et. al. [11] e Karpilovsky [8].

### 1.2 Grupos Livres

Nesta seção introduzimos os conceitos de grupos livres e de apresentação de grupos, bem como algumas de suas propriedades, cujas demonstrações podem ser encontradas nos Capítulos 1 e 2 de Johnson [7].

Antes de iniciarmos, uma breve observação sobre a notação: usaremos o símbolo  $x^f$  para representar a imagem de  $x$  pela aplicação  $f$ , isto é,  $x^f = f(x)$ , onde  $f$  é uma aplicação qualquer (e  $x$  pertence ao domínio de  $f$ ).

#### 1.2.1 Definição e Propriedades Elementares

**Definição 1.1.** Um grupo  $F$  é dito *livre* sobre um conjunto  $X \subseteq F$  se, dado qualquer grupo  $G$  e qualquer aplicação  $\theta : X \rightarrow G$ , existir um único homomorfismo  $\theta' : F \rightarrow G$ , que estende  $\theta$ , isto é, que  $x^{\theta'} = x^\theta$ , para todo  $x \in X$ . Isto significa que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{inc}} & F \\ & \searrow \theta & \downarrow \theta' \\ & & G \end{array}$$

é comutativo. Neste caso,  $X$  é dito uma **base** de  $F$  e  $|X|$  é o posto de  $F$ , denotado por  $r(F)$ , onde  $|X|$  é a cardinalidade do conjunto  $X$ .

**Lema 1.2.** Se  $F$  é livre sobre  $X$ , então  $X$  gera  $F$

**Demonstração.**

Seja  $H = \langle X \rangle$ . Considere  $\theta : X \rightarrow H$  a aplicação inclusão de  $X$  em  $H$ ; seja  $\theta' : F \rightarrow H$  a extensão de  $\theta$  ( $\theta'$  existe, pois  $F$  é um grupo livre com base  $X$ ). Seja  $\iota : H \rightarrow F$  a inclusão de  $H$  em  $F$ . Assim  $\theta'\iota : F \rightarrow F$  estende a inclusão  $\theta\iota : X \rightarrow F$ . Ora, mas  $\theta\iota$  é estendida à aplicação identidade em  $F$ ; por unicidade, temos  $\theta'\iota = 1_F$ , isto é,  $\theta'$  é uma inclusão de  $F$  em  $H$ . Disto segue, que  $F \subseteq H$ , donde temos,  $F = H = \langle X \rangle$ , como queríamos.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{inc}} & F \\ & \searrow \theta & \downarrow \theta' \\ & & H \\ & & \downarrow \iota \\ & & F \end{array}$$

□

**Proposição 1.3.** Sejam  $F_1$  e  $F_2$  grupos livres em  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente, com  $F_1 \cong F_2$ . Então  $|X_1| = |X_2|$ . Reciprocamente, se  $F_1$  e  $F_2$  são livres em  $X_1$  e  $X_2$  com  $|X_1| = |X_2|$ , então  $F_1 \cong F_2$ .

**Demonstração.**

Suponha primeiramente que  $|X_1| = |X_2|$ . Então existe uma bijeção  $\kappa : X_1 \rightarrow X_2$ . Sejam  $\alpha, \beta$  as extensões dadas por:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & F_1 \\ \kappa \downarrow & & \downarrow \alpha \\ X_2 & \xrightarrow{i_2} & F_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_2 & \longrightarrow & F_2 \\ \kappa^{-1} \downarrow & & \downarrow \beta \\ X_1 & \xrightarrow{i_1} & F_1, \end{array}$$

onde,  $i_1, i_2$  representam as aplicações inclusões de  $X_1 \hookrightarrow F_1$  e  $X_2 \hookrightarrow F_2$ , respectivamente.

Assim,  $\alpha$  é a extensão da aplicação  $\kappa i_2 : X_1 \rightarrow F_2$  e  $\beta$  é a extensão da aplicação  $\kappa^{-1} i_1 : X_2 \rightarrow F_1$ , isto é, para quaisquer  $x_1 \in X_1$  temos  $x_1^\alpha = x_1^{\kappa i_2}$  e para todos  $x_2 \in X_2$  temos  $x_2^\beta = x_2^{\kappa^{-1} i_1}$ .

Assim, dado  $x_1 \in X_1$ , temos  $x_1^{\alpha\beta} = (x_1^{\kappa i_2})^\beta = (x_1^\kappa)^{\kappa^{-1}i_1} = x_1^{i_1} = x_1$ , isto é,  $\alpha\beta : F_1 \rightarrow F_1$  estende  $i_1 : X_1 \rightarrow F_1$ . Mas o mesmo ocorre com a aplicação identidade  $1_{F_1}$  em  $F_1$ . Pela unicidade desta extensão, temos  $\alpha\beta = 1_{F_1}$ .

Um procedimento análogo nos mostra que para qualquer  $x_2 \in X_2$  temos  $x_2^{\beta\alpha} = x_2$ , e pelos mesmos motivos expostos acima, temos  $\beta\alpha = 1_{F_2}$ . Portanto,  $\alpha$  é um isomorfismo (cujo inverso é  $\beta$ ) e, conseqüentemente,  $F_1 \cong F_2$ .

Provemos então a recíproca, isto é, suponha que,  $F_1$  e  $F_2$  são grupos livres com bases  $X_1$  e  $X_2$  respectivamente e que  $F_1 \cong F_2$ . O Objetivo agora é mostrar que  $|X_1| = |X_2|$ .

De fato, segue pela definição de grupos livres que existe uma bijeção entre o conjunto de todas as aplicações de  $X_i$  em  $G$ , denotado por  $Map(X_i, G)$ , e o conjunto de todos os homomorfismos de  $F_i$  em  $G$ , denotado por  $HOM(F_i, G)$ ,  $i = 1, 2$ . Considerando  $G = \mathbb{Z}_2$ , temos, pelo fato de  $F_1 \cong F_2$  que,  $|HOM(F_1, \mathbb{Z}_2)| = |HOM(F_2, \mathbb{Z}_2)|$ . Logo,

$$|MAP(X_1, \mathbb{Z}_2)| = |MAP(X_2, \mathbb{Z}_2)| \Rightarrow |\mathbb{Z}_2|^{|X_1|} = |\mathbb{Z}_2|^{|X_2|} \Rightarrow 2^{|X_1|} = 2^{|X_2|} \Rightarrow |X_1| = |X_2|,$$

como queríamos. □

**Observação 1.4.** Para vermos que  $|MAP(X_1, \mathbb{Z}_2)| = |MAP(X_2, \mathbb{Z}_2)| \Rightarrow |\mathbb{Z}_2|^{|X_1|} = |\mathbb{Z}_2|^{|X_2|}$ , podemos consultar o Capítulo 3, página 68 de [9].

## 1.2.2 A Existência de $F(X)$

Seja  $X$  um conjunto qualquer. Temos por objetivo construir um grupo livre  $F(X)$  cuja base seja exatamente o conjunto  $X$ , isto é, desejamos mostrar que para qualquer  $X$ ,  $F(X)$  realmente existe. Seguiremos alguns passos básicos para tal construção.

### Passo 1

Primeiro construiremos uma cópia de  $X$ , denotada por  $\hat{X} = \{\hat{x} | x \in X\}$  (veremos mais tarde, que estes elementos serão identificados com os inversos dos elementos de  $X$ ), e consideraremos a união  $X^\pm := X \cup \hat{X}$ .

Construiremos agora as **palavras**  $W_n = (X^\pm)^{\times n}$  de comprimento  $n \geq 0$  em  $X^\pm$ , que são exatamente as  $n$ -uplas de elementos de  $X^\pm$ , isto é, se  $a$  é uma palavra em  $X^\pm$  então,  $a = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , onde cada  $x_i \in X^\pm$ . Assim:

- $W_0$  consiste somente de  $()$ , a **palavra vazia**, denotada, por  $1$ ;
- $W_1$  consiste de  $(x), (\hat{x}), x \in X$ , e assim  $W_1$  se confunde com  $X^\pm$ ;
- $W_2$  consiste dos pares  $(x, y), x, y \in X^\pm$ , e assim por diante.

Agora descartamos todas as palavras que contenham o par  $x, \hat{x}$  (para o mesmo  $x \in X$ ) em posições adjacentes, em qualquer ordem. As palavras remanescentes, isto é, sem esta propriedade, são ditas **reduzidas**. Por exemplo, a palavra  $(x_1, x_2, \hat{x}_2, x_3, x_4, \hat{x}_1)$  é a mesma palavra que  $(x_1, x_3, x_4, \hat{x}_1)$ , entretanto, só a última está na forma reduzida. Por fim, denotemos por  $\tilde{W}_n$  o conjunto de todas as palavras reduzidas de comprimento  $n$ .

Defina então

$$F(X) = \bigcup_{n \geq 0} \tilde{W}_n.$$

### Passo 2

Para que  $F = F(X)$  seja um grupo, definimos uma operação binária sobre  $F$ , denominada, **cancelamento por justaposição**, dada por:

$$a = (x_1, \dots, x_l) \in \tilde{W}_l, b = (y_1, \dots, y_m) \in \tilde{W}_m, \quad (1-1)$$

pondo

$$ab = (x_1, \dots, x_{l-r}, y_{r+1}, \dots, y_m), \quad (1-2)$$

onde  $r$  é o maior valor de  $k \geq 0$  para que nenhuma das palavras  $(x_l, y_1), (x_{l-1}, y_2), \dots, (x_{l-k+1}, y_k)$  seja reduzida. Esta condição nos garante que  $ab \in \tilde{W}_{l+m-2r}$ .

**Lema 1.5.** *O conjunto  $F(X)$  das palavras reduzidas em  $X^\pm$  é um grupo, com a operação de cancelamento por justaposição.*

### Demonstração.

Consulte o Capítulo 1 de Johnson [7], página 6. □

### Passo 3

Observemos que denotando  $\tilde{W}_1$  por  $W_1$ , temos que  $\xi : W_1 \rightarrow X^\pm$ , dada por  $(x)^\xi = x$ , para todo  $x \in W_1$ , é uma bijeção. Assim podemos remover os parênteses e os símbolos “ $\hat{\phantom{x}}$ ”, de modo, a simplificar nossa notação. Além disso, podemos identificar  $\hat{x}$

com  $x^{-1}$ .

Voltando nossa atenção ao comprimento, escreveremos  $l(w) = n$  se  $w \in \tilde{W}_n$ . Note que,  $X \subseteq F(X)$ , e que  $\langle X \rangle$  contém  $X^{-1} = \{x^{-1} | x \in X\}$  e assim, contém todos  $\tilde{W}_n$ , donde vemos que  $X$  gera  $F(X)$ .

#### Passo 4

**Teorema 1.6.** *O grupo  $F(X)$  das palavras reduzidas em  $X^\pm$  é livre sobre  $X$ .*

#### Demonstração.

Seja  $G$  um grupo. Considere  $\theta : X \rightarrow G$ , uma aplicação. Defina  $\theta' : F(X) \rightarrow G$  por

$$1^{\theta'} = 1 \text{ e } (x^{-1})^{\theta'} = (x^\theta)^{-1}, \forall x \in X$$

e

$$(x_1 \dots x_l)^{\theta'} = (x_1^\theta, \dots, x_l^\theta),$$

para  $x_1 \dots x_l \in \tilde{W}_l$ .

Claramente,  $\theta'$  estende  $\theta$ . Vamos mostrar que  $\theta'$  é um homomorfismo.

Sejam  $a = x_1 \dots x_l \in \tilde{W}_l$  e  $b = y_1 \dots y_m \in \tilde{W}_m$ , e  $ab = x_1 \dots x_{l-r} y_{r+1} \dots y_m$ . Assim,

$$\begin{aligned} (ab)^{\theta'} &= (x_1 \dots x_{l-r} y_{r+1} \dots y_m)^{\theta'} \\ &= x_1^{\theta'} \dots x_{l-r}^{\theta'} y_{r+1}^{\theta'} \dots y_m^{\theta'} \\ &= x_1^{\theta'} \dots x_{l-r}^{\theta'} (y_r^{-1})^{\theta'} \dots (y_1^{-1})^{\theta'} y_1^{\theta'} \dots y_r^{\theta'} y_{r+1}^{\theta'} \dots y_m^{\theta'} \\ &= x_1^{\theta'} \dots x_{l-r}^{\theta'} y_1^{\theta'} \dots y_m^{\theta'} \\ &= a^{\theta'} b^{\theta'} \end{aligned}$$

Agora, pela própria construção de  $F(X)$ , temos que  $X$  gera  $F(X)$  disso decorre a unicidade de  $\theta'$ . De fato, se existisse  $\theta''$  que estendesse  $\theta$ , então,  $x^{\theta'} = x^{\theta''}$  para todo  $x \in X$ . Ora, mas dado  $u \in F(X)$ , temos  $u = x_1 x_2 \dots x_n$  com  $x_i \in X$  para todo  $i$  e assim,

$$u^{\theta'} = x_1^{\theta'} \dots x_n^{\theta'} = x_1^\theta \dots x_n^\theta = x_1^{\theta''} \dots x_n^{\theta''} = u^{\theta''},$$

e por tanto  $\theta'' = \theta'$ , donde segue que,  $\theta'$  é único, como queríamos.  $\square$

O seguinte resultado tem como consequências importantes uma caracterização dos grupos livres e um ponto de partida para a Teoria das Apresentações de Grupos.

**Proposição 1.7.** *Um grupo  $F$  é livre em um subconjunto  $X$  se, e somente se,*

1.  $X$  gera  $F$ , e;
2. nenhuma palavra reduzida em  $X^\pm$  de comprimento positivo é igual à 1.

**Demonstração.**

Seja  $\theta' : F(X) \rightarrow F$  o homomorfismo que estende a inclusão  $\theta : X \rightarrow F$ . Se 1. e 2. valem, isto é equivalente a dizer que  $\theta$  é sobrejetiva e injetiva, respectivamente, ou seja,  $\theta'$  é um isomorfismo, então  $F$  é livre em  $X$ . Reciprocamente, seja  $F$  livre em  $X$  e  $\xi' : F \rightarrow F(X)$  a extensão da inclusão  $\xi : X \rightarrow F(X)$ . Como  $X$  gera  $F$ , (Lema 1.2), temos  $\xi'\theta' = 1_F$ , analogamente,  $\theta'\xi' = 1_{F(X)}$  e sendo  $\theta'$  um isomorfismo, valem 1. e 2.  $\square$

**Proposição 1.8.** *Todo grupo é isomorfo a um quociente de algum grupo livre.*

**Demonstração.**

Sejam  $G$  um grupo e  $X$  um conjunto de geradores para  $G$  (que sempre existe, basta por exemplo, tomar  $X = G$ ). Seja  $\theta' : F(X) \rightarrow G$  uma extensão da inclusão  $\theta : X \rightarrow G$ . Como,  $Im(\theta') = G$ , pois  $G = \langle X \rangle$ , temos que

$$G = Im(\theta') \cong F(X)/Ker(\theta'),$$

onde  $Im(\theta')$  e  $Ker(\theta')$  são respectivamente, a imagem e o núcleo da aplicação  $\theta'$ .  $\square$

O resultado apresentado a seguir é uma generalização de um resultado clássico, devido à Dedekind, que estabelece que em um grupo abeliano livre, todo subgrupo abeliano livre deste grupo possui posto menor do que ou igual ao posto do grupo. Schreier e Nielsen generalizaram este resultado para um grupo livre qualquer.

**Teorema 1.9** (Schreier). *Seja  $F$  um grupo livre e  $H$  um subgrupo de  $F$ . Então  $H$  é livre. Além disso, se  $|F : H| < \infty$  e  $r(F) < \infty$ , então*

$$r(H) = (r(F) - 1)|F : H| + 1. \quad (1-3)$$

**Demonstração.**

Consulte o Capítulo 2, página 22 de Johnson [7].  $\square$

### 1.2.3 Apresentações de Grupos

Esta seção se baseia no Capítulo 4 de Johnson [7].

Antes de iniciarmos a discussão sobre produtos livres, trataremos as Apresen-  
tação de Grupos. Estabeleceremos ao longo desta seção algumas notações básicas, de  
modo a não deixar o texto enfadonho e repetitivo.

Portanto, assim como na seção anterior consideraremos  $X$  um conjunto e  $F = F(X)$  o grupo livre em  $X$ ; além disso,  $R$  denotará um subconjunto qualquer de  $F$  e  $\bar{R}$  o **fecho normal** de  $R$ , isto é, o menor subgrupo normal de  $F$  que contém  $R$ ; por último,  $G$  denotará o grupo quociente  $F/\bar{R}$ . Com estas notações podemos estabelecer a seguinte definição:

**Definição 1.10.**  $G = \langle X|R \rangle$  é dita uma *Apresentação Livre*, ou simplesmente, uma **Apresen-  
tação** do grupo  $G$ . Os elementos de  $X$  são ditos **geradores** e os elementos de  $R$  são  
chamados os **relatores** da apresentação.

O grupo  $G$  é dito **finitamente apresentado** se possui uma apresentação com  $X$  e  
 $R$  finitos.

**Observação 1.11.** A definição acima traz a noção precisa de que os elementos  $x \in X$   
geram  $G$  e que os relatores  $r \in R$  são iguais à 1 em  $G$ , e que  $G$  é o maior grupo com estas  
propriedade. As vezes é conveniente substituir  $R$  em  $\langle X|R \rangle$  pelo conjunto de equações  
 $R = 1$ , isto é,  $\{r = 1 | r \in R\}$ , denominados **relações definidoras** de  $G$ .

**Exemplo 1.12.** (a)  $\langle X|\emptyset \rangle$  é uma apresentação do grupo livre  $F = F(X)$ , pois basta  
observar que  $\bar{\emptyset} = 1$  e que  $F/1 \cong F$ ;

(b)  $\langle x|x^n = 1 \rangle$  é uma apresentação de  $\mathbb{Z}_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;

(c)  $\mathbb{Z}_6$  tem a seguinte apresentação;

$$\mathbb{Z}_6 \cong \langle x, y | x^3 = 1, y^2 = 1; [x, y] = 1 \rangle.$$

(d) O grupo diedral de grau  $n$  tem a seguinte apresentação

$$D_{2n} \cong \langle x, y | x^2 = 1, y^n = 1, y^x = y^{-1} \rangle.$$

**Proposição 1.13.** *Todo grupo possui uma apresentação e todo grupo finito possui uma  
apresentação finita.*

**Demonstração.**

Sejam  $G$  um grupo qualquer e  $X \subseteq G$  um conjunto de geradores quaisquer para  $G$ . Seja  $\theta' : F(X) \rightarrow G$  o homomorfismo da Proposição 1.8 (isto é,  $\theta'$  é a extensão da aplicação

$\theta : X \rightarrow G$ ). Assim, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos que  $G \cong F/Ker(\theta')$ . Logo,  $\langle X|Ker(\theta') \rangle$  é uma apresentação para  $G$ , ou seja, todo grupo possui uma apresentação.

Suponhamos  $G$  finito. Então como  $X \subseteq G$ ,  $X$  é também finito. Logo, pelo Teorema 1.9 temos que  $Ker(\theta')$  é gerado por um conjunto  $B$  de cardinalidade

$$(|X| - 1)|G : Ker(\theta')| + 1.$$

Como,  $\langle B \rangle = Ker(\theta') \triangleleft F(X)$ , temos  $\langle B \rangle = \overline{B}$  e assim,  $G = \langle X|B \rangle$  é uma apresentação finita para  $G$ , como queríamos.  $\square$

**Lema 1.14.** *Sejam  $F, G, H$  grupos e  $\alpha : F \rightarrow G$ ,  $\beta : F \rightarrow H$  homomorfismos tais que*

1.  $Im(\alpha) = G$ ;
2.  $Ker(\alpha) \subseteq Ker(\beta)$ .

*Então existe um homomorfismo  $\beta' : G \rightarrow H$  tal que  $\alpha\beta' = \beta$ .*

**Demonstração.**

Consulte o Capítulo 4 de Johnson [7], página 42.  $\square$

**Observação 1.15.** *Mantendo a notação do Lema acima, podemos notar que*

$$Ker(\beta') = Ker(\beta)^\alpha.$$

**Proposição 1.16** (Teorema de von Dyck). *Se  $G = \langle X|R \rangle$  e  $H = \langle X|S \rangle$ , onde  $R \subseteq S \subseteq F(X)$ , então existe um epimorfismo  $\phi : G \rightarrow H$  fixando todo  $x \in X$  e tal que  $Ker(\phi) = \overline{S/R}$ . Reciprocamente, todo quociente de  $G = \langle X|R \rangle$  possui uma apresentação  $\langle X|S \rangle$  com  $S \supseteq R$ .*

**Demonstração.**

Aplicaremos o Lema acima com as aplicações naturais  $\alpha : F \rightarrow F/\overline{R}$  e  $\beta : F \rightarrow F/\overline{S}$ .

De fato, sendo  $\alpha$  sobrejetiva e  $\text{Ker}(\alpha) = \bar{R} \subseteq \bar{S} = \text{Ker}(\beta)$ , logo as condições *i.* e *ii.* do Lema anterior são satisfeitas, portanto, existe um homomorfismo  $\phi = \beta' : G \rightarrow H$ . Assim,  $\phi$  fixa todo  $x \in X$ , uma vez que  $\alpha$  e  $\beta$  o fazem e,  $\alpha\phi = \beta$ . Além disso,  $\phi$  é sobrejetiva, visto que  $\alpha$  e  $\beta$  o são. Por último,

$$\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(\beta)^\alpha = \bar{S}^\alpha = \bar{S}/\bar{R} = \overline{S/R},$$

pois  $R^\alpha = 1$  em  $G$ .

Reciprocamente, se  $H$  é um quociente de  $G$  e sendo  $\psi$  a composta das aplicações naturais

$$F(X) \rightarrow G \rightarrow H,$$

temos  $R \subseteq \text{Ker}(\psi)$  e como  $\text{Ker}(\psi) = \overline{\text{Ker}(\psi)}$ , obtemos  $H = \langle X | \text{Ker}(\psi) \rangle$ , como queríamos.  $\square$

**Proposição 1.17** (Teste da Substituição). *Suponha que são dados uma apresentação  $G = \langle X | R \rangle$ , um grupo  $H$  e uma aplicação  $\theta : X \rightarrow H$ . Então  $\theta$  se estende a um homomorfismo  $\theta'' : G \rightarrow H$  se, e somente se, para todos  $x \in X$  e  $r \in R$ , o resultado da substituição de  $x$  por  $x^\theta$  em  $r$  dá a identidade de  $H$ .*

**Demonstração.**

Consulte o Capítulo 4 de Johnson [7], página 44.  $\square$

**Observação 1.18.** *O homomorfismo  $\theta''$  quando existe é único, visto que,  $X$  gera  $G$ . Mais ainda,  $\theta''$  é uma epimorfismo se, e somente se,  $\langle X^\theta \rangle = H$ .*

**Proposição 1.19.** *Se  $G$  e  $H$  são grupos apresentados por  $\langle X | R \rangle$  e  $\langle Y | S \rangle$ , respectivamente, então o produto direto  $G \times H$  possui a seguinte apresentação*

$$\langle X, Y | R, S, [X, Y] \rangle, \tag{1-4}$$

onde  $[X, Y]$  denota o conjunto de todos os comutadores  $[x, y]$  com  $x \in X$  e  $y \in Y$ .

**Demonstração.**

Seja  $D = \langle X, Y | R, S, [X, Y] \rangle$ . Pelo Teste da Substituição, as inclusões  $X \hookrightarrow D$  e  $Y \hookrightarrow D$  podem ser estendidas, respectivamente, à homomorfismos  $\theta : G \rightarrow D$  e  $\psi : H \rightarrow D$ .

Além disso,  $xy = yx$  é uma relação em  $D$  e, portanto,

$$xy = yx \Rightarrow x^\theta y^\phi = y^\phi x^\theta \Rightarrow g^\theta h^\psi = h^\phi g^\theta,$$

para todos  $g \in G$  e  $h \in H$ , visto que  $X$  gera  $G$  e  $Y$  gera  $H$ . Disto segue que

$$\begin{aligned} \alpha : G \times H &\longrightarrow D \\ (g, h) &\longmapsto g^\theta h^\phi, \end{aligned}$$

é um homomorfismo, que leva  $(x, 1)$  em  $x$  e  $(1, y)$  em  $y$ , para quaisquer  $x \in X$  e  $y \in Y$  e, por isto, leva os geradores de  $G \times H$  nos geradores de  $D$ .

Por outro lado, a aplicação

$$\begin{aligned} f : X \cup Y &\longrightarrow G \times H \\ x &\longmapsto (x, 1) \\ y &\longmapsto (1, y), \end{aligned}$$

satisfaz as condições da Proposição 1.17. De fato, seja  $r$  uma relação em  $D$ . Se  $r \in R$ , então  $r^f = (r, 1) = (1, 1)$ , pois  $r = 1$  em  $G$ . Analogamente, se  $r \in S$ , então  $r^f = (1, s) = (1, 1)$ , pois  $s = 1$  em  $H$ . Por fim, se  $r \in [X, Y]$ , temos  $r^f = [x, y]^f$ , para algum  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Assim,

$$r^f = [x^f, y^f] = (x^f)^{-1}(y^f)^{-1}x^f y^f = (x^{-1}, 1)(y^{-1}, 1)(x, 1)(y, 1) = (1, 1).$$

Portanto, em qualquer caso,  $r^f = (1, 1)$  e, portanto,  $f$  satisfaz as condições do Teste da Substituição. Logo,  $f$  se estende a um homomorfismo, digamos,  $\beta : D \longrightarrow G \times H$ , que leva os geradores de  $D$  nos geradores de  $G \times H$ . Como  $\alpha\beta$  e  $\beta\alpha$  fixam o conjunto de geradores em  $G \times H$  e  $D$ , respectivamente, segue que  $\beta$  é o inverso de  $\alpha$  (e claramente,  $\alpha$  é o inverso de  $\beta$ ) e, assim,  $\alpha$  é um isomorfismo. □

## 1.3 Produtos Livres

Esta seção se baseia no Capítulo 9 de Johnson [7].

**Definição 1.20.** *Sejam  $G = \langle X | R \rangle$  e  $H = \langle Y | S \rangle$ , dois grupos livres. O produto livre entre*

$G$  e  $H$  é dado pela seguinte apresentação

$$G * H = \langle X, Y | R, S \rangle. \quad (1-5)$$

Os grupos  $G$  e  $H$  são denominados grupos fatores do produto livre  $G * H$ .

A seguinte Proposição garante que o produto livre entre  $G$  e  $H$  não depende da apresentação escolhida para cada grupo.

**Proposição 1.21.** *O produto livre  $G * H$  é unicamente determinado pelos grupos  $G$  e  $H$ . Além disso,  $G * H$  é gerado por dois subgrupos  $\overline{G}$  e  $\overline{H}$  isomorfos à  $G$  e  $H$ , respectivamente e, tais que,  $\overline{G} \cap \overline{H} = 1$ .*

**Demonstração.** Sejam  $\overline{G} \cong G$  e  $\overline{H} \cong H$  com apresentações  $\overline{G} = \langle \overline{X} | \overline{R} \rangle$  e  $\overline{H} = \langle \overline{Y} | \overline{S} \rangle$ , onde  $\overline{X} \cap \overline{Y} = 1$ . Considere os isomorfismos  $\alpha : G \rightarrow \overline{X}$  e  $\beta : H \rightarrow \overline{Y}$ . Uma vez que  $\alpha$  e  $\beta$  levam relações definidoras em relações definidoras, obtemos pelo Teste da Substituição, o homomorfismo natural

$$\begin{aligned} \alpha * \beta : G * H &\longrightarrow \overline{X} * \overline{Y} \\ x &\longmapsto x^\alpha \\ y &\longmapsto y^\beta. \end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos o homomorfismo natural

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} * \beta^{-1} : G' * H' &\longrightarrow G * H \\ \overline{x} &\longmapsto \overline{x}^{\alpha^{-1}} \\ \overline{y} &\longmapsto \overline{y}^{\beta^{-1}}. \end{aligned}$$

Como  $\alpha^{-1} * \beta^{-1}$  é o inverso de  $\alpha * \beta$ , temos  $G * H \cong \overline{G} * \overline{H}$ .

Além disso, se  $z \in \overline{G} \cap \overline{H}$ , então o homomorfismo de  $G * H$  em  $G$  dado por  $g \mapsto g$  e  $h \mapsto 1$ , leva  $z$  em 1, pois  $z \in \overline{H}$ . Tal homomorfismo é injetivo em  $\overline{G}$  e, portanto,  $z = 1$ . Logo,  $\overline{G} \cap \overline{H} = 1$ , como queríamos.  $\square$

Assim como em grupos livres, podemos definir uma **forma normal** para os elementos do produto livre  $H * K$ .

**Proposição 1.22.** *(Forma Normal) Considere o produto livre  $H * K$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes (e verdadeiras):*

1. Cada elemento  $w$  de  $H * K$  pode ser expresso de maneira única como  $w = a_1 \cdots a_n$ , onde  $a_1, \dots, a_n$  é uma sequência reduzida.

2. Se  $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ ,  $n > 0$ , onde  $a_1, \dots, a_n$  é uma seqüência reduzida, então  $w \neq 1$  em  $H * K$ .

**Proposição 1.23.** *Seja  $G * H$  o produto livre de dois grupos não triviais. Então o subgrupo comutador  $[G, H]$  de  $G * H$  é normal. Além disso,  $[G, H]$  é um grupo livre sobre o conjunto*

$$\langle [g, h] \mid g \in G \setminus \{1\}, h \in H \setminus \{1\} \rangle.$$

## O Produto Tensorial não-Abeliano de um Grupo

### 2.1 O Produto Tensorial não-Abeliano

Esta seção se baseia nos artigos de R.Brow e J-L. Loday [4] e Gilbert [6].

Lembremos que uma ação de um grupo  $G$  sobre um grupo  $H$  é um homomorfismo de  $G$  em  $\text{Aut}(H)$  (grupo dos automorfismos de  $H$ ).

Sejam  $G$  e  $H$  dois grupos e suponha que  $G$  age em  $H$  e vice-versa. Além disso, suponha que tanto  $G$ , como  $H$ , ajam em si mesmos por conjugação, isto é, dados  $g, x \in G$  e  $h, y \in H$  temos  $g^x = g^{-1}xg$  e  $h^y = y^{-1}hy$ . Dessa forma, temos uma ação do produto livre  $G * H$  sobre  $G$  e  $H$ . Diremos que as ações de  $G$  sobre  $H$  e de  $H$  sobre  $G$  são **compatíveis** se, dados quaisquer  $g, g_1 \in G$ ,  $h, h_1 \in H$ ,

$$g^{h^{g_1}} = g^{g_1^{-1}hg_1} := \left( (g^{g_1^{-1}})^h \right)^{g_1} \quad (2-1)$$

$$h^{g^{h_1}} = h^{h_1^{-1}gh_1} := \left( (h^{h_1^{-1}})^g \right)^{h_1}. \quad (2-2)$$

**Definição 2.1.** Se  $G$  e  $H$  agem um no outro compativelmente, o **produto tensorial não-abeliano** de  $G$  e  $H$ , como introduzido por R. Brow e J-L. Loday em [4], é definido como grupo gerado por todos os símbolos  $g \otimes h$ ,  $g \in G$ ,  $h \in H$ , sujeitos às seguintes relações

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \quad (2-3)$$

$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}), \quad (2-4)$$

para quaisquer  $g, g_1 \in G$  e  $h, h_1 \in H$ . Tal grupo é denotado por  $G \otimes H$ . Assim,

$$G \otimes H = \langle g \otimes h \mid g \in G, h \in H \rangle.$$

**Observação 2.2.** Quando  $G$  e  $H$  agem trivialmente um sobre o outro, e por conjugação, em si mesmos, o produto tensorial  $G \otimes H$  é o produto tensorial usual, o qual denotaremos,

a partir de agora por  $G \otimes_{\mathbb{Z}} H$ .

Em particular, a ação por conjugação de um grupo  $G$  sobre si mesmo sempre satisfaz às equações (2-1) e (2-2) e, então o **quadrado tensorial não-abeliano**  $G \otimes G$  de um grupo  $G$  sempre pode ser definido.

Note que fazendo  $g_1 = 1$  na equação (2-3) ou tomando  $h_1 = 1$  na equação (2-4) vemos que  $g \otimes 1 = 1 \otimes h$  é o elemento neutro de  $G \otimes H$ , onde  $g \in G$  e  $h \in H$ .

De fato, note que

$$\begin{aligned} (g \otimes h.1) &= (g \otimes 1)(g^1 \otimes h^1) \\ &= (g \otimes 1)(g \otimes h), \end{aligned}$$

isto é,  $g \otimes 1$  é o elemento neutro de  $G \otimes H$ . A verificação de que  $1 \otimes h$  é também o elemento neutro de  $G \otimes H$  é análoga e, portanto, não será feita.

**Exemplo 2.3.** *Sejam  $G = \langle a | a^2 = 1 \rangle$  e  $H = \langle b | b^3 = 1 \rangle$ . Suponha que  $H$  age trivialmente sobre  $G$  e que  $G$  age sobre  $H$  por  $h^g = h^{-1}$ ,  $h \in H$ ,  $g \in G$ . Segue da definição de  $G \otimes H$  e da observação acima que  $G \otimes H$  é gerado por  $\{a \otimes b, a \otimes b^2\}$ . Da equação (2-4) obtemos que*

$$a \otimes b^2 = (a \otimes b)(a^b \otimes b^b) = (a \otimes b)(a \otimes b) = (a \otimes b)^2.$$

Logo,

$$G \otimes H = \langle a \otimes b \rangle.$$

Note também que,

$$\begin{aligned} (a \otimes b)^3 &= (a \otimes b)(a \otimes b^2) \\ &= (a \otimes b)(a^b, (b^2)^b) \\ &= (a \otimes b^3) \\ &= (a \otimes 1) \\ &= 1_{G \otimes H}. \end{aligned}$$

Assim,  $G \otimes H$  tem ordem 3. Por fim, observe que, a aplicação  $G \otimes H \rightarrow \mathbb{Z}_3$  dada por  $a \otimes b \mapsto \bar{1}$  é um isomorfismo.

A seguir, apresentamos um resultado obtido por Brown, Johnson e Robertson [3], onde obtemos uma descrição para o quadrado tensorial dos grupos Diedrais  $D_{2n}$  e dos Quarténios Generalizados  $Q_m$ . A demonstração será omitida, pois nosso intuito não é o

de estudar o quadrado tensorial, mais sim um grupo que está relacionado com este; para maiores informações consulte Brown [3], página 191, Proposições 13 e 14.

**Exemplo 2.4.** *Seja  $m = 4r + k$ , onde  $k = 0$  ou  $k = 2$ . Então*

$$Q_m \otimes Q_m = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2m} \times \mathbb{Z}_{2+k} \times \mathbb{Z}_2,$$

onde

$$Q_m = \langle x, y | x^{2^{m-1}} = 1 = x^y x, y^2 = x^{2^{m-2}} \rangle.$$

*Seja  $D_{2m} = \langle x, y | x^m = 1 = y^2, y^x = y^{-1} \rangle$ . Então*

$$D_{2m} \otimes D_{2m} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_m,$$

*se  $m$  for ímpar, ou então*

$$D_{2m} \otimes D_{2m} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

*se  $m$  for par.*

**Exemplo 2.5.**

$$\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_n, \quad \text{para todo } n \text{ natural.}$$

*De fato, para observar isso, note que sendo  $\mathbb{Z}_n$  abeliano, temos que  $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_n$  é precisamente o produto tensorial usual (de grupos abelianizados). Assim,  $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_n$ .*

**Observação 2.6.** *Em geral,  $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_d$ , onde  $d = \text{mdc}(n, m)$ .*

**Definição 2.7.** *Seja  $L$  um grupo. Uma função  $\phi: G \times H \rightarrow L$  é dita uma **biderivação** se para quaisquer  $g, g_1 \in G$  e  $h, h_1 \in H$*

$$\begin{aligned} (gg_1, h)^\phi &= (g^{g_1}, h^{g_1})^\phi (g_1, h)^\phi \\ (g, hh_1)^\phi &= (g, h_1)^\phi (g^{h_1}, h^{h_1})^\phi. \end{aligned}$$

Pelo Teste da Substituição (Proposição 1.17) uma biderivação  $\phi: G \times H \rightarrow L$  determina um único homomorfismo  $\phi^*: G \otimes H \rightarrow L$  tal que  $(g \otimes h)^{\phi^*} = (g, h)^\phi$ .

**Proposição 2.8.** *Os grupos  $G$  e  $H$  agem sobre  $G \otimes H$  de modo que*

$$\begin{aligned} (g_1 \otimes h)^g &= g_1^g \otimes h^g \\ (g \otimes h_1)^h &= g^h \otimes h_1^h, \end{aligned}$$

para quaisquer  $g, g_1 \in G$ ,  $h, h_1 \in H$ . Em particular, temos uma ação de  $G * H$  sobre  $G \otimes H$  dada por

$$(g \otimes h)^p = g^p \otimes h^p,$$

onde  $g \in G$ ,  $h \in H$  e  $p \in G * H$ .

### Demonstração.

Para cada  $g \in G$  defina

$$\begin{aligned} \phi_g : G \times H &\longrightarrow G \otimes H \\ (g_1, h)^{\phi_g} &\longmapsto g_1^g \otimes h^g \end{aligned}$$

Afirmamos que  $\phi_g$  é uma biderivação, para todo  $g \in G$ .

De fato, dados  $g_1, g_2 \in G$  e  $h, h_1 \in H$ , temos

$$\begin{aligned} (g_1, hh_1)^{\phi_g} = g_1^g \otimes (hh_1)^{\phi_g} &= g_1^g \otimes h^{\phi_g} h_1^{\phi_g} \\ &\stackrel{\text{def. (2-4)}}{=} (g_1^g \otimes h_1^g) \left( (g_1^g)^{h_1^g} \otimes (h^g)^{h_1^g} \right) \\ &= (g_1^g \otimes h_1^g) (g_1^{h_1 g} \otimes h^{h_1 g}) \\ &= (g_1, h_1)^{\phi_g} (g_1^{h_1}, h^{h_1})^{\phi_g}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (g_1 g_2, h)^{\phi_g} = (g_1 g_2)^{\phi_g} \otimes h^g &= g_1^g g_2^g \otimes h^g \\ &\stackrel{\text{def. (2-3)}}{=} \left( (g_1^g)^{g_2^g} \otimes (h^g)^{g_2^g} \right) (g_2^g \otimes h^g) \\ &= (g_1^{g_2 g} \otimes h^{g_2 g}) (g_2^g \otimes h^g) \\ &= (g_1^{g_2}, h^{g_2})^{\phi_g} (g_2, h)^{\phi_g}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\phi_g$  é uma biderivação e, conseqüentemente determina um único homomorfismo de grupos  $\alpha_g$ , tal que para quaisquer  $g_1 \in G$  e  $h \in H$  tenhamos

$$\begin{aligned} \alpha_g : G \otimes H &\longrightarrow G \otimes H \\ (g_1 \otimes h)^{\alpha_g} &\longmapsto (g_1, h)^{\phi_g} = g_1^g \otimes h^g. \end{aligned}$$

Além disso,  $\alpha_g$  é um automorfismo de  $G \otimes H$ , uma vez que

$$(g_1 \otimes h)^{\alpha_g \alpha_{g^{-1}}} = (g_1^{g^{-1}} \otimes h^{g^{-1}})^{\alpha_g} = g_1^{g^{-1}g} \otimes h^{g^{-1}g} = g_1 \otimes h = (g_1 \otimes h)^{\alpha_{g^{-1}} \alpha_g}.$$

Mais ainda,  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(G \otimes H)$  dada por  $g \mapsto \alpha_g$  é um homomorfismo de grupos,

donde temos uma ação de  $G$  sobre  $G \otimes H$  tal que

$$(g_1 \otimes h)^g = g_1^g \otimes h^g.$$

Com uma construção análoga, obtemos uma ação de  $H$  sobre  $G \otimes H$ , digamos

$$\begin{aligned} \beta : H &\longrightarrow \text{Aut}(G \otimes H) \\ h &\longmapsto \beta_h, \end{aligned}$$

onde  $\beta_h$  é definido de maneira análoga à  $\alpha_g$ .

Por fim, para mostrarmos que existe uma ação de  $G * H$  em  $G \otimes H$ , basta definirmos

$$\begin{aligned} \theta : G * H &\longrightarrow G \otimes H \\ g &\longmapsto \alpha_g \\ h &\longmapsto \beta_h. \end{aligned}$$

□

**Proposição 2.9.** *Sejam  $\alpha: G \rightarrow A$  e  $\beta: H \rightarrow B$  homomorfismos de grupos. Suponha que  $A$  e  $B$  ajam compativelmente um sobre o outro e que  $\alpha$  e  $\beta$  preservem as ações, no seguinte sentido*

$$\begin{aligned} (h^g)^\beta &= (h^\beta)^{g^\alpha} \\ (g^h)^\alpha &= (g^\alpha)^{h^\beta}, \end{aligned}$$

para quaisquer  $g \in G$ ,  $h \in H$ . Então existe um único homomorfismo

$$\begin{aligned} \alpha \otimes \beta : G \otimes H &\longrightarrow A \otimes B \\ (g \otimes h)^{\alpha \otimes \beta} &\longmapsto g^\alpha \otimes h^\beta, \end{aligned}$$

para todos  $g \in G$ ,  $h \in H$ . Além disso, se  $\alpha$  e  $\beta$  são sobrejetivas, então  $\alpha \otimes \beta$  também o é.

**Demonstração.**

Considere a função  $\phi: G \times H \rightarrow A \otimes B$  dada por  $(g, h)^\phi = g^\alpha \otimes h^\beta$ . Não é difícil verificar que  $\phi$  é uma biderivação e, portanto, determina um único homomorfismo  $\alpha \otimes \beta: G \otimes H \rightarrow A \otimes B$  tal que  $(g \otimes h)^{\alpha \otimes \beta} = g^\alpha \otimes h^\beta$ , para quaisquer  $g \in G$ ,  $h \in H$ .

Além disso, se  $\alpha$  e  $\beta$  são sobrejetivas, dados  $a \in A$  e  $b \in B$  existem  $g \in G$  e  $h \in H$ , tais que  $g^\alpha = a$  e  $h^\beta = b$ . Assim, dado  $a \otimes b \in A \otimes B$ , temos que

$$(g \otimes h)^{\alpha \otimes \beta} = g^\alpha \otimes h^\beta = a \otimes b,$$

isto é,  $\alpha \otimes \beta$  é sobrejetiva, como queríamos.  $\square$

**Proposição 2.10.** *Existe um único homomorfismo*

$$\xi: G \otimes H \rightarrow H \otimes G \quad (2-5)$$

tal que  $(g \otimes h)^\xi = (h \otimes g)^{-1}$ , para todos  $g \in G$ ,  $h \in H$ .

**Demonstração.**

A função  $\phi: G \times H \rightarrow H \otimes G$  definida por  $(g, h)^\phi = (h \otimes g)^{-1}$  é uma biderivação. De fato, dados  $g, g_1, g_2 \in G$  e  $h, h_1, h_2 \in H$ , temos

$$\begin{aligned} (g_1 g_2, h)^\phi &= (h \otimes g_1 g_2)^{-1} = [(h \otimes g_2)(h^{g_2} \otimes g_1^{g_2})]^{-1} \\ &= (h^{g_2} \otimes g_1^{g_2})^{-1} (h \otimes g_2)^{-1} \\ &= (g_1^{g_2}, h^{g_2})^\phi (g_2, h)^\phi. \end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que  $(g, h_1 h_2)^\phi = (g, h_2)^\phi (g^{h_2}, h_1^{h_2})^\phi$ , e portanto,  $\phi$  é uma biderivação e, conseqüentemente, determina um único homomorfismo  $\xi: G \otimes H \rightarrow H \otimes G$ . Pelos mesmos motivos, existe um (único) homomorfismo  $\mu: H \otimes G \rightarrow G \otimes H$  tal que

$$(h \otimes g)^\mu = (g \otimes h)^{-1},$$

para qualquer  $h \in H$ ,  $g \in G$ . Além disso,

$$\begin{aligned} (g \otimes h)^{\xi \mu} &= ((h \otimes g)^{-1})^\mu = (g \otimes h) = id_{G \otimes H} \\ (h \otimes g)^{\mu \xi} &= ((g \otimes h)^{-1})^\xi = (h \otimes g) = id_{H \otimes G}, \end{aligned}$$

isto é,  $\xi$  é um isomorfismo.  $\square$

**Proposição 2.11.** *Para quaisquer  $g, g_1 \in G$  e  $h, h_1 \in H$ , valem:*

1.  $(g^{-1} \otimes h)^g = (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h^{-1})^h$ ;
2.  $(g \otimes h)^{-1} (g_1 \otimes h_1) (g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{[g, h]}$ ;

3.  $[g, h] \otimes h_1 = (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1}$ ;
4.  $g_1 \otimes [g, h] = (g \otimes h)^{-g_1}(g \otimes h)$ ;
5.  $[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] = [g, h] \otimes [g_1, h_1]$ .

### Demonstração.

As demonstrações dos itens acima são todas semelhantes e utilizam apenas as definições e (em alguns casos) alguns dos itens desta mesma Proposição. Demonstraremos apenas o primeiro e o último item, embora os demais também não sejam difíceis de se demonstrar.

#### 1. Note que

$$1_{G \otimes H} = 1 \otimes h = g^{-1}g \otimes h \stackrel{\text{eq. (2-3)}}{=} (g^{-1} \otimes h)^g (g \otimes h)$$

e

$$1_{G \otimes H} = g \otimes 1 = g \otimes h^{-1}h \stackrel{\text{eq. (2-4)}}{=} (g \otimes h)(g \otimes h^{-1})^h,$$

para todo  $g \in G$  e  $h \in H$ . Donde segue que

$$(g^{-1} \otimes h)^g = (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h^{-1})^h.$$

#### 5.

$$\begin{aligned} [g \otimes h, g_1 \otimes h_1] &= (g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)^{-1}(g \otimes h)(g_1 \otimes h_1) \\ &\stackrel{\text{item (2.)}}{=} (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{[g_1, h_1]} \\ &\stackrel{\text{item (3.)}}{=} (g^{-1}g^h) \otimes [g_1, h_1] \\ &= [g, h] \otimes [g_1, h_1]. \end{aligned}$$

□

**Definição 2.12.** *Sejam  $G$  e  $H$  dois grupos. Um **módulo cruzado** é um homomorfismo de grupos  $\mu: H \rightarrow G$ , juntamente com uma ação de  $G$  em  $H$ , satisfazendo as seguintes condições*

$$(h^g)^\mu = g^{-1}h^\mu g, \quad g \in G, h \in H \quad (2-6)$$

$$(h_1^h)^\mu = h^{-1}h_1^\mu h, \quad h, h_1 \in H. \quad (2-7)$$

**Proposição 2.13.** 1. *Existem homomorfismos de grupos  $\alpha: G \otimes H \rightarrow G$  e  $\alpha': G \otimes H \rightarrow H$  tais que  $(g \otimes h)^\alpha = [g, h]$  e  $(g \otimes h)^{\alpha'} = [g, h]$ ;*

2. *Os homomorfismos  $\alpha$  e  $\alpha'$  com as ações dadas em (2-1) são módulos cruzados;*

3. *Se  $g \in G$ ,  $h \in H$  e  $t \in G \otimes H$  então*

$$\begin{aligned} t^\alpha \otimes h &= [t, h] \\ g \otimes t^{\alpha'} &= [g, t]; \end{aligned}$$

4.  *$t^\alpha \otimes t_1^{\alpha'} = [t, t_1]$ , para quaisquer  $t, t_1 \in G \otimes H$ ;*

5.  *$G$  e  $H$  agem trivialmente sobre  $\text{Ker}(\alpha')$  e  $\text{Im}(\alpha)$ , respectivamente.*

**Demonstração.**

1. Considere a função  $f: G \times H \rightarrow G$  dada por  $(g, h)^f = [g, h]$ . Sejam  $g, g_1 \in G$  e  $h \in H$ . Assim,

$$\begin{aligned} (gg_1, h)^f &= [gg_1, h] \\ &= [g, h]^{g_1} [g_1, h] \\ &= [g^{g_1}, h^{g_1}] [g_1, h] \\ &= (g^{g_1}, h^{g_1})^f (g_1, h)^f. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$(g, hh_1)^f = (g, h_1)^f (g^{h_1}, h^{h_1})^f, \forall g \in G, h, h_1 \in H.$$

Assim,  $f$  é uma biderivação e, conseqüentemente, pode ser estendida a um (único) homomorfismo  $\alpha: G \otimes H \rightarrow G$  tal que  $(g \otimes h)^\alpha = [g, h]$ . Com os mesmos argumentos apresentados anteriormente é possível mostrar que existe  $\alpha': G \otimes H \rightarrow H$  tal que  $(g \otimes h)^{\alpha'} = [g, h]$ .

2. Como  $\alpha$  e  $\alpha'$  são homomorfismos de grupos, é suficiente provar que ambos satisfazem (2-6) e (2-7), para todos os geradores de  $G \otimes H$ . Mostremos que  $\alpha$  é

um módulo cruzado. De fato, sejam  $t_1 = g_1 \otimes h \in G \otimes H$  e  $g \in G$ . Então

$$\begin{aligned}
 (t^g)^\alpha &\stackrel{\text{Prop. 2.8}}{=} (g_1^g \otimes h^g)^\alpha \\
 &= [g_1^g, h^g] \\
 &= [g_1, h]^g \\
 &= g^{-1}[g_1, h]g \\
 &= g^{-1}t^\alpha g.
 \end{aligned}$$

Logo,  $\alpha$  satisfaz a equação (2-6). A condição (2-7) segue Proposição 2.11 item 2. Consequentemente,  $\alpha$  é um módulo cruzado. Analogamente, verificamos que  $\alpha'$  é um módulo cruzado.

3. Sejam  $g \in G, h \in H$  e  $t = g_1 \otimes h_1$ . Então

$$\begin{aligned}
 t^\alpha \otimes h &= (g_1 \otimes h_1)^\alpha \otimes h \\
 &= [g_1, h_1] \otimes h \\
 &\stackrel{\text{Prop. 2.11} - 3.}{=} [g_1 \otimes h_1, h] \\
 &= [t, h].
 \end{aligned}$$

Utilizando o item 4. da Proposição 2.11, mostramos que  $g \otimes t^{\alpha'} = [g, t]$ .

4. Sejam  $t = g \otimes h$  e  $t_1 = g_1 \otimes h_1$  elementos de  $G \otimes H$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 t^\alpha \otimes t_1^{\alpha'} &= (g \otimes h)^\alpha \otimes (g_1 \otimes h_1)^{\alpha'} \\
 &= [g, h] \otimes [g_1, h_1] \\
 &\stackrel{\text{Prop. 2.11} - 5.}{=} [g \otimes h, g_1 \otimes h_1] \\
 &= [t, t_1].
 \end{aligned}$$

5. Se  $t \in \text{Ker}(\alpha')$  e  $g \in G$  então por 3., temos  $1_{G \otimes H} = g \otimes 1_H = g \otimes t^{\alpha'} = [t, g]$ , ou seja,  $t^g = t$  e, assim,  $G$  age trivialmente sobre  $\text{Ker}(\alpha')$ . Analogamente,  $H$  age trivialmente sobre  $\text{Ker}(\alpha)$ .

□

Para simplificar a notação, denotemos  $G/G'$  por  $G^{ab}$ .

**Proposição 2.14.** *Se  $G$  e  $H$  agem trivialmente um sobre o outro, então*

$$G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}.$$

**Demonstração.**

Note que  $G \otimes H$  é abeliano, pois dados  $t = g \otimes h$  e  $t_1 = g_1 \otimes h_1$  em  $G \otimes H$ , temos

$$\begin{aligned} [t, t_1] &= [g \otimes h, g_1 \otimes h_1] \stackrel{\text{Prop. 2.11} - 5.}{=} [g, h] \otimes [g_1, h_1] \\ &= g^{-1} g^h \otimes g_1^{-1} g_1^{h_1} \\ &= g^{-1} g \otimes g_1^{-1} g_1 \\ &= 1_{G \otimes H}, \end{aligned}$$

isto é, dados dois elementos quaisquer em  $G \otimes H$  eles comutam, logo,  $G \otimes H$  é abeliano.

Além disso, dado  $\alpha'$  como na Proposição 2.13 e, usando o fato de  $G$  agir trivialmente sobre  $H$ ,

$$(g \otimes h)^{\alpha'} = [g, h] = h^{-g} h = 1,$$

para todos  $g \otimes h \in G \otimes H$ .

Sendo  $\alpha'$  um homomorfismo, temos  $\text{Ker}(\alpha') = G \otimes H$ .

Pela Proposição 2.13 item 5.,  $G$  age trivialmente sobre  $G \otimes H$ . Da mesma forma, a ação de  $H$  sobre  $G \otimes H$  é trivial.

Defina

$$\begin{aligned} \theta: G^{ab} \times H^{ab} &\longrightarrow G \otimes H \\ (\bar{g}, \bar{h}) &\longmapsto g \otimes h, \end{aligned}$$

onde  $\bar{g} = gG'$  e  $\bar{h} = gH'$ . Se  $g, x \in G$  e  $h, y \in H$  são tais que  $\bar{g} = \bar{x}$  e  $\bar{h} = \bar{y}$ , então existem  $c \in G'$  e  $d \in H'$  de tal forma que  $g = xc$  e  $h = yd$ . Assim,

$$\begin{aligned} g \otimes h &= xc \otimes yd \\ &= (x^c \otimes (yd)^c)(c \otimes yd) \\ &= (x \otimes yd)(c \otimes yd) \\ &= (x \otimes d)(x^d \otimes y^d)(c \otimes d)(c^d \otimes y^d) \\ &= (x \otimes d)(x \otimes y)(c \otimes d)(c \otimes y) \\ &= (c \otimes d)(x \otimes d)(c \otimes y)(x \otimes y). \end{aligned}$$

Mas note que

$$[g_1, g_2] \otimes h_1 = (g_1^{-1} \otimes h_1)(g_2^{-1} \otimes h_1)(g_1 \otimes h_1)(g_2 \otimes h_1) = 1,$$

já que  $G$  e  $H$  agem trivialmente sobre o grupo abeliano  $G \otimes H$ . Analogamente,  $g_1 \otimes [h_1, h_2] = 1$ , para quaisquer  $g, g_1 \in G$  e  $h, h_1 \in H$ . Logo  $(c \otimes d) = x \otimes d = c \otimes y = 1$  e, portanto,  $g \otimes h = x \otimes y$ , isto é,  $\theta$  está bem definida. Além disso, como as ações de  $G$  e  $H$  sobre  $G \otimes H$  são triviais, então  $\theta$  é uma aplicação  $\mathbb{Z}$ -bilinear.

Agora, se  $A$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo e  $f: G^{ab} \times H^{ab} \rightarrow A$  é uma função  $\mathbb{Z}$ -bilinear, então é fácil ver que a função  $\tilde{f}: G \otimes H \rightarrow A$  definida por  $(g \otimes h)^{\tilde{f}} = (\bar{g}, \bar{h})^f$  é um  $\mathbb{Z}$ -homomorfismo estendendo  $f$ . Segue da unicidade do produto tensorial de módulos que  $G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$ .

□

## 2.2 O Quadrado Tensorial não-Abeliano

O quadrado tensorial  $G \otimes G$  de um grupo  $G$  é um caso particular do produto tensorial  $G \otimes H$  de dois grupos  $G$  e  $H$ . Considerando  $G$  agindo em si mesmo por conjugação, já observamos que as condições (2-1) e (2-2) são satisfeitas. Note que a função comutador  $[\cdot, \cdot]: G \times G \rightarrow G$  dada por  $(g_1, g_2) \mapsto [g_1, g_2]$  é uma biderivação e, portanto induz um homomorfismo de grupos  $\kappa: G \otimes G \rightarrow G$  dado por  $(g_1 \otimes g_2)^{\kappa} = [g_1, g_2]$ , para quaisquer  $g_1, g_2 \in G$ . Denotamos por  $J_2(G)$  o núcleo do homomorfismo  $\kappa$ .

**Proposição 2.15.** 1.  $J_2(G)$  é um subgrupo central de  $G \otimes G$ ;

2.  $G$  age trivialmente sobre  $J_2(G)$ .

**Demonstração.**

1. Pela Proposição 2.13 item 4. para todo  $t \in J_2(G)$  e  $t_1 \in G \otimes G$  temos

$$[t, t_1] = t^{\kappa} \otimes t_1^{\kappa} = 1_G \otimes t_1^{\kappa} = 1_{G \otimes G},$$

isto é,  $J_2(G)$  é central.

2. Decorre do item 5. da Proposição 2.13 (basta neste item fazermos  $\alpha' = \kappa$  e observar que a ação de  $G$  sobre  $\text{Ker}(\kappa) = J_2(G)$  é trivial).

□

**Proposição 2.16.** *Para quaisquer  $g \in G$ ,  $c \in G'$ , temos*

$$\begin{aligned} cg \otimes cg &= g \otimes g \\ gc \otimes gc &= g \otimes g. \end{aligned}$$

**Demonstração.**

Se  $g \in G$  e  $c \in G'$  é um comutador simples da forma  $c = [x, y]$ , então

$$\begin{aligned} cg \otimes cg &= [x, y]g \otimes [x, y]g \\ &\stackrel{\text{eq. (2-3)}}{=} ([x, y]^g \otimes ([x, y]g)^g) (g \otimes [x, y]g) \\ &= ([x, y]^g \otimes ([x, y]^g g) (g \otimes [x, y]g)) \\ &\stackrel{\text{eq. (2-4)}}{=} ([x, y]^g \otimes g) (([x, y]^g)^g \otimes ([x, y]^g)^g) (g \otimes g) (g^g \otimes [x, y]^g) \\ &= ([x, y] \otimes g)^g ([x, y] \otimes [x, y])^{g^2} (g \otimes g) (g \otimes [x, y])^g \\ &\stackrel{\text{prop. (2.11) - 5.}}{=} ([x, y] \otimes g)^g ([x \otimes y, x \otimes y])^{g^2} (g \otimes g) (g \otimes [x, y])^g \\ &\stackrel{J_2(G) \leq Z(G)}{=} (g \otimes g) ([x, y] \otimes g)^g (g \otimes [x, y])^g \\ &\stackrel{\text{prop. (2.11) - 3.}}{=} (g \otimes g) ((x \otimes y)^{-1} (x \otimes y)^g)^g (g \otimes [x, y])^g \\ &\stackrel{\text{prop. (2.11) - 4.}}{=} (g \otimes g) ((x \otimes y)^{-1} (x \otimes y)^g)^g ((x \otimes y)^{-g} (x \otimes y))^g \\ &= g \otimes g. \end{aligned}$$

Se  $c \in G'$  é um produto de comutadores da forma  $[x_1, y_1] \cdots [x_n, y_n]$  então o resultado segue por indução.  $\square$

## O Grupo $\mathcal{V}(G)$ e suas Propriedades

### 3.1 Definição e Resultados Preliminares

Este capítulo baseia-se no artigo de Rocco [15]. O objetivo então é analisar um operador  $\mathcal{V}$  na classe dos grupos, que está relacionado com o quadrado tensorial não-abeliano de um grupo, onde apresentaremos algumas propriedades envolvidas com tal operador, relacionando a finitude, solubilidade ou a nilpotência de um grupo  $G$  com a finitude, solubilidade ou nilpotência, respectivamente, de  $\mathcal{V}(G)$ . Por fim, são estabelecidas algumas cotas para o quadrado tensorial  $G \otimes G$ , quando  $G$  é um  $p$ -grupo finito.

**Definição 3.1.** *Sejam  $G$  e  $G^\varphi$  grupos isomorfos por  $\varphi, g \mapsto g^\varphi$ , para todo  $g \in G$ . Definimos o seguinte grupo:*

$$\mathcal{V}(G) = \left\langle G, G^\varphi \mid [g_1, g_2^\varphi]^{g_3} = [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^\varphi] = [g_1, g_2^\varphi]^{g_3^\varphi}, \forall g_1, g_2, g_3 \in G \right\rangle.$$

Nossa motivação para introduzir  $\mathcal{V}(G)$  é que este grupo possui um subgrupo  $[G, G^\varphi]$  isomorfo ao quadrado tensorial não-abeliano  $G \otimes G$ , como será visto mais adiante. Outra construção relacionada com  $\mathcal{V}(G)$  foi introduzida por S. Sidki [18]

$$\mathcal{X}(G) = \left\langle G, G^\varphi \mid [g, g^\varphi] = 1, \forall g \in G \right\rangle,$$

que possui, a propriedade de ser um  $\pi$ -grupo finito (nilpotente finito, ou solúvel) desde que  $G$  seja, respectivamente,  $\pi$ -grupo finito (nilpotente finito, ou solúvel). É exatamente neste caminho que pretendemos agir com este trabalho, isto é, buscamos resultados semelhantes para o grupo  $\mathcal{V}(G)$ .

**Lema 3.2.** *Sejam  $g, g_1, g_2, g_3, g_4$  elementos quaisquer de um grupo  $G$ . As seguintes relações são válidas em  $\mathcal{V}(G)$ :*

$$1. [g_1, g_2^\varphi]^{[g_3, g_4^\varphi]} = [g_1, g_2^\varphi]^{[g_3, g_4]} = [g_1, g_2^\varphi]^{[g_3, g_4]^\varphi};$$

2.  $[g_1, g_2^\Phi, g_3] = [g_1, g_2, g_3^\Phi] = [g_1, g_2^\Phi, g_3^\Phi]$ ;
3.  $[g_1^\Phi, g_2, g_3] = [g_1^\Phi, g_2, g_3^\Phi] = [g_1^\Phi, g_2^\Phi, g_3]$ ;
4.  $[g, g^\Phi]$  é central em  $\mathcal{V}(G)$ ;
5.  $[g_1, g_2^\Phi][g_2, g_1^\Phi]$  é central em  $\mathcal{V}(G)$ ;
6.  $[g, g^\Phi] = 1$ , para todo  $g \in G'$ .

**Demonstração.**

1. Das relações definidoras em  $\mathcal{V}(G)$  obtemos:

$$\begin{aligned}
[g_1, g_2^\Phi]^{[g_3, g_4^\Phi]} &= [g_1, g_2^\Phi]^{g_3^{-1} g_4^{-\Phi} g_3 g_4^\Phi} \\
&= [g_1^{g_3^{-1}}, (g_2^{g_3^{-1}})^\Phi]^{g_4^{-\Phi} g_3 g_4^\Phi} \\
&= [g_1^{g_3^{-1} g_4}, (g_2^{g_3^{-1} g_4})^\Phi]^{g_3 g_4^\Phi} \\
&= [g_1^{g_3^{-1} g_4 g_3}, (g_2^{g_3^{-1} g_4 g_3})^\Phi]^{g_4^\Phi} \\
&= [g_1^{g_3^{-1} g_4 g_3}, (g_2^{g_3^{-1} g_4 g_3})^\Phi]^{g_4} \\
&= [g_1^{[g_3, g_4]}, (g_2^{[g_3, g_4]})^\Phi] \\
&= [g_1, g_2^\Phi]^{[g_3, g_4]}.
\end{aligned}$$

Para mostrarmos a última igualdade, observe que

$$\begin{aligned}
[g_1, g_2^\Phi]^{[g_3, g_4]} &\stackrel{\text{def. } \mathcal{V}(G)}{=} [g_1^{[g_3, g_4]}, (g_2^{[g_3, g_4]})^\Phi] \\
&\stackrel{\text{def. } \mathcal{V}(G)}{=} [g_1, g_2^\Phi]^{[g_3, g_4]^\Phi},
\end{aligned}$$

como queríamos.

2.

$$\begin{aligned}
[g_1, g_2, g_3^\Phi] &= [g_1^{-1} g_1^{g_2}, g_3^\Phi] \\
&= [g_1^{-1}, g_3^\Phi]^{g_1^{g_2}} [g_1^{g_2}, g_3^\Phi] \\
&= [g_1^{-1}, g_3^\Phi]^{g_2^{-1} g_1 g_2} [g_1^{g_2}, g_3^\Phi] \\
&= [g_1^{-1}, g_3^\Phi]^{g_2^{-1} g_1 g_2} [g_1, (g_3^{g_2^{-1}})^\Phi]^{g_2} \\
&= [g_1, g_3^\Phi]^{-[g_1, g_2]} [g_1, (g_2 g_3 g_2^{-1})^\Phi]^{g_2} \\
&= [g_1, g_3^\Phi]^{-[g_1, g_2]} [g_1, (g_2 g_3)^\Phi (g_2^{-1})^\Phi]^{g_2} \\
&= [g_1, g_3^\Phi]^{-[g_1, g_2]} [g_1, (g_2^{-1})^\Phi]^{g_2} \left( [g_1, (g_2 g_3)^\Phi]^{(g_2^{-1})^\Phi} \right)^{g_2} \\
\stackrel{\text{def. } \mathcal{V}(G)}{=} & [g_1, g_3^\Phi]^{-[g_1, g_2]} [g_1, (g_2^{-1})^\Phi]^{g_2} \left( [g_1, (g_2 g_3)^\Phi]^{(g_2^{-1})^\Phi} \right)^{g_2} \\
&= [g_1, g_3^\Phi]^{-[g_1, g_2]} [g_1, (g_2^{-1})^\Phi]^{g_2} [g_1, (g_2 g_3)^\Phi] \\
&= [g_1, g_3^\Phi]^{-[g_1, g_2]} [g_1, (g_2^{-1})^\Phi]^{g_2} [g_1, g_2^\Phi g_3^\Phi] \\
&= [g_1, g_3^\Phi]^{-[g_1, g_2]} [g_1, g_2^\Phi]^{-1} [g_1, g_2^\Phi g_3^\Phi] = \\
&= [g_1, g_3^\Phi]^{-[g_1, g_2]} [g_1, g_2^\Phi]^{-1} [g_1, g_3^\Phi] [g_1, g_2^\Phi]^{g_3} \\
&= [g_1, g_3^\Phi]^{-[g_1, g_2]} [g_1, g_2^\Phi]^{-1} [g_1, g_3^\Phi] [g_1, g_2^\Phi]^{g_3} \\
\stackrel{\text{item 1.}}{=} & [g_1, g_3^\Phi]^{-[g_1, g_2^\Phi]} [g_1, g_2^\Phi]^{-1} [g_1, g_3^\Phi] [g_1, g_2^\Phi]^{g_3} \\
&= [g_1, g_2^\Phi]^{-1} [g_1, g_2^\Phi]^{g_3} \\
&= [g_1, g_2^\Phi, g_3].
\end{aligned}$$

Agora observe que:

$$\begin{aligned}
[g_1, g_2^\Phi, g_3^\Phi] &= [[g_1, g_2^\Phi], g_3^\Phi] \\
&= [g_1, g_2^\Phi]^{-1} [g_1, g_2^\Phi]^{g_3^\Phi} \\
\stackrel{\text{def. } \mathcal{V}(G)}{=} & [g_1, g_2^\Phi]^{-1} [g_1, g_2^\Phi]^{g_3} \\
&= [g_1, g_2^\Phi, g_3] \\
&= [g_1, g_2, g_3^\Phi].
\end{aligned}$$

3. Análogo ao item anterior.

4. Segue do item 2. que para quaisquer  $g, h \in G$ , vale

$$[g, g^\Phi, h] = [g, g, h^\Phi] = [1, h^\Phi] = 1.$$

No entanto, também pelo item 2., temos que

$$[g, g^\varphi, h^\varphi] = [g, g^\varphi, h] = 1.$$

Logo,  $[g, g^\varphi]$  comuta com  $h$  e  $h^\varphi$ , para todo  $h \in G$ , para qualquer  $h^\varphi \in G^\varphi$ , ou seja,  $[g, g^\varphi]$  é central em  $\mathcal{V}(G)$ .

5. Dados  $g_1, g_2 \in G$ , temos pelo item 3. que  $[g_1 g_2, (g_1 g_2)^\varphi]$  é central. Assim,

$$\begin{aligned} [g_1 g_2, (g_1 g_2)^\varphi] &= [g_1 g_2, g_1^\varphi g_2^\varphi] \\ &= [g_1, g_1^\varphi g_2^\varphi]^{g_2} [g_2, g_1^\varphi g_2^\varphi] \\ &= [[g_1, g_2^\varphi] [g_1, g_1^\varphi]^{g_2^\varphi}]^{g_2} [g_2, g_2^\varphi] [g_2, g_1^\varphi]^{g_2^\varphi} \\ &= [g_1, g_2^\varphi]^{g_2} [g_1, g_1^\varphi]^{(g_2^\varphi g_2)} [g_2, g_2^\varphi] [g_2, g_1^\varphi]^{g_2^\varphi} \\ &\stackrel{\text{item 4.}}{=} [g_1, g_2^\varphi]^{g_2} [g_1, g_1^\varphi] [g_2, g_2^\varphi] [g_2, g_1^\varphi]^{g_2^\varphi}. \end{aligned}$$

Logo,  $\underbrace{[g_1 g_2, (g_1 g_2)^\varphi] [g_1, g_1^\varphi]^{-1} [g_2, g_2^\varphi]^{-1}}_{\text{é central em } \mathcal{V}(G)} = [g_1, g_2^\varphi]^{g_2} [g_2, g_1^\varphi]^{g_2^\varphi}$ . Assim, conjugando

o lado esquerdo desta equação por  $g_2^{-\varphi}$ , obtemos

$$\begin{aligned} [g_1 g_2, (g_1 g_2)^\varphi] [g_1, g_1^\varphi]^{-1} [g_2, g_2^\varphi]^{-1} &= ([g_1 g_2, (g_1 g_2)^\varphi] [g_1, g_1^\varphi]^{-1} [g_2, g_2^\varphi]^{-1})^{g_2^{-\varphi}} \\ &= ([g_1, g_2^\varphi]^{g_2} [g_2, g_1^\varphi]^{g_2^\varphi})^{g_2^{-\varphi}} \\ &= ([g_1, g_2^\varphi]^{g_2^{-\varphi}})^{g_2} [g_2, g_1^\varphi] \\ &= ([g_1, g_2^\varphi]^{g_2^{-1}})^{g_2} [g_2, g_1^\varphi] \\ &= [g_1, g_2^\varphi] [g_2, g_1^\varphi]. \end{aligned}$$

6. Suponha que  $g \in G'$ . Assim,  $g = [x, y]$  para  $x, y \in G$ . Logo

$$\begin{aligned} [[x, y], [x, y]^\varphi] &= [[x, y], (x^{-1} x^y)^\varphi] \\ &= [x, y, (x^{-1} x^y)^\varphi] \\ &\stackrel{\text{item 2.}}{=} [x, y^\varphi, x^{-1} x^y] \\ &= [x, y^\varphi, x^{-1} x^y] \\ &= [x, y^\varphi]^{-1} [x, y^\varphi]^{[x, y]} \\ &\stackrel{\text{item 1.}}{=} [x, y^\varphi]^{-1} [x, y^\varphi]^{[x, y^\varphi]} \\ &= [x, y^\varphi]^{-1} [x, y^\varphi] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para o caso geral, suponha  $g = [x_1, y_1] \cdots [x_r, y_r]$ ,  $r \geq 1$ , e utilize novamente os itens

1. e 2.. O resultado segue por indução sobre  $r$ .

□

**Observação 3.3.** *Os itens 2. e 3. no Lema acima (3.2) são na verdade iguais. De fato, note que*

$$\begin{aligned}
 [g_1^\Phi, g_2, g_3] &= [[g_2, g_1^\Phi]^{-1}, g_3^\Phi] \\
 &= [g_2, g_1^\Phi, g_3]^{-[g_2, g_1^\Phi]^{-1}} \\
 &\stackrel{\text{item 1.}}{=} [g_2, g_1^\Phi, g_3]^{-[g_2, g_1]^{-1}} \\
 &= [g_2, g_1^\Phi, g_3]^{-[g_1, g_2]} \\
 &\stackrel{\text{item 2.}}{=} [g_2, g_1, g_3^\Phi]^{-[g_1, g_2]} \\
 &= [g_1, g_2, g_3^\Phi]^{[g_1, g_2]^{-1}[g_1, g_2]} \\
 &= [g_1, g_2, g_3^\Phi].
 \end{aligned}$$

**Lema 3.4.** *Sejam  $a, b, x$  elementos em  $G$  tais que  $[x, a] = 1 = [x, b]$ . Então*

$$[a, b, x^\Phi] = 1 = [[a, b]^\Phi, x].$$

**Demonstração.**

De fato temos:

$$\begin{aligned}
 [a, b, x^\Phi] &\stackrel{\text{Lema 3.2-2.}}{=} [a, b^\Phi, x] \\
 &= [a, b^\Phi]^{-1} [a, b^\Phi]^x \\
 &= [a, b^\Phi]^{-1} [a^x, (b^x)^\Phi] \\
 &= [a, b^\Phi]^{-1} [a, b^\Phi] \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Agora note que:

$$\begin{aligned}
 [[a, b]^\Phi, x] &= [a^\Phi, b^\Phi, x] \\
 &\stackrel{\text{Lema. 3.2-2.}}{=} [a, b, x^\Phi] \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

**Lema 3.5.** *Sejam  $x, y$  elementos de  $G$  tais que  $[x, y] = 1$ . Então*

1.  $[x^n, y^\varphi] = [x, y^\varphi]^n = [x, (y^\varphi)^n]$ , para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$ ;
2. Se  $x$  e  $y$  são elementos de torção de ordens  $|x|$  e  $|y|$ , então  $|[x, y^\varphi]|$  divide  $\text{mdc}(|x|, |y|)$ .

**Demonstração.**

1. Suponha  $n \geq 0$ . A demonstração se dará por indução sobre  $n$ . Se  $n = 0$  não há o que fazer. Suponha que  $[x^n, y^\varphi] = [x, y^\varphi]^n = [x, (y^\varphi)^n]$ , para algum  $n > 0$ . Assim

$$\begin{aligned}
 [x^{n+1}, y^\varphi] &= [x x^n, y^\varphi] &= [x, y^\varphi][x, y^\varphi, x^n][x^n, y^\varphi] \\
 &\stackrel{\text{Lema. 3.2-2.}}{=} [x, y^\varphi][x, y, (x^n)^\varphi][x^n, y^\varphi] \\
 &= [x, y^\varphi][[x, y], (x^n)^\varphi][x^n, y^\varphi] \\
 &= [x, y^\varphi][x^n, y^\varphi] \\
 &= [x, y^\varphi][x, y^\varphi]^n \\
 &= [x, y^\varphi]^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Falta mostrarmos que

$$[x^{n+1}, y^\varphi] = [x, (y^\varphi)^{n+1}].$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 [x, (y^\varphi)^{n+1}] &= [x, y^\varphi (y^\varphi)^n] &= [x, y^\varphi][x, (y^\varphi)^n][x, y^\varphi, (y^\varphi)^n] \\
 &\stackrel{\text{Lema. 3.2-2.}}{=} [x, y^\varphi][x, (y^\varphi)^n][x, y, ((y^\varphi)^n)^\varphi] \\
 &= [x, y^\varphi][x, (y^\varphi)^n] \\
 &= [x, y^\varphi]^{n+1} \\
 &= [x^{n+1}, y^\varphi].
 \end{aligned}$$

Para o caso em que  $n < 0$ , observe que

$$[x^{-1}, y^\varphi]^x = [(x^{-1})^x, (y^x)^\varphi] = [x^{-1}, (x^{-1}yx)^\varphi] \stackrel{[x,y]=1}{=} [x^{-1}, y^\varphi].$$

Assim,

$$[x, y^\varphi]^{-1} = [x^{-1}, y^\varphi]^x = [x^{-1}, y^\varphi].$$

Logo, se  $n < 0$  então  $-n > 0$  e vale

$$\begin{aligned}
 [x^n, y^\varphi] &= [(x^{-n})^{-1}, y^\varphi] &= [x^{-n}, y^\varphi]^{-1} \\
 &= ([x, y^\varphi]^{-n})^{-1} \\
 &= [x, y^\varphi]^n,
 \end{aligned}$$

como queríamos.

2. Lembremos que  $|[x, y^\varphi]|$  é o menor inteiro positivo  $k$  tal que  $[x, y^\varphi]^k = 1$ . Agora note que

$$[x, y^\varphi]^{|x|} = [x^{|x|}, y^\varphi] = 1,$$

ou seja,  $[x, y^\varphi]$  tem ordem finita. Consequentemente, se  $|x|$  não for a ordem de  $[x, y^\varphi]$  então  $k = |[x, y^\varphi]|$  divide  $|x|$ . Além disso como  $\varphi$  é um isomorfismo  $y$  e  $y^\varphi$  possuem a mesma ordem e, portanto

$$1 = [x, (y^\varphi)^{|y|}] = [x, y^\varphi]^{|y|}.$$

E pelo mesmo motivo acima, temos  $k = |y|$  ou  $k$  divide  $|y|$ . Assim, em qualquer caso obtemos que  $|[x, y^\varphi]|$  divide  $\text{mdc}(|x|, |y|)$ .  $\square$

**Observação 3.6.** Por simetria entre as relações definidoras de  $\mathcal{V}(G)$ , vemos que o isomorfismo  $\varphi$  se estende unicamente a um automorfismo  $\psi$  de  $\mathcal{V}(G)$  dado por

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{V}(G) &\longrightarrow \mathcal{V}(G) \\ g &\longmapsto g^\varphi \\ g^\varphi &\longmapsto g \\ [g_1, g_2] &\longmapsto [g_2, g_1]^{-1}, \end{aligned}$$

para quaisquer  $g, g_1, g_2 \in G$ .

Muito útil no decorrer deste trabalho será o grupo  $\Delta(G)$  definido como sendo o subgrupo de  $\mathcal{V}(G)$  gerado por todos os símbolos  $[g, g^\varphi]$  onde  $g \in G$ , isto é,

$$\Delta(G) = \langle [g, g^\varphi] \mid g \in G \rangle.$$

**Lema 3.7.**

$$\Delta(G) \leq \mathcal{V}(G)' \cap Z(\mathcal{V}(G)),$$

onde  $\mathcal{V}(G)' = [\mathcal{V}(G), \mathcal{V}(G)]$  e  $Z(\mathcal{V}(G))$  é o centro do grupo  $\mathcal{V}(G)$ .

**Demonstração.**

Pelo Lema 3.2 item 4., temos que  $\Delta(G) \leq Z(\mathcal{V}(G))$ , pois  $[g, g^\varphi]$  é central para todo  $g \in G$ . Além disso, se  $x \in \Delta(G)$  então  $x = [g_1, g_1^\varphi] \cdots [g_n, g_n^\varphi]$  onde  $g_1, \dots, g_n \in G$ . Vamos mostrar que  $x \in \mathcal{V}(G)'$ .

De fato, tal demonstração se dá por indução em  $n$ . Se  $n = 1$ , então  $x = [g_1, g_1^\varphi] \in \mathcal{V}(G)'$ , pois  $g_1, g_1^\varphi \in \mathcal{V}(G)$ . Suponha que  $[g_1, g_1^\varphi] \cdots [g_{n-1}, g_{n-1}^\varphi] \in \mathcal{V}(G)'$ , para quaisquer  $g_1, \dots, g_{n-1} \in G$ . Temos que

$$x = \underbrace{[g_1, g_1^\varphi] \cdots [g_{n-1}, g_{n-1}^\varphi]}_{\in \mathcal{V}(G)' \text{ por hip. de indução}} [g_n, g_n^\varphi] \in \mathcal{V}(G)',$$

como queríamos.  $\square$

Seja  $\Theta(G)$  o subgrupo de  $\mathcal{V}(G)$  gerado por todos os elementos  $g^{-1}g^\varphi$ , para todo  $g \in G$ . (Este subgrupo é usualmente denotado por  $[G, \varphi] := \langle [g, \varphi] | g \in G \rangle$ , onde  $[g, \varphi]$  denota  $g^{-1}g^\varphi$ ).

**Observação 3.8.** *Decorre do fato de  $[g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^\varphi] = [g_1, g_2^\varphi]^{g_3} = [g_1, g_2^\varphi]^{g_3^\varphi}$  que*

$$\begin{aligned} [g_1, g_2^\varphi]^{[g_3, \varphi]} &= [g_1, g_2^\varphi]^{g_3^{-1}g_3^\varphi} \\ &= [g_1^{g_3^{-1}}, (g_2^{g_3^{-1}})^\varphi]^{g_3^\varphi} \\ &= [g_1^{g_3^{-1}}, (g_2^{g_3^{-1}})^\varphi]^{g_3} \\ &= [g_1, g_2^\varphi]^{g_3^{-1}g_3} \\ &= [g_1, g_2^\varphi], \end{aligned}$$

para todo  $g_1, g_2$  e  $g_3 \in G$ .

**Proposição 3.9.** 1.  $\Theta(G) \triangleleft \mathcal{V}(G)$ ;

2.  $\mathcal{V}(G) = \Theta(G) \rtimes G$ , onde o símbolo  $\rtimes$  indica o produto semidireto entre os grupos em questão;

3. Existe um epimorfismo  $\rho: \mathcal{V}(G) \rightarrow G$  dado por  $g \mapsto g$  e  $g^\varphi \mapsto g$  para todo  $g \in G$ , tal que  $\text{Ker}(\rho) = \Theta(G)$ .

**Demonstração.**

1. Denotemos  $g^{-1}g^\varphi$  por  $[g, \varphi]$ . Então a identidade  $[hg, \varphi] = [h, \varphi]^g \cdot [g, \varphi]$  mostra que  $[h, \varphi]^g \in \Theta(G)$  para quaisquer  $g, h \in G$ . Analogamente,

$$\begin{aligned} [h, \varphi]^{g^\varphi} &= [h, \varphi]^{g(g^{-1}g^\varphi)} \\ &= ([h, \varphi]^g)^{g^{-1}g^\varphi} \\ &= ([h, \varphi]^g)^{[g, \varphi]} \\ &= ([hg, \varphi] \cdot [g, \varphi]^{-1})^{[g, \varphi]} \in \Theta(G), \text{ para todos } g, h \in G. \end{aligned}$$

Isto prova que  $\Theta(G) \triangleleft \mathcal{V}(G)$ .

**2.,3.** Podemos escrever  $g^\Phi = gg^{-1}g^\Phi = g[g, \Phi]$ . Assim, do item 1., temos que

$$\mathcal{V}(G) = [G, \Phi] \rtimes G = \Theta(G) \rtimes G.$$

Agora a aplicação  $g \mapsto g, g^\Phi \mapsto g$ , para todo  $g \in G$ , estende-se a um epimorfismo canônico  $\rho: \mathcal{V}(G) \rightarrow G$  (visto que as relações definidoras de  $\mathcal{V}(G)$  são as relações de comutadores sobre  $G$ ), cuja restrição à  $G$  é a aplicação identidade. Além disso,  $\Theta(G) \leq \text{Ker}(\rho)$  e  $\Theta(G) \cap G = \{1\}$ , donde segue que  $\Theta(G) = \text{Ker}(\rho)$ .

□

Considere o seguinte subgrupo de  $\mathcal{V}(G)$ , dado por

$$\Upsilon(G) = [G, G^\Phi].$$

Mostraremos mais adiante que o grupo  $\Upsilon(G)$  é isomorfo ao quadrado tensorial não-abeliano de  $G$ , daí sua importância.

**Lema 3.10.** 1.  $\Upsilon(G) \triangleleft \mathcal{V}(G)$ ;

2.  $\Theta(G)$  centraliza  $\Upsilon(G)$ , isto é,  $\Upsilon(G)$  comuta com todos os elementos de  $\Theta(G)$ .

**Demonstração.**

1. Seja  $u \in \Upsilon(G)$ . Então  $u = [g, h^\Phi]$ . Sejam  $g_1 \in G$  e  $g_2^\Phi \in G^\Phi$ . Temos

$$u^{g_1} = [g, h^\Phi]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^\Phi] \in \Upsilon(G).$$

Da mesma forma,

$$u^{g_2^\Phi} = [g, h^\Phi]^{g_2^\Phi} = [g^{g_2^\Phi}, (h^{g_2^\Phi})^\Phi] \in \Upsilon(G).$$

Logo,  $\Upsilon(G) \triangleleft \mathcal{V}(G)$ .

2. Seja  $u \in \Upsilon(G)$ . Então  $u = [g, h^\Phi]$  onde  $g, h \in G$ . Seja  $x \in \Theta(G)$ , digamos,  $x = [k, \Phi]$ .

Assim,

$$\begin{aligned} [u, x] &= [[g, h^\Phi], [k, \Phi]] &= & [[g, h^\Phi], k^{-1}k^\Phi] \\ & &= & [g, h^\Phi]^{-1} [g, h^\Phi]^{k^{-1}k^\Phi} \\ & \stackrel{\text{obs. 3.8}}{=} &= & [g, h^\Phi]^{-1} [g, h^\Phi] \\ & &= & 1. \end{aligned}$$

Para o caso geral, considere  $u = [g_1, h_1^\varphi] \cdots [g_n, h_n^\varphi]$  e  $x = [k_1, \varphi] \cdots [k_m, \varphi]$ . O resultado seguirá por indução em  $m$ . Se  $m = 1$ , então

$$\begin{aligned} [u, x] &= [[g_1, h_1^\varphi] \cdots [g_n, h_n^\varphi], [k_1, \varphi]] \\ &= ([g_1, h_1^\varphi] \cdots [g_n, h_n^\varphi])^{-1} ([g_1, h_1^\varphi] \cdots [g_n, h_n^\varphi])^{[k_1, \varphi]} \\ &\stackrel{\text{obs. 3.8}}{=} 1. \end{aligned}$$

Suponha então que para algum  $m > 1$  tenhamos  $[u, \bar{x}] = 1$ , onde  $u = [g_1, h_1^\varphi] \cdots [g_n, h_n^\varphi]$  e  $\bar{x} = [k_1, \varphi] \cdots [k_m, \varphi]$ . Seja  $x = [k_1, \varphi] \cdots [k_m, \varphi][k_{m+1}, \varphi]$ . Assim,

$$\begin{aligned} [u, x] &= [u, \bar{x}[k_{m+1}, \varphi]] \\ &= [u, [k_{m+1}, \varphi]] \cdot [u, \bar{x}]^{[k_{m+1}, \varphi]} \\ &\stackrel{\text{hip. de indução}}{=} [u, [k_{m+1}, \varphi]] \\ &\stackrel{\text{obs. 3.8}}{=} 1, \end{aligned}$$

como queríamos. □

**Lema 3.11.** *Dados  $g, h, k \in G$ , valem as seguintes identidades*

1.  $[h, g^\varphi] = [\varphi, g, h][h, g]$ ;
2.  $[\varphi, g, h, k^\varphi] = 1$ .

**Demonstração.**

1.

$$\begin{aligned} [h, g^\varphi] &= [h, g g^{-1} g^\varphi] \\ &= [h, g[g, \varphi]] \\ &= [h, [g, \varphi]][h, g]^{[g, \varphi]}. \end{aligned}$$

Agora, conjugando ambos os lados por  $[g, \varphi]^{-1}$ , e usando o fato de  $\Theta(G)$  centralizar  $\Upsilon(G)$ , obtemos

$$\begin{aligned} [h, g^\varphi] &= [h, g^\varphi]^{[g, \varphi]^{-1}} \\ &= [h, [g, \varphi]]^{[g, \varphi]^{-1}} [h, g] \\ &\stackrel{\text{obs. 3.8}}{=} [h, [\varphi, g]]^{-1} [h, g] \\ &= [\varphi, g, h][h, g]. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
[\varphi, g, h, k^\varphi] &= [[\varphi, g, h], k^\varphi] \\
&= [[h, g^\varphi][g, h], k^\varphi] \\
&= [[h, g^\varphi], k^\varphi]^{[g, h]} [[g, h], k^\varphi] \\
&= [h, g^\varphi, k^\varphi]^{[g, h]} [g, h, k^\varphi] \\
&\stackrel{\text{Lema 3.2-2.}}{=} [h, g, k^\varphi]^{[g, h]} [g, h, k^\varphi] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Para um grupo finito  $G$ , obteremos a finitude de  $\mathcal{V}(G)$  por meio da finitude de  $\chi(G)$ . Citamos os seguintes resultados obtidos por Sidki em [18].

**Proposição 3.12.** *Seja  $G$  um  $\pi$ -grupo finito (onde  $\pi$  é um conjunto de números primos), nilpotente finito ou solúvel de comprimento derivado finito. Então  $\chi(G)$  é também um  $\pi$ -grupo finito, nilpotente finito ou solúvel de comprimento derivado finito.*

Além da Proposição acima, Sidki [18] também mostrou que  $\chi(G)$  possui um subgrupo  $R(G) = [G, L(G), G^\varphi]$ , com  $L(G)$  sendo o subgrupo de  $\chi(G)$  gerado por todos  $g^{-1}g^\varphi$ , para todo  $g \in G$ , onde são válidas as seguintes relações

$[g_1, g_2^\varphi]^{g_3} = [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^\varphi] = [g_1, g_2^\varphi]^{g_3}$  em  $\frac{\chi(G)}{R(G)}$ , para quaisquer  $g_1, g_2, g_3 \in G$  (Lema 4.11 (iii) de [18]).

Além disso, Sidki [18] e Rocco [14], mostraram que se  $G$  for um grupo finito, a ordem de  $\chi(G)/R(G)$  é dada por  $|\chi(G)/R(G)| = |G|^2 |G'| |M(G)|$ , onde  $M(G)$  denota o multiplicador de Schur do grupo  $G$ .

Retornando ao grupo  $\mathcal{V}(G)$ , notamos que com a introdução das relações  $[g, g^\varphi] = 1$ , para todo  $g \in G$ , obtemos um epimorfismo

$$\begin{aligned}
\zeta: \mathcal{V}(G)/\Delta(G) &\longrightarrow \chi(G)/R(G) \\
g\Delta(G) &\longmapsto gR(G) \\
g^\varphi\Delta(G) &\longmapsto g^\varphi R(G),
\end{aligned}$$

para todo  $g \in G$  e para todo  $g^\varphi \in G^\varphi$ .

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \xi: \chi(G) &\longrightarrow \mathcal{V}(G)/\Delta(G) \\ g &\longmapsto g\Delta(G) \\ g^\varphi &\longmapsto g^\varphi\Delta(G), \end{aligned}$$

para todo  $g \in G$  é também um epimorfismo.

Mostraremos a seguir que  $\xi$  induz um homomorfismo inverso de  $\zeta$ , isto é,  $\zeta$  é um isomorfismo entre os grupos  $\mathcal{V}(G)/\Delta(G)$  e  $\chi(G)/R(G)$ . Antes, no entanto, precisamos dos seguintes resultados.

**Lema 3.13.** *Sejam  $g, h, u, k$  elementos quaisquer de um grupo  $G$ . Então*

1.  $[h, g^\varphi, [g, h]] = 1$ ;
2.  $[[\varphi, g, h], [g, h]] = 1$ ;
3.  $[\varphi, g, h, u, k^\varphi] = [\varphi, g, h, u^\varphi, k^\varphi]$ ;
4.  $[\varphi, g, h, u, k^\varphi] = 1$ .

**Demonstração.**

1. Suponha  $h$  e  $g$  diferentes do elemento identidade, então

$$\begin{aligned} [h, g^\varphi, [g, h]] &\stackrel{\text{Lema 3.2-2.}}{=} [h, g, [g, h]^\varphi] \\ &= [[g, h]^{-1}, [g, h]^\varphi] \\ &= [g, h]([g, h]^\varphi)^{-1}[g, h]^{-1}[g, h]^\varphi \\ &= [g, h]([g, h][g, h]^\varphi)^{-1}[g, h]^\varphi \\ &\stackrel{\text{Lema 3.2-4.}}{=} ([g, h][g, h]^\varphi)^{-1}[g, h][g, h]^\varphi \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. Pelo Lema 3.11, temos que  $[\varphi, g, h] = [h, g^\varphi][g, h]$ . Assim,

$$\begin{aligned} [[\varphi, g, h], [g, h]] &= [[h, g^\varphi][g, h], [g, h]] \\ &= [[h, g^\varphi][g, h]]^{[g, h]}[[g, h], [g, h]] \\ &= [[h, g^\varphi][g, h]]^{[g, h]} \\ &= [h, g^\varphi, [g, h]] \\ &\stackrel{\text{item 1.}}{=} 1. \end{aligned}$$

3. Lembremos que se  $x, y$  e  $z$  são elementos de um grupo  $G$ , então  $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$ .  
Então

$$\begin{aligned}
[\Phi, g, h, u, k^\Phi] &= \left[ [\Phi, g, h], u, k^\Phi \right] \\
&\stackrel{\text{Lema 3.11}}{=} \left[ [h, g^\Phi][g, h], u, k^\Phi \right] \\
&= [h, g^\Phi][g, h], u, k^\Phi \\
&= [h, g^\Phi, u]^{[g, h]} [g, h, u], k^\Phi \\
&\stackrel{\text{Lema 3.2 2.}}{=} \left[ [h, g^\Phi, u^\Phi]^{[g, h]} [g, h, u], k^\Phi \right] \\
&= \left[ [h, g^\Phi, u^\Phi]^{[g, h]}, k^\Phi \right]^{[g, h, u]} [g, h, u^\Phi, k^\Phi].
\end{aligned}$$

Note que  $[h, g^\Phi, u^\Phi] \in \Upsilon(G)$ , para todos  $h, g, u \in G$ , pois  $[h, g^\Phi, u^\Phi] = [h, g, u^\Phi] = [[h, g], u^\Phi]$ , e  $[h, g] \in G$ . Além disso, dado  $\gamma \in \Upsilon(G)$  então  $\gamma = [g, h^\Phi]$ , onde  $g, h \in G$ , e portanto, pelo Lema 3.2 item 1. temos,  $\gamma^{[x, y]} = \gamma^{[x, y^\Phi]}$ , para quaisquer  $x, y \in G$ . Lembremos ainda que  $\Upsilon(G) \triangleleft \mathcal{V}(G)$ . Assim, temos

$$\begin{aligned}
[\Phi, g, h, u, k^\Phi] &= \left[ [h, g^\Phi, u^\Phi]^{[g, h]}, k^\Phi \right]^{[g, h, u^\Phi]} [g, h, u^\Phi, k^\Phi] \\
&= \left[ [h, g^\Phi, u^\Phi]^{[g, h]} [g, h, u^\Phi], k^\Phi \right] \\
&= [h, g^\Phi][g, h], u^\Phi, k^\Phi \\
&= [\Phi, g, h, u^\Phi, k^\Phi].
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
[\Phi, g, h, u, k^\Phi] &\stackrel{\text{item 4.}}{=} [\Phi, g, h, u^\Phi, k^\Phi] \\
&= \left[ [\Phi, g, h, u^\Phi], k^\Phi \right] \\
&\stackrel{\text{Lema 3.11-2.}}{=} 1.
\end{aligned}$$

□

Como consequência, obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 3.14.** *Sejam  $g, h, k, u_1, v_1, \dots, v_n, u_n$ ,  $n \geq 1$ , elementos de um grupo  $G$ . Então*

$$[\Phi, g, h, u_1 v_1^\Phi \cdots u_n v_n^\Phi, k^\Phi] = 1.$$

**Demonstração.**

A demonstração se dará por indução sobre  $n$ .

Para  $n = 1$ , temos

$$\begin{aligned}
[\varphi, g, h, u_1 v_1^\varphi a, k^\varphi] &= [[\varphi, g, h, v_1^\varphi][\varphi, g, h, u_1]^{v_1^\varphi}, k^\varphi] \\
&\stackrel{\text{Lema 3.11-2.}}{=} [[\varphi, g, h, u_1]^{v_1^\varphi}, k^\varphi] \\
&= [[\varphi, g, h, u_1], (k^{v_1^{-1}})^\varphi]^{v_1^\varphi} \\
&\stackrel{\text{Lema 3.13-4.}}{=} 1.
\end{aligned}$$

Suponha, por indução, que a afirmação seja verdadeira para algum  $n \geq 1$ . Para simplificar a notação, denote  $u_1 v_1^\varphi \cdots u_n v_n^\varphi$  por  $x$  e  $\delta = [\varphi, g, h, x, u_{n+1}]$ . Então

$$\begin{aligned}
[\varphi, g, h, x. u_{n+1} v_{n+1}^\varphi, k^\varphi] &= [[\varphi, g, h, u_{n+1} v_{n+1}^\varphi][\varphi, g, h, x]^{u_{n+1} v_{n+1}^\varphi}, k^\varphi] \\
&= [[\varphi, g, h, x]^{u_{n+1} v_{n+1}^\varphi}, k^\varphi] \\
&= [[\varphi, g, h, x]^{u_{n+1}}, (k^{v_{n+1}^{-1}})^\varphi]^{v_{n+1}^\varphi} \\
&= [[\varphi, g, h, x] \delta, (k^{v_{n+1}^{-1}})^\varphi]^{v_{n+1}^\varphi} \\
&= \left( [\varphi, g, h, x, (k^{v_{n+1}^{-1}})^\varphi]^\delta \cdot [\delta, (k^{v_{n+1}^{-1}})^\varphi] \right)^{v_{n+1}^\varphi} \\
&= [\varphi, g, h, x, (k^{v_{n+1}^{-1}})^\varphi]^\delta \cdot [\delta, (k^{v_{n+1}^{-1}})^\varphi]^{v_{n+1}^\varphi} \\
&\stackrel{\text{Lema 3.13-4.}}{=} [\delta, (k^{v_{n+1}^{-1}})^\varphi]^{v_{n+1}^\varphi} \\
&\stackrel{\text{Lema 3.13-3.}}{=} [\varphi, g, h, x, u_{n+1}^\varphi, (k^{v_{n+1}^{-1}})^\varphi]^{v_{n+1}^\varphi} \\
&\stackrel{\text{Lema 3.13-4.}}{=} 1.
\end{aligned}$$

□

Apresentamos agora um Teorema, que será muito útil na demonstração da finitude do grupo  $\mathcal{V}(G)$ , no caso em que  $G$  é um grupo finito. Para maiores detalhes, consulte Rocco [16].

**Teorema 3.15.** *Seja  $G$  um grupo qualquer. Então*

1.  $[\Theta(G), G, G^\varphi] = 1$ ;
2.  $\chi(G)/R(G) \cong \mathcal{V}(G)/\Delta(G)$ .

**Demonstração.**

1. Lembremos primeiramente que  $\Theta(G) = \langle [\varphi, g] | g \in G \rangle$ . Assim, vemos que  $[\Theta(G), G]$  é o fecho normal de  $\langle [\varphi, g, h] | g, h \in G \rangle$ , isto é

$$\begin{aligned} [\Theta(G), G] &= \langle [\varphi, g, h] | g, h \in G \rangle^{\mathcal{V}(G)} \\ &= \langle [\varphi, g, h], [\varphi, g, h, u] | g, h \in G, u \in \langle G, G^\varphi \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$[\Theta(G), G, G^\varphi] = \langle [\varphi, g, h, k^\varphi], [\varphi, g, h, u, k^\varphi] | g, h, k \in G, u \in \langle G, G^\varphi \rangle \rangle,$$

e assim,  $[\Theta(G), G, G^\varphi] = 1$ , devido aos Lemas 3.11 item 2. e 3.13 item 4.

2. Antes de enunciarmos o Lema 3.13, apresentamos dois epimorfismos. Denotamos por  $\xi : \chi(G) \rightarrow \mathcal{V}(G)/\Delta(G)$  definido por  $g \mapsto g\Delta(G)$  e  $g^\varphi \mapsto g^\varphi\Delta(G)$ , para todo  $g \in G$  e  $\zeta : \mathcal{V}(G)/\Delta(G) \rightarrow \chi(G)/R(G)$  dado por  $g\Delta(G) \mapsto gR(G)$  e  $g^\varphi\Delta(G) \mapsto g^\varphi R(G)$ , para todo  $g \in G$ . Temos que  $\text{Ker}(\xi) \leq R(G) (= [G, L(G), G^\varphi])$ .

De fato, se  $u \in \text{Ker}(\xi)$  então  $u \in \chi(G)$  e  $u^\xi \in R(G)$ . Temos dois casos a analisar. O primeiro é o caso  $u = g \in G$  e, o segundo, é o caso  $u = g^\varphi \in G^\varphi$ . Para o primeiro caso, temos  $u^\xi = gR(G)$ , além disso, por hipótese,  $u^\xi \in R(G)$ , donde segue que  $u = g \in R(G)$ . O segundo caso é análogo. Logo, temos a inclusão desejada.

Por outro lado,  $\xi$  leva  $R(G)$  à  $[G, \Theta(G), G^\varphi](\text{mod } \Delta(G))$ , isto é, dado  $t \in R(G)$ , então  $t = [g_1, [\varphi, h_1, k_1]] \cdots [g_n, [\varphi, h_n, k_n]]$  e, portanto,  $t^\xi = \underbrace{[g_1, [\varphi, h_1, k_1]] \cdots [g_n, [\varphi, h_n, k_n]]}_{\text{é elemento do grupo } [G, \Theta(G), G^\varphi]} \Delta(G)$ , que é trivial pelo item 1.

Assim, temos  $R(G) \leq \text{Ker}(\xi)$ , donde segue a igualdade. Agora, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos  $\chi(G)/R(G) \cong \mathcal{V}(G)/\Delta(G)$ , como queríamos. Conseqüentemente,  $\xi$  induz sobre  $\chi(G)/R(G)$  uma aplicação inversa de  $\zeta$ , e com isto concluímos a afirmação feita antes do Lema 3.13.

□

**Observação 3.16.** Note que, ainda, sobre a introdução das relações  $[g, g^\varphi] = 1$ , para todo  $g \in G$ , obtemos um homomorfismo sobrejetor

$$\begin{aligned} \rho: \mathcal{V}(G) &\longrightarrow \frac{\chi(G)}{R(G)} \\ g &\longmapsto gR(G) \\ g^\varphi &\longmapsto g^\varphi R(G), \end{aligned}$$

para todo  $g \in G$ . Temos que  $\Delta(G) \subseteq \text{Ker}(\rho)$ , pois dado  $x \in \Delta(G)$ , digamos,  $x = [g, g^\varphi]$ , temos  $x^\rho = [g, g^\varphi]R(G) = R(G)$ .

Além disso, pelo Teorema anterior (3.15), sabemos que  $\frac{\mathcal{V}(G)}{\Delta(G)} \cong \frac{\chi(G)}{R(G)}$ . Disto podemos concluir que  $\Delta(G) = \text{Ker}(\rho)$ . Isto implica que  $\Delta(G)$  é uma imagem homomórfica do multiplicador de Schur de  $\chi(G)/R(G)$ .

Após todas estas apresentações feitas acima, podemos enunciar uma Proposição de grande importância neste trabalho. Antes apresentamos um Lema técnico, cuja serventia será a de garantir a finitude do grupo  $\Delta(G)$ .

**Lema 3.17** (Schur). *Seja  $G$  um grupo tal que  $G/Z(G)$  seja finito. Então,  $G'$  também é finito*

**Demonstração.**

Sejam  $g_1, \dots, g_n$  representantes das classes laterais de  $Z(G)$  em  $G$ ; isto é, cada  $x \in G$  é da forma  $x = g_i z$ , para algum  $i$  e algum  $z \in Z(G)$ . Para quaisquer  $x, y \in G$ ,  $[x, y] = [g_i z, g_j z'] = [g_i, g_j]$ . Consequentemente, todo comutador é da forma  $[g_i, g_j]$  para alguns  $i, j$ , tais que  $G'$  tenha um número finito ( $< n^2$ ) de geradores.

Cada elemento  $g' \in G'$  pode ser escrito como uma palavra  $c_1 \cdots c_t$  onde cada  $c_i$  é um comutador. Assim, é suficiente mostrarmos que esta fatoração de  $g'$  é escolhida de forma que  $t = t(g')$  é minimal, então  $t(g') < n^3$ , para quaisquer  $g' \in G'$ .

Provaremos primeiramente, por indução em  $r \geq 1$ , que se  $a, b \in G$ , então  $[a, b]^r = (aba^{-1}b^{-1})^r = (ab)^r(a^{-1}b^{-1})^r u$ , onde  $u$  é um produto de  $r - 1$  comutadores. Isto é óbvio quando  $r = 1$ . Para o passo de indução, note que se  $x, y \in G$ , então  $xy = yxx^{-1}y^{-1}xy = yx[x^{-1}, y^{-1}]$ , isto é,  $xy = yxc$ , para algum comutador  $c$ . Assim, se  $r > 1$ , então

$$\begin{aligned} (aba^{-1}b^{-1})^{r+1} &= aba^{-1}b^{-1}(aba^{-1}b^{-1})^r \\ &= ab[a^{-1}, b^{-1}]\{(ab)^r(a^{-1}b^{-1})^r\}u \\ &= ab\{(ab)^r(a^{-1}b^{-1})^r\}[a^{-1}, b^{-1}]cu, \end{aligned}$$

para algum comutador  $c$ , como desejado.

Uma vez que  $yx = x^{-1}(xy)x$ , temos que  $(yx)^n = x^{-1}(xy)^n x = (xy)^n$ , pois  $[G : Z(G)] = n$ , e isto implica que  $(ab)^n \in Z(G)$ . Consequentemente,  $(a^{-1}b^{-1})^n = ((ba)^{-1})^n = ((ba)^n)^{-1} = ((ab)^n)^{-1}$ . Disto, segue que

$$[a, b]^n \text{ é um produto de } n - 1 \text{ comutadores.} \quad (3-1)$$

Agora,  $xyx = (xyx^{-1})x^2$ , e assim os dois  $x$  pode ser agrupados à custa da substituição de  $y$  por um conjugado de  $y$ . Considere uma expressão de um elemento  $g' \in G'$  como um produto de comutadores  $c_1 \cdots c_t$ , onde  $t$  é minimal. Se  $t \geq n^3$ , então existe algum comutador  $c$  ocorrendo  $m$  vezes, onde  $m > n$  (visto que há menos do que  $n^2$  comutadores distintos). Pela observação feita acima, todos esses fatores podem ser reunidos como  $c^m$  mediante a substituição dos inversos dos comutadores por conjugados (que ainda são comutadores); isto é, o número de comutadores nesta expressão não é alterado. Por (3-1), o comprimento para a expressão minimal (como produto de comutadores) para  $g'$  é reduzido, e isto é uma contradição. Consequentemente,  $t < n^3$ , e assim,  $G'$  é finito, como queríamos. □

**Proposição 3.18.** *Seja  $G$  um  $\pi$ -grupo finito ( $\pi$  um conjunto de números primos), nilpotente finito ou, solúvel de comprimento derivado finito. Então  $\mathcal{V}(G)$  também é um  $\pi$ -grupo finito ( $\pi$  um conjunto de números primos), nilpotente finito ou, solúvel de comprimento derivado finito.*

**Demonstração.**

Primeiramente, mostraremos que se  $G$  for um grupo finito, então  $\mathcal{V}(G)$  também será.

Com efeito, sendo  $G$  um grupo finito, pela Proposição 3.12 temos que  $\chi(G)$  é um grupo finito, donde temos que  $\chi(G)/R(G)$  também é um grupo finito. Entretanto, pelo item 2. do Teorema 3.15 temos que  $\chi(G)/R(G) \cong \mathcal{V}(G)/\Delta(G)$ , donde temos que  $\mathcal{V}(G)/\Delta(G)$  é um grupo finito.

Lembremos agora que pelo Lema 3.7 temos  $\Delta(G) \subseteq Z(\mathcal{V}(G))$ . Assim,  $\frac{\mathcal{V}(G)}{Z(\mathcal{V}(G))}$  é uma imagem homomórfica de  $\frac{\mathcal{V}(G)}{\Delta(G)}$  e, portanto,  $\mathcal{V}(G)/Z(\mathcal{V}(G))$  é também um grupo finito. Pelo Lema de Schur (3.17), temos que  $\mathcal{V}(G)'$  é um grupo finito. Disto segue que  $\Delta(G)$  é finito, pois  $\Delta(G) \subseteq \mathcal{V}(G)'$ . Por fim, temos  $\mathcal{V}(G)$  finito, visto que  $\Delta(G)$  e

$\mathcal{V}(G)/\Delta(G)$  são ambos finitos.

Suponha agora  $G$  um  $\pi$ -grupo finito. Já sabemos que  $\mathcal{V}(G)$  é finito. Mostraremos então que  $\mathcal{V}(G)$  é também um  $\pi$ -grupo.

Se  $G$  é um  $\pi$ -grupo finito, então temos que  $M(G)$  é um  $\pi$ -grupo finito, isto é, o multiplicador de Schur preserva  $\pi$ -grupos, donde segue que  $M\left(\frac{\chi(G)}{R(G)}\right)$  é um  $\pi$ -grupo.

Além disso, temos que  $\frac{\mathcal{V}(G)}{\Delta(G)} \cong \frac{\chi(G)}{R(G)}$ , o que implica que  $\frac{\mathcal{V}(G)}{\Delta(G)}$  é um  $\pi$ -grupo. Sendo  $\Delta(G)$  imagem homomórfica de um  $\pi$ -grupo, temos que  $\Delta(G)$  é também um  $\pi$ -grupo, o que implica que  $\mathcal{V}(G)$  é também um  $\pi$ -grupo finito, pois  $\pi$ -grupos são fechados a extensões.

Se  $G$  é um grupo solúvel, então  $\frac{\mathcal{V}(G)}{\Delta(G)}$  também o é, visto que é isomorfo à  $\frac{\chi(G)}{R(G)}$ .

Além disso,  $\Delta(G)$  é um grupo abeliano, pois  $\Delta(G) \leq Z(\mathcal{V}(G))$ , o que faz dele um grupo nilpotente (em particular, solúvel). Como grupos solúveis são fechados à extensões, temos que  $\mathcal{V}(G)$  é solúvel.

Se  $G$  é um grupo nilpotente finito, pelos mesmos argumentos temos que  $\frac{\mathcal{V}(G)}{\Delta(G)}$  é nilpotente finito. Além disso,  $\Delta(G)$  é central, donde podemos concluir que  $\mathcal{V}(G)$  é também nilpotente finito. E isto conclui a Proposição.  $\square$

Seja  $N$  um grupo normal de  $G$ . Defina  $\bar{G} = \frac{G}{N}$  e denote por  $\pi$  o epimorfismo canônico de  $G$  em  $\bar{G}$ . Observe que  $\pi$  dá origem à um epimorfismo

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}: \mathcal{V}(G) &\longrightarrow \mathcal{V}(\bar{G}) \\ g &\longmapsto \bar{g} \\ g^\varphi &\longmapsto \bar{g}^\varphi, \end{aligned}$$

onde  $\bar{G}^\varphi = \frac{G^\varphi}{N^\varphi}$  é denotado por  $\bar{G}^\varphi$ .

**Proposição 3.19.** *Com a mesma notação acima, temos*

1.

$$[N, G^\varphi] \trianglelefteq \mathcal{V}(G),$$

$$[G, N^\varphi] \trianglelefteq \mathcal{V}(G);$$

2.

$$\text{Ker}(\tilde{\pi}) = \langle N, N^\varphi \rangle [N, G^\varphi] \cdot [G, N^\varphi].$$

**Demonstração.**1. Sejam  $x \in N$  e  $g, h \in G$  elementos quaisquer. Então

$$\begin{aligned} [x, g^\varphi]^h &= [x, g^\varphi][x, g^\varphi, h] \\ &\stackrel{\text{Lema 3.2-2.}}{=} [x, g^\varphi][x, g, h^\varphi]. \end{aligned}$$

Evidentemente  $[x, g^\varphi] \in [N, G^\varphi]$ . Além disso,  $N$  é um subgrupo normal de  $G$ , e portanto,  $[x, g] \in G$ , para todo  $g \in G$ . Logo,  $G$  normaliza  $[N, G^\varphi]$ .

Usando agora da definição do grupo  $\mathcal{V}(G)$ , temos que  $[x, g^\varphi]^{h^\varphi} = [x, g^\varphi]^h$  e, pelo mesmo motivo apresentado acima, temos que  $G^\varphi$  normaliza  $[N, G^\varphi]$ , donde temos  $[N, G^\varphi] \trianglelefteq \mathcal{V}(G)$ .

A demonstração de que  $[G, N^\varphi] \trianglelefteq \mathcal{V}(G)$  é análoga à feita acima e, portanto a omitiremos.

2. Seja  $M = \langle N, N^\varphi \rangle [N, G^\varphi] \cdot [G, N^\varphi]$ . Observe que  $N, N^\varphi \subseteq \text{Ker}(\tilde{\pi})$ . Assim,  $M \subseteq \text{Ker}(\tilde{\pi})$ . Além disso,  $M$  é um subgrupo normal de  $\mathcal{V}(G)$  e, portanto, podemos definir a função

$$\begin{aligned} \theta: \overline{G} \cup \overline{G}^\varphi &\longrightarrow \frac{\mathcal{V}(G)}{M} \\ \overline{g} &\longmapsto gM \\ \overline{g}^\varphi &\longmapsto g^\varphi M. \end{aligned}$$

Note que  $\theta$  está bem definida, uma vez que  $N, N^\varphi \subseteq M$ . Além disso, as restrições de  $\theta$  à  $\overline{G}$  e  $\overline{G}^\varphi$  são ambos homomorfismos. Consequentemente, existe um único homomorfismo  $\theta^*$  que estende  $\theta$  ao produto livre  $\overline{G} * \overline{G}^\varphi$ .

Podemos ver que as relações

$$[\overline{g}_1 \overline{g}_2, \overline{g}_3^\varphi] = [(\overline{g}_1^{\overline{g}_2}), (\overline{g}_1^{\overline{g}_2})^\varphi] [\overline{g}_2, \overline{g}_3^\varphi],$$

e

$$[\overline{g}_1, (\overline{g}_2 \overline{g}_3)^\varphi] = [\overline{g}_1, \overline{g}_3^\varphi] [(\overline{g}_1^{\overline{g}_3}), \overline{g}_2^\varphi]^\varphi,$$

são preservadas por  $\theta^*$ .

De fato, mostraremos que a primeira das relações é verdadeira. A demonstração da segunda é análoga e não será feita.

Observe que

$$\begin{aligned}
 [\bar{g}_1\bar{g}_2, \bar{g}_3^{\Phi}]^{\theta^*} &= [\bar{g}_1\bar{g}_2, \bar{g}_3^{\Phi}]^{\theta} \\
 &= [g_1Mg_2M, g_3^{\Phi}M] \\
 &= [g_1, g_2, g_3^{\Phi}]M \\
 &= ([g_1, g_3^{\Phi}]^{g_2} [g_2, g_3^{\Phi}]M) \\
 &= [g_1^{g_2}, (g_3^{\Phi})^{\Phi}] [g_2, g_3^{\Phi}]M \\
 &= [g_1^{g_2}, (g_3^{\Phi})^{\Phi}]M [g_2, g_3^{\Phi}]M \\
 &= [\bar{g}_1^{g_2}, (\bar{g}_3^{\Phi})^{\Phi}]^{\theta^*} [\bar{g}_2, \bar{g}_3^{\Phi}]^{\theta^*},
 \end{aligned}$$

como queríamos.

Observando que

$$\mathcal{V}(\bar{G}) = \left\langle \bar{G}, \bar{G}^{\Phi} \mid [x_1, x_2]^{\Phi} x_3 = [x_1, x_2^{\Phi}] x_3^{\Phi} = [x_1^{x_3}, (x_2^{x_3})^{\Phi}], \forall x_1, x_2, x_3 \in \bar{G} \right\rangle$$

, vemos que  $\theta$  induz um homomorfismo  $\tilde{\theta}: \mathcal{V}(\bar{G}) \rightarrow \frac{\mathcal{V}(G)}{M}$ , dado por  $x^{\tilde{\theta}} = x^{\theta}$ , para todo  $x \in \bar{G}$ .

Por outro lado, como  $M \leq \text{Ker}(\tilde{\pi})$ , temos um epimorfismo  $\bar{\pi}: \frac{\mathcal{V}(G)}{M} \rightarrow \mathcal{V}(\bar{G})$ , tal que  $gM^{\bar{\pi}} = \bar{g}$  e  $(g^{\Phi}M)^{\bar{\pi}} = \bar{g}^{\Phi}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ker}(\tilde{\pi}) & & \frac{\mathcal{V}(G)}{M} \\
 \uparrow & \searrow & \uparrow \\
 & \mathcal{V}(G) & \downarrow \pi \\
 & \uparrow & \downarrow \\
 M & \nearrow & \mathcal{V}(\bar{G}) \\
 & \tilde{\pi} & 
 \end{array}$$

Observe que dado  $g \in G$ , então

$$(\bar{g})^{\tilde{\pi}\tilde{\theta}} = (gM)^{\tilde{\theta}} = \bar{g},$$

e

$$(\bar{g}^\varphi)^{\tilde{\pi}\tilde{\theta}} = (g^\varphi M)^{\tilde{\theta}} = \bar{g}^\varphi.$$

Assim,  $\tilde{\theta}\tilde{\pi} = 1_{\mathcal{V}(G)}$ , e isto mostra que  $\tilde{\theta}$  é um isomorfismo. Sendo  $M \leq \text{Ker}(\tilde{\pi})$  e  $\frac{\mathcal{V}(G)}{M} \cong \mathcal{V}(\bar{G}) \cong \frac{\mathcal{V}(G)}{\text{Ker}(\tilde{\pi})}$ , podemos concluir que  $M = \text{Ker}(\tilde{\pi})$ , como queríamos.

□

Na introdução deste capítulo, apontamos que uma das motivações de se estudar o grupo  $\mathcal{V}(G)$ . Nela há um subgrupo  $\Upsilon(G) = [G, G^\varphi]$  que é isomorfo ao quadrado tensorial não-abeliano de um grupo  $G$ . Foram apresentadas algumas propriedades deste subgrupo ao longo deste capítulo, entre elas, podemos destacar o Lema 3.10, que garante que  $\Upsilon(G)$  é um subgrupo normal de  $\mathcal{V}(G)$ .

Considere a aplicação  $\tau$  abaixo, definida sobre os geradores de  $G \otimes G$

$$\begin{aligned} \tau: G \otimes G &\longrightarrow \Upsilon(G) \\ (g_1 \otimes g_2) &\longmapsto [g_1, g_2^\varphi]. \end{aligned}$$

Tal aplicação pode ser estendida à um epimorfismo de  $G \otimes G$  em  $\Upsilon(G)$ , uma vez que  $\tau$  preserva as relações definidoras de  $G \otimes G$ .

**Proposição 3.20.**  $\tau: G \otimes G \rightarrow \Upsilon(G)$ , dada por  $(g_1 \otimes g_2)^\tau = [g_1, g_2^\varphi]$  é um isomorfismo.

**Demonstração.**

Usando a Proposição 1.23 e, observando  $[G, G^\varphi]$  como subgrupo de  $G * G^\varphi$ , temos que  $[G, G^\varphi]$ , é livre, livremente gerado pelos comutadores  $[g_1, g_2^\varphi]$  onde  $g_1 \in G \setminus \{1\}$  e  $g_2^\varphi \in G^\varphi \setminus \{1\}$ .

Sendo um subgrupo normal de  $G * G^\varphi$ , vemos que  $[G, G^\varphi]$  admite as ações de  $G$  e  $G^\varphi$  por conjugação, donde seguem as seguintes identidades

$$(I) \begin{cases} [g_1, g_2^\varphi]^g = [g_1g, g_2^\varphi][g, g_2^\varphi]^{-1} \\ [g_1, g_2^\varphi]^{g^\varphi} = [g_1, g^\varphi]^{-1}[g_1, (g_2g)^\varphi] \end{cases},$$

para todos  $g, g_1, g_2 \in G$ .

Seja  $R = \{[g_1, g_2^\varphi]^{g_3} ([g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^\varphi])^{-1}, [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^\varphi] ([g_1, g_2^\varphi]^{g_3})^{-1}; g_1, g_2, g_3 \in G\}$ . Denote por  $N$  o fecho normal de  $R$ . Logo, podemos ver  $\mathcal{V}(G)$  como o quociente de  $G * G^\varphi$  por  $N$ , isto é,  $\mathcal{V}(G) = \frac{G * G^\varphi}{N}$ . Observe agora que temos um epimorfismo  $\bar{\alpha}$  entre o produto livre  $G * G^\varphi$  e  $\mathcal{V}(G)$  dado por

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}: G * G^\varphi &\longrightarrow \mathcal{V}(G) \\ g &\longmapsto g \\ g^\varphi &\longmapsto g^\varphi. \end{aligned}$$

Pelo Teste da Substituição,  $\bar{\alpha}$  induz um isomorfismo,  $\alpha$  entre os grupos  $\frac{G * G^\varphi}{N}$  e  $\mathcal{V}(G)$ , dado por

$$\begin{aligned} \alpha: \frac{G * G^\varphi}{N} &\longrightarrow \mathcal{V}(G) \\ gN &\longmapsto g \\ g^\varphi N &\longmapsto g^\varphi. \end{aligned}$$

O Teorema da correspondência, fornece o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \frac{G * G^\varphi}{N} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{V}(G) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \frac{N[G, G^\varphi]}{N} & \longrightarrow & \Upsilon(G) \\ \uparrow & & \uparrow \\ N & \longrightarrow & \{1\} \end{array}$$

Agora usando o fato de  $\frac{N[G, G^\varphi]}{N} = \frac{[G, G^\varphi]}{N}$ , obtemos um isomorfismo entre os grupos  $\frac{[G, G^\varphi]}{N}$  e  $\Upsilon(G)$  (a saber a restrição de  $\alpha$  à  $\frac{[G, G^\varphi]}{N}$ ). Seja  $\delta_1$  tal isomorfismo, isto é,  $\delta_1: \frac{[G, G^\varphi]}{N} \rightarrow \Upsilon(G)$  dado por  $([g, h^\varphi]N)^{\delta_1} = [g, h^\varphi]$ , para todos  $g, h \in G$ .

Podemos observar  $[G, G^\varphi]$  como um subgrupo do produto livre  $G * G^\varphi$ , o que faz do primeiro um grupo livre. Assim, sobre os geradores de  $[G, G^\varphi]$  podemos definir o

seguinte epimorfismo

$$\begin{aligned}\psi: [G, G^\varphi] &\longrightarrow G \otimes G \\ [g, h^\varphi] &\longmapsto g \otimes h.\end{aligned}$$

Como  $N^\psi = 1_{G \otimes G}$ , temos que  $\psi$  induz um epimorfismo  $\delta$  entre os grupos  $\frac{[G, G^\varphi]}{N}$  e  $G \otimes G$ , dado por  $([g, h^\varphi]N)^\delta = g \otimes h$ . Temos então o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \Upsilon(G) & \\ & \swarrow \delta_1^{-1} & \downarrow \mu = \delta \cdot \delta_1^{-1} \\ \frac{[G, G^\varphi]}{N} & & G \otimes G \\ & \searrow \delta & \end{array}$$

Logo,  $\mu = \delta_1^{-1} \cdot \delta$  é um epimorfismo entre  $\Upsilon(G)$  e  $G \otimes G$ .

Agora note que

$$\begin{aligned}(g \otimes h)^{\tau \cdot \mu} &= ([g, h^\varphi])\mu \\ &= ([g, h^\varphi])^{\delta_1^{-1} \cdot \delta} \\ &= ([g, h^\varphi]N)\delta \\ &= g \otimes h,\end{aligned}$$

isto é,  $\tau \cdot \mu = 1_{G \otimes G}$ .

Por fim, verifiquemos que  $\mu \cdot \tau = 1_{\Upsilon(G)}$ .

De fato,

$$\begin{aligned}[g, h^\varphi]^{\mu \cdot \tau} &= ([g, h^\varphi]N)^{\delta \cdot \tau} \\ &= (g \otimes h)^\tau \\ &= [g, h^\varphi],\end{aligned}$$

isto é,  $\mu \cdot \tau = 1_{\Upsilon(G)}$ , como queríamos, o que conclui a Proposição.  $\square$

**Observação 3.21.** Com um argumento similar ao utilizado na Proposição 3.19 item 2. podemos mostrar que se  $N$  é um subgrupo normal de  $G$  e  $\tilde{\pi}: \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathcal{V}\left(\frac{G}{N}\right)$  é o epimorfismo induzido pelo epimorfismo canônico entre  $G$  e  $\frac{G}{N}$ , então  $\text{Ker}(\tilde{\pi}) \cap \Upsilon(G) = [N, G^\Phi] \cdot [G, N^\Phi]$ .

Encerramos esta seção com a seguinte Proposição.

**Proposição 3.22.** *Sejam*

$$\begin{aligned} G &= G^{(0)} \triangleright G^{(1)} (= G') \triangleright \dots \triangleright G^j \triangleright \dots, \\ 1 &= \xi_0(G) \trianglelefteq \xi_1(G) \trianglelefteq \dots \trianglelefteq \xi_j(G) \trianglelefteq \dots, \\ &e \\ G &= \gamma_1(G) \triangleright \gamma_2(G) \triangleright \dots \triangleright \gamma_j(G) \triangleright \dots, \end{aligned}$$

respectivamente, a série derivada, a série central superior e a série central inferior de  $G$ . Então

1.  $[\xi_j(G), (G^{(j+1)})^\Phi] = 1$ , para todo  $j \geq 0$ ;
2.  $[\xi_{j+1}(G), \gamma_j(G^\Phi)] \cdot [\gamma_j(G), \xi_{j+1}(G^\Phi)]$  é central em  $\Upsilon(G)$ , para todo  $j \geq 1$ ;
3.  $[\xi_j(G), \gamma_j(G^\Phi)]$  é central em  $\mathcal{V}(G)$ , para todo  $j \geq 1$ .

**Demonstração.**

1. A demonstração se dará por indução em  $j$ .

Se  $j = 0$ , então  $[\xi_0(G), (G^{(1)})^\Phi] = [1, (G^{(1)})^\Phi] = 1$ .

Suponha  $j > 0$ . Note que  $G^{(j)} \leq \gamma_j(G)$ , para todo  $j \geq 1$  e, portanto,  $(G^{(j)})^\Phi \leq \gamma_j(G)^\Phi$ . Além disso,  $[\xi_j(G), \gamma_j(G)] = 1$ , para todo  $j \geq 1$ . Queremos mostrar que  $[\xi_j(G), (G^{(j+1)})^\Phi] = 1$ , para todo  $j \geq 0$ .

Mas observe que se  $x \in \xi_j(G)$  e  $a, b \in G^{(j)} \leq \gamma_j(G)$ , então

$$[x, a] = 1 = [x, b].$$

Assim, pelo Lema 3.4, temos que

$$[a, b, x^\Phi] = 1 = [[a, b]^\Phi, x],$$

onde  $[a, b]^\Phi \in (G^{(j+1)})^\Phi$  e  $x \in \xi_j(G)$ . Pela escolha arbitrária de  $a, b$  e  $x$ , o resultado segue.

2. Para  $i \geq 1$ , considere  $z \in \xi_{j+1}(G)$ ,  $g \in \gamma_i(G)$  e  $g_1, g_2 \in G$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} [[z, g^\Phi], [g_1, g_2^\Phi]] &= [z, g^\Phi]^{-1} [z, g^\Phi]^{[g_1, g_2^\Phi]} \\ &\stackrel{\text{Lema 3.2} - 1.}{=} [z, g^\Phi]^{-1} [z, g^\Phi]^{[g_1, g_2]} \\ &= [z, g^\Phi, [g_1, g_2]] \\ &\stackrel{\text{Lema 3.2} - 2.}{=} [z, g, [g_1, g_2]^\Phi] \\ &= [[z, g], [g_1, g_2]^\Phi]. \end{aligned}$$

Agora temos que  $[z, g] \in [\xi_{j+1}(G), \gamma_j(G)] \leq \xi_1(G) = Z(G)$ . Assim

$$\begin{aligned} [z, g, g_1] &= [[z, g], g_1] = 1 \\ &\text{e} \\ [z, g, g_2] &= [[z, g], g_2] = 1. \end{aligned}$$

Então, pelo Lema 3.4, temos

$$[g_1, g_2, [z, g]^\Phi] = 1 = [[g_1, g_2]^\Phi, [z, g]].$$

Logo,

$$[z, g, [g_1, g_2]^\Phi] = [[z, g], [g_1, g_2]^\Phi] = [[g_1, g_2]^\Phi, [z, g]] = 1,$$

isto é,  $[\xi_{j+1}(G), \gamma_j(G^\Phi)]$  é central em  $\Upsilon(G)$ .

De modo análogo, mostramos que  $\Upsilon(G)$  também centraliza  $[\gamma_j(G), \xi_{j+1}(G^\Phi)]$ , donde segue o resultado.

3. Lembrando que  $[\xi_j(G), \gamma_j(G)] = 1$ , para todo  $j \geq 1$ . Assim, dados  $z \in \xi_j(G)$ ,  $g \in \gamma_j(G)$  e  $g_1 \in \mathcal{V}(G)$ . Então

$$[z, g^\Phi, g_1] \stackrel{\text{Lema 3.2}}{=} [z, g, h^\Phi] = 1,$$

pois  $[z, g] = 1$ . Logo,

$$[\xi_j(G), \gamma_j(G^\Phi)],$$

é central em  $\mathcal{V}(G)$ , como queríamos.

□

## 3.2 Os Resultados Principais

Passemos agora a estudar os resultados principais do artigo de Rocco [15].

**Lema 3.23.** *Considere o diagrama comutativo de grupos (não necessariamente abelianos) em que as linhas são seqüências exatas:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & K & \hookrightarrow & U & \xrightarrow{\nu} & Q & \longrightarrow & 1 \\ & & \beta \downarrow & & \alpha \downarrow & & \downarrow 1_Q & & \\ 1 & \longrightarrow & L & \hookrightarrow & V & \xrightarrow{\mu} & Q & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Se  $\beta$  é um isomorfismo, então  $\alpha$  é um isomorfismo.

**Demonstração.**

Consulte o capítulo 10 de Rotman [17], página 342. □

**Lema 3.24.** *Sejam  $G$  um grupo e  $G^\Phi$  uma cópia de  $G$ . Com as notações estabelecidas anteriormente, podemos escrever*

$$\mathcal{V}(G) = (\Upsilon(G) \rtimes G) \rtimes G^\Phi,$$

onde o sinal  $\rtimes$  indica o produto semidireto entre os grupos.

**Demonstração.**

Podemos formar o produto semidireto  $[G, G^\Phi] \rtimes G$  usando a ação de  $G$  sobre  $[G, G^\Phi]$  dada por

$$[g_1, g_2^\Phi]^g = [g_1^g, (g_2^g)^\Phi].$$

Além disso, existe uma ação bem definida de  $G^\Phi$  em  $[G, G^\Phi] \rtimes G$ , dada por

$$([g, h^\Phi], g_1)^{k^\Phi} = ([g^k, (h^k)^\Phi], g_1),$$

com  $g, g_1, h, k \in G$ .

Com estas ações, podemos considerar o produto semidireto  $([G, G^\Phi] \rtimes G) \rtimes G^\Phi$ . Seja  $\psi: \mathcal{V}(G) \rightarrow ([G, G^\Phi] \rtimes G) \rtimes G^\Phi$  o homomorfismo definido por

$$g^\psi = (1, g, 1),$$

$$(g^\Phi)^\psi = (1, 1, g_2^\Phi).$$

Temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \Upsilon(G) & \hookrightarrow & \mathcal{V}(G) & \longrightarrow & G \times G^\Phi \longrightarrow 1 \\ & & \psi' \downarrow & & \psi \downarrow & & \downarrow 1_{G \times G^\Phi} \\ 1 & \longrightarrow & G \otimes G & \hookrightarrow & ((G \otimes G) \rtimes G) \rtimes G & \longrightarrow & G \times G^\Phi \longrightarrow 1, \end{array}$$

onde  $\psi' = \psi|_{\Upsilon(G)}$ , isto é,  $\psi'$  é a restrição de  $\psi$  à  $\Upsilon(G)$ . Ora, mas pelo Lema 3.20,  $\psi'$  é um isomorfismo e, assim pelo Lema 3.23 segue que  $\psi$  é um isomorfismo.  $\square$

Maiores detalhes sobre a demonstração do Lema anterior podem ser encontradas em Bueno [5].

**Corolário 3.25.** *Se  $G = \mathbb{Z}_n$ , então  $\mathcal{V}(G) \cong (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) \rtimes \mathbb{Z}_n$ . Em particular,  $|\mathcal{V}(G)| = |\mathbb{Z}_n|^3$ .*

**Demonstração.**

De fato, note que pelo Lema acima (3.24),  $\mathcal{V}(G) \cong (\Upsilon(G) \rtimes G) \rtimes G^\Phi$ . Observamos no exemplo 2.5 que para  $G = \mathbb{Z}_n$ , temos  $G \otimes G \cong G$ . Agora, também vimos que  $\Upsilon(G) \cong G \otimes G$ . Pelo Lema 3.24, temos que  $\mathcal{V}(G) \cong (\Upsilon(G) \rtimes G) \rtimes G^\Phi$ . Assim,

$$\mathcal{V}(G) \cong (\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_n) \rtimes \mathbb{Z}_n.$$

Agora, como  $\mathbb{Z}_n$  age trivialmente em si mesmo, temos que  $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ , donde segue que

$$\mathcal{V}(\mathbb{Z}_n) \cong (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) \rtimes \mathbb{Z}_n.$$

Por fim, note que  $|\mathcal{V}(G)| = |\Upsilon(G)| \cdot |G| \cdot |G^\Phi|$ . Ora, mas então, para  $G = \mathbb{Z}_n$ , temos que

$$|\mathcal{V}(G)| = |\mathbb{Z}_n| \cdot |\mathbb{Z}_n| \cdot |\mathbb{Z}_n| = |\mathbb{Z}_n|^3,$$

como queríamos.  $\square$

A descrição de  $\mathcal{V}(G)$  como o produto  $\mathcal{V}(G) = \Upsilon(G) \rtimes G \rtimes G^\Phi$ , juntamente com o fato de  $\Upsilon(G) \trianglelefteq \mathcal{V}(G)$ , nos proporciona uma elegante descrição da série central inferior e da série derivada de  $\mathcal{V}(G)$ , em função das séries central inferior e derivada do grupo  $G$ .

Antes de apresentarmos tais resultados precisamos de alguns Lemas técnicos, de modo a deixar mais clara e menos carregadas as demonstrações dos Teoremas que serão apresentados.

**Lema 3.26.** *Sejam  $G$  um grupo e  $\varphi$  um isomorfismo de  $G$  em  $G^\varphi$ . Então, se  $\gamma_i(G)$  e  $\gamma_i(G^\varphi)$  representam, respectivamente, os  $i$ -ésimos termos das séries centrais inferiores de  $G$  e de  $G^\varphi$  e  $G^{(i)}$  e  $(G^\varphi)^{(i)}$  representam, respectivamente, os  $i$ -ésimos termos das séries derivadas de  $G$  e de  $G^\varphi$  temos:*

1.  $\gamma_i(G)^\varphi = \gamma_i(G^\varphi)$ , para todo  $i \geq 1$ ;
2.  $(G^\varphi)^{(i)} = (G^{(i)})^\varphi$ , para todo  $i \geq 0$ .

**Demonstração.**

1. A demonstração se dará por indução em  $i$ .

Se  $i = 1$ , temos que  $\gamma_1(G)^\varphi = G^\varphi = \gamma_1(G^\varphi)$ . Suponha, agora que

$$\gamma_i(G)^\varphi = \gamma_i(G^\varphi).$$

Assim,

$$\gamma_{i+1}(G)^\varphi = [\gamma_i(G), G]^\varphi = [\gamma_i(G)^\varphi, G^\varphi] = [\gamma_i(G^\varphi), G^\varphi] = \gamma_{i+1}(G^\varphi).$$

2. A demonstração deste item também é feita por indução em  $i$ .

Se  $i = 0$ , então  $(G^\varphi)^{(0)} = G^\varphi = (G^{(0)})^\varphi$ . Suponha, então que

$$(G^\varphi)^{(i)} = (G^{(i)})^\varphi.$$

Assim,

$$(G^\varphi)^{(i+1)} = [(G^\varphi)^{(i)}, (G^\varphi)^{(i)}] = [(G^{(i)})^\varphi, (G^{(i)})^\varphi] = [G^{(i)}, G^{(i)}]^\varphi = (G^{(i+1)})^\varphi.$$

□

**Lema 3.27.** *Sejam  $G$  e  $G^\varphi$  grupos isomorfos. Denotaremos por  $\gamma_i(G)$  e  $\gamma_i(G^\varphi)$ , respectivamente, os  $i$ -ésimos termos das séries centrais inferiores de  $G$  e de  $G^\varphi$ . Sob estas condições, valem:*

1.  $[\gamma_{i-1}(G), G^\varphi, G] = [\gamma_i(G), G^\varphi]$ ;
2.  $[G, \gamma_{i-1}(G^\varphi), G] = [\gamma_i(G), G^\varphi]$ ,

para todo  $i \geq 2$ .

**Demonstração.**

1. Lembremos que, pelo item 2. do Lema 3.2, temos  $[g, h^\Phi, k] = [g, h, k^\Phi]$ , para quaisquer  $g, h$  e  $k \in G$ . Então

$$[\gamma_{i-1}(G), G^\Phi, G] = [\gamma_{i-1}(G), G, G^\Phi] \stackrel{\text{def.}}{=} [\gamma_i(G), G^\Phi].$$

2. Note que

$$\begin{aligned} [\gamma_i(G), G^\Phi] &\stackrel{\text{def.}}{=} [G, \gamma_{i-1}(G), G^\Phi] \\ &\stackrel{\text{Lema 3.2}}{=} [G, \gamma_{i-1}(G)^\Phi, G] \\ &\stackrel{\text{Lema 3.26 -1.}}{=} [G, \gamma_{i-1}(G^\Phi), G], \end{aligned}$$

como queríamos. □

**Observação 3.28.** Lembremos de dois fatos importantes que serão utilizados no Teorema abaixo: para  $G$  um grupo e  $H, K$ , e  $L$  subgrupos de  $G$ .

- Se  $H, K, L \trianglelefteq G$ , então  $[HK, L] = [H, L][K, L]$ ;
- Se  $H \trianglelefteq G$  então  $[H, K] \leq H$ .

**Teorema 3.29.** Para  $i \geq 2$ , o  $i$ -ésimo termo da série central inferior de  $\mathcal{V}(G)$  é dado por:

$$\gamma_i(\mathcal{V}(G)) = \gamma_i(G)\gamma_i(G^\Phi)[\gamma_{i-1}(G), G^\Phi][G, \gamma_{i-1}(G^\Phi)] \quad (3-2)$$

**Demonstração.**

A demonstração se dará por indução em  $i$ .

Para  $i = 2$ , temos

$$\begin{aligned} \gamma_2(\mathcal{V}(G)) &= [\mathcal{V}(G), \mathcal{V}(G)] \\ &= [\Upsilon(G) \rtimes G \rtimes G^\Phi, \Upsilon(G) \rtimes G \rtimes G^\Phi] \\ &\stackrel{\text{Obs. 3.28}}{=} [\Upsilon(G), \Upsilon(G) \rtimes G \rtimes G^\Phi][G, \Upsilon(G) \rtimes G \rtimes G^\Phi][G^\Phi, \Upsilon(G) \rtimes G \rtimes G^\Phi] \\ &= \vdots \\ &= [\Upsilon(G), \Upsilon(G)][\Upsilon(G), G][\Upsilon(G), G^\Phi][G, \Upsilon(G)][G, G][G, G^\Phi] \\ &\quad [G^\Phi, \Upsilon(G)][G^\Phi, G][G^\Phi, G^\Phi]. \end{aligned}$$

Agora utilizando da definição do grupo  $\mathcal{V}(G)$ , juntamente com o Lema 3.2, a Proposição 3.19 item 1. e a Observação 3.28, obtemos que

$$\gamma_2(\mathcal{V}(G)) \leq [G, G^\Phi][G, G][G^\Phi, G^\Phi] = \Upsilon(G)\gamma_2(G)\gamma_2(G^\Phi),$$

como queríamos. Isso mostra que  $\gamma_2(\mathcal{V}(G)) = \gamma_2(G)\gamma_2(G^\Phi)\Upsilon(G)$ .

Suponha, por indução sobre  $i \geq 2$  que o  $i$ -ésimo termo da série central inferior de  $\mathcal{V}(G)$  seja dado por:

$$\gamma_i(\mathcal{V}(G)) \leq \gamma_i(G)\gamma_i(G^\Phi)[\gamma_{i-1}(G), G^\Phi][G, \gamma_{i-1}(G^\Phi)].$$

Então pela Proposição 3.19 item 1., temos que

$$\begin{aligned} [\gamma_i(\mathcal{V}(G)), G] &\leq [\gamma_i(G)\gamma_i(G^\Phi)[\gamma_{i-1}(G), G^\Phi][G, \gamma_{i-1}(G^\Phi)], G] \\ &= [\gamma_i(G), G][\gamma_i(G^\Phi), G][[\gamma_{i-1}(G), G^\Phi], G][[G, \gamma_{i-1}(G^\Phi)], G] \\ &= [\gamma_i(G), G][\gamma_i(G^\Phi), G][\gamma_{i-1}(G), G^\Phi, G][G, \gamma_{i-1}(G^\Phi), G] \\ &\stackrel{\text{Lema 3.27}^{-1}}{=} \gamma_{i+1}(G)[\gamma_i(G^\Phi), G][\gamma_i(G), G^\Phi][\gamma_i(G), G^\Phi] \\ &= \gamma_{i+1}(G)[\gamma_i(G^\Phi), G][\gamma_i(G), G^\Phi]. \end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que

$$[\gamma_i(\mathcal{V}(G)), G^\Phi] \leq \gamma_{i+1}(G^\Phi)[\gamma_i(G^\Phi), G][\gamma_i(G), G^\Phi].$$

As duas inclusões acima, mostram assim que:

$$\gamma_{i+1}(\mathcal{V}(G)) = [\mathcal{V}(G), \gamma_i(\mathcal{V}(G))] = \gamma_{i+1}(G)\gamma_{i+1}(G^\Phi)[\gamma_i(G), G^\Phi][G, \gamma_i(G^\Phi)].$$

Assim, o Teorema está demonstrado, por indução sobre  $i$ . □

**Corolário 3.30.** *Seja  $G$  um grupo nilpotente de classe  $c$ . Então  $\mathcal{V}(G)$  é um grupo nilpotente de classe no máximo  $c + 1$ .*

**Demonstração.**

Basta na equação (3-2), substituir  $i$  por  $c + 1$  e teremos o resultado desejado, visto que, se

$G$  é um grupo nilpotente de classe  $c$ , então  $\gamma_{c+1}(G) = 1 = \gamma_{c+1}(G^\Phi)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \gamma_{(c+1)+1}(\mathcal{V}(G)) &= \gamma_{c+2}(\mathcal{V}(G)) \\ &\stackrel{\text{Teo. 3.29}}{=} \gamma_{c+2}(G)\gamma_{c+2}(G^\Phi)[\gamma_{c+2-1}(G), G^\Phi][G, \gamma_{c+2-1}(G^\Phi)] \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

**Lema 3.31.** 1.  $[G^{(i)}, [G^{(i-1)}, (G^\Phi)^{(i-1)}]] = [G^{(i)}, (G^\Phi)^{(i)}];$

2.  $[(G^\Phi)^{(i)}, [G^{(i-1)}, (G^\Phi)^{(i-1)}]] = [G^{(i)}, (G^\Phi)^{(i)}];$

3.  $[[G^{(i-1)}, (G^\Phi)^{(i-1)}], [G^{(i-1)}, (G^\Phi)^{(i-1)}]] = [G^{(i)}, (G^\Phi)^{(i)}].$

**Demonstração.**

1.

$$\begin{aligned} [G^{(i)}, [G^{(i-1)}, (G^\Phi)^{(i-1)}]] &= [G^{(i-1)}, (G^\Phi)^{(i-1)}, G^{(i)}] \\ &\stackrel{\text{Lema 3.26 -1.}}{=} [G^{(i-1)}, (G^{(i-1)})^\Phi, G^{(i)}] \\ &\stackrel{\text{Lema 3.2 -2.}}{=} [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}, (G^{(i)})^\Phi] \\ &= [G^{(i)}, (G^\Phi)^{(i)}]. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} [(G^\Phi)^{(i)}, [G^{(i-1)}, (G^\Phi)^{(i-1)}]] &= [G^{(i-1)}, (G^{(i-1)})^\Phi, (G^{(i)})^\Phi] \\ &\stackrel{\text{Lema 3.2 -2.}}{=} [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}, (G^{(i)})^\Phi] \\ &= [G^{(i)}, (G^\Phi)^{(i)}]. \end{aligned}$$

3. Seja  $x \in [[G^{(i-1)}, (G^\Phi)^{(i-1)}], [G^{(i-1)}, (G^\Phi)^{(i-1)}]]$ . Então,  $x = [a, b]$ , onde  $a, b \in [G^{(i-1)}, (G^\Phi)^{(i-1)}]$ . Assim, podemos supor  $a = [x_1, y_1^\Phi] \cdots [x_n, y_n^\Phi]$ , e  $b = [z_1, t_1^\Phi] \cdots [z_m, t_m^\Phi]$ , onde  $x_i, y_i, z_i$  e  $t_i$  são elementos de  $G^{(i-1)}$ , para todo  $i$ .

Observe inicialmente, que se  $n = 1 = m$ , temos que

$$\begin{aligned}
 x = [a, b] &= [[x_1, y_1^\Phi], [z_1, t_1^\Phi]] \\
 &= [x_1, y_1^\Phi]^{-1} [x_1, y_1^\Phi]^{[z_1, t_1^\Phi]} \\
 &\stackrel{\text{Lema 3.2} - 1.}{=} [x_1, y_1^\Phi]^{-1} [x_1, y_1^\Phi]^{[z_1, t_1]} \\
 &= [x_1, y_1^\Phi], [z_1, t_1] \\
 &= [x_1, y_1^\Phi], [z_1, t_1]^\Phi
 \end{aligned}$$

onde,  $x_1, y_1, z_1, t_1 \in G^{(i-1)}$ . Logo,  $x \in [G^{(i)}, (G^{(i)})^\Phi]$ .

O resultado geral será demonstrado por indução em  $m$ . Se  $m = 1$ , temos  $x = [a, b]$ , com  $a = [x_1, y_1^\Phi] \cdots [x_n, y_n^\Phi]$  e  $b = [z_1, t_1^\Phi]$ , onde  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, t_1 \in G^{(i)}$ . Assim, denotando  $[x_2, y_2] \cdots [x_n, y_n]$  por  $w$ ,  $[x_3, y_3] \cdots [x_n, y_n]$  por  $w_1$ ,  $[x_3, y_3^\Phi] \cdots [x_n, y_n^\Phi]$  por  $w_2$  e  $[x_n, y_n, [z_1, t_1]^\Phi]$  por  $\varepsilon$  temos:

$$\begin{aligned}
 x &= [[x_1, y_1^\Phi] [x_2, y_2^\Phi] \cdots [x_n, y_n^\Phi], [z_1, t_1^\Phi]] \\
 &= [[x_1, y_1^\Phi], [z_1, t_1^\Phi]^{[x_2, y_2^\Phi] \cdots [x_n, y_n^\Phi]}] [x_2, y_2^\Phi] \cdots [x_n, y_n^\Phi], [z_1, t_1^\Phi] \\
 &= [x_1, y_1, [z_1, t_1]^\Phi]^{[x_2, y_2^\Phi] \cdots [x_n, y_n^\Phi]} [x_2, y_2^\Phi] \cdots [x_n, y_n^\Phi], [z_1, t_1^\Phi] \\
 &= [x_1, y_1, [z_1, t_1]^\Phi]^{[x_2, y_2] \cdots [x_n, y_n]} [x_2, y_2^\Phi] \cdots [x_n, y_n^\Phi], [z_1, t_1^\Phi] \\
 &= [x_1^w, y_1^w, [z_1^w, t_1^w]^\Phi] [x_2, y_2^\Phi, [z_1, t_1^\Phi]^{w_2} \cdots [x_{n-1}, y_{n-1}^\Phi, [z_1, t_1^\Phi]^{[x_n, y_n^\Phi]}] [x_n, y_n^\Phi, [z_1, t_1^\Phi]] \\
 &= [x_1^w, y_1^w, [z_1^w, t_1^w]^\Phi] [x_2, y_2, [z_1, t_1]^\Phi]^{w_1} \cdots [x_{n-1}, y_{n-1}, [z_1, t_1]^\Phi]^{[x_n, y_n]} \varepsilon \\
 &= [x_1^w, y_1^w, [z_1^w, t_1^w]^\Phi] [x_2^{w_1}, y_2^{w_1}, [z_1^{w_1}, t_1^{w_1}]^\Phi] \cdots [x_{n-1}^{[x_n, y_n]}, y_{n-1}^{[x_n, y_n]}, [z_1^{[x_n, y_n]}, t_1^{[x_n, y_n]}]^\Phi] \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Logo, temos que  $x \in [G^{(i)}, (G^\Phi)^{(i)}]$ , visto que que na decomposição de  $x$  em produto de comutadores, cada uma das parcelas pertence à  $[G^{(i)}, (G^\Phi)^{(i)}]$ .

Suponha por indução que, para algum  $m > 1$  tenhamos

$$\begin{aligned}
 x &= [a, b] \\
 &= [[x_1, y_1^\Phi] \cdots [x_n, y_n^\Phi], [z_1, t_1^\Phi] \cdots [z_m, t_m^\Phi]] \in [G^{(i)}, (G^\Phi)^{(i)}].
 \end{aligned}$$

Denote  $[x_1, y_1^\Phi] \cdots [x_n, y_n^\Phi]$  por  $\kappa$  e denote  $[z_1, t_1^\Phi] \cdots [z_m, t_m^\Phi]$  por  $\eta$ .

Logo, se  $x = [a, b]$ , com  $a = [x_1, y_1^\Phi] \cdots [x_n, y_n^\Phi]$  e  $b = [z_1, t_1^\Phi] \cdots [z_m, t_m^\Phi] [z_{m+1}, t_{m+1}^\Phi]$ ,

temos

$$\begin{aligned}
x &= [\kappa, \eta \cdot [z_{m+1}, t_{m+1}^\Phi]] \\
&= [\kappa, [z_{m+1}, t_{m+1}^\Phi]] [\kappa, \eta]^{[z_{m+1}, t_{m+1}^\Phi]} \\
&= [\kappa, [z_{m+1}, t_{m+1}^\Phi]] [\kappa, \eta]^{[z_{m+1}, t_{m+1}]} \\
&= [\kappa, [z_{m+1}, t_{m+1}^\Phi]] [\kappa^{[z_{m+1}, t_{m+1}]}, \eta^{[z_{m+1}, t_{m+1}]}].
\end{aligned}$$

Logo,

$$[\kappa, [z_{m+1}, t_{m+1}^\Phi]] \in [G^{(i)}, (G^\Phi)^{(i)}]$$

e por hipótese de indução  $[\kappa, \eta] \in [G^{(i)}, (G^\Phi)^{(i)}]$ . Logo,  $[\kappa^{[z_{m+1}, t_{m+1}]}, \eta^{[z_{m+1}, t_{m+1}]}] \in [G^{(i)}, (G^\Phi)^{(i)}]$ , donde segue o resultado. □

**Teorema 3.32.** *Para  $i \geq 1$ , o  $i$ -ésimo termo da série derivada de  $\mathcal{V}(G)$  é dado por*

$$\mathcal{V}(G)^{(i)} = G^{(i)}(G^{(i)})^\Phi [G^{(i-1)}, (G^{(i-1)})^\Phi],$$

onde  $G^{(i)}$  denota o  $i$ -ésimo termo da série derivada do grupo  $G$ .

**Demonstração.**

A demonstração deste Teorema é inteiramente análoga ao Teorema 3.29, mas será demonstrado, pois possui um Corolário muito importante, que estabelece um limitante para o comprimento derivado do grupo  $\mathcal{V}(G)$  em termos do comprimento derivado do grupo  $G$ . Como de costume, a demonstração se dará por indução em  $i$ .

Se  $i = 1$ , observe que  $G^{(1)} = G' = \gamma_2(G)$ . Pelo Teorema 3.29, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(G)^{(1)} = \gamma_2(\mathcal{V}(G)) &\stackrel{\text{Teo. 3.29}}{=} \gamma_2(G)\gamma_2(G^\Phi)[\gamma_1(G), G^\Phi][G, \gamma_1(G^\Phi)] \\
&= G^{(1)}(G^\Phi)^{(1)}[G, G^\Phi][G, G^\Phi] \\
&= G^{(1)}(G^\Phi)^{(1)}[G, G^\Phi] \\
&= G^{(1)}(G^\Phi)^{(1)}[G^{(0)}, (G^\Phi)^{(0)}].
\end{aligned}$$

Suponha, por indução que exista  $i \geq 1$  tal que

$$\mathcal{V}(G)^{(i)} = G^{(i)}(G^{(i)})^\Phi [G^{(i-1)}, (G^{(i-1)})^\Phi].$$

Mostraremos então que tal resultado é válido para  $i + 1$ . De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(G)^{(i+1)} &= [\mathcal{V}(G)^{(i)}, \mathcal{V}(G)^{(i)}] \\
&= [G^{(i)}(G^{(i)})^\varphi [G^{(i-1)}, (G^{(i-1)})^\varphi], G^{(i)}(G^{(i)})^\varphi [G^{(i-1)}, (G^{(i-1)})^\varphi]] \\
&\stackrel{\text{Obs. 3.28}}{=} [G^{(i)}, G^{(i)}][G^{(i)}, (G^{(i)})^\varphi][G^{(i)}, [G^{(i-1)}, (G^{(i-1)})^\varphi]] \\
&\quad [(G^{(i)})^\varphi, G^{(i)}][(G^{(i)})^\varphi, (G^{(i)})^\varphi], [(G^{(i)})^\varphi, [G^{(i-1)}, (G^{(i-1)})^\varphi]] \\
&\quad [[G^{(i-1)}, (G^{(i-1)})^\varphi], G^{(i)}][[G^{(i-1)}, (G^{(i-1)})^\varphi], (G^{(i)})^\varphi] \\
&\quad [[G^{(i-1)}, (G^{(i-1)})^\varphi], [G^{(i-1)}, (G^{(i-1)})^\varphi]] \\
&\stackrel{\text{Lema 3.31}}{=} G^{(i+1)}(G^{(i+1)})^\varphi [G^{(i)}, (G^{(i)})^\varphi],
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Como consequência direta do Teorema acima, obtemos o seguinte resultado.

**Corolário 3.33.** *Seja  $G$  um grupo solúvel de comprimento derivado  $l$ . Então  $\mathcal{V}(G)$  é um grupo solúvel de comprimento derivado no máximo  $l + 1$ .*

**Observação 3.34.** *Com um argumento similar ao utilizado na Proposição 3.19 item 2., podemos mostrar que se  $N$  é um subgrupo normal de  $G$  e  $\tilde{\pi}: \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathcal{V}(\overline{G})$  é o epimorfismo induzido pelo epimorfismo canônico  $\pi: G \rightarrow \overline{G}$ , então  $\text{Ker}(\tilde{\pi}) \cap \Upsilon(G) = [N, G^\varphi] \cdot [G, N^\varphi]$ , onde  $\overline{G}$  denota o grupo quociente  $G/N$ .*

**Proposição 3.35.** *Seja  $G = N \rtimes H$  um produto semidireto de seus subgrupos  $N \trianglelefteq G$  e  $H \leq G$ . Então*

1.  $\mathcal{V}(G) = \langle N, N^\varphi \rangle [N, H^\varphi][H, N^\varphi] \cdot \langle H, H^\varphi \rangle$ ;
2.  $\mathcal{V}(H) \cong \langle H, H^\varphi \rangle$ .

**Demonstração.**

1. Pela Proposição 3.19 temos que  $[N, H^\varphi]$  e  $[H, N^\varphi]$  são ambos subgrupos normais de  $\mathcal{V}(G)$ . Além disso,  $\langle N, N^\varphi \rangle [N, H^\varphi][H, N^\varphi]$  é o núcleo de  $\tilde{\pi}: \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathcal{V}(G/N) (\cong \mathcal{V}(H))$ .

Agora reescrevendo

$$\mathcal{V}(G) = \mathcal{V}(NH) \stackrel{\text{Lema 3.24}}{=} [NH, (NH)^\varphi] \cdot NH \cdot (NH)^\varphi.$$

Mas pela Observação 3.28, temos que

$$[NH, N^\varphi H^\varphi] \leq [N, N^\varphi][N, H^\varphi][H, N^\varphi][H, H^\varphi],$$

donde temos que  $\mathcal{V}(G) \leq [N, N^\Phi][N, H^\Phi][H, N^\Phi][H, H^\Phi]$ . A outra inclusão é trivial, devido à definição de  $\mathcal{V}(G)$ .

2. Note que  $\langle H, H^\Phi \rangle^{\tilde{\pi}} = \mathcal{V}(G/N) \cong \mathcal{V}(H)$ . Por outro lado,  $\mathcal{V}(H)$  é levado (sobrejetivamente) em  $\langle H, H^\Phi \rangle$ . Consequentemente,  $\text{Ker}(\tilde{\pi}) \cap \langle H, H^\Phi \rangle = \{1\}$  e, portanto,  $\langle H, H^\Phi \rangle \cong \mathcal{V}(H)$ .

□

**Proposição 3.36.** *Seja  $G = N \times H$  o produto direto de seus subgrupos normais  $N$  e  $H$ . Então*

1.

$$\mathcal{V}(G) = \langle N, N^\Phi \rangle \cdot [N, H^\Phi] \cdot [H, N^\Phi] \cdot \langle H, H^\Phi \rangle;$$

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(N) &\cong \langle N, N^\Phi \rangle \\ \mathcal{V}(H) &\cong \langle H, H^\Phi \rangle; \end{aligned}$$

3.

$$\Upsilon(G) = \Upsilon(N) \times \Upsilon(H) \times [N, H^\Phi][H, N^\Phi].$$

**Demonstração.**

Os itens 1. e 2. são demonstrados de forma análoga ao feito na Proposição anterior. Faremos, portanto, apenas o item 3.

3. Como  $G = N \times H$  é um produto direto e  $N$  e  $H$  são subgrupos normais, então  $G = NH$  e  $N \cap H = \{1\}$ . Ora, mas então, dados  $n \in N$  e  $h \in H$ , temos que  $[n, h] \in N \cap H$ , pois  $N$  e  $H$  são subgrupos normais de  $G$ . Assim,  $[n, h] = 1$ , para todos  $n \in N$  e  $h \in H$ . Logo,  $[N, H] = 1$ .

Iremos mostrar agora que os subgrupos  $[N, H^\Phi]$ ,  $[N, N^\Phi]$ ,  $[H, N^\Phi]$  e  $[H, H^\Phi]$  são mutuamente centralizados em  $\Upsilon(G)$ , isto é, mostraremos que os subgrupos listados anteriormente comutam entre si.

Inicialmente, fixemos  $x \in [N, H^\Phi]$ , digamos,  $x = [n, h^\Phi]$ . Dado  $y \in \{[N, N^\Phi], [H, N^\Phi], [H, H^\Phi]\}$ , digamos  $y = [g_1, g_2^\Phi]$ , temos

$$\begin{aligned} [x, y] &= [n, h^\Phi, [g_1, g_2^\Phi]] \\ &= [n, h, [g_1, g_2]^\Phi] \\ &\stackrel{[n, h]=1}{=} 1. \end{aligned}$$

Logo,  $[N, H^\Phi]$  comuta com os grupos  $[N, N^\Phi], [H, N^\Phi], [H, H^\Phi]$  (na verdade, neste caso, é ainda mais, geral,  $[N, H^\Phi]$  comuta com  $[G, G^\Phi]$ ). Se  $x \in [H, N^\Phi]$ , com argumentos análogos, verificamos que  $[x, y] = 1$ , desde que  $y \in \{[N, N^\Phi], [N, H^\Phi], [H, H^\Phi]\}$ .

Falta então verificarmos que os grupos  $[N, N^\Phi]$  e  $[H, H^\Phi]$  comutam. De fato, se  $x = [h_1, h_2^\Phi]$ , e  $y = [n_1, n_2^\Phi]$ , com  $h_1, h_2 \in H$  e  $n_1, n_2 \in N$ , temos

$$\begin{aligned} [x, y] &= [h_1, h_2^\Phi, [n_1, n_2^\Phi]] \\ &= [h_1, h_2^\Phi]^{-1} [h_1, h_2^\Phi]^{[n_1, n_2^\Phi]} \\ &= [h_1, h_2^\Phi]^{-1} [h_1, h_2^\Phi]^{[n_1, n_2]} \\ &= [h_1, h_2^\Phi]^{-1} [h_1^{[n_1, n_2]}, (h_2^{[n_1, n_2]})^\Phi] \\ &\stackrel{[N, H]=1}{=} [h_1, h_2^\Phi]^{-1} [h_1, h_2^\Phi] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \Upsilon(G) = \Upsilon(N \times H) &= [N \times H, (N \times H)^\Phi] \\ &\stackrel{\text{Obs. 3.28 e Def. } \mathcal{V}(G)}{=} [N, N^\Phi] \times [H, H^\Phi] \times [N, H^\Phi][H, N^\Phi] \\ &\stackrel{\text{item 2.}}{\cong} \Upsilon(N) \times \Upsilon(H) \times [N, H^\Phi][H, N^\Phi]. \end{aligned}$$

Note que não escrevemos  $\Upsilon(G)$  como o produto direto dos grupos  $\Upsilon(N), \Upsilon(H), [N, H^\Phi]$  e  $[H, N^\Phi]$ , pois pode ocorrer de  $[N, H^\Phi] \cap [H, N^\Phi] \neq 1$ . Por exemplo, se  $N' \neq 1$ , então dados  $n_1, n_2 \in N$  e  $h \in H$ , temos

$$\begin{aligned} [n_1, n_2, h^\Phi] &\stackrel{\text{Obs. 3.3 e Lema 3.2}}{=} [n_1^\Phi, n_2^\Phi, h] \\ &= [[n_1, n_2]^\Phi, h], \end{aligned}$$

isto é,  $[n_1, n_2, h^\Phi] \in [N, H^\Phi]$  e  $[n_1, n_2, h^\Phi] \in [N^\Phi, H] = [H, N^\Phi]$ .

Logo,  $[N, H^\varphi] \cap [H, N^\varphi] \neq 1$ .

□

**Observação 3.37.** O resultado apresentado no item 3. acima é na verdade a Proposição 11 de [3], onde é demonstrado que

$$(G \times H) \otimes (G \times H) = (G \otimes G) \times (G \otimes H) \times (H \otimes G) \times (H \otimes H).$$

**Proposição 3.38.** Suponha que  $H$  e  $K$  são grupos que agem trivialmente um sobre o outro e por conjugação em si mesmos. Então o subgrupo  $[H, K^\varphi]$  de  $\mathcal{V}(H \times K)$  é isomorfo à  $H \otimes K$ , o qual é o produto tensorial usual, conforme a Observação 2.2.

**Demonstração.**

É análoga à demonstração da Proposição 3.20, apenas substituindo  $G$  por  $H$  e  $G^\varphi$  por  $K^\varphi$ .

□

**Observação 3.39.** No caso em que  $A$  e  $B$  são grupo abelianos, obtemos a já conhecida decomposição do produto tensorial usual, isto é,

$$(A \times B) \otimes_{\mathbb{Z}} (A \times B) \cong \Upsilon(A \times B) \cong (A \otimes_{\mathbb{Z}} A) \times (A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \times (B \otimes_{\mathbb{Z}} A) \times (B \otimes_{\mathbb{Z}} B).$$

**Definição 3.40.** Seja  $p$  um número primo e  $G$  um grupo finito de ordem  $ap^n$ , onde  $a$  é um  $p'$ -número (isto é, na decomposição de  $a$  em fatores primos, nenhum dos primos pode ser o primo  $p$ ), então um  $p$ -**complemento** (normal) de  $G$  é um subgrupo (normal) de ordem  $a$ .

**Corolário 3.41.** Seja  $G = P_1 \times \cdots \times P_n$  um grupo nilpotente finito, onde  $\{P_1, \dots, P_n\}$  é o conjunto dos  $p$ -subgrupos de Sylow (distintos) de  $G$ . Então,

1.  $\mathcal{V}(G) \cong \mathcal{V}(P_1) \times \cdots \times \mathcal{V}(P_n)$ ;
2.  $\Upsilon(G) \cong \Upsilon(P_1) \times \cdots \times \Upsilon(P_n)$ .

**Demonstração.**

Seja  $p$  um número primo qualquer, tal que  $p$  divida a ordem do grupo  $G$  e sejam  $P$  um  $p$ -subgrupo de Sylow de  $G$  e  $N$  um  $p$ -complemento normal em  $G$ . Assim, se  $x \in G$  e  $y \in N$ , então  $[x, y] = 1$ , pois  $N \cap P = 1$  e, portanto,  $[N, P] = 1$ . Assim, pelo Lema 3.5,

item 2. temos que sendo  $x$  e  $y$  elementos de torção (a saber,  $x^p = 1$  e  $y^{|N|} = 1$ ), então a ordem  $[x, y^\varphi]$  divide o máximo divisor comum entre as ordens de  $x$  e  $y$ .

Ora, mas a ordem de  $x$  é  $p$  e a ordem de  $y$  é  $|N|$  ou um divisor da ordem de  $|N|$ . Em qualquer caso  $\text{mdc}(|x|, |y|) = 1$  e, portanto,  $[x, y^\varphi]$  tem ordem 1, isto é,  $[x, y^\varphi] = 1$ , para todos  $x \in P$ ,  $y \in N$ . Logo,  $[N, P^\varphi] = [P, N^\varphi] = 1$ .

Além disso,  $G = P \times N$  e pela Proposição 3.36 temos que

$$\mathcal{V}(G) \stackrel{\text{item } -1}{=} \langle N, N^\varphi \rangle \cdot [N, P^\varphi] \cdot [P, N^\varphi] \cdot \langle P, P^\varphi \rangle$$

ou seja,

$$\mathcal{V}(G) \cong \mathcal{V}(N) \times \mathcal{V}(P).$$

Agora, pelo item 3. da mesma Proposição, temos que

$$\Upsilon(G) = \Upsilon(N) \times \Upsilon(P) \times [N, P^\varphi][P, N^\varphi] \cong \Upsilon(N) \times \Upsilon(P).$$

Os casos gerais seguem por indução em  $n \geq 2$ . De fato, temos:

1. Suponha que  $G = P_1 \times \cdots \times P_n$ . Se  $n = 2$ , então  $\mathcal{V}(G) \cong \mathcal{V}(P_1) \times \mathcal{V}(P_2)$ , pelas argumentações anteriores. Suponha agora que o resultado seja verdadeiro para algum  $n > 2$ . Seja  $G = \underbrace{P_1 \times \cdots \times P_n}_H \times P_{n+1}$ , onde  $P_i$  é um  $p_i$ -subgrupo de Sylow de  $G$  e  $P_i \neq P_j$  para  $i \neq j$ . Assim, por hipótese de indução,  $\mathcal{V}(H) \cong \mathcal{V}(P_1) \times \cdots \times \mathcal{V}(P_n)$ . Agora,  $H \cap P_{n+1} = 1$  e  $G = H \times P_{n+1}$ . Logo, pelo item 1. da Proposição 3.36 que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(G) &\cong \langle H, H^\varphi \rangle \cdot [H, P_{n+1}^\varphi] \cdot [P_{n+1}, H^\varphi] \cdot \langle P_{n+1}, P_{n+1}^\varphi \rangle \\ &\cong \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(P_{n+1}) \\ &\cong \mathcal{V}(P_1) \times \cdots \times \mathcal{V}(P_{n+1}), \end{aligned}$$

como queríamos.

2. Novamente supondo  $G = P_1 \times \cdots \times P_n$ , temos que se  $n = 2$ ,  $\Upsilon(G) \cong \Upsilon(P_1) \times \Upsilon(P_2)$ . Suponha que o resultado seja verdadeiro para algum  $n > 2$ . Seja  $G = \underbrace{P_1 \times \cdots \times P_n}_H \times P_{n+1}$ . Por hipótese de indução, temos que  $\Upsilon(H) \cong \Upsilon(P_1) \times \cdots \times \Upsilon(P_n)$ .

Agora,  $H \cap P_{n+1} = 1$  e  $G = H \times P_{n+1}$ . Logo, pelo item 3. da Proposição 3.36 que

$$\begin{aligned} \Upsilon(G) &\cong \Upsilon(H) \times \Upsilon(P_{n+1}) \times [H, P_{n+1}^\Phi][P_{n+1}, H^\Phi] \\ &\cong \Upsilon(H) \times \Upsilon(P_{n+1}) \\ &\cong \Upsilon(P_1) \times \cdots \times \Upsilon(P_{n+1}), \end{aligned}$$

o que conclui o colorário. □

A partir de agora restringiremos nosso estudo aos  $p$ -grupos finitos. Antes apresentamos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em Rotman [17].

**Proposição 3.42.** *Seja  $\Phi(G)$  o subgrupo de Frattini de um grupo finito  $G$ .*

1.  $\Phi(G)$  é nilpotente;
2. Se  $G$  é um  $p$ -grupo finito, então  $\Phi(G) = G'G^p$ , onde  $G^p = \langle g^p \mid g \in G \rangle$ ;
3. Se  $G$  é um  $p$ -grupo finito, então  $G/\Phi(G)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{Z}_p$ .

**Lema 3.43.** *Sejam  $G$  um  $p$ -grupo finito e  $c \in Z(G) \cap G'$  um elemento de ordem  $p$ . Se  $\Phi(G)$  denota o subgrupo de Frattini de  $G$ , então*

$$|\mathcal{V}(G)| \text{ divide } p^2 \left| \frac{G}{\Phi(G)} \right| \cdot \left| \mathcal{V} \left( \frac{G}{\langle c \rangle} \right) \right|.$$

**Demonstração.**

Pela Proposição 3.22 item 1. temos que  $[c, g^\Phi] = 1$  para todo  $g \in G'$ . Por outro lado, se  $x \in G$  e usando o fato de  $c \in Z(G)$  temos pelo Lema 3.5 item 1. que

$$[c, (x^p)^\Phi] = [c, x^\Phi]^p = [c^p, x^\Phi] = 1.$$

Assim  $[c, g^\Phi] = 1$ , para todo  $g \in G^p$  (como definido em 3.42). Segue-se que  $[c, \Phi(G)^\Phi] = 1$ , uma vez que  $\Phi(G) \stackrel{\text{Prop. 3.42}}{=} G'G^p$ .

Defina  $\lambda: G \rightarrow [c, G^\Phi]$  por  $g^\lambda = [c, g^\Phi]$ . Note que  $\lambda$  é um epimorfismo, uma vez que  $[c, G^\Phi]$  é central em  $\mathcal{V}(G)$  ( $[G, c^\Phi]$  também é central em  $\mathcal{V}(G)$ ). Além disso,  $\Phi(G) \leq \text{Ker}(\lambda)$ , pois dado  $u \in \Phi(G)$  temos que  $u = g_1(g^p)$ , onde  $g_1 \in G'$  e  $g \in G$ . Assim,  $[g_1(g^p)]^\lambda = [c, g_1g^p] = [c, g^p][c, g_1]^{g^p} = 1$ .

Seja  $\pi: G \longrightarrow \frac{G}{\langle c \rangle}$ , o epimorfismo canônico, dado por  $g \mapsto g \langle c \rangle$ . Tal epimorfismo dá origem a um outro epimorfismo, denotado por  $\tilde{\pi}$  definido como segue

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}: \mathcal{V}(G) &\longrightarrow \mathcal{V}\left(\frac{G}{\langle c \rangle}\right) \\ g &\longmapsto \bar{g} = g \langle c \rangle \\ g^\Phi &\longmapsto \bar{g}^\Phi = g^\Phi \langle c^\Phi \rangle. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.19, temos que  $\text{Ker}(\tilde{\pi}) = \langle c, c^\Phi \rangle [c, G^\Phi] \cdot [G, c^\Phi]$ . Além disso, pelo Lema 3.2 item 6., temos  $[c, c^\Phi] = 1$ , uma vez que  $c \in G'$ . Portanto, temos  $\langle c, c^\Phi \rangle = \langle c \rangle \langle c^\Phi \rangle$ , donde obtemos que o núcleo da aplicação  $\tilde{\pi}$  é

$$\text{Ker}(\tilde{\pi}) = \langle c \rangle \langle c^\Phi \rangle [c, G^\Phi][G, c^\Phi].$$

Seja  $\bar{a}$  um gerador de  $\frac{G}{\Phi(G)}$ . Se  $c$  é um comutador simples, digamos,  $c = [x, y]$ , então temos

$$\begin{aligned} [a, c^\Phi] &= [a, [x, y]^\Phi] \\ &= [[x, y]^\Phi, a]^{-1} \\ &= [x^\Phi, y^\Phi, a]^{-1} \\ &\stackrel{\text{Obs. 3.3}}{=} [x, y^\Phi, a]^{-1} \\ &= [a, [x, y^\Phi]]. \end{aligned}$$

De modo geral, se  $c$  for um produto de comutadores, digamos,  $c = [x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_r, y_r]$ , então por indução é possível mostrarmos que

$$[a, c^\Phi] = [a, [x_1, y_1]^\Phi \cdots [x_r, y_r]^\Phi]. \quad (3-3)$$

De fato, suponha que para algum  $r$  a equação (3-3) seja verdadeira, então

$$\begin{aligned} [a, ([x_1, y_1] \cdots [x_{r+1}, y_{r+1}])^\Phi] &= [a, ([x_1, y_1] \cdots [x_r, y_r])^\Phi [x_{r+1}, y_{r+1}]^\Phi] \\ &= [a, [x_{r+1}, y_{r+1}]^\Phi] [a, ([x_1, y_1] \cdots [x_r, y_r])^\Phi]^{[x_{r+1}, y_{r+1}]^\Phi} \\ &\stackrel{\text{Lema 3.2}^{-1}}{=} [a, [x_{r+1}, y_{r+1}]^\Phi] [a, ([x_1, y_1] \cdots [x_r, y_r])^\Phi]^{[x_{r+1}, y_{r+1}]^\Phi} \\ &\stackrel{\text{hip. de indução}}{=} [a, [x_{r+1}, y_{r+1}]^\Phi] \cdot [a, [x_1, y_1]^\Phi \cdots [x_r, y_r]^\Phi] \\ &= [a, [x_1, y_1]^\Phi \cdots [x_{r+1}, y_{r+1}]^\Phi]. \end{aligned}$$

Analogamente, verificamos que  $[c, a^\Phi] = [[x_1, y_1]^\Phi \cdots [x_r, y_r]^\Phi, a]$ . Uma vez que

$c \in Z(G) \cap G'$ , segue das identidades apresentadas anteriormente que em  $[c, G^\Phi][G, c^\Phi]$ , os elementos da forma  $[c, a^\Phi][a, c^\Phi]$  são todos triviais.

Por outro lado, se  $\frac{G}{\Phi(G)}$  é gerado por  $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_d\}$ , podemos demonstrar por indução sobre  $d$  que

$$\begin{aligned} [c, (a_1^{i_1} \cdots a_d^{i_d})^\Phi] &= [c, a_1^\Phi]^{i_1} \cdots [c, a_d^\Phi]^{i_d}, \\ [(a_1^{j_1} \cdots a_d^{j_d}), c^\Phi] &= [a_1, c^\Phi]^{j_1} \cdots [a_d, c^\Phi]^{j_d}. \end{aligned}$$

Para verificar tal fato, note que quando  $d = 1$  (em ambos os casos) temos exatamente o caso em que  $\frac{G}{\Phi(G)}$  possui um gerador. Para o caso geral, as contas são análogas às já feitas até o momento e, portanto não serão apresentadas. Isto significa que  $[c, G^\Phi][G, c^\Phi]$  é gerado por  $2d$  elementos

$$[a_1, c^\Phi], \dots, [a_d, c^\Phi], [c, a_1^\Phi], \dots, [c, a_d^\Phi].$$

Mas uma vez que  $[a_i, c^\Phi][c, a_i^\Phi] = 1$ , para todos  $i = 1, 2, \dots, d$ , isso resulta que  $[c, G^\Phi][G, c^\Phi] = [c, G^\Phi]$ , que é gerado por  $[c, a_1^\Phi], \dots, [c, a_d^\Phi]$ .

Assim, temos  $\text{Ker}(\tilde{\pi}) = \langle c \rangle \langle c^\Phi \rangle [c, G^\Phi][G, c^\Phi] = \langle c \rangle \langle c^\Phi \rangle [c, G^\Phi]$ , ou seja,

$$|\text{Ker}(\tilde{\pi})| = |\langle c \rangle| |\langle c^\Phi \rangle| |[c, G^\Phi]| = p^2 |[c, G^\Phi]|.$$

Além disso, sendo  $\lambda$  um epimorfismo, temos

$$[c, G^\Phi] \cong \frac{G}{\text{Ker}(\lambda)} \leq \frac{G}{\Phi(G)},$$

pois  $\Phi(G) \leq \text{Ker}(\lambda)$ . Portanto,  $|[c, G^\Phi]| \leq \left| \frac{G}{\Phi(G)} \right|$ , donde temos

$$|\text{Ker}(\tilde{\pi})| \leq p^2 \left| \frac{G}{\Phi(G)} \right|.$$

Por último,  $\tilde{\pi}$  é um epimorfismo entre  $\mathcal{V}(G)$  e  $\mathcal{V}\left(\frac{G}{\langle c \rangle}\right)$ .

Logo,  $\frac{\mathcal{V}(G)}{\text{Ker}(\tilde{\pi})} \cong \mathcal{V}\left(\frac{G}{\langle c \rangle}\right)$ . Assim,  $|\mathcal{V}(G)| = |\text{Ker}(\tilde{\pi})| \left| \mathcal{V}\left(\frac{G}{\langle c \rangle}\right) \right|$ , ou seja

$$|\mathcal{V}(G)| \leq p^2 \left| \frac{G}{\Phi(G)} \right| \left| \mathcal{V}\left(\frac{G}{\langle c \rangle}\right) \right|.$$

Pela Proposição 3.18, sendo  $G$  um  $p$ -grupo finito,  $\mathcal{V}(G)$  também o é, e ainda,

$\Phi(G)$  e  $\langle c \rangle$  também são  $p$ -grupos, o que faz de  $\left| \mathcal{V} \left( \frac{G}{\langle c \rangle} \right) \right|$  um  $p$ -grupo (pela mesma Proposição). Consequentemente  $\mathcal{V}(G)$  é um  $p$ -grupo de ordem menor do que ou igual à  $p^2 \left| \frac{G}{\Phi(G)} \right| \left| \mathcal{V} \left( \frac{G}{\langle c \rangle} \right) \right|$  (que é um  $p$ -número - isto é, é uma potência de  $p$ ), donde segue o resultado.  $\square$

**Proposição 3.44.** *Seja  $G$  um  $p$ -grupo finito de classe 2 (isto é, cuja classe de nilpotência seja 2). Então  $|\Upsilon(G)|$  divide*

$$\left| G' \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{G'} \right| \cdot \left| \Upsilon \left( \frac{G}{G'} \right) \right|.$$

**Demonstração.**

Denotemos  $\frac{G}{G'}$  por  $\bar{G}$ . Consideremos o epimorfismo  $\tilde{\pi}: \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathcal{V}(\bar{G})$  induzido pelo epimorfismo canônico  $\pi: G \rightarrow \bar{G}$ . Pela observação 3.21 temos  $\text{Ker}(\tilde{\pi}) \cap \Upsilon(G) = [G', G^\Phi][G, (G')^\Phi]$ . Além disso,  $\Upsilon(G)^{\tilde{\pi}} = \Upsilon(\bar{G})$ . Uma vez que  $G$  é de classe 2, temos  $\gamma_3(G) = 1 = [G, G']$ , isto é,  $G' \leq Z(G)$ . Agora pela Proposição 3.22 item 1., temos que  $[G', (G')^\Phi] \leq [Z(G), (G')^\Phi] = 1$ . Portanto, dado  $c \in G'$  e  $g = dh \in G$ , com  $h \in G'$  temos que

$$[c, (dh)^\Phi] = [c, h^\Phi][c, d^\Phi]^{h^\Phi} = [c, d^\Phi]^{h^\Phi} = [c^h, (d^h)^\Phi] = [c, d^\Phi].$$

Temos que  $[G', G^\Phi] \leq [Z(G), G^\Phi] = [\xi_1(G), \gamma_1(G^\Phi)]$ , e portanto, pela Proposição 3.22, segue que  $[G', G^\Phi]$  é central em  $G$ . Assim, temos que  $[G', G^\Phi]$  é uma imagem homomórfica de  $G' \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{G}$ , pela aplicação  $c \otimes \bar{d} \mapsto [c, d^\Phi]$ , onde  $c \in G'$  e  $\bar{d} = d^{\tilde{\pi}}$ . Portanto,  $|[G', G^\Phi]|$  divide  $|G' \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{G}|$ .

Suponha agora que  $G' = \langle c_1, \dots, c_m \rangle$  e  $\bar{G} = \frac{G}{G'} = \langle \bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n \rangle$ . Então  $[G', G^\Phi]$  é gerado pelo conjunto  $\{[c_i, d_j^\Phi]; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ . Analogamente,  $[G, (G')^\Phi]$  é gerado por  $\{[d_j, c_i^\Phi]; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ . Como  $c_i \in G' (= G' \cap Z(G))$  e  $d \in G$ , segue, como visto na demonstração do Lema anterior (3.43) que  $[c_i, d_j^\Phi][d_j, c_i^\Phi] = 1$ , para todos  $i$  e  $j$ . Isto por sua vez nos diz que  $[G', G^\Phi][G, (G')^\Phi] = [G', G^\Phi]$ , e portanto, temos que  $\text{Ker}(\tilde{\pi}) \cap \Upsilon(G) = [G', G^\Phi]$ . Logo,

$$|\text{Ker}(\tilde{\pi}) \cap \Upsilon(G)| = |[G', G^\Phi]|.$$

Agora, note que  $\frac{\Upsilon(G)}{\text{Ker}(\tilde{\pi}) \cap \Upsilon(G)} \cong \Upsilon(\bar{G})$ . Assim, temos que

$$|\Upsilon(G)| = |\text{Ker}(\tilde{\pi}) \cap \Upsilon(G)| \cdot |\Upsilon(\bar{G})| = |[G', G^\Phi]| \cdot |\Upsilon(\bar{G})|,$$

donde segue o resultado. □

**Observação 3.45.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  inteiros positivos. Sabemos que  $\min\{\alpha, \beta\} \leq \alpha \cdot \beta$ . No Corolário abaixo, usaremos o seguinte resultado: sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l$ , inteiros positivos, então*

$$\min\left\{\sum_{i=1}^k \alpha_i, \sum_{j=1}^l \beta_j\right\} \leq \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^l \beta_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \cdot \beta_j.$$

**Corolário 3.46.** *Seja  $G$  um  $p$ -grupo de classe menor do que ou igual à 2, com  $|G| = p^n$  e  $|G'| = p^m$ . Então  $|\Upsilon(G)|$  divide  $p^{n(n-m)}$ .*

**Demonstração.**

Para concluir este Corolário iremos mostrar que

$$\left|G' \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{G'}\right| \quad \text{divide} \quad p^{m(n-m)} \quad (3-4)$$

e

$$\left|\Upsilon\left(\frac{G}{G'}\right)\right| \quad \text{divide} \quad p^{(n-m)^2}. \quad (3-5)$$

De fato, como as duas demonstrações são análogas, faremos apenas a demonstração da equação (3-4).

Sendo  $G$  de classe menor do que ou igual à 2, temos que  $G' \subseteq Z(G)$ , ou seja,  $G'$  é abeliano. Além disso,  $G/G'$  é também abeliano. Assim, podemos supor que

$$G' \cong \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_k}}$$

e,

$$\frac{G}{G'} \cong \mathbb{Z}_{p^{\beta_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\beta_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{\beta_l}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} G' \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{G'} &\cong (\mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_{p^{\beta_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\beta_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{\beta_l}}) \\ &\stackrel{\text{Obs. 3.39}}{=} (\mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{\beta_1}}) \times (\mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{\beta_2}}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{\beta_l}}) \times \\ &\quad (\mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{\beta_1}}) \times (\mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{\beta_2}}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{\beta_l}}) \times \\ &\quad \quad \quad \times \cdots \times \\ &\quad (\mathbb{Z}_{p^{\alpha_k}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{\beta_1}}) \times (\mathbb{Z}_{p^{\alpha_k}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{\beta_2}}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{p^{\alpha_k}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{\beta_l}}). \end{aligned}$$

Assim, temos  $m = \sum_{i=1}^k \alpha_i$  e  $n - m = \sum_{j=1}^l \beta_j$ . Primeiramente, conforme a Observação 2.6 temos que cada parcela  $\mathbb{Z}_{p^{\alpha_i}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{\beta_j}}$  pode ser reescrita como  $\mathbb{Z}_{d_{i,j}}$  onde  $d_{i,j}$  denota o máximo divisor comum entre  $p^{\alpha_i}$  e  $p^{\beta_j}$ . Assim,  $\mathbb{Z}_{p^{\alpha_i}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{\beta_j}} \cong \mathbb{Z}_{p^{r_{i,j}}}$ , onde  $r_{i,j} = \min\{\alpha_i, \beta_j\}$ .

Portanto, temos

$$G' \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{G'} = \prod_{i,j} \mathbb{Z}_{p^{r_{i,j}}} \implies \left| G' \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{G'} \right| = p^{\sum_{i,j} r_{i,j}}.$$

Como  $r_{i,j} = \min\{\alpha_i, \beta_j\}$ , segue da Observação 3.45 que  $\sum_{i,j} r_{i,j} \leq \sum_i \alpha_i \cdot \sum_j \beta_j$ .

Consequentemente, obtemos que

$$\left| G' \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{G'} \right| \leq p^{\sum_i \alpha_i \cdot \sum_j \beta_j} = p^{m(n-m)},$$

isto é,  $\left| G' \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{G'} \right|$  divide  $p^{m(n-m)}$ , como queríamos.

Agora para verificarmos que  $\left| \Upsilon \left( \frac{G}{G'} \right) \right|$  divide  $p^{(n-m)^2}$  basta observarmos que  $\Upsilon \left( \frac{G}{G'} \right) = \left[ \frac{G}{G'}, \left( \frac{G}{G'} \right)^{\varphi} \right] \cong \frac{G}{G'} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{G'}$ , e, então procedermos como foi feito acima.

Para concluirmos o resultado, usamos a Proposição anterior (3.44) onde obtemos que  $|\Upsilon(G)|$  divide  $\left| G' \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{G'} \right| \cdot \left| \Upsilon \left( \frac{G}{G'} \right) \right| = p^{m(n-m)} \cdot p^{(n-m)^2} = p^{n(n-m)}$ , como queríamos.  $\square$

**Teorema 3.47.** *Seja  $G$  um  $p$ -grupo com  $|G| = p^n$  e  $|G'| = p^m$ . Então  $|\mathcal{V}(G)|$  divide  $p^{n^2+2n-nm}$ .*

**Demonstração.**

Pelo Lema 3.24, sabemos que  $\mathcal{V}(G) = (\Upsilon(G) \rtimes G) \rtimes G^{\varphi}$ . Assim,  $\Upsilon(G) \cap G = \{1\}$  e  $(\Upsilon(G) \rtimes G) \cap G^{\varphi} = 1$ . Logo,

$$\begin{aligned} |\mathcal{V}(G)| &= \frac{|\Upsilon(G) \rtimes G| \cdot |G^{\varphi}|}{|(\Upsilon(G) \rtimes G) \cap G^{\varphi}|} = |\Upsilon(G) \rtimes G| \cdot |G^{\varphi}| \\ &= \frac{|\Upsilon(G)| \cdot |G|}{|\Upsilon(G) \cap G|} \cdot |G^{\varphi}| \\ &= |\Upsilon(G)| \cdot |G| \cdot |G^{\varphi}| \\ &= |\Upsilon(G)| \cdot |G|^2. \end{aligned}$$

Portanto, tudo o que precisamos fazer é determinarmos  $|\Upsilon(G)|$ . Analisaremos então dois casos: o primeiro, trata dos grupos nilpotentes de classe menor do que ou igual a 2. O segundo, abrange as demais classes de nilpotência para  $G$ .

Seja  $G$  nilpotente de classe menor do que ou igual a 2. Então, utilizando o Corolário 3.46, vemos que  $|\Upsilon(G)|$  divide  $p^{n(n-m)}$ . Logo,  $|\mathcal{V}(G)| = |\Upsilon(G)| \cdot |G|^2$  divide  $p^{n(n-m)} \cdot p^{2n} = p^{n^2+2n-nm}$ , como queríamos.

Suponha agora, que  $G$  é um grupo nilpotente de classe maior do que ou igual à 3. Seja  $c \in \gamma_3(G) \cap Z(G)$  um elemento de ordem  $p$ .

Nossos argumentos se darão por indução sobre  $|G| = p^n$ .

O resultado é trivial para  $n = 1$ , isto é, se  $|G| = p$ , então  $G$  é abeliano e, portanto nilpotente de classe 1.

Suponha que o resultado seja válido para  $n - 1$ , isto é, se  $|G| = p^{n-1}$  e  $|G'| = p^m$  então  $|\Upsilon(G)|$  divide  $p^{(n-1)(n-1+m)}$ .

Uma vez que

$$\left| \frac{G}{\langle c \rangle} \right| = p^{n-1} \quad \text{e} \quad \left| \left( \frac{G}{\langle c \rangle} \right)' \right| = p^{m-1},$$

temos, por hipótese de indução que,  $|\mathcal{V}\left(\frac{G}{\langle c \rangle}\right)|$  divide  $p^{(n-1)^2+2(n-1)-(m-1)(n-1)} = p^{(n-1)(n-m)}$ .

Sendo,  $\Upsilon\left(\frac{G}{\langle c \rangle}\right)$  um subgrupo de  $\mathcal{V}\left(\frac{G}{\langle c \rangle}\right)$ , segue que

$$\left| \Upsilon\left(\frac{G}{\langle c \rangle}\right) \right| \quad \text{divide} \quad p^{(n-1)(n-m)}.$$

Por outro lado,  $\left| \frac{G}{\Phi(G)} \right|$  divide  $\left| \frac{G}{G'} \right| = p^{n-m}$ . Agora, pelos mesmos argumentos utilizados na demonstração da Proposição 3.44, vemos que  $|[c, G^\Phi]|$  divide  $\left| \frac{G}{\Phi(G)} \right|$  e, por fim que

$$|\Upsilon(G)| = \left| \Upsilon\left(\frac{G}{\langle c \rangle}\right) \right| \cdot |[c, G^\Phi],$$

isto é,  $|\Upsilon(G)|$  divide  $\left| \Upsilon\left(\frac{G}{\langle c \rangle}\right) \right| \cdot p^{n-m} = p^{(n-1)(n-m)} p^{n-m} = p^{n(n-m)}$ .

Da expressão,  $|\mathcal{V}(G)| = |\Upsilon(G)| \cdot |G|^2$ , obtemos que  $|\mathcal{V}(G)|$  divide  $p^{n(n-m)} p^{2n} = p^{n^2+2n-mn}$ , como queríamos.  $\square$

**Observação 3.48.** Lembremos que dado  $p$ , primo, um  $p$ -grupo abeliano elementar é um grupo finito  $G$  isomorfo à  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$ . Além disso, como pode ser observado no Capítulo 2 de Rotman [17], temos que todo grupo abeliano  $G$  de expoente primo  $p$  é abeliano elementar e, ainda, que  $G$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{Z}_p$ .

**Corolário 3.49.** Sejam  $|G| = p^n$ ,  $|G'| = p^m$  e  $d = d(G)$  o número mínimo de geradores de  $G$ . Então

$$p^{d^2} \leq |G \otimes G| \leq p^{n(n-m)}.$$

**Demonstração.**

Considere  $N = \Phi(G)$  na Proposição 3.19 e

$$\tilde{\pi}: \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathcal{V}\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right).$$

Pela Observação 3.21, temos que

$$\text{Ker}(\tilde{\pi}) \cap \Upsilon(G) = [\Phi(G), G^\varphi][G, \Phi(G)^\varphi],$$

mas a restrição de  $\tilde{\pi}$  a  $\Upsilon(G)$  nos dá

$$|\Upsilon(G)| \geq \left| \Upsilon\left(\frac{G}{\Phi(G)}\right) \right| = \left| \left[ \frac{G}{\Phi(G)}, \left(\frac{G}{\Phi(G)}\right)^\varphi \right] \right|.$$

Mas, pela Proposição 3.42,  $\frac{G}{\Phi(G)}$  é abeliano elementar de ordem  $p^d$  e

$$\left[ \frac{G}{\Phi(G)}, \left(\frac{G}{\Phi(G)}\right)^\varphi \right],$$

é precisamente o produto tensorial usual

$$\frac{G}{\Phi(G)} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{\Phi(G)}.$$

Como  $\frac{G}{\Phi(G)}$  é abeliano elementar de ordem  $p^d$ , obtemos que,

$$\frac{G}{\Phi(G)} \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p = \prod_{i=1}^d \mathbb{Z}_p,$$

donde segue que:

$$\begin{aligned} \frac{G}{\Phi(G)} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{\Phi(G)} &\cong \prod_{i=1}^d \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \prod_{j=1}^d \mathbb{Z}_p \\ &\stackrel{\text{Obs. 3.39}}{\cong} (\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p) \\ &\stackrel{\text{Obs. 2.6}}{\cong} \prod_{i,j=1}^d \mathbb{Z}_p \\ &= \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p}_{d^2 \text{ vezes}}. \end{aligned}$$

Logo,  $\frac{G}{\Phi(G)} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{\Phi(G)}$  possui ordem  $p^{d^2}$ .

Por outro lado, o Teorema 3.47 nos dá a seguinte cota superior

$$|\Upsilon(G)| = \frac{|\mathcal{V}(G)|}{|G|^2} \leq \frac{p^{n^2+2n-nm}}{p^{2n}} = p^{n^2-nm} = p^{n(n-m)}.$$

Assim, temos

$$p^{d^2} \leq |\Upsilon(G)| \leq p^{n(n-m)},$$

e como  $G \otimes G \cong \Upsilon(G)$ , o resultado segue. □

## O sistema GAP e alguns exemplos envolvendo o grupo $\mathcal{V}(G)$

---

Este Capítulo baseia-se no Tutorial do GAP (“GAP - A Tutorial”) [20] e no Manual de Referência do GAP (“GAP - Reference Manual”) [19]. Nele apresentaremos alguns dos algoritmos utilizados na verificação dos resultados apresentados no Capítulo 3 para o grupo  $\mathcal{V}(G)$ , para alguns grupos em particular.

### 4.1 O Sistema GAP

O GAP (Groups, Algorithms and Programming) começou como um sistema computacional para lidar com grupos, mas tem sido estendido em várias outras direções. Basta olhar para o índice do manual e para o grande número de pacotes (share-packages) que têm surgido, para percebermos isso.

O GAP tem sido utilizado na realização de muitos trabalhos de investigação como o atesta a grande quantidade de citações em artigos científicos (ver <http://www.gap-system.org/Doc/Bib/bib.html>).

Tem também sido usado no ensino, especialmente para tratar da Teoria de Grupos. Além disso, o GAP é um pacote de software livre, aberto e extensível para o cálculo na álgebra abstrata discreta. Os termos livres e abertos descrevem as condições sob as quais o sistema é distribuído - em suma, é gratuito. O sistema é “extensível”, no sentido que podemos escrever nossos próprios programas na linguagem GAP e utilizá-los do mesmo modo como os programas que fazem parte do sistema a “biblioteca” (the “library”).

O desenvolvimento do GAP começou no Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH-Aachen - RFA, sob a liderança do professor Joaquim Neubüser em 1985. A versão 2.4 foi

lançada em 1988 e a versão 3.1 em 1992. Em 1997, a coordenação do desenvolvimento GAP foi transferida para St. Andrews. Um redesenho completo interno e a quase reescrita completa do sistema foi concluída nos anos seguintes, e a versão 4.1 foi lançada em julho de 1999. Por fim, um sinal de uma maior internacionalização do projeto é a versão 4.4 (a mais recente até o momento), que foi coordenada pela Colorado State University, Fort Collins.

Mais informações sobre a motivação e desenvolvimento do GAP podem ser encontradas em <http://www.gap-system.org>, numa seção intitulada “Release history and Prefaces” (algo como, “Histórico de lançamentos e prefácio”).

A seguir apresentamos alguns dos algoritmos, das rotinas e das funções que foram utilizadas para a elaboração de nossos exemplos. Antes observamos que o GAP, também pode funcionar como uma calculadora, efetuando as operações elementares como soma, subtração e multiplicação de números, entre outros, entretanto este não é o objetivo de nosso estudo. Assim nos concentramos apenas nos resultados envolvidos em nosso estudo, referente à Teoria de Grupos. Entretanto, alguns conceitos, como o produto cartesiano e a utilização de listas também serão citados.

## 4.2 Listas

As Listas são as formas mais importantes para se tratar objetos.

Uma lista organiza objetos em uma certa ordem. Em particular, os conjuntos e também os grupos, no GAP, são representados por listas.

Uma lista pode ser descrita por anotar os elementos em ordem entre colchetes, [ ], e separando-os com uma vírgula. Uma lista vazia, ou seja, uma lista sem elementos, é escrita como [ ]. Por exemplo,

```
gap> l:= [ 1, 2, 3 ]; # uma lista com três elementos
[ 1, 2, 3 ].
```

Além disso, podemos usar o comando `list[pos.]` o qual retorna o elemento cuja posição é “pos”na lista `list`. Por exemplo,

```
gap> l[1]; l[3];
1
3
```

Podemos ainda, adicionar um elemento à uma lista. Para tanto, basta utilizarmos o comando “Add”. Por exemplo, na lista acima, se quisermos adicionar o número 4, basta digitarmos na tela de comandos do gap :

```
gap> Add(1, 4); # adicionar à lista 1 o elemento 4
gap> 1;
[ 1, 2, 3, 4 ]
```

O comando “Lenght(*l*)” retorna o comprimento da lista *l*. Assim:

```
gap> Lenght(1); # o comprimento da lista 1
4
```

Estritamente listas ordenadas são usadas para representar conjuntos no GAP. Mais precisamente, uma lista estritamente ordenada é chamado de conjunto próprio. O comando “AddSet” é usado para acrescentar um elemento a um conjunto.

Utilizamos também o comando “Concatenation”. Esse comando serve para concatenar (unir) listas (ou conjuntos, etc). Por exemplo,

```
gap> l:=[1,2,3,4];
[1,2,3,4]
gap> l1:=[5,6,7];
[5,6,7]
gap> Concatenation(l,l1); # concatenação das listas l e l1
[1,2,3,4,5,6,7]
```

Entre os comandos utilizados, está o “Cartesian(*list1, list2, ...*)”, que retorna o Produto Cartesiano dos elementos das listas (ou conjuntos) na ordem dada. Por exemplo,

```
gap> Cartesian( [1,2], [3,4], [5,6] ); # produto cartesiano entre os
conjuntos [1,2], [3,4] e [5,6]

[ [ 1, 3, 5 ], [ 1, 3, 6 ], [ 1, 4, 5 ], [ 1, 4, 6 ], [ 2, 3, 5 ],
[ 2, 3, 6 ], [ 2, 4, 5 ], [ 2, 4, 6 ] ]
```

## 4.3 Aplicações

Uma “aplicação” (mapping) no GAP, é o que usualmente chamamos de “função” (nos termos matemáticos). O GAP também implementa aplicações generalizadas, na qual um elemento pode ter várias imagens, estas podem ser imaginadas como subconjuntos do produto cartesiano e são frequentemente chamados de “relações”.

Uma aplicação  $F$ , no GAP, é descrita por sua origem (domínio)  $S$ , seu conjunto de chegada (contradomínio)  $R$ , e um subconjunto do produto direto  $S \times R$ , denotado por  $Rel$ , que descreve a relação  $F$  entre  $S$  e  $R$ .

Para cada  $s \in S$ , o conjunto  $\{r \in R \mid (s, r) \in Rel\}$  é denominado o conjunto imagem (ou **Images**) de  $s$ . Analogamente, dado  $r \in R$ , o conjunto  $\{s \in S \mid (s, r) \in Rel\}$  é chamado o conjunto pré-imagem (ou **Preimages**) de  $r$ .

Entre as mais variadas aplicações destacamos:

- $ZeroMapping(S, R)$ , que retorna a aplicação  $f$ , tal que  $s^f = 0_R$ , para todo  $s \in S$ ;
- $IdentityMapping(S)$ , que retorna a aplicação identidade de  $S$ ;
- $Embedding(S \times R, i)$ , que é uma aplicação tal que, se  $i = 1$ , então para  $(s, r) \in S \times R$ , retorna  $s$ , e se  $i = 2$ , retorna  $r$ . Ela pode ser estendida a um número finito de conjuntos (e Consequentemente de índices  $i$ ).

Além disso, existe uma outra variante,  $Embedding(S, R)$ , que digamos, “mergulha” o conjunto  $S$  no conjunto  $R$ .

Abordaremos agora sobre as imagens de uma aplicação.

- $ImagesSource(map)$ : é o conjunto imagem da aplicação “map”;
- $ImagesRepresentative(map, elm)$ : se “elm” é um elemento do domínio (origem) da aplicação “map”, então  $ImagesRepresentative$  retorna um representante do conjunto imagem de “elm”. Se “elm” não tiver imagens, o resultado é falho;
- $ImagesElm(map, elm)$ : se “elm” é um elemento do domínio da aplicação “map”, então  $ImagesElm$  retorna o conjunto de todas as imagens de “elm”, pela aplicação “map”;
- $ImagesSet(map, elm)$ : se “elm” é um subconjunto do domínio do domínio da aplicação “map”, então  $ImagesSet$  retorna o conjunto de todas as imagens de “elm”, pela aplicação “map”;
- $Image(map)$ : é a imagem da aplicação “map”, ou seja, é o subconjunto do contradomínio da aplicação, que são de fato valores da aplicação “map”. Note que, neste caso, o argumento pode também ser com valores múltiplos;
- $Images(map)$ : é a imagem da aplicação “map”, ou seja, é o subconjunto do contradomínio da aplicação, que são de fato valores da aplicação “map”.

## 4.4 Grupos e Homomorfismos de Grupos

A seguir veremos como criar alguns grupos e como operar com eles (a operação não depende da representação utilizada).

Os grupos no sistema GAP são descritos multiplicativamente. Os elementos de um grupo a ser gerado devem permitir a multiplicação entre eles e também a inversão dos mesmos.

Quando os grupos são criados a partir dos geradores, isto significa que os geradores devem ser elementos que podem ser multiplicado e invertidos.  $\text{Group}(\text{gen}, \dots)$ , é o grupo criado pelos argumentos  $\text{gen}, \dots$ . Por exemplo,

```
gap> g:=Group((1,2,3,4),(1,2)); # grupo gerado por
(1,2,3,4) e (1,2)
```

```
Group([ (1,2,3,4), (1,2) ])
```

Além disso, utilizamos os seguintes comandos:

- $\text{GroupWithGenerators}(\text{gens})$ , retorna o grupo  $G$  gerado pela lista  $\text{gens}$ .
- $\text{GeneratorsOfGroup}(G)$ , retorna a lista dos geradores do grupo  $G$ .

Por exemplo,

```
gap> g:=GroupWithGenerators([(1,2,3,4),(1,2)]); # grupo com geradores
(1,2,3,4) e (1,2)
Group([ (1,2,3,4), (1,2) ])
gap> GeneratorsOfGroup(g); # geradores do grupo g
[ (1,2,3,4), (1,2) ]
```

Os subgrupos desempenham papel importante em nosso estudo. Para criarmos o subgrupo de um grupo  $G$ , gerado por  $\text{gens}$ , usamos o comando  $\text{Subgroup}(G, \text{gens})$ . Por exemplo,

```
gap> u:=Subgroup(g, [(1,2,3),(1,2)]); # subgrupo de g gerado por (1,2,3) e (1,2)
Group([ (1,2,3), (1,2) ])
```

Os seguintes comandos, são utilizados para determinar o índice de um subgrupo no grupo e a normalidade.

- $\text{Index}(G, U)$ , determina o índice do subgrupo  $U$  em relação ao grupo  $G$ ;

- `IsNormal( $G, U$ )`, verifica se o subgrupo  $U$  é normal em  $G$ . Se for normal, retorna “true”, caso contrário, retorna “false”.
- `StructureDescription( $G$ )`. Esse método, exibe uma estrutura (“mais familiar”), cuja idéia é retornar uma seqüência possivelmente curta que dá algumas dicas da estrutura do grupo considerado e pode ser calculado razoavelmente rápido.

Assim, seguindo com o nosso exemplo, temos

```
gap> Index(g, u);
4
gap> IsNormal(g, u);
false
gap> StructureDescription(g);
"S4"
```

Podemos extrair algumas informações muito importantes de modo rápido, com o auxílio do GAP. Com a ajuda dele, podemos calcular o centro de um grupo  $G$ , o subgrupo comutador de  $G$ , entre outros. Listamos alguns destes comandos. Maiores detalhes são encontrados no Capítulo 37 de [19].

- `Size( $G$ )`, retorna a ordem do grupo  $G$ ;
- `Centre( $G$ )`, retorna o centro do grupo  $G$ ;
- `CommutatorSubgroup( $G, H$ )`, retorna o subgrupo comutador entre os grupos  $G$  e  $H$ , isto é,  $[G, H]$ ;
- `DerivedSubgroup( $G$ )`, retorna o subgrupo derivado  $G'$  do grupo  $G$ ;
- `FratiniSubgroup( $G$ )`, retorna o subgrupo de Frattini  $\Phi(G)$  do grupo  $G$ ;
- `SylowSubgroup( $G, p$ )`, retorna um  $p$ -subgrupo de Sylow do grupo  $G$ ;
- `FactorGroup( $G, N$ )`, retorna o grupo quociente  $G/N$ , desde que  $N$  seja normal em  $G$ ;
- `CommutatorFactorGroup( $G$ )`, retorna o grupo quociente  $G/G'$ .

#### 4.4.1 Propriedades dos Grupos

Algumas propriedades, como finitude, nilpotência ou solubilidade são respondidas pelo sistema GAP, de forma eficiente.

- `IsFinite( $G$ )`, retorna “true” se o grupo  $G$  for finito ou “false” caso contrário;
- `IsCyclic( $G$ )`, retorna “true” se o grupo  $G$  for cíclico ou “false” caso contrário;

- `IsElementaryAbelian( $G$ )`, retorna “true” se o grupo  $G$  for abeliano elementar ou “false” caso contrário;
- `IsNilpotentGroup( $G$ )`, retorna se o grupo  $G$  é ou não nilpotente;
- `NilpotencyClassOfGroup( $G$ )`, retorna a classe de nilpotência do grupo  $G$ ;
- `IsPerfectGroup( $G$ )`, retorna se o grupo  $G$  é ou não perfeito (um grupo  $G$  é dito perfeito, quando  $G = G'$ ).
- `IsSolvableGroup( $G$ )`, retorna se o grupo  $G$  é ou não solúvel;
- `DerivedLength( $G$ )`, retorna o comprimento derivado do grupo solúvel  $G$ ;
- `IsSimpleGroup( $G$ )`, retorna se o grupo  $G$  é ou não simples;
- `IsFinitelyGeneratedGroup( $G$ )`, retorna se o grupo  $G$  é finitamente gerado ou não.

#### 4.4.2 Homomorfismos de Grupos

Um homomorfismo de grupos é uma aplicação de um grupo em outro, que respeite as operações do grupo (multiplicação e inversão). Os homomorfismos são implementados como casos especiais de aplicações, assim, em particular, para os homomorfismos, valem todas as operações das aplicações.

Os isomorfismos entre dois grupos,  $G$  e  $H$ , em geral, são utilizados, para transferir os cálculos efetuados no grupo  $G$  para o grupo  $H$  (isomorfo à  $G$ ), que possua uma outra apresentação, e torne as contas mais rápidas (mediante os algoritmos disponíveis).

A forma mais importante de se criar homomorfismos de grupos, é dar imagens para um conjunto de geradores do grupo, e estende-los ao grupo por eles gerado, mediante a propriedade de homomorfismos de grupos.

- `GroupHomomorphismByImages( $G, H, gens, imgs$ )`: retorna o homomorfismo de grupos entre  $G$  e  $H$ , que é dado pela aplicação definida na lista “gens” de geradores de  $G$  na lista “imgs” de suas imagens em  $H$ .  
Se “gens” não gera  $G$  ou se a aplicação nos geradores não se estende à um homomorfismo, então “fail” é retornado.
- `GroupHomomorphismByImagesNC( $G, H, gensG, gensH$ )`: cria um homomorfismo assim como em `GroupHomomorphismByImages`, contudo não testa se “gens” gera o grupo e se a aplicação de fato se estende à um homomorfismo.

Por exemplo, vamos criar um homomorfismo entre os grupos  $S_4$  e  $S_3$

```
gap> gens:=[(1,2,3,4),(1,2)];
[ (1,2,3,4), (1,2) ]

gap> g:=Group(gens);
Group([ (1,2,3,4), (1,2) ])

gap> h:=Group((1,2,3),(1,2));
Group([ (1,2,3), (1,2) ])

gap> hom:=GroupHomomorphismByImages(g,h,gens,[(1,2),(1,3)]);
[ (1,2,3,4), (1,2) ] -> [ (1,2), (1,3) ]

gap> Image(hom,(1,4));
(2,3)
```

## 4.5 Grupos Livres

### 4.5.1 Categorias de Palavras Associadas

Palavras associadas são usadas para representar elementos em grupos livres, semigrupos e monóides no GAP. Uma palavra associada é apenas uma sequência de letras, onde cada letra é um elemento de um alfabeto (posteriormente chamada de gerador) ou seus inversos.

## 4.6 Grupos Finitamente Apresentados

Um **Grupo Finitamente Apresentado** (de forma abreviada um `FpGroup`) é um grupo gerado por um conjunto finito de **geradores abstratos** sujeitos a um conjunto finito de **relações** que geradores devem satisfazer. Todo grupo finito pode ser representado como um grupo finitamente apresentado.

Grupos finitamente apresentados são obtidos pelo grupo fator entre um grupo livre e um conjunto de relações. Assim, para criarmos um grupo finitamente apresentado, precisamos primeiramente criar um grupo livre; em seguida, construímos uma lista de relações, como palavras nos geradores do grupo livre e, por fim, criamos o grupo fator entre o grupo livre e as relações, obtendo assim, o grupo finitamente apresentado. Por

exemplo, para criarmos o grupo

$$\langle a, b \mid a^2, b^3, (ab)^5 \rangle,$$

utilizamos os seguintes comandos:

```
gap> f:= FreeGroup("a", "b");
<free group on the generators [a,b]>
gap> rels:=[f.1^2, f.2^3, (f.1*f.2)^5];
[a^2, b^3, a*b*a*b*a*b*a*b*a*b]
gap> g:= f/rels;
<fp group on the generators [a,b]>
```

O comando `IsSubgroupFpGroup( $H$ )`, retorna “true” se  $H$  for um grupo finitamente apresentado ou um subgrupo de um grupo finitamente apresentado. Além disso, podemos também utilizar o comando `IsFpGroup( $G$ )`, que é um sinônimo do comando anterior (e portanto, retorna “true” se o grupo  $G$  for finitamente apresentado).

### 4.6.1 Criando Grupos Finitamente Apresentados

- $F/rels$ , cria o grupo finitamente apresentado dado pela apresentação  $\langle gens \mid rels \rangle$ , onde  $gens$  são os geradores do grupo livre  $F$ . Note que as relações são vistas como palavras nos geradores dos grupos livres. Por exemplo,

```
gap> f:= FreeGroup(3);
<free group on the generators [f.1, f.2, f.3]>
gap> rels:=[ f.1^4, f.2^3, f.3^5, f.1*f.2*f.3 ];
[ f.1*f.1*f.1*f.1, f.2*f.2*f.2, f.3*f.3*f.3*f.3*f.3, f.1*f.2*f.3 ]
gap> g:= f/rels;
<fp group on the generators [ f1, f2, f3 ]>
```

- `FactorGroupFpGroupByRels( $G, elts$ )`, cria o grupo quociente  $G/N$ , do grupo  $G$ , pelo fecho normal de  $elts$ , denotado por  $N$ , onde em  $elts$  espera-se que seja uma lista de elementos de  $G$ . Por exemplo, vamos criar o grupo  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , cuja apresentação é dada por  $\langle a, b \mid a^2, b^2, [a, b] \rangle$ :

```
gap> f:= FreeGroup(2);
<free group on the generators [f.1, f.2]>
gap> rels:=[f.1^2, f.2^2, Comm(f.1, f.2)];
[f.1*f.1, f.2*f.2, f.1^-1*f.2^-1*f.1*f.2]
gap> g:=FactorGroupFpGroupByRels(f, rels);
<fp group on the generators [f.1, f.2]>
```

```
gap> StructreDescription(g);
"C2 X C2"
```

## 4.6.2 Convertendo Grupos para Grupos Finitamente Apresentados

Aqui veremos uma forma rápida de “transformarmos” um grupo dado num grupo finitamente apresentado, Para tanto usamos o comando:

`IsomorphismFpGroup( $G$ )`, que retorna um isomorfismo entre o grupo  $G$  e um grupo finitamente apresentado isomorfo à  $G$ . Esta função primeiramente escolhe um conjunto de geradores do grupo  $G$  e então computa a apresentação em termos desses geradores. Por exemplo:

```
gap> g := Group( (2,3,4,5), (1,2,5) );;
gap> iso := IsomorphismFpGroup( g ); # isomorfismo entre o grupo g
e um grupo finitamente apresentado isomorfo à g
[ (2,5,4,3), (1,2,3,4,5), (1,3,2,4,5) ] -> [ F1, F2, F3 ]
gap> fp := Image( iso ); # retorna o grupo finitamente apresentado
isomorfo à g
<fp group of size 120 on the generators [ F1, F2, F3 ]>
gap> RelatorsOfFpGroup( fp ); # retorna as relações do grupo fp
[ F1^2*F2^2*F3*F2^-1, F2^-1*F1^-1*F2*F1*F2^-2*F3, F3^-1*F1^-1*F3*F1*F3^-1,
F2^5*F3^-5, F2^5*F3^-1*F2^-1*F3^-1*F2^-1, F2^-2*F3^2*F2^-2*F3^2 ]
```

## 4.7 Produto de Grupos

Descrevemos agora alguns dos possíveis produtos de grupos que o GAP nos permite calcular.

### 4.7.1 Produto Direto

O produto direto de grupos é o produto cartesiano dos grupos (considerados como conjuntos de elementos) com a multiplicação componente à componente. Usamos o comando: `DirectProduct( $G,H$ )` que retorna o produto direto  $G \times H$ . Este comando, pode ser estendido à um número finito de grupos. Por exemplo,

```
gap> g:=Group((1,2,3), (1,2));;
gap> d:=DirectProduct(g,g,g); # retorna o produto direto g x g x g
Group([ (1,2,3), (1,2), (4,5,6), (4,5), (7,8,9), (7,8) ])
gap> Size(d);
216
```

### 4.7.2 Produto Semidireto

O produto semidireto de um grupo  $N$  com um grupo  $G$ , agindo sobre  $N$ , via um homomorfismo  $\alpha$  de  $G$  em  $\text{Aut}(N)$  é o produto cartesiano  $G \times N$  com a multiplicação definida por

$$(g, n)(h, m) = (gh, n^{h^\alpha} m).$$

Para construirmos o produto semidireto no GAP, usamos o comando `SemidirectProduct( $G, \alpha, N$ )`, que retorna o produto semidireto de  $N$  com  $G$ , via o homomorfismo  $\alpha$  de  $G$  em  $\text{Aut}(N)$ .

### 4.7.3 Produto Livre

Sejam  $G$  e  $H$  com apresentações  $\langle X|R \rangle$  e  $\langle Y|S \rangle$ , respectivamente. Então o produto livre  $G * H$  é o grupo com apresentação  $\langle X \cup Y | R \cup S \rangle$ . Esta construção pode ser generalizada a um número arbitrário de grupos. Para construirmos o produto livre entre  $G$  e  $H$ , usamos o comando: `FreeProduct( $G, H$ )`, que retorna o produto livre  $G * H$ . Por exemplo,

```
gap> g := DihedralGroup(8);;
gap> h := CyclicGroup(5);;
gap> fp := FreeProduct(g, h, h);
<fp group on the generators [ f1, f2, f3, f4, f5 ]>
```

## 4.8 Alguns Exemplos para o Grupo $\mathcal{V}(G)$

No Apêndice B apresentamos um algoritmo, o qual utilizamos para calcular o grupo  $\mathcal{V}(G)$  e o grupo  $\Upsilon(G)$ . Para implementar tal algoritmo, basta alterarmos o grupo  $G$  em questão, onde obtemos as informações desejadas sobre os grupos  $\mathcal{V}(G)$  e  $\Upsilon(G)$ , respectivamente.

A seguir apresentamos um exemplo, onde calculamos, via GAP, os grupos  $\mathcal{V}(G)$  e  $\Upsilon(G)$  com  $G$  variando em certos grupos.

**Exemplo 4.1. (a.)** *Começemos com os grupos Diedrais*

$$D_{2n} = \langle a, b | a^n = 1 = b^2, a^b = a^{-1} \rangle,$$

com  $n$  variando entre 2 e 8. Na tabela abaixo, os símbolos  $|G|$ ,  $cl(G)$  e  $dl(G)$ , representam, respectivamente, a ordem, a classe de nilpotência e o comprimento derivado do grupo em questão. Note que os Corolários 3.30 e 3.33 são satisfeitos, pois garantem, que se  $G$  é nilpotente de classe  $c$  (ou solúvel, de comprimento

derivado  $l$ ) então  $\mathcal{V}(G)$  é nilpotente de classe no máximo  $c + 1$  (ou solúvel, de comprimento derivado no máximo  $l + 1$ ).

$n$	$G$	$cl(G)$ / $dl(G)$	$ \mathcal{V}(G) $	$cl(\mathcal{V}(G))$ / $dl(\mathcal{V}(G))$	$\Upsilon(G)$	$ \Upsilon(G) $
2	$D_4$	1 / -	256	2 / -	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	16
3	$D_6$	- / 2	216	- / 2	$\mathbb{Z}_6$	6
4	$D_8$	2 / -	2.048	3 / -	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	32
5	$D_{10}$	- / 2	1.000	- / 2	$\mathbb{Z}_{10}$	10
6	$D_{12}$	- / 2	6.912	- / 2	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	48
7	$D_{14}$	- / 2	2.744	- / 2	$\mathbb{Z}_{14}$	14
8	$D_{16}$	3 / -	16.384	4 / -	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	64

Lembremos que o Corolário 3.49 afirma que se  $|G| = p^n$  e  $|G'| = p^m$ , então temos  $p^{d^2} \leq |G \otimes G| \leq p^{n(n-m)}$ . Na tabela abaixo, verificamos (via GAP) que tal resultado é válido para os 2-grupos finitos (2 gerados)  $D_{2n}$ , com  $n = 2, 4$  e 8:

$G$	$ G $	$G'$	$ G' $	$p^{d^2}$	$ G \otimes G $	$p^{n(n-m)}$
$D_4$	$2^2$	1	$2^0$	16	16	16
$D_8$	$2^3$	$\mathbb{Z}_2$	$2^1$	16	32	64
$D_{16}$	$2^4$	$\mathbb{Z}_4$	$2^2$	16	64	256

(b.) Observe agora, que os 2-grupos listados abaixo, também satisfazem os Corolários 3.30 e 3.49

$G$	$ G $	$cl(G)$	$\mathcal{V}(G)$	$cl(\mathcal{V}(G))$	$ \mathcal{V}(G) $	$\Upsilon(G)$	$ \Upsilon(G) $
$\mathbb{Z}_2$	2	1	$D_8$	2	8	$\mathbb{Z}_2$	2
$\mathbb{Z}_4$	4	1	$(\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_4$	2	64	$\mathbb{Z}_4$	4
$\mathbb{Z}_8$	8	1	-	2	512	$\mathbb{Z}_8$	8

(c.) Note também, que os 3-grupos listados abaixo, também satisfazem os Corolários 3.30 e 3.49

$G$	$ G $	$cl(G)$	$\mathcal{V}(G)$	$cl(\mathcal{V}(G))$	$ \mathcal{V}(G) $	$\Upsilon(G)$	$ \Upsilon(G) $
$\mathbb{Z}_3$	3	1	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_3$	2	27	$\mathbb{Z}_3$	3
$\mathbb{Z}_9$	9	1	-	2	729	$\mathbb{Z}_9$	9

Antes de apresentarmos o próximo exemplo, observaremos mais uma vez que o

Corolário 3.49 é satisfeito para os grupos listados nos exemplos (b.) e (c.)

$G$	$ G $	$ G' $	$d = d(G)$	$p$	$p^{d^2}$	$ G \otimes G $	$p^{n(n-m)}$
$\mathbb{Z}_2$	$2^1$	$2^0$	1	2	2	2	2
$\mathbb{Z}_3$	$3^1$	$3^0$	1	3	3	3	3
$\mathbb{Z}_4$	$2^2$	$2^0$	1	2	2	4	4
$\mathbb{Z}_8$	$2^3$	$2^0$	1	2	2	8	512
$\mathbb{Z}_9$	$3^2$	$2^0$	1	3	3	9	81

Note, também que no Apêndice A, apresentamos um Teorema (Teorema A.8) o qual a cota superior para  $|G \otimes G|$  é melhorada - a saber ela não pode superar  $p^{nd}$  onde  $|G| = p^n$  e  $d$  é o número mínimo de geradores de  $G$ . Com rápidos cálculos, verificamos que esse melhoramento é bom, no sentido de que, para os grupos na tabela acima, a ordem de  $|G \otimes G|$  coincide com a cota estipulada neste Teorema, e são de fato bem menores do que o limitante  $p^{n(n-m)}$ .

(d.) Também consideraremos os grupos dos quatérnios generalizados

$$Q_m = \langle x, y | x^{2^{m-1}} = 1 = y^{-1}xyx, y^2 = x^{2^{m-2}} \rangle,$$

para  $m = 3$  e  $m = 4$ . Note que a ordem de  $Q_m$  é  $2^m$ .

$m$	$G$	$cl(G)$	$ \mathcal{V}(G) $	$cl(\mathcal{V}(G))$	$\Upsilon(G)$	$ \Upsilon(G) $
3	$Q_3$	2	4.096	3	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	64
4	$Q_4$	3	16.384	4	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	64

Além disso, observe na tabela abaixo que, para  $m = 3$ , e 4, temos 2-grupos, onde novamente podemos verificar que as cotas estipuladas no Corolário 3.49 são de fato satisfeitas.

$G$	$ G  = p^n$	$G'$	$ G'  = p^m$	$p^{d^2}$	$ G \otimes G $	$p^{n(n-m)}$
$Q_3$	$2^3$	$\mathbb{Z}_2$	$2^1$	16	64	64
$Q_4$	$2^4$	$\mathbb{Z}_4$	$2^2$	16	64	256

(e.) Vejamos como se comportam os grupos  $\mathcal{V}(G)$  e  $\Upsilon(G)$ , para os seguintes casos:

$G$	$ G $	$cl(G)$	$ \mathcal{V}(G) $	$cl(\mathcal{V}(G))$	$\Upsilon(G)$	$ \Upsilon(G) $	$cl(\Upsilon(G))$
$\mathbb{Z}_5$	5	1	125	2	$\mathbb{Z}_5$	5	1
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$	6	1	216	2	$\mathbb{Z}_6$	6	1
$\mathbb{Z}_7$	7	1	343	2	$\mathbb{Z}_7$	7	1
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$	10	1	1.000	2	$\mathbb{Z}_{10}$	10	1
$\mathbb{Z}_{11}$	11	1	1.331	2	$\mathbb{Z}_{11}$	11	1
$\mathbb{Z}_{12}$	12	1	1.728	2	$\mathbb{Z}_{12}$	12	1
$\mathbb{Z}_{13}$	13	1	2.197	2	$\mathbb{Z}_{13}$	13	1
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$	14	1	2.744	2	$\mathbb{Z}_{14}$	14	1

(f.) Encerramos observando como se comportam  $\mathcal{V}(G)$  e  $\Upsilon(G)$  para o grupo  $A_4$ .

$G$	$ G $	$dl(G)$	$ \mathcal{V}(G) $	$dl(\mathcal{V}(G))$	$\Upsilon(G)$	$ \Upsilon(G) $	$cl(\Upsilon(G))$
$A_4$	12	2	3.456	3	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Q}_3$	24	2

Note que neste caso, mesmo o grupo  $G$  sendo “apenas” solúvel, temos  $\Upsilon(G)$  nilpotente.

## Atualizações e Melhoramentos de Cotas

---

O intuito deste apêndice é o de apresentar algumas atualizações sobre o Quadrado Tensorial Não-Abeliano de um Grupo, bem como o melhoramento de algumas das cotas, apresentadas para o quadrado tensorial não-abeliano de um grupo.

O primeiro resultado, apresentado por Rocco [16], exibe uma outra apresentação para o grupo  $\mathcal{V}(G)$ , quando  $G$  é um grupo solúvel finito.

Lembremos que um grupo finito e solúvel  $G \neq \{1\}$  possui uma série subnormal  $G = G_0 > G_1 > \dots > G_n = \{1\}$ , onde  $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$  e  $G_{i-1}/G_i$  é cíclico de ordem  $r_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Isto significa que  $G_{i-1} = \langle a_i, \dots, a_n \rangle$  e  $a_i^{r_i} \in G_i = \langle a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$ .

**Definição A.1.** A sequência  $(a_1, \dots, a_n)$  é dita um AG-sistema de geradores de  $G$ , com as seguintes relações definidoras

$$a_i^{r_i} = w'_{ii}(a_{i+1}, \dots, a_n), \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$a_i^{a_j} = w'_{ij}(a_{j+1}, \dots, a_n), \quad 1 \leq j < i \leq n,$$

que são denominados, respectivamente, relações de potência e relações de conjugação.

Para nossos propósitos, vamos reescrever as relações de potência e as relações de conjugação, pela coleção de geradores, em ordem decrescente da esquerda para a direita, de modo que para um dado AG-sistema as relações sejam

$$G\text{-relações} : \begin{cases} a_i^{r_i} = w_{ii}(a_{i+1}, \dots, a_n), & 1 \leq i \leq n; \\ a_i^{a_j} = w_{ij}(a_{j+1}, \dots, a_n), & 1 \leq j < i \leq n. \end{cases}$$

Sejam  $G$  e  $G^\varphi$  grupos isomorfos, distintos, solúveis e finitos dados, respectivamente, pelos AG-sistemas  $\{a_1, \dots, a_m\}$  e  $\{b_1, \dots, b_m\}$ , onde  $\varphi: G \rightarrow G^\varphi$  é um isomorfismo tal que  $a_i \mapsto b_i$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . As correspondentes relações de potência e relações de conjugação satisfeitas por estes sistemas serão chamadas de  $G$ -relações e  $G^\varphi$ -relações.

**Teorema A.2.** *Sejam  $G$  e  $G^\Phi$  grupos isomorfos, distintos, solúveis e finitos dados pelos  $AG$ -sistemas  $\{a_1, \dots, a_m\}$  e  $\{b_1, \dots, b_m\}$ , respectivamente, onde  $\varphi: G \rightarrow G^\Phi$  é um isomorfismo tal que  $a_i \mapsto b_i$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Então o grupo*

$$\delta(G) := \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \mid G\text{-relações}, G^\Phi\text{-relações}, [a_i, b_j]^{a_k} = [a_i^{a_k}, b_j^{b_k}] = [a_i, b_j]^{b_k}, 1 \leq i, j, k, \leq n \rangle,$$

é uma apresentação para o grupo  $\mathcal{V}(G)$ .

Apresentamos agora dois resultados obtidos por Bacon [1].

**Proposição A.3.** *Se  $G$  é um grupo nilpotente de classe 2, então  $G \otimes G$  é abeliano e  $[x, y] \otimes [x_1, y_1] = 1_{G \otimes G}$ , para todos  $x, y, x_1, y_1 \in G$ .*

**Teorema A.4.** *Seja  $G$  um grupo nilpotente de classe 2, com  $n = d(G)$ , o número mínimo de geradores de  $G$ . Então*

$$d(G \otimes G) \leq \frac{n(n^2 + 3n - 1)}{3}.$$

O resultado apresentado a seguir, obtido em [2], limita a classe de nilpotência (respectivamente, o comprimento derivado) de  $G \otimes G$  em função da classe de nilpotência (respectivamente, o comprimento derivado) de  $G$ .

**Proposição A.5.** *Seja  $G$  um grupo qualquer. As seguintes igualdades são válidas:*

1. *Para todo  $n \geq 0$ ,  $[G, G^\Phi]^{(n)} = [G^{(n)}, (G^{(n)})^\Phi]$ ;*
2. *Para todo  $n \geq 1$ ,  $\gamma_{n+1}([G, G^\Phi]) = [\gamma_n(G'), (G')^\Phi] = [G', \gamma_n(G')^\Phi]$ .*

**Corolário A.6.** *Seja  $G$  um grupo solúvel de comprimento derivado  $d$ , então  $G \otimes G$  é solúvel de comprimento derivado  $d$  ou  $d - 1$ . Se  $G$  for um grupo nilpotente de classe  $c$ , então  $G \otimes G$  é nilpotente de classe menor do que ou igual a  $\left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor$ , onde neste caso,  $\lfloor x \rfloor$  denota o maior inteiro menor do que ou igual a  $x$ .*

O próximo resultado apresentado foi obtido por McDermott [12] em sua tese de doutorado.

Sejam  $G$  um  $p$ -grupo finito e  $H$  um  $q$ -grupo finito, com  $p$  e  $q$  primos. Suponha que  $G$  e  $H$  ajam um sobre o outro de maneira compatível (de forma, que possamos definir o produto tensorial  $G \otimes H$ ). Seja  $E$  um grupo, tal que  $G, H \trianglelefteq E$ . Além disso, denote por

$${}_H G = \langle g \in G \mid \text{existe } h \in H \text{ tal que } gh^{-1} \in Z(GH) \rangle,$$

onde  $GH$  é o subgrupo de  $E$  gerado por  $G$  e  $H$ .

**Proposição A.7.** *Suponha que  $G$  e  $H$  são subgrupos normais de um grupo  $E$ , onde  $G$  é um  $p$ -grupo e  $H$  é um  $q$ -grupo, cujas ações sejam as conjugações em  $E$ .*

1. *Se  $p \neq q$ , então  $|G \otimes H| = 1$ ;*
2. *Suponha que  $p = q$  e que  $G$  seja um grupo  $d$ -gerado de ordem  $p^n$  e que  $H$  seja um grupo  $d_1$ -gerado de ordem  $p^m$ , e que  $|{}_H G|/|{}_H G \cap \Phi(G)| = p^k$ , então*

$$|G \otimes G| \leq p^{nm - (k+n-d)(m-d_1)}.$$

Quando  $G = H$  o item 2. da Proposição acima melhora a cota superior apresentada no Corolário 3.49.

A seguir temos uma (nova) melhoria da cota superior da ordem do produto tensorial não-abeliano de um  $p$ -grupo finito exibida no Corolário 3.49, apresentada em [2]. Tal melhoria pode ser encontrada também em McDermott [12], no Teorema 4.3.1.

**Teorema A.8.** *Sejam  $G$  um  $p$ -grupo finito de ordem  $p^n$  e  $d = d(G)$  o número mínimo de geradores de  $G$ . Então*

$$p^{d^2} \leq |G \otimes G| \leq p^{nd}.$$

## Um Algoritmo para o Grupo $\mathcal{V}(G)$

---

A seguir apresentamos o algoritmo que foi utilizado para o cálculo dos grupos  $\mathcal{V}(G)$ , e  $\Upsilon(G) \cong G \otimes G$ .

```
G:= ; #aqui devemos definir um grupo G

g:= Image(IsomorphismFpGroup(G)); # retorna a imagem de um grupo finitamente apresentado isomorfo ao grupo G
p1:=FreeProduct(g, g); #cria o produto livre g*g
i1:=Embedding(p1,1);
i2:=Embedding(p1,2);

rels:=[];
el:=Difference(Elements(g), [One(g)]); # retorna o conjunto g-{1} = g^*
car:= Cartesian(el,el,el); #cria o produto cartesiano g^* x g^* x g^*
for x in car do # Usamos este comando para criar as relações definidoras do grupo V(G)
```

```

Add(rels, Comm(Image(i1, x[1]), Image(i2, x[2])) ^ Image(i1, x[3])/Comm(Image(i1, x[1]^x[3]), Image(i2, x[2]^x[3]))) );
Add(rels, Comm(Image(i1, x[1]), Image(i2, x[2])) ^ Image(i1, x[3])/Comm(Image(i1, x[1]), Image(i2, x[2]) ) ^ Image(i2, x[3]))) );
od;

ni:= FactorGroupFpGroupByReIs(pl, rels); # cria o grupo V(G) como o grupo fator entre pl e o fecho normal de rels

sgen:=Size(GeneratorsOfGroup(g)); # Retorna a quantidade de geradores do grupo g
genh:=List([1..sgen], i -> ni.(i)); # Cria uma lista de ordem sgen, tal que para todo i retorna ni.(i) -
os geradores do grupo ni
H:=Group(genh); # Retorna o grupo cujos geradores são genh
genhp:=List([1..sgen], i -> ni.(sgen+i)); # Análogo ao genh, entretanto, para cada i na lista, retorna
ni.(sgen+i)
Hp:=Group(genhp); # Cria o grupo cujos geradores são genhp

tensor:=CommutatorSubgroup(H, Hp); # Cria o quadrado tensorial do grupo g

```

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] BACON, M. R. **On the nonabelian tensor square of a nilpotent groups of class two.** *Glasgow Math*, J.36:291–296, 1992.
- [2] BLYTH, R. D., F. F.; MORIGI, M. **Some structural results on the non-abelian tensor square of groups.** 2008.
- [3] BROWN, R., L. J. L.; ROBERTSON, E. **Some computations of non-abelian tensor product os groups.** *UCNW Pure Mathematics Preprint 85.5*, 111, 1987.
- [4] BROWN, R.; LODAY, J. L. **Van kampen theoremas for diagrams of spaces.** *Topology*, 25:311–335, 1987.
- [5] BUENO, T. P. **O Quadrado q-Tensorial de Grupos, Universidade de Brasília, Tese de Doutorado, 2006.**
- [6] GILBERT, N. **The non-abelian tensor square of a free product of groups.** *Arch. Math*, 48:369–375, 1987.
- [7] JOHNSON, D. L. **Presentation of groups.** Cambridge University Press, 1997.
- [8] KARPILOVSKY, G. **The Schur Multiplier.** Clarendon Press - Oxford, New York, 1987.
- [9] LIPSCHUTZ, S. **Topologia Geral: resumo da teoria, 650 problemas resolvidos, 391 problemas propostos.** McGraw-Hill do Brasil, Brasília, 1973.
- [10] MACEDO, S. S. A. **Comutatividade Fraca por Bijeção entre Grupos Abelianos, Universidade Federal de Goiás, Dissertação de Mestrado - 2010.**
- [11] MAGNUS, W.; KARRAS, A.; SOLITAR, D. **Combinatorial group theory: presentation of groups in terms of generators and relations.** Interscience, 1966.
- [12] McDERMOTT, A. **The nonabelian tensor product of groups: computations and structural results.** PhD thesis.
- [13] ROBINSON, D. J. S. **A course in the theory of groups.** Springer-Verlag, 1995.

- 
- [14] ROCCO, N. R. **On weak commutativity between finite  $p$ -groups,  $p$  : odd.** *J. Algebra*, 76, 1982.
- [15] ROCCO, N. R. **On a construction related to the non-abelian tensor square of a group.** *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 22, 1991.
- [16] ROCCO, N. R. **A presentation for a crossed embedding of finite solvable groups.** *Communications in Algebra*, 22, 1994.
- [17] ROTMAN, J. J. **The introduction to the theory of groups.** Springer-Verlag, 1994.
- [18] SIDKI, S. N. **On weak permutability between groups.** *Journal of Algebra*, 63:186–225, 1980.
- [19] **The GAP Group, GAP - Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4.12 - Reference Manual.** (<http://www.gap-system.org>), 2008.
- [20] **GAP - A Tutorial - Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4.12.** (<http://www.gap-system.org>), 2007.