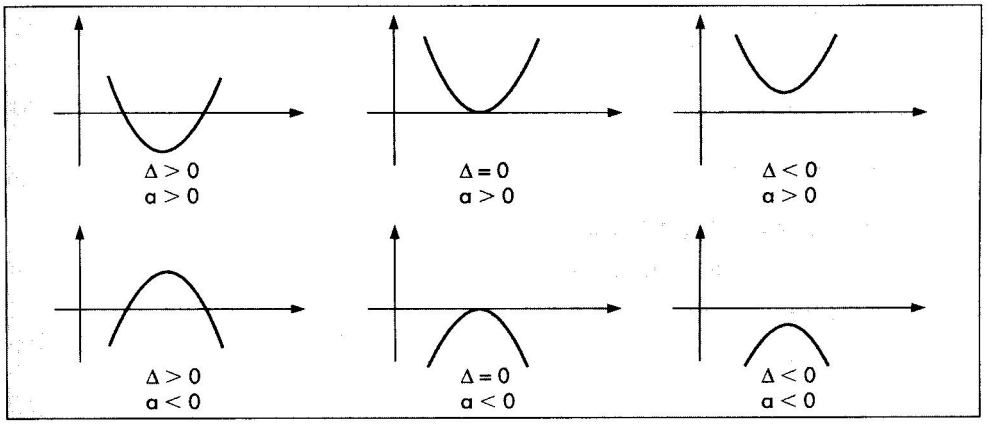
O ponto V da parábola, na Figura 3.39, é chamado vértice. Se $a > 0$, a abscissa do vértice é um ponto de mínimo; se $a < 0$, a abscissa de vértice é um ponto de máximo.

Os eventuais pontos de intersecção da parábola com o eixo x são obtidos fazendo $y = 0$. Teremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Se a equação tiver duas raízes reais distintas ($\Delta > 0$), a parábola interceptará o eixo x em dois pontos distintos; se a equação tiver uma única raiz real ($\Delta = 0$), a parábola interceptará o eixo x num único ponto; finalmente, se a equação não tiver raízes reais ($\Delta < 0$), a parábola não interceptará o eixo x (Figura 3.40).

Figura 3.40: Funções quadráticas.



A intersecção com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Portanto:

$$x = 0 \Rightarrow y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow y = c,$$

ou seja, o ponto de intersecção da parábola com o eixo y é $(0, c)$.

Com relação ao vértice da parábola, indicando por x_v e y_v a abscissa e a ordenada do vértice, respectivamente, teremos:

$$x_v = \frac{-b}{2a}, \qquad \text{e} \qquad y_v = f(x_v) = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Para demonstrarmos essas relações, vamos proceder da seguinte forma; seja

$$y = ax^2 + bx + c,$$

logo

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \ldots\right) + c.$$

Dentro do parênteses, em que há reticências, vamos adicionar $\frac{b^2}{4a^2}$ e, para compensar, vamos subtrair de c o valor $\frac{b^2}{4a}$ (Note que o termo adicionado dentro dos parênteses está multiplicado por a). Dessa forma teremos:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Ou seja, $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$, pois o termo entre parênteses é um trinômio quadrado perfeito.

Como o termo entre parênteses é um quadrado, será sempre maior ou igual a zero. Assim:

- Se $a > 0$, a concavidade será para cima, e o ponto de mínimo será aquele para o qual a expressão entre parênteses dá zero, ou seja $x = \frac{-b}{2a}$, e esta é a abscissa do vértice.
- Se $a < 0$, a concavidade será para baixo, e o ponto de máximo será aquele para o qual a expressão entre parênteses dá zero, ou seja $x = \frac{-b}{2a}$, e esta é a abscissa do vértice.

Assim, em qualquer caso, a abscissa do vértice será $x_v = \frac{-b}{2a}$. A justificativa de que $y_v = f(x_v)$ é imediata, pois a ordenada do vértice é a imagem da abscissa do vértice.

Exemplo 3.22. Vamos esboçar o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$. Temos:

a) $a = 1$. Portanto a concavidade é voltada para cima.

b) Intersecção com o eixo x:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0, \text{ cujas raízes são: } x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

Portanto, os pontos de intersecção com o eixo x são: (1, 0) e (3, 0).

c) Intersecção com o eixo y:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 \Rightarrow y = 3.$$

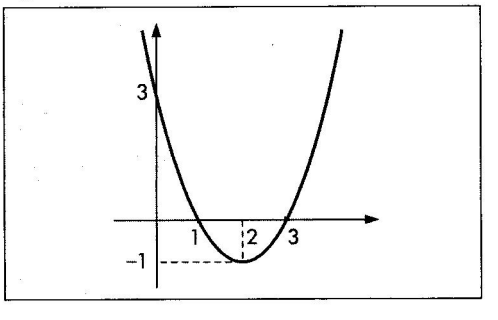
Portanto, o ponto de intersecção com o eixo y é (0, 3).

d) Vértice

$$\begin{cases} x_v = \dfrac{-(-4)}{2} = 2, \\ y_v = f(2) = 2^2 - 4 \cdot (2) + 3 = -1. \end{cases}$$

Portanto, o vértice é o ponto (2, –1). Observemos que $x = 2$ é um ponto de mínimo da função. De posse das informações obtidas, podemos esboçar o gráfico da função (Figura 3.41):

Figura 3.41: Gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$.



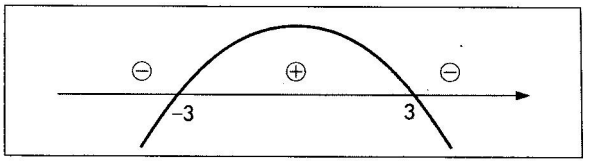
Exemplo 3.23. Vamos estudar o sinal da função $y = -x^2 + 9$.

Resolução

Nesse caso, só precisamos encontrar os pontos de intersecção do gráfico com o eixo x, já que a concavidade é voltada para baixo ($a = -1$). Assim:

$$y = 0 \Rightarrow -x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9, \text{ cujas raízes são: } x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

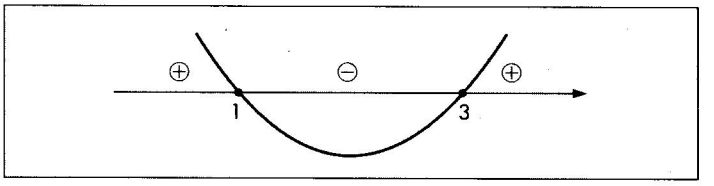
Para o estudo do sinal não necessitamos conhecer a intersecção com o eixo y, nem o vértice. O esboço é dado a seguir:



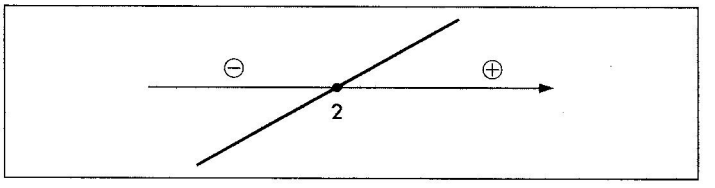
Portanto: $y > 0$ para $-3 < x < 3$,
$y < 0$ para $x < -3$ ou $x > 3$,
$y = 0$ para $x = 3$ ou $x = -3$.

Exemplo 3.24. Estudemos o sinal da função $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$. Temos

1) Sinal de $x^2 - 4x + 3$ (A)



2) Sinal de $x - 2$ (B)



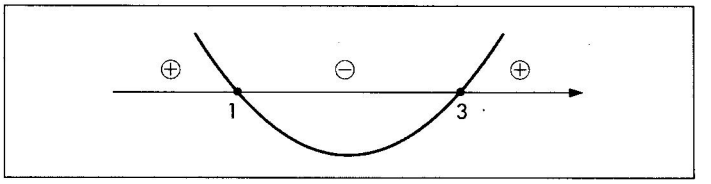
3) Quadro quociente

		1	2	3	
Sinal de A	+	–	–	+	
Sinal de B	–	–	+	+	
Sinal de $\frac{A}{B}$	⊖	⊕	⊖	⊕	

Portanto, $y > 0$ para $1 < x < 2$ ou $x > 3$,
$y < 0$ para $x < 1$ ou $2 < x < 3$,
$y = 0$ para $x = 1$ ou $x = 3$.

Exemplo 3.25. Vamos resolver a inequação $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$.

Fazendo $y = x^2 - 4x + 3$, o estudo do sinal dessa função é dado a seguir.

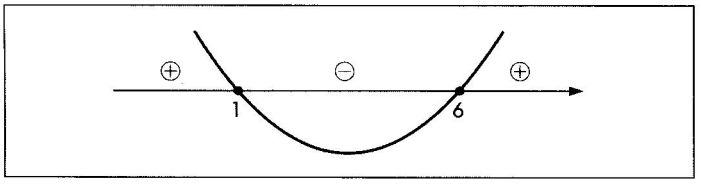


Como a inequação exige que $y \leqslant 0$, a resposta é $1 \leqslant x \leqslant 3$.

Exemplo 3.26. Vamos obter o domínio da função $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 6}$.

Para que exista a raiz quadrada, devemos ter $x^2 - 7x + 6 \geqslant 0$.

Fazendo $y = x^2 - 7x + 6$ e estudando o sinal de y teremos:



Para que $y \geqslant 0$, devemos ter: $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 6$. Portanto o domínio da função é $D = \{x \in R \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 6\}$.

Exercícios

87. Esboce os gráficos das seguintes funções:

a) $y = x^2 - 3x + 2$
b) $y = x^2 - 5x + 4$
c) $y = -x^2 + 7x - 12$
d) $y = 3x - x^2$
e) $y = 4 - x^2$
f) $y = x^2 - 2x + 1$
g) $y = x^2 - x + 3$
h) $y = x^2 - 5$
i) $y = x^2 + 3$
j) $\begin{cases} y = x^2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ y = 2, \text{ se } x < 0 \end{cases}$
k) $\begin{cases} y = x^2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ y = x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$
l) $\begin{cases} y = x^2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ y = -x^2, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

88. Estude o sinal das funções do exercício anterior, ache os pontos de máximo ou de mínimo e ainda o conjunto imagem.

89. Estude o sinal das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}$

b) $f(x) = \dfrac{3 - x}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x + 2}$

90. Dê o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$

b) $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 3}{x^2 - 6x}}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{4 + x}}$

91. Obtenha os pontos de máximo e de mínimo das seguintes funções, nos domínios indicados:

a) $y = 4x - x^2$; $D = [2, 4]$

b) $y = 4x - x^2$; $D = [0, 2]$

c) $y = x^2$; $D = [-1, 1]$

d) $y = 10x - x^2$, $D = [5, 8]$

3.5.8 Funções Receita e Lucro Quadráticas

Anteriormente vimos como obter a função receita quando o preço era constante. Vejamos, neste item, como obter a função receita quando o preço pode ser modificado (com conseqüente alteração da demanda, de acordo com a função de demanda).

Exemplo 3.27. A função de demanda de um produto é $p = 10 - x$, e a função custo é $C = 20 + x$. Vamos obter:

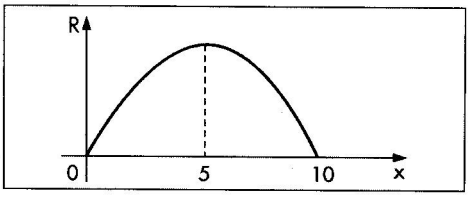
a) A função receita e o preço que a maximiza.
b) A função lucro e o preço que a maximiza.

a) Por definição de receita,

$$R = p \cdot x,$$
$$R = (10 - x)x,$$
$$R = 10x - x^2.$$

Assim, a receita é uma função quadrática de x, e seu gráfico é dado pela Figura 3.42:

Figura 3.42: Função receita $R(x) = 10x - x^2$.



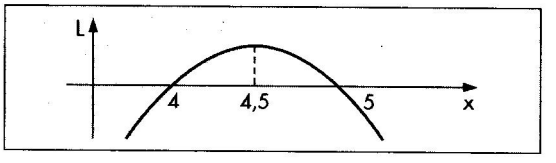
Portanto, o valor de x que maximiza R é a abscissa do vértice $x = \frac{-10}{-2} = 5$. Como conseqüência, o correspondente preço é dado pela função de demanda $p = 10 - 5 = 5$.

b) A função lucro é dada por $L = R - C$, ou seja:

$$L = 10x - x^2 - (20 + x)$$
$$L = -x^2 + 9x - 20.$$

O lucro também é uma função quadrática de x e seu gráfico é dado pela Figura 3.43:

Figura 3.43: Função lucro $L(x) = -x^2 + 9x - 20$.



O valor de x que maximiza o lucro é a abscissa do vértice $x = \frac{-9}{-2} = 4{,}5$. O correspondente preço é dado pela função de demanda $p = 10 - 4{,}5 = 5{,}5$. É importante observarmos pelo gráfico que o lucro só é positivo para $4 < x < 5$.

Exercícios

92. Dada a função de demanda $p = 20 - 2x$ e a função custo $C = 5 + x$:
    a) Obtenha o valor de x que maximiza a receita.
    b) Obtenha o valor de x que maximiza o lucro.

93. Resolva o exercício anterior supondo $p = 40 - x$ e $C = 20 + 31x$.

94. Uma loja de CD's adquire cada unidade por \$ 20,00 e a revende por \$ 30,00. Nessas condições, a quantidade mensal que consegue vender é 500 unidades. O proprietário estima que, reduzindo o preço de venda para \$ 28,00, conseguirá vender 600 unidades por mês.
    a) Obtenha a função de demanda admitindo que seu gráfico seja linear.
    b) Qual o preço que deve ser cobrado para maximizar o lucro mensal?

95. O proprietário de uma barbearia verificou que, quando o preço do corte de cabelo era \$ 20,00, o número de clientes era 100 por semana. Verificou também que, quando o preço passava para \$ 15,00, o número de clientes dobrava.
    a) Obtenha a função de demanda admitindo seu gráfico linear.
    b) Qual o preço que deve ser cobrado para maximizar a receita semanal?

96. O dono de um restaurante verificou que, quando o preço da dose de vodca era \$ 10,00, o número de doses vendidas era 200 por semana. Verificou também que, quando o preço caía para \$ 7,00, o número de doses passava para 400 por semana.
    a) Obtenha a função de demanda admitindo seu gráfico linear.
    b) Obtenha o preço que deve ser cobrado para maximizar o lucro semanal, considerando o custo de uma dose igual a \$ 4,00.

97. Em um cinema, verificou-se que o número de freqüentadores (x) por sessão relacionava-se com o preço de ingresso (p) por meio da relação $p = 15 - 0{,}015x$.
   a) Qual o preço que deve ser cobrado para maximizar a receita, se o total de lugares for 600?
   b) Qual o preço que deve ser cobrado para maximizar a receita, se o total de lugares for 400?

98. O Sr. Ângelo é proprietário de um hotel para viajantes solitários com 40 suítes. Ele sabe que, se cobrar \$ 150,00 por diária, o hotel permanece lotado. Por outro lado, para cada \$ 5,00 de aumento na diária, uma suíte permanece vazia.
   a) Obtenha a função de demanda admitindo-a como função do 1º grau.
   b) Qual o preço que deve ser cobrado para maximizar a receita?

99. Um estacionamento para automóveis tem a seguinte equação de demanda: $p = 100 - x$, em que p é o preço por dia de estacionamento e x, o número de automóveis que comparecem. Encontre o preço que maximiza a receita, supondo que:
   a) O estacionamento tenha 40 lugares.
   b) O estacionamento tenha 60 lugares.

100. A função custo de um monopolista (único produtor de um produto) é $C = 200 + 2x$, e a função demanda pelo produto é $p = 100 - 2x$.
   a) Qual o preço que deve ser cobrado para maximizar o lucro?
   b) Se o governo tabelar o preço do produto de modo que o preço máximo seja \$ 60,00, qual preço deve ser cobrado para maximizar o lucro?
   c) Resolva o item anterior considerando um preço máximo de \$ 40,00.

101. Pesquisas mercadológicas determinaram que o número de um certo eletrodoméstico (x) demandado por semana relacionava-se com seu preço unitário por meio da relação $x = 1.000 - 100p$, em que $4 \leq p \leq 10$.
   a) Obtenha a função receita.
   b) Qual preço deve ser cobrado para maximizar a receita semanal?

102. Uma videolocadora aluga 200 fitas por dia, se o aluguel diário de cada fita for \$ 4,00. Para cada \$ 1,00 de acréscimo no preço, há uma queda de demanda de 50 fitas.
   a) Qual a equação de demanda diária de fitas, admitindo-a como função do 1º grau?
   b) Qual preço deve ser cobrado para maximizar a receita?

103. A equação de demanda de um produto é $p = 100 - 2x$ e o custo é $C = 500 + 3x$.
   a) Obtenha o preço que maximiza o lucro.
   b) Se o governo cobrar um imposto igual a \$ 2,00 por unidade vendida, qual o novo preço que maximiza o lucro?

104. A função de demanda de um produto é $p = 30 - x$ e o custo variável por unidade é igual a 5.
   a) Que preço deve ser cobrado para maximizar o lucro, se o governo cobrar, junto ao produtor, um imposto de \$ 3,00 por unidade vendida?
   b) Se o governo cobrar um imposto fixo por unidade vendida, e a empresa produtora. maximizar seu lucro, qual o valor do imposto que maximiza a receita tributária?

105. Resolva o exercício anterior considerando um custo variável igual a 10.

106. O custo médio de fabricação de x unidades de um produto é $Cme = \frac{2.000}{x} + 20 + x$, e a função receita é $R = 200x - 2x^2$.
   a) Obtenha a função lucro.
   b) Obtenha a quantidade que deve ser produzida e vendida para maximizar o lucro.

107. O custo de produzir x unidades por dia de um produto é $C = \frac{x^2}{2} + 20x + 15$ e a equação de demanda é $p = 30 - x$. Obtenha o preço que maximiza o lucro.

108. Sabendo que a função demanda é $p = 10 - x$, e a função custo é $C = 12 + 3x$, pedem-se:
   a) O preço que maximiza o lucro;
   b) O intervalo em que deve variar o preço para que o lucro seja não negativo.

109. Com relação ao exercício anterior, que quantidade deve ser vendida para dar um lucro igual a \$ 0,25?

3.5.9 Função Polinomial

É toda função cuja imagem é um polinômio da variável x, isto é, f é uma função polinomial de grau n se:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n,$$

em que $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são todos números reais com $a_0 \neq 0$, para garantir o grau n.

Exemplo 3.28

a) A função $f(x) = 5$ é uma função polinomial de grau 0 (função constante), e seu gráfico, como já vimos, é uma reta horizontal.
b) A função $f(x) = 2x + 3$ é uma função polinomial de grau 1, e seu gráfico, como já vimos, é uma reta.
c) A função $f(x) = x^2 - 7x + 12$ é uma função polinomial de grau 2 (função quadrática), e seu gráfico, como já vimos, é uma parábola.
d) A função $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 7x + 9$ é uma função polinomial de grau 3.

O gráfico de funções polinomiais de grau 3 (ou maior que 3) não é feito com recursos elementares; utilizam-se habitualmente os conceitos de derivadas e limites que veremos nos próximos capítulos.

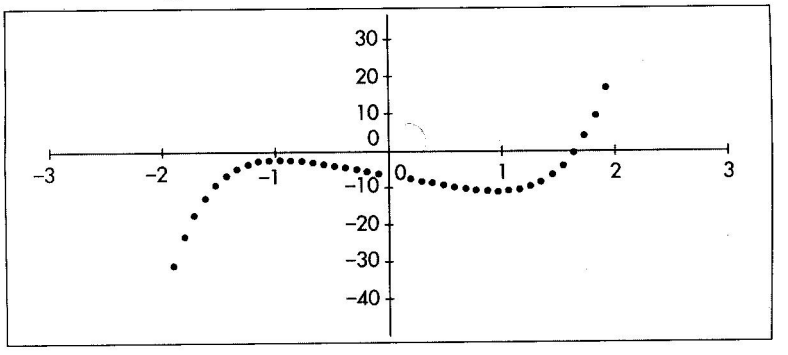
Uma ferramenta que costuma ser utilizada, quando se quer saber o comportamento gráfico de uma função, num determinado intervalo do domínio, consiste em atribuir valores para x dentro do intervalo, de forma que os valores de x estejam próximos uns dos outros. Tal procedimento é geralmente feito, como já vimos, por meio de algum aplicativo de

microinformática. Digamos que queiramos saber qual o comportamento gráfico da função

$$f(x) = x^5 - 5x - 6, \text{ dentro do intervalo } [-2, 2].$$

Vamos atribuir a x os valores: –2; –1,9; –1,8; ... ; 1,8; 1,9; 2.
Usando o aplicativo Excel, obteremos o gráfico da Figura 3.44:

Figura 3.44: Gráfico da função $f(x) = x^5 - 5x - 6$, no intervalo [–2, 2], usando o Excel.



3.5.10 Função Racional

É toda função cuja imagem é o quociente de dois polinômios, sendo o denominador um polinômio não nulo. São exemplos de funções racionais as funções:

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+8x+9}$;

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$;

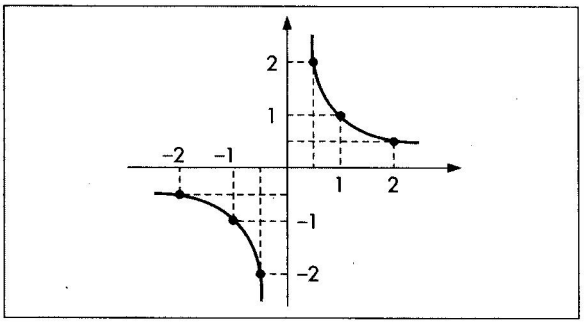
c) $f(x) = \dfrac{5}{x-3}$.

Nessa classe de funções tem particular interesse a função recíproca $f(x) = \dfrac{1}{x}$. O domínio dessa função é o conjunto dos reais excluindo o zero. À medida que x aumenta, a fração $\dfrac{1}{x}$ vai diminuindo e tendendo a zero; o mesmo ocorre se x vai diminuindo e ficando muito grande em valor absoluto.

Por outro lado, à medida que x se aproxima de zero, por valores positivos (por exemplo, assumindo os valores: 0,1; 0,01; 0,001; ...) a fração $\dfrac{1}{x}$ vai ficando cada vez maior (10; 100; 1.000; ...). À medida que x se aproxima de zero, por valores negativos (por exemplo, assumindo os valores: –0,1; –0,01; –0,001; ...) a fração $\dfrac{1}{x}$ vai ficando cada vez maior em valor absoluto, mas com sinal negativo (–10; –100; –1.000; ...).

O aspecto do gráfico dessa função é aquele da Figura 3.45. Tal curva recebe o nome de hipérbole com ramos no 1º e 3º quadrantes:

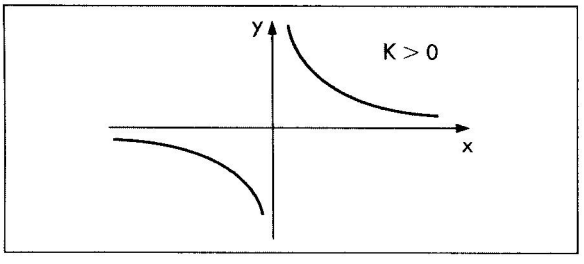
Figura 3.45: Gráfico da função $f(x) = 1/x$.



Observações

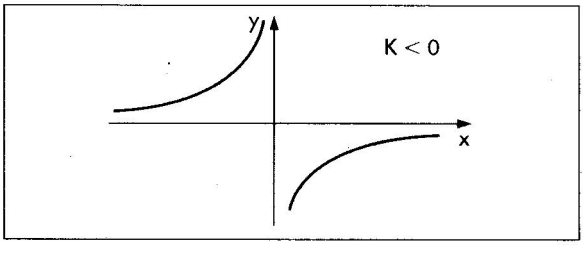
- De um modo geral, uma função do tipo $f(x) = \frac{k}{x}$, em que k é uma constante positiva, tem como gráfico uma curva semelhante à dada pela Figura 3.45; os ramos do gráfico (ramos da hipérbole) vão ficando cada vez mais para cima à medida que cresce o valor de k. O aspecto geral é o da Figura 3.46:

Figura 3.46: Gráfico da função $f(x) = K/x$, com $K > 0$.



- Se tomarmos a função $f(x) = \frac{k}{x}$, em que k é negativo, o gráfico será simétrico ao da Figura 3.46, em relação ao eixo x, ou seja, uma hipérbole com ramos no 2º e 4º quadrantes, e terá o aspecto da Figura 3.47:

Figura 3.47: Gráfico da função $f(x) = K/x$, com $K < 0$.



- Caso tenhamos uma função do tipo $y - y_0 = \dfrac{k}{x - x_0}$, em que x_0 e y_0 são valores dados, o gráfico é obtido procedendo-se da seguinte maneira:

a) Traçamos uma reta vertical pelo ponto de abscissa x_0.
b) Traçamos uma reta horizontal pelo ponto de ordenada y_0.
c) As retas traçadas determinam um novo sistema de coordenadas, com origem no ponto (x_0, y_0).
d) Se $K > 0$, o gráfico será uma hipérbole com ramos nos quadrantes 1 e 3, considerando esse novo sistema de eixos (Figura 3.48).
e) Se $K < 0$, o gráfico será uma hipérbole com ramos nos quadrantes 2 e 4, considerando esse novo sistema de eixos (Figura 3.49).

Figura 3.48: Hipérbole com $K > 0$.

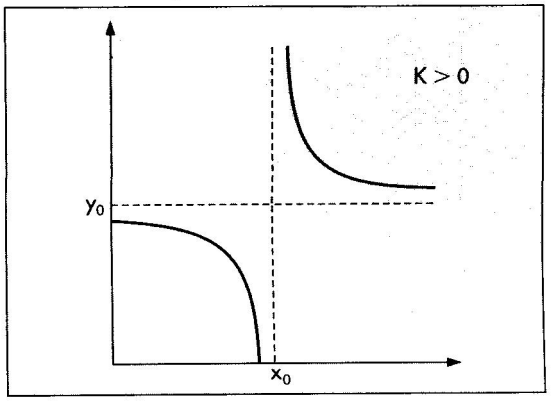
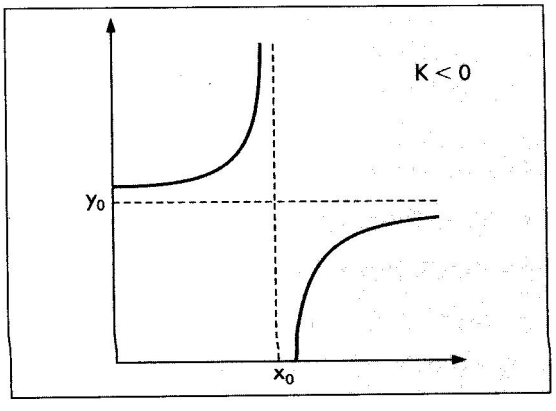


Figura 3.49: Hipérbole com $K < 0$.



A justificativa dessa observação decorre do fato de que as coordenadas de qualquer ponto em relação ao novo sistema de eixos serão $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$ (Figura 3.50) e, portanto, a equação dada em relação ao novo sistema de eixos é $Y = k/X$.

Exercícios

110. Esboce, num mesmo sistema de eixos, os gráficos das funções:

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{4}{x}$$

111. Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo:

a) $y = \frac{2}{x}$

b) $y = \frac{-3}{x}$

c) $y = \frac{1}{x-1}$

d) $y = \frac{x}{x-2}$

e) $y = \frac{3x-3}{x-2}$

f) $y = \frac{2x+4}{x-1}$

112. Obtenha o ponto de equilíbrio de mercado para as seguintes funções de demanda e oferta:

a) demanda: $p = \frac{10}{x}$

oferta: $p = 5x + 5$

b) demanda: $p = \frac{8}{x}$

oferta: $p = 6x + 2$

c) demanda: $p = \frac{60 - 5x}{x + 6}$

oferta: $p = 4 + \frac{27x}{7}$

113. Uma empresa utiliza 4.000 unidades de um componente eletrônico por ano, consumidas de forma constante ao longo do tempo. Vários pedidos são feitos por ano a um custo de transporte de \$ 300,00 por pedido.

a) Chamando de x a quantidade de cada pedido, obtenha o custo anual de transporte em função de x. Faça o gráfico dessa função.

b) Qual o custo se $x = 400$? Nesse caso, quantos pedidos são feitos por ano?

114. De acordo com Keynes (John Maynard, economista inglês, pioneiro da macroeconomia, 1883–1946), a demanda por moeda para fins especulativos é função da taxa de juros. Admita que em determinado país $y = \frac{10}{x-3}$ (para $x > 3$), em que x é a taxa anual de juros (em %) e y é a quantia (em bilhões) que as pessoas procuram manter para fins especulativos.

a) Esboce o gráfico dessa função.

b) Qual a demanda por moeda para fins especulativos se a taxa de juros for 7% ao ano?

c) O que acontece com a demanda quando x se aproxima de 3% ao ano?

115. Repita o exercício anterior com a função $y = \frac{15}{x-1}$. No caso do item c, considere x aproximando-se de 1% ao ano.

3.5.11 Função Potência

Chamamos de função potência a toda função do tipo $f(x) = x^n$. Quando $n = 0$ ou $n = 1$ e $n = 2$, temos situações particulares já estudadas que são as funções constantes, do 1º grau e a quadrática, respectivamente. Para outros valores de n, o gráfico varia dependendo da natureza de n. Podemos considerar os seguintes casos:

1º caso: suponhamos que n seja um número natural ímpar maior que 1.
Consideremos, por exemplo, as funções: $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^5$ e $f_3(x) = x^7$.

a) Domínio: todas elas têm por domínio o conjunto R, pois para todo x real existe imagem.
b) Interceptos: todos os gráficos passam pela origem.
c) Façamos a escolha de alguns valores para x e calculemos as respectivas imagens:

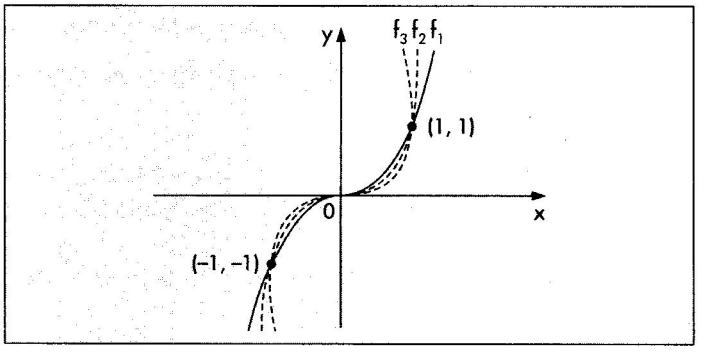
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
-3	-27	-243	-2.187
-2	-8	-32	-128
-1	-1	-1	-1
0	0	0	0
1	1	1	1
2	8	32	128
3	27	243	2.187

Podemos concluir que:

- Todas as funções desse tipo passam pelos pontos (0, 0), (–1, –1) e (1, 1).
- Quando atribuímos a x valores simétricos, as imagens possuem o mesmo valor absoluto, mas diferem em sinal.
- Quando x aumenta muito, o mesmo sucede com as imagens dessas funções. Se x aumenta muito em valor absoluto, porém com o sinal negativo, o mesmo sucede com as imagens.

Os gráficos dessas funções são dados na Figura 3.53.

Figura 3.53: Gráficos das funções potência para n ímpar e $n \geqslant 3$.



Em resumo, para n ímpar maior ou igual a 3, o gráfico de $f(x) = x^n$ tem o aspecto das funções dadas pela Figura 3.53, sendo mais ou menos fechados de acordo com o valor de n. É fácil notar também que o conjunto imagem dessas funções é o conjunto R.

2º caso: suponhamos que n seja par e maior que 2.
Consideremos por exemplo as funções: $f_1(x) = x^4$, $f_2(x) = x^6$ e $f_3(x) = x^8$.

a) Domínio: todas elas têm por domínio o conjunto R, pois para todo x real existe imagem.
b) Interceptos: todos os gráficos passam pela origem.
c) Façamos a escolha de alguns valores para x e calculemos as respectivas imagens:

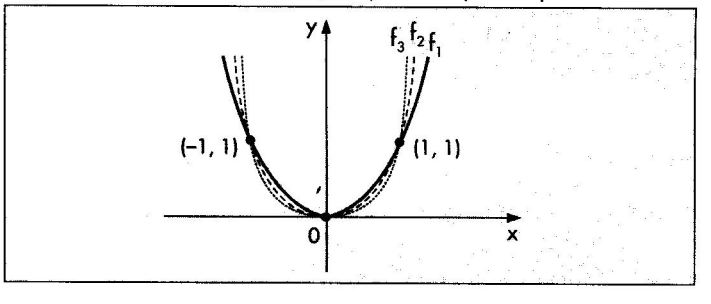
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
-3	81	729	6.561
-2	16	64	256
-1	1	1	1
0	0	0	0
1	1	1	1
2	16	64	256
3	81	729	6.561

Podemos concluir que:

- Todas as funções desse tipo passam pelos pontos (0, 0) , (–1, 1) e (1, 1).
- Quando atribuímos a x valores simétricos, as imagens são iguais, isto é $f(-x) = f(x)$, para essas funções.
- Quando x aumenta muito, o mesmo sucede com as imagens dessas funções. Se x aumenta muito em valor absoluto, porém com o sinal negativo, as imagens aumentam muito e são positivas.

Os gráficos dessas funções são dados na Figura 3.54.

Figura 3.54: Gráfico das funções potência para n par e $n \geqslant 2$.



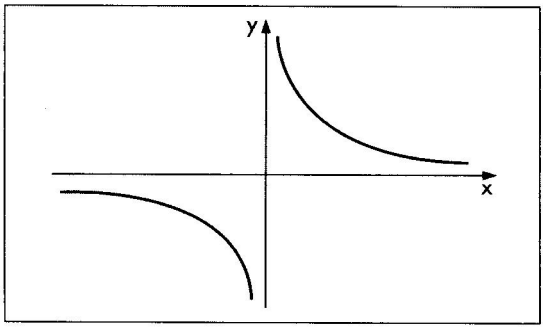
Em resumo, para n par maior que 2, o gráfico de $f(x) = x^n$ tem o aspecto das funções dadas pela Figura 3.54, sendo mais ou menos fechados de acordo com o valor de n. É fácil notar também que o conjunto imagem dessas funções é o conjunto dos reais não negativos.

3º caso: suponhamos que n seja ímpar negativo.

Consideremos por exemplo a função: $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.

a) Domínio: $R - \{0\}$.
b) Interceptos: não há.
c) Gráfico: é uma hipérbole, conforme vimos no estudo das funções racionais (Figura 3.55).

Figura 3.55: Gráfico da função $f(x) = 1x$.



Pode-se verificar (construindo-se tabelas de valores) que as demais funções desse tipo $\left(\text{por exemplo, } f(x) = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3} \text{ ou } f(x) = x^{-5} = \dfrac{1}{x^5}\right)$ possuem um padrão gráfico semelhante ao da Figura 3.55. O conjunto imagem dessas funções é o conjunto $R - \{0\}$.

4º caso: suponhamos que n seja par negativo.

Consideremos por exemplo a função: $f(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$.

a) Domínio: $R - \{0\}$.
b) Interceptos: não há.
c) Façamos a escolha de alguns valores para x e calculemos as respectivas imagens:

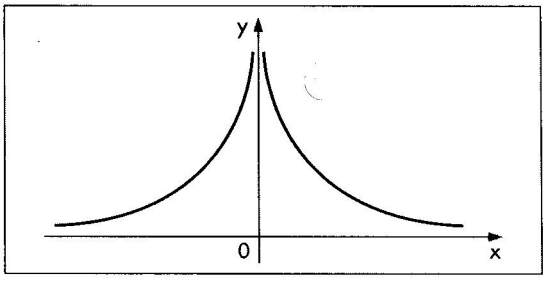
x	-3	-2	-1	-1/2	-1/4	1/4	1/2	1	2	3
$f(x)$	1/9	1/4	1	4	16	16	4	1	1/4	1/9

Podemos concluir que:

- Quando atribuímos a x valores simétricos, as imagens são iguais, isto é, $f(-x) = f(x)$, para essas funções.
- Quando x aumenta muito, as imagens se aproximam de zero. Se x aumenta muito em valor absoluto, porém com o sinal negativo, as imagens também se aproximam de zero.
- Quando x se aproxima de zero por valores positivos, as imagens são cada vez maiores. Quando x se aproxima de zero por valores negativos, as imagens são também cada vez maiores.

O gráfico dessa função é dado pela Figura 3.56. Seu conjunto imagem é o conjunto dos reais positivos.

Figura 3.56: Gráfico da função $f(x) = 1/x^2$.



Pode-se verificar (construindo-se tabelas de valores) que as demais funções desse tipo $\left(\text{por exemplo, } f(x) = x^{-4} = \frac{1}{x^4} \text{ ou } f(x) = x^{-6} = \frac{1}{x^6}\right)$ possuem um padrão gráfico semelhante ao da Figura 3.56. O conjunto imagem dessas funções é o conjunto dos reais positivos.

5º caso: suponhamos que n seja igual a $\frac{1}{2}$. Isto é $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

a) Domínio: conjunto dos reais não negativos.
b) Interceptos: (0, 0).
c) Façamos a escolha de alguns valores para x e calculemos as respectivas imagens:

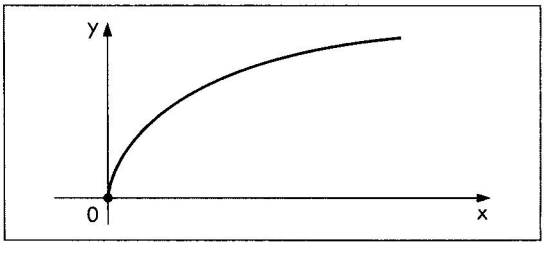
x	0	1/4	1	2,25	4	9	16	25	36
$f(x)$	0	1/2	1	1,5	2	3	4	5	6

Podemos concluir que:

- Quando x aumenta muito as imagens são cada vez maiores.

O gráfico dessa função é dado pela Figura 3.57. Seu conjunto imagem é o conjunto dos reais não negativos.

Figura 3.57: Gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$.



Terão igual comportamento gráfico as funções $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $f(x) = \sqrt[6]{x}$ etc.

6º caso: suponhamos que n seja igual a $\frac{1}{3}$, isto é $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

a) Domínio: R.
b) Interceptos: (0, 0).
c) Façamos a escolha de alguns valores para x e calculemos as respectivas imagens:

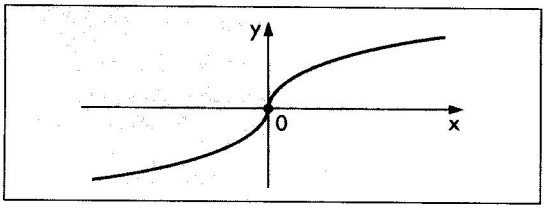
x	-27	-8	-1	-1/8	0	1/8	1	8	27
$f(x)$	-3	-2	-1	-1/2	0	1/2	1	2	3

Podemos concluir que:

- Quando x aumenta muito as imagens são cada vez maiores. Quando x aumenta muito em valor absoluto, mas com sinal negativo, as imagens são cada vez maiores em valor absoluto, mas também com sinal negativo .
- Valores simétricos de x têm imagens simétricas, isto é, $f(-x) = -f(x)$.

O gráfico dessa função é dado pela Figura 3.58. Seu conjunto imagem é o conjunto dos reais .

Figura 3.58: Gráfico da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$.



Terão igual comportamento gráfico as funções $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $f(x) = \sqrt[7]{x}$ etc.

Exercícios

116. Esboce os gráficos das funções abaixo:

a) $f(x) = x^3$
b) $f(x) = x^5$
c) $f(x) = x^{-3}$
d) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$
e) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$
f) $f(x) = x^4$
g) $f(x) = \sqrt[4]{x}$
h) $f(x) = x^{-4}$
i) $f(x) = x^{-6}$
j) $f(x) = 2x^3$
k) $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$
l) $f(x) = 8x^{0,75}$

117. Obtenha o ponto de equilíbrio de mercado para as seguintes funções de demanda e oferta:

a) demanda: $p = \frac{1}{x^2}$, oferta: $p = x$;

b) demanda: $p = \frac{1}{x^2}$, oferta: $p = x^3$.

118. Função de produção. Denomina-se função de produção à relação entre a quantidade física dos fatores de produção, tais como capital, trabalho, e outros, e a quantidade física do produto na unidade de tempo. Se considerarmos fixos todos os fatores menos um, a quantidade produzida será função desse fator. Chamando de P a quantidade produzida na unidade de tempo e x a quantidade do fator variável utilizado na unidade de tempo, teremos a função de produção $P = f(x)$.

Chamamos de produtividade média do fator variável o valor indicado por P_m dado por $P_m = P/x$. Considere a função de produção dada por $P = 100 \cdot x^{\frac{1}{2}}$, em que P é o número de sacas de café produzidas por ano numa fazenda, e x, o número de pessoas empregadas por ano.

a) Quantas sacas serão produzidas se forem empregadas 16 pessoas por ano? Qual a produtividade média?

b) Quantas sacas serão produzidas se forem empregadas 64 pessoas por ano? Qual a produtividade média?

c) O que acontecerá com a quantidade produzida se o número de pessoas empregadas quadruplicar?

d) Qual a produção anual se o número de pessoas empregadas for zero?

e) Faça o gráfico de P em função de x.

119. Considere a seguinte função de produção $P = 10x^{\frac{2}{3}}$, em que P é o número de mesas produzidas por semana numa marcenaria (com certo número fixo de empregados) e x, o número de serras elétricas utilizadas.

a) Quantas mesas serão produzidas por semana se forem utilizadas 8 serras? Qual a produtividade média?

b) Quantas mesas serão produzidas por semana se forem utilizadas 64 serras? Qual a produtividade média?

c) O que acontecerá com a quantidade produzida se o número de serras ficar 8 vezes maior?

d) Qual a produção se o número de serras for igual a zero?

e) Fazer o gráfico de P em função de x.

120. Lei da distribuição de renda de Pareto. O economista italiano Vilfredo Pareto (1848–1907), em seus estudos sobre a distribuição de renda, propôs um modelo conhecido como Lei de Pareto da distribuição da renda. Em sua forma simplificada, o modelo sustenta que

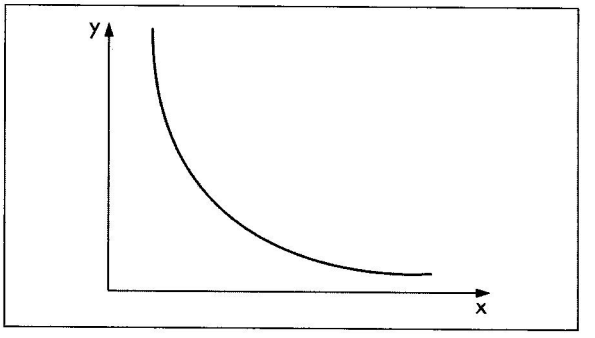
$$y = \frac{A}{x^{\alpha}},$$

em que:

- y é o número de pessoas cujas rendas são maiores ou iguais a x;
- x é a renda de um indivíduo da população considerada;
- A é uma constante que depende da população em questão;
- α é o parâmetro que caracteriza a distribuição da renda.

O gráfico dessa função é dado pela Figura 3.59.

Figura 3.59: Curva de distribuição de renda de Pareto.



Numa população, a distribuição da renda é dada por $y = \dfrac{35 \cdot (10)^6}{x^{1,5}}$ em que x é a renda mensal de cada pessoa.

a) Quantas pessoas ganham pelo menos \$ 15.000,00 por mês?
b) Quantas pessoas têm uma renda maior ou igual a \$ 8.000,00 por mês?
c) Qual a menor renda das 500 pessoas com renda mais alta?
d) Qual o gráfico de y em função de x?

121. Numa população, a distribuição da renda é dada por $y = \dfrac{4 \cdot (10)^8}{x^{1,8}}$ em que x é a renda mensal de cada pessoa.

a) Quantas pessoas ganham pelo menos \$ 6.000,00 por mês?
b) Qual a menor renda das 1.000 pessoas com renda mais alta?
c) Qual a menor renda das 4.000 pessoas com renda mais alta?
d) Qual o gráfico de y em função de x?

3.5.12 Função Exponencial — Modelo de Crescimento Exponencial

Suponhamos que uma população tenha hoje 40.000 habitantes e que haja um crescimento populacional de 2% ao ano. Assim:

- daqui a 1 ano o número de habitantes será

$$y_1 = 40.000 + (0,02) \cdot 40.000 = 40.000(1 + 0,02);$$

- daqui a 2 anos o número de habitantes será

$$y_2 = y_1 + 0,02y_1 = y_1(1 + 0,02) = 40.000(1,02)^2;$$

- daqui a 3 anos o número de habitantes será

$$y_3 = y_2 + 0,02y_2 = y_2(1 + 0,02) = 40.000(1,02)^3.$$

De modo análogo, podemos concluir que o número de habitantes daqui a x anos será $y = 40.000(1,02)^x$.