Snow666

COEFICIENTE DE ASSIMETRIA DE PEARSON

$$SK = \frac{3\,(\textit{média} - \textit{mediana})}{\textit{desvio-padrão}}$$

Para uma distribuição perfeitamente simétrica, como a representada na Figura 4.1, a média e a mediana coincidem e $SK = 0$. Em geral, os valores do coeficiente de assimetria de Pearson devem cair entre –3 e 3, e deveria ser observado que a divisão pelo desvio-padrão torna SK independente da escala de medição.

EXEMPLO 4.8 Calcule SK para a distribuição de tempos de espera entre erupções do gêiser *Old Faithful* usando os resultados dos Exemplos 3.21, 3.22 e 4.7, onde mostramos que $\bar{x} = 78{,}59$, $\tilde{x} = 80{,}53$ e $s = 14{,}35$.

Solução Substituindo esses valores na fórmula de SK, obtemos

$$SK = \frac{3(78{,}59 - 80{,}53)}{14{,}35} \approx -0{,}41$$

que mostra que existe uma assimetria negativa bem definida, embora fraca. Isso também é visível a partir do histograma da distribuição, mostrado originalmente na Figura 2.3 e novamente aqui na Figura 4.5, reproduzida do visor de uma calculadora gráfica TI-83.

Quando um conjunto de dados é tão pequeno que não conseguimos construir um histograma que faça algum sentido, podemos aprender bastante sobre seu formato a partir de um gráfico de caixa (originalmente definido à página 70). Enquanto que o coeficiente de assimetria de Pearson é baseado na diferença entre a média e a mediana, com um gráfico de caixa julgamos a simetria ou assimetria de um conjunto de dados a partir da posição da mediana em relação aos

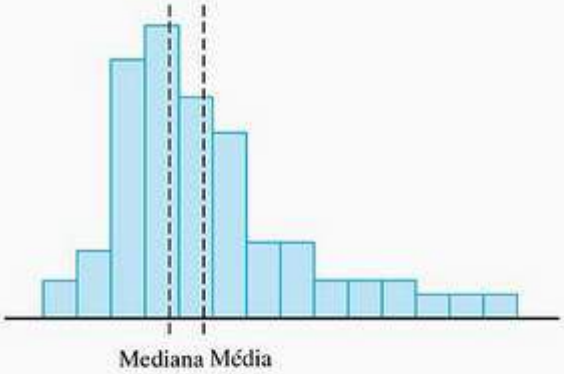

Figura 4.4 Média e mediana de distribuição positivamante assimétrica.

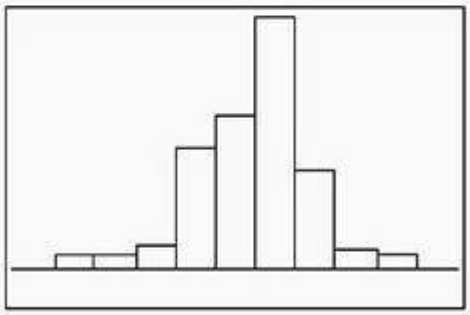

Figura 4.5 Histograma da distribuição de tempos de espera entre erupções do *Old Faithful*.

Snow666

dois quartis Q_1 e Q_3. Em particular, se a reta na mediana está no centro ou próximo dele, isso é uma indicação da simetria dos dados; se estiver visivelmente à esquerda do centro, isso é uma indicação da assimetria positiva dos dados; e se estiver visivelmente à direita do centro, isso é uma indicação da assimetria negativa dos dados. O comprimento relativo dos dois "bigodes", que se estendem desde o menor valor até Q_1 e de Q_3 até o maior valor, também podem ser usados como uma indicação de simetria ou de assimetria.

EXEMPLO 4.9 A seguir apresentamos os rendas anuais de quinze peritos-contadores em milhares de unidades monetárias: 88, 77, 70, 80, 74, 82, 85, 96, 76, 67, 80, 75, 73, 93 e 72. Esboce um gráfico de caixa e use-o para determinar a simetria ou a falta de simetria dos dados.

Solução Arranjando os dados de acordo com seu tamanho, obtemos 67, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 80, 80, 82, 85, 88, 93 e 96, e pode ser visto que o menor valor é 67; o maior valor é 96; a mediana é 77, que é o oitavo valor a partir de qualquer extremidade; Q_1 é 73, que é o quarto valor a partir da esquerda; Q_3 é 85, que é o quarto valor a partir da direita. Toda essa informação está resumida no gráfico de caixa produzido por MINITAB mostrado na Figura 4.6. Como pode ser visto, há uma indicação forte de que os dados são negativamente assimétricos. A reta no mediana está bem à esquerda do centro da caixa e o "bigode" da direita é bem maior do que o da esquerda.

Além das distribuições estudadas nesta seção, duas outras que eventualmente encontramos na prática são a **distribuição em forma de J invertido** e a **distribuição em forma de U** mostradas na Figura 4.7. Como podemos ver pela figura, os nomes dessas distribuições literalmente descrevem sua forma. Nos Exercícios 4.45 e 4.47 podem ser encontrados exemplos dessas distribuições.

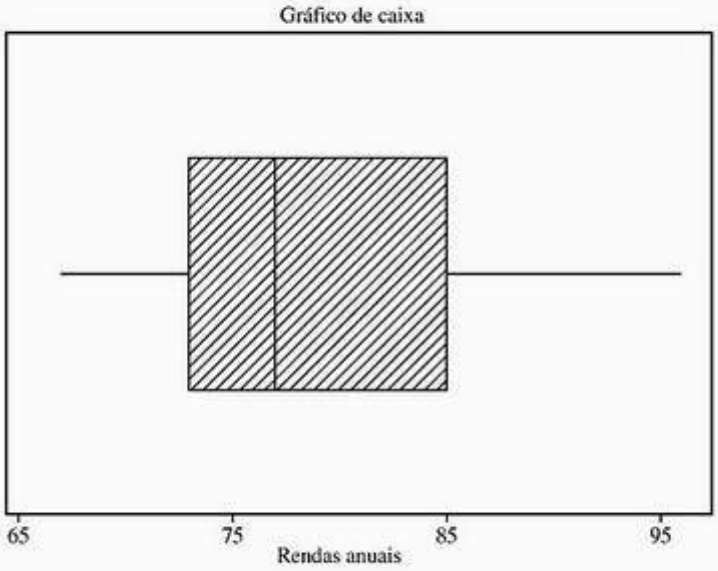

Figura 4.6 Gráfico de caixa das rendas anuais dos peritos-contadores do Exemplo 4.9.

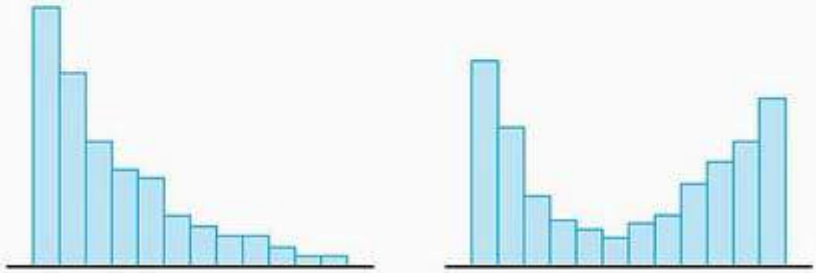

Figura 4.7 Distribuições em forma de J invertido e em forma de U.

Snow666

EXERCÍCIOS

***4.32** Numa fábrica ou escritório durante o expediente, o tempo durante o qual uma máquina não está funcionando em virtude de quebra ou falha é denominado *tempo parado*. A distribuição seguinte dá uma amostra da duração desses tempos parados de certa máquina (arredondados até o minuto mais próximo).

Tempo parado (minutos)	*Freqüência*
0–9	2
10–19	15
20–29	17
30–39	13
40–49	3

Encontre o desvio-padrão dessa distribuição.

***4.33** Com referência ao Exercício 3.64, encontre o desvio-padrão da distribuição de alunos bilíngües das 50 escolas de Ensino Fundamental.

***4.34** Use os resultados dos Exercícios 3.64 e 4.33 para calcular o coeficiente de assimetria de Pearson da distribuição das percentagens de alunos bilíngües. Discuta a simetria ou assimetria dessa distribuição.

***4.35** Com referência ao Exercício 3.65, encontre o desvio-padrão da distribuição das forças de compressão das 120 amostras de concreto.

***4.36** Use os resultados dos Exercícios 3.65 e 4.35 para calcular o coeficiente de assimetria de Pearson da distribuição das forças de compressão.

***4.37** A seguir temos a distribuição das notas que 500 alunos obtiveram num teste de geografia:

Nota	*Número de alunos*
10–24	44
25–39	70
40–54	92
55–69	147
70–84	115
85–99	32

Calcule

(a) a média e a mediana;
(b) o desvio-padrão.

***4.38** Use os resultados do Exercício 4.37 para calcular o coeficiente de assimetria de Pearson da distribuição dada e discuta a simetria (ou sua falta) dessa distribuição.

***4.39** Com referência à distribuição do Exercício 3.68, encontre o coeficiente de assimetria de Pearson do número de *tacos* de peixe servidos num restaurante mexicano.

***4.40** A seguir temos a quantidade de acidentes que ocorreram durante julho de 1999 numa certa localidade em 20 cruzamentos sem proibição de conversão à esquerda:

Snow666

25	30	32	22	26	10	2	32	6	13
27	22	18	12	28	35	8	29	31	8

Encontre a mediana, Q_1 e Q_3.

***4.41** Use os resultados do Exercício 4.40 para construir um gráfico de caixa, e use-o para discutir a simetria ou assimetria desses dados de acidentes.

***4.42** A seguir temos os tempos de resposta (em picosegundos) de 30 circuitos integrados:

3,7	4,1	4,5	4,6	4,4	4,8	4,3	4,4	5,1	3,9
3,3	3,4	3,7	4,1	4,7	4,6	4,2	3,7	4,6	3,4
4,6	3,7	4,1	4,5	6,0	4,0	4,1	5,6	6,0	3,4

Construa um diagrama de ramos e folhas usando os dígitos de unidades como ramos e os de décimos como folhas. Use esse diagrama de ramos e folhas para decidir sobre a simetria desses dados, ou sua falta.

***4.43** Com referência ao Exercício 4.42, obtenha toda a informação necessária para esboçar um gráfico de caixa. Em seguida, use essa informação para esboçar um gráfico de caixa e decida sobre a simetria ou assimetria dos tempos de resposta desses circuitos integrados.

***4.44** Com referência ao Exercício 3.29, obtenha toda a informação necessária para esboçar um gráfico de caixa, esboce um gráfico de caixa, e use-o para decidir sobre a simetria ou falta de simetria da duração dos jogos da liga de basquete profissional dos Estados Unidos.

***4.45** A seguir estão as quantidades de 3 obtidos em cinqüenta lançamentos de quatro dados: 0, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 3, 1, 1, 0, 4, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1 e 1. Construa uma distribuição de freqüência e use-a para determinar o formato global dos dados.

***4.46** Com referência ao Exercício 4.45, obtenha toda a informação necessária para esboçar um gráfico de caixa. Em seguida, esboce o gráfico de caixa e use-o para descrever a simetria dos dados, ou sua falta. Também determinar o formato global dos dados.

***4.47** Jogando uma moeda cinco vezes seguidas, o resultado pode ser representado por meio de uma seqüência de letras K e C (por exemplo, KKCCK), onde K representa cara e C representa coroa. Tendo obtido uma tal seqüência de letras K e C, podemos verificar, após cada jogada se o número de caras excede o número de coroas. Por exemplo, na seqüência KKCCK, cara está na frente após o primeiro lançamento, após o segundo e após o terceiro lançamento, não após o quarto, mas novamente após o quinto lançamento. No total, cara está na frente quatro vezes. Na verdade, repetimos esse "experimento" sessenta vezes e constatamos que cara estava na frente

1	1	5	0	0	5	0	1	2	0	1	0	5	1	0
0	5	0	0	0	0	1	0	0	5	0	2	0	1	0
5	5	0	5	4	3	5	0	5	0	1	5	0	1	5
3	1	5	5	2	1	2	4	2	3	0	5	5	0	0

vezes. Construa uma distribuição de freqüência e decida sobre o formato global dos dados.

***4.48** Com referência ao Exercício 4.47, encontre toda a informação necessária para construir um gráfico de caixa. Quais características do gráfico de caixa sugerem que os dados apresentam uma forma bastante incomum?

Snow666

4.6 LISTA DE TERMOS-CHAVE (com indicação das páginas de suas definições)

Amplitude, 86
Amplitude interquartil, 86
Amplitude semi-interquartil, 86
Coeficiente de assimetria de Pearson, 98
Coeficiente de dispersão, 92
Coeficiente de dispersão quartil, 95
Desvio da média, 87
Desvio da raiz dos quadrados médios, 87
Desvio médio, 87
Desvio quartil, 86
Desvio-padrão, 87
Desvio-padrão amostral, 87
Desvio-padrão populacional, 87
Distribuição assimétrica, 98
Distribuição em forma de J invertido, 100
Distribuição em forma de sino, 98
Distribuição em forma de U, 100
Distribuição negativamente assimétrica, 98
Distribuição positivamente assimétrica, 98
Escores *z*, 91
Estimador não-tendencioso, 88
Estimador tendencioso, 88
Medidas de assimetria, 98
Medidas de dispersão, 85
Medidas de dispersão relativa, 92
Regra empírica, 91
Teorema de Tchebichev, 89
Unidades padronizadas, 91
Variância, 87
Variância amostral, 87
Variância populacional, 87

4.7 REFERÊNCIAS

Uma demonstração de que a divisão por n – 1 torna a variância amostral um estimador não-tendencioso da variância populacional pode ser encontrada na maioria dos livros de Estatística matemática; por exemplo, em

MILLER, I., and MILLER, M., *John E. Freund's Mathematical Statistics*, 6th ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1998.

Alguma informação sobre o efeito de agrupar no cálculo de várias descrições estatísticas pode ser encontrada em alguns textos mais antigos sobre Estatística; por exemplo, em

MILLS, F. C., *Introduction to Statistics*, New York: Holt, Rinehart and Winston, 1956.

Snow666

EXERCÍCIOS DE REVISÃO PARA OS CAPÍTULOS 1, 2, 3 E 4

R.1 A quantidade de objetos encontrados numa escavação arqueológica dêem ser agrupados numa tabela com as classes 0–4, 5–14,15–24, 23–35, e 40 ou mais. Explique onde podem surgir dificuldades.

R.2 Em quatro dias um inspetor da prefeitura de uma certa cidade registrou 12, 8, 22 e 6 violações do código de construção civil. Quais das conclusões seguintes podem ser obtidas desses dados por métodos puramente descritivos e quais requerem generalizações? Explique suas respostas.

(a) No total, o inspetor da prefeitura registrou 48 violações do código de construção civil nesses quatro dias.

(b) Esse inspetor da prefeitura raramente (se não nunca) registra mais do que 25 violações do código de construção civil num único dado dia.

(c) O inspetor da prefeitura registrou somente 6 violações no quarto dia porque começou a chover e ele voltou para a prefeitura logo depois de um lanche.

(d) Provavelmente, a terceira quantidade foi registrada erradamente e deveria ter sido 12 em vez de 22.

(e) Na média, o inspetor da prefeitura registrou 12 violações do código de construção civil.

R.3 Exiba os dados que estão agrupados no seguinte diagrama de ramos e folhas com folhas unitárias.

12	3	5				
13	0	4	7	8		
14	1	3	4	6	6	9
15	0	2	2	5	8	
16	1	7				

R.4 Vinte pilotos foram testados num simulador de vôo. A seguir estão os tempos (em segundos) que eles levaram para reagir diante de uma situação de emergência: 4,9; 10,1; 6,3; 8,5; 7,7; 6,3; 3,9; 6,5; 6,8; 9,0; 11,3; 7,5; 5,8; 10,4; 8,2; 7,4; 4,6; 5,3; 9,7; e 7,3. Encontre

(a) a mediana;

(b) Q_1 e Q_3.

R.5 Use os resultados obtidos no Exercício R.4 para construir um gráfico de caixa dos dados fornecidos.

R.6 Explique por que é impossível ter $n = 6$, $\sum x = 18$ e $\sum x^2 = 47$ para um conjunto de dados qualquer.

R.7 A seguir está a distribuição do número de erros cometidos por 80 alunos de pós-graduação na tradução de um trecho do francês para o português, como parte do requisito de proficiência em línguas para o título de pós-graduação:

Número de erros	Número de alunos
0–4	34
5–9	20
10–14	15
15–19	9
20–24	2

Snow666

Calcule:

(a) a média;
(b) a mediana;
(c) o desvio-padrão;
(d) o coeficiente de assimetria de Pearson.

R.8 Transforme a distribuição do Exercício R.7 numa distribuição cumulativa do tipo "ou menos".

R.9 Um especialista encontrou as seguintes concentrações de mercúrio, em partes por milhão, em 32 peixes pescados num certo rio:

0,045	0,063	0,049	0,062	0,065	0,054	0,050	0,048
0,072	0,060	0,062	0,054	0,049	0,055	0,058	0,067
0,055	0,058	0,061	0,047	0,063	0,068	0,056	0,057
0,072	0,052	0,058	0,046	0,052	0,057	0,066	0,054

(a) Construa um diagrama de ramos e folhas com rótulos de ramos 0,04; 0,05; 0,06; e 0,07.
(b) Use o diagrama de ramos e folhas obtido na parte (a) para determinar a mediana, Q_1 e Q_3.
(c) Esboce um gráfico de caixa e use-o para descrever o formato global dos dados fornecidos.

R.10 De acordo com o teorema de Tchebichev, o que pode ser afirmado sobre a percentagem de qualquer conjunto de dados que deve estar a k desvios-padrão da média, quando (a) $k = 3{,}5$; (b) $k = 4{,}5$?

R.11 Um meteorologista possui dados completos para os 10 últimos anos relativos à quantidade de dias de janeiro em que a temperatura máxima em Salvador da Bahia excedeu os 43 graus. Exemplifique uma situação de cada em que o meteorologista interpretaria esses dados como

(a) uma população;
(b) uma amostra.

R.12 Os escores de QI são, às vezes, interpretados como dados intervalares. Qual conclusão isso acarretaria sobre as diferenças de inteligência de três pessoas com QI dados por 95, 100 e 115? Essa conclusão é razoável?

R.13 Reformule o Exemplo 14.1 citado à página 17 de modo que seja de interesse especial para

(a) um advogado;
(b) um escritor de historias de suspense.

R.14 A seguir estão as quantidade de artigos publicados em periódicos científicos por quarenta professores de uma universidade: 12, 8, 22, 45, 3, 27, 18, 12, 6, 32, 15, 17, 4, 19, 10, 2, 9, 16, 21, 17, 18, 11, 15, 2, 13, 15, 27, 16, 1, 5, 6, 15, 11, 32, 16, 10, 18, 4, 18 e 19. Determine

(a) a média;
(b) a mediana;

R.15 Certos cabos metálicos produzidos em massa têm um diâmetro médio de 24,00 mm com um desvio-padrão de 0,03 mm. Pelo menos qual percentagem dos cabos têm diâmetros entre 23,91 e 24,09 mm?

R.16 Dentre os formandos de uma universidade, 45 graduados em Ciência da Computação tiveram ofertas de salário com uma média de 31.100 unidades monetárias (arredondados até a centena mais próxima), 63 graduados em Matemática tiveram ofertas de salário com uma média de 30.700 unidades monetárias, 112 graduados em Engenharia tiveram

Snow666

ofertas de salário com uma média de 35.000 unidades monetárias e 35 graduados em Química tiveram ofertas de salário com uma média de 30.400 unidades monetárias. Encontre a oferta de salário médio desses 255 formandos.

R.17 A partir da distribuição do Exercício R.7, podemos determinar quantos dos 80 alunos de pós-graduação cometeram

(a) mais do que 14 erros;
(b) alguma quantidade entre 5 e 19 erros;
(c) exatamente 17 erros;
(d) alguma quantidade entre 10 e 20 erros?

Se possível, forneça respostas numéricas.

R.18 A seguir estão as quantidades de baleias que foram vistas saltando para fora da água durante sessenta passeios de observação de baleias na costa sul da Califórnia:

10	18	14	9	7	3	14	16	15	8	12	18
13	6	11	22	18	8	22	13	10	14	8	5
8	12	16	21	13	10	7	3	15	24	16	18
12	18	10	8	6	13	12	9	18	23	15	11
19	10	11	15	12	6	4	10	13	27	14	6

Determine a média, a mediana e o desvio-padrão desses dados.

R.19 Use os resultados obtidos no Exercício R.18 para calcular o coeficiente de dispersão.

R.20 Agrupe os dados do Exercício R.18 numa distribuição de classes 0–4, 5–9, 10–14, 15–19, 20–24 e 25–29. Também esboce um histograma dessa distribuição.

R.21 Com referência aos dados do Exemplo 2.4, os tempos de espera entre erupções do *Old Faithful*, agrupe-os numa distribuição com classes 25–39, 40–54, 55–69, 70–84, 85–99, 100–114 e 115–129. Também esboce um histograma dessa distribuição e compare-o com o mostrado na Figura 2.3.

R.22 O salário médio por hora de trabalho dos empregados no setor de carnes de um supermercado é de 8,20 unidades monetárias para os homens e 8,00 unidades monetárias para as mulheres. No departamento de hortifrutigranjeiros, os números correspondentes são de 7,80 e 7,60 unidades monetárias, de modo que em ambos setores os homens recebem mais do que as mulheres. É de todo possível que em ambos setores *combinados* as mulheres recebam mais do que os homens?

R.23 Os limites de classe de uma distribuição de pesos (em gramas) são 10–29, 30–49, 50–69, 70–89 e 90–109. Encontre:

(a) as fronteiras de classe;
(b) os pontos médios de classe;
(c) o intervalo de classe da distribuição.

R.24 Para um certo conjunto de dados, o menor valor é 5,0, o maior valor é 65,0, a mediana é 15,0, o primeiro quartil é 11,5 e o terceiro quartil é 43,5. Esboce um gráfico de caixa e discuta a simetria ou assimetria do conjunto de dados.

R.25 Dados $x_1 = 3{,}5$, $x_2 = 7{,}2$, $x_3 = 4{,}4$ e $x_4 = 2{,}0$, encontre:

(a) $\sum x$;
(b) $\sum x^2$;
(c) $(\sum x)^2$.

Snow666

R.26 Se uma população consiste nos inteiros 1, 2, 3,..., e k, sua variância é $\sigma^2 = \frac{k^2-1}{12}$. Verifique esta fórmula para

(a) $k = 3$;
(b) $k = 5$.

R.27 Para um certo conjunto de dados, a média é 19,5 e o coeficiente de dispersão é 32%. Encontre o desvio-padrão.

R.28 Obteremos dados nominais ou dados ordinais quando

(a) os consumidores devem dizer se preferem a Marca X à Marca Y, se gostam de ambas igualmente ou se preferem a Marca Y à Marca X;
(b) os consumidores devem dizer se preferem a Marca X à Marca Y, se gostam de ambas igualmente, se preferem a Marca Y à Marca X ou se não têm opinião formada?

R.29 Na construção de uma distribuição categórica, as camisas de homem são classificadas de acordo a fibra do tecido, em algodão, seda, linho ou fibras sintéticas. Explique onde podem surgir dificuldades.

R.30 Em trinta dias, havia 2, 3, 1, 1, 3, 0, 0, 2, 1, 2, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 2, 3, 2, 2, 2, 1, 0 e 2 enfermeiras registradas trabalhando numa clínica de repouso. Construa um diagrama de pontos.

R.31 As quantidades diárias de pessoas visitando um museu de arte são agrupadas numa distribuição com classes 0–29, 30–59, 60– 89 e 90 ou mais. A distribuição resultante poderá ser utilizada para determinar em quantos dias

(a) pelo menos 89 pessoas visitaram o museu;
(b) mais de 89 pessoas visitaram o museu;
(c) algum número entre 30 e 89 pessoas visitaram o museu;
(d) mais de 100 pessoas visitaram o museu?

R.32 Se um certo conjunto de medições em a média $\bar{x} = 45$ e o desvio-padrão $s = 8$, transforme cada um dos seguintes valores de x em unidades padronizadas:

(a) $x = 65$;
(b) $x = 39$;
(c) $x = 55$.

R.33 Explique por que os dados a seguir podem deixar de fornecer a informação desejada.

(a) Para determinar a reação do público a certas restrições sobre importações, um entrevistador pergunta aos eleitores: "Você acha que essas práticas injustas deveriam acabar?"
(b) Para prever o resultado de uma eleição para governador do estado, uma pesquisa de opinião pública entrevistou pessoas selecionadas aleatoriamente do catálogo telefônico de uma cidade.

R.34 A seguir estão as quantidades de alarmes falsos recebidos por um serviço de segurança em vinte noites: 9, 8, 4, 12, 15, 5, 5, 9, 3, 2, 6, 12, 5, 17, 6, 3, 7, 10, 8 e 4. Construa um gráfico de caixa e discuta a simetria ou assimetria dos dados.

R.35 A distribuição a seguir foi obtida num estudo da produtividade de 100 trabalhadores durante duas semanas:

Snow666

Número de peças produzidas aceitáveis	Número de trabalhadores
15–29	3
30–44	14
45–59	18
60–74	26
75–89	20
90–104	12
105–119	7

Encontre

(a) as fronteiras de classe;
(b) os pontos médios de classe;
(c) o intervalo de classe.

R.36 Esboce um histograma da distribuição do Exercício R.35.

R.37 Transforme a distribuição do Exercício R.35 numa distribuição cumulativa do tipo "menos de" e trace uma ogiva.

R.38 Calcule a média, a mediana e o desvio-padrão da distribuição do Exercício R.35. Também determine o coeficiente de assimetria de Pearson.

R.39 A seguir é dada a pressão sangüínea sistólica de 22 pacientes de um hospital:

151	173	142	154	165	124	153	155	146	172	162
182	162	135	159	204	130	162	156	158	149	130

Construa um diagrama de ramos e folhas com rótulos de ramos dados por 12, 13, 14, . . ., e 20.

R.40 Use o diagrama de ramos e folhas obtido no Exercício R.39 para obter a informação necessária para construir um gráfico de caixa. Esboce um gráfico de caixa e estude a simetria ou assimetria dos dados.

R.41 Por experiência anterior, sabe-se que o ônibus que sai do centro do Rio de Janeiro às 8 horas e 5 minutos da manhã leva em média 42 minutos com desvio-padrão de 2,5 minutos para alcançar o campus da ilha do Fundão da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Em pelo menos qual percentagem das vezes o ônibus chegará ao campus da UFRJ entre as 8 horas e 37 minutos e as 8 horas e 57 minutos?

R.42 Um funcionário da orquestra sinfônica registrou que cinco de seus concertos foram freqüentados por 462, 480, 1.455, 417 e 432 pessoas.

(a) Calcule a média e a mediana desses números de público.
(b) Descobrindo que o terceiro número foi impresso incorretamente e que deveria ter sido 455, recalcule a média e a mediana dos números corretos de público.
(c) Compare o efeito desse erro de impressão sobre a média e a mediana.

R.43 As 30 páginas de uma impressão preliminar de um manuscrito foram conferidas para encontrar erros de digitação, dando as seguintes quantidades de erros:

2	0	3	1	0	0	0	5	0	1	2	1	4	0	1
0	1	3	1	2	0	1	0	3	1	2	0	1	0	2

Construa um diagrama de pontos.

Snow666

R.44 Cientistas realizaram um experimento para avaliar o aumento médio da taxa de batimentos cardíacos de astronautas executando certas tarefas no espaço exterior. Simulando a ausência de gravidade, foram os seguintes os aumentos de batimentos cardíacos por minutos registrados em 33 pessoas que executaram a tarefa dada:

34	26	22	24	23	18	21	27	33	26	31
28	29	25	13	22	21	15	30	24	23	37
26	22	27	31	25	28	20	25	27	24	18

Calcule

(a) a média e a mediana;
(b) o desvio-padrão;
(c) o coeficiente de assimetria de Pearson.

R.45 Num estudo sobre a poluição do ar em que se mediu a quantidade de matéria orgânica solúvel em benzeno suspensa no ar, oito amostras diferentes de ar exibiram 2,2; 1,8; 3,1; 2,0; 2,4; 2,0; 2,1 e 1,2 microgramas por metro cúbico. Calcule o coeficiente de dispersão desses dados.

***R.46** A seguir, são dados os escores obtidos por 44 cadetes num tiro ao alvo disparando de joelhos, x, e de pé, y:

x	y	x	y	x	y	x	y
81	83	81	76	94	86	77	83
93	88	96	81	86	76	97	86
76	78	86	91	91	90	83	78
86	83	91	76	85	87	86	89
99	94	90	81	93	84	98	91
98	87	87	85	83	87	93	82
82	77	90	89	83	81	88	78
92	94	98	91	99	97	90	93
95	94	94	94	90	96	97	92
98	84	75	76	96	86	89	87
91	83	88	88	85	84	88	92

Use um computador ou uma calculadora gráfica para produzir um gráfico de dispersão e descreva a relação, se houver, entre os escores dos cadetes nas duas posições.

R.47 Se os alunos calculam seus índices de conceitos calculando a média de seus conceitos com A, B, C, D e F valendo 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente, o que isso supõe sobre a natureza dos conceitos?

Snow666

5

POSSIBILIDADES E PROBABILIDADES

5.1 Contagem 111

5.2 Arranjos e Permutações 114

5.3 Combinações 117

5.4 Probabilidade 124

5.5 Lista de Termos-Chave 132

5.6 Referências 133

Se olharmos para a Estatística como a arte ou ciência de "como conviver com incertezas e com o acaso", seu estudo trata de problemas tão antigos quanto a própria humanidade. Até poucos séculos atrás, tudo que tivesse relação com o acaso era visto como de intenção divina e, portanto, era considerado ímpio, e até um sacrilégio, tentar analisar o "mecanismo" do sobrenatural através da Matemática. Isso explica o desenvolvimento lento da matemática das probabilidades. Até o advento do pensamento científico, com sua ênfase em observação e experimentação, jamais sequer ocorreu a alguém que a **Teoria de Probabilidade** pusesse ser utilizada no estudo das leis da Natureza, ou que pudesse ser aplicada à solução de problemas simples da vida do dia a dia.

Muitos estudantes pensam que o estudo de Probabilidade é a parte mais difícil de um Curso de Estatística. Por causa disso, dividimos esse assunto em três capítulos. Uma introdução informal é apresentada neste Capítulo 5. No Capítulo 6 apresentamos o assunto de maneira mais rigorosa e no Capítulo 7 tratamos com os problemas de tomada de decisão em que há incertezas sobre os resultados.

Neste capítulo, veremos como as incertezas podem efetivamente ser medidas, como podemos associar-lhes números e como interpretar esses números. Em capítulos subseqüentes mostraremos como esses números, denominados **probabilidades**, podem ser utilizados para conviver com incertezas: como podem ser usados para fazer escolhas ou tomar decisões que prometem ser as mais proveitosas ou as mais desejáveis.

Nas Seções 5.1 até 5.3, apresentamos preliminares matemáticos relacionadas com a questão "o que é possível" em determinadas situações. Afinal, dificilmente poderemos prever o re-

Snow666

sultado de um jogo de futebol se não soubermos quais times que estão jogando, como também não poderemos prever o resultado de uma eleição se não conhecermos os candidatos que a estão disputando. Finalmente, na Seção 5.4, veremos como julgar "o que é provável", ou seja, estudaremos várias maneiras de definir, ou interpretar, as probabilidades e de determinar seus valores.

5.1 CONTAGEM

No comércio e no dia a dia, o simples processo de contagem ainda desempenha um papel importante, diferentemente do que ocorre nas ciências e seus métodos poderosos de computação. Ainda precisamos contar 1, 2, 3, 4, 5, . . ., para determinar, por exemplo, quantas pessoas participaram de uma certa demonstração, o tamanho da resposta a um questionário, o número de caixas danificadas num carregamento de vinho do Porto, ou quantas vezes a temperatura passou dos 30° num determinado mês no Recife. Às vezes o processo de contagem pode ser simplificado pelo uso de dispositivos mecânicos (por exemplo, contando espectadores que passam por uma roleta) ou pela contagem indireta (por exemplo, contando o número de vendas realizadas subtraindo os números das notas fiscais). Outras vezes, o processo de contagem pode ser enormemente simplificado por meio de técnicas matemáticas como as que serão desenvolvidas nesta seção.

No estudo de "o que é possível" existem, essencialmente, dois tipos de problemas. Temos o problema de listar tudo o que pode ocorrer numa determinada situação e depois temos o de determinar quantas coisas diferentes podem ocorrer (sem necessariamente precisar elaborar uma listagem completa). O segundo tipo de problema é especialmente importante, porque há muitas situações em que não necessitamos de uma listagem completa e assim podemos nos poupar muito trabalho. Embora o primeiro tipo de problema possa parecer direto e fácil, o exemplo seguinte mostra que isso nem sempre ocorre.

EXEMPLO 5.1 Um restaurante oferece três tipos de vinhos da casa em copos: um vinho tinto, um branco e um rosado. Relacione o número de maneiras pelas quais três fregueses podem pedir três copos de vinho, sem levar em conta qual freguês recebe qual vinho.

Solução Evidentemente, há muitas possibilidades diferentes. Os fregueses podem pedir três copos de vinho tinto; podem pedir dois copos de vinho tinto e um copo de rosado; eles podem pedir um copo de vinho branco e dois de rosado; podem pedir um copo de cada tipo; e assim por diante. Prosseguindo cuidadosamente dessa maneira podemos acabar conseguindo enumerar todas as dez possibilidades, mas é bem possível que omitamos algumas. ■

Problemas desse tipo podem ser abordados de uma forma sistemática traçando-se um **diagrama de árvore**, como o da Figura 5.1. Esse diagrama mostra que há quatro possibilidades (quatro ramos) correspondendo a 0, 1, 2 ou 3 copos de vinho tinto. Em seguida vemos que para o vinho branco há quatro ramos partindo do ramo superior (0 copos de vinho tinto), três ramos partindo do próximo ramo (1 copo de vinho tinto), dois ramos partindo do ramo seguinte (2 copos de vinho tinto) e apenas um ramo partindo do ramo inferior (3 copos de vinho tinto). Depois disso, existe somente uma possibilidade para o número de copos de rosado, pois a soma do número de copos sempre é três. Assim, vemos que existe um total de dez possibilidades.

Snow666

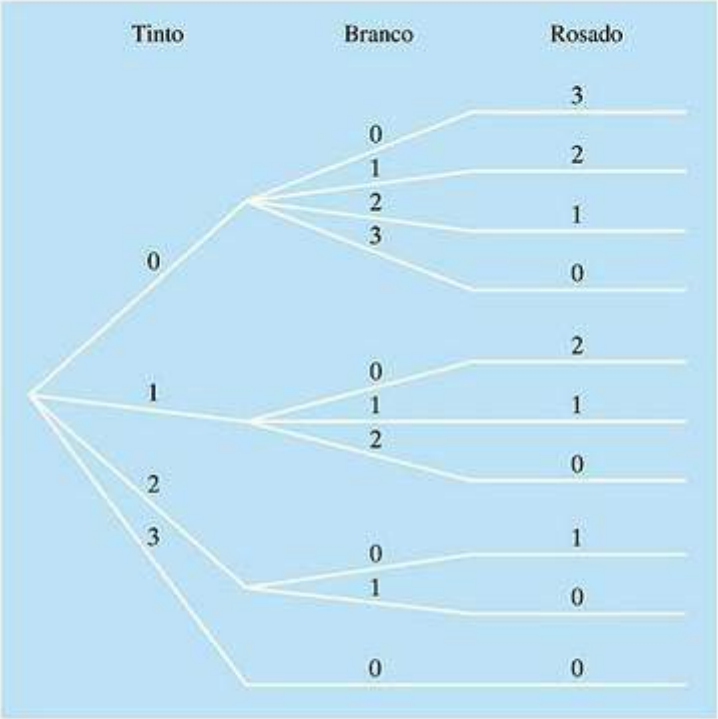

Figura 5.1
Diagrama de árvore para o Exemplo 5.1.

EXEMPLO 5.2 Em um estudo médico, os pacientes são classificados pelo grupo sangüíneo como A, B, AB ou O, e também de acordo com sua pressão sangüínea baixa, normal ou alta. De quantas maneiras pode um paciente ser classificado?

Solução Como pode ser visto no diagrama de árvore da Figura 5.2, a resposta é 12. Partindo do topo, o primeiro trajeto ao longo dos ramos corresponde a um paciente do grupo sangüíneo A e pressão baixa, o segundo trajeto corresponde a um paciente do grupo A e pressão normal, . . ., e o décimo segundo trajeto corresponde a um paciente do grupo O e pressão alta.

A resposta que obtivemos no Exemplo 5.2 é $4 \cdot 3 = 12$, ou seja, o produto do número de grupos sangüíneos pelo número de níveis de pressão. Generalizando a partir desse exemplo, podemos formular a regra seguinte:

MULTIPLICAÇÃO DE ESCOLHAS

Se uma escolha consiste em dois passos, o primeiro dos quais pode ser realizado de m maneiras, e para cada uma dessas o segundo passo pode ser realizado de n maneiras, então a escolha total pode ser feita de $m \cdot n$ maneiras.

Vamos nos referir a essa regra como a **multiplicação de escolhas**, como indicamos na margem. Para provar essa regra, basta traçarmos um diagrama de árvore como o da Figura 5.2. Primeiro, há m ramos correspondentes às m possibilidades no primeiro passo e, em seguida, há n ramos saindo de cada um desses ramos, correspondentes às n possibilidades no segundo passo. Isso leva a $m \cdot n$ caminhos ao longo dos ramos do diagrama de árvore e, assim, a $m \cdot n$ possibilidades.

Snow666

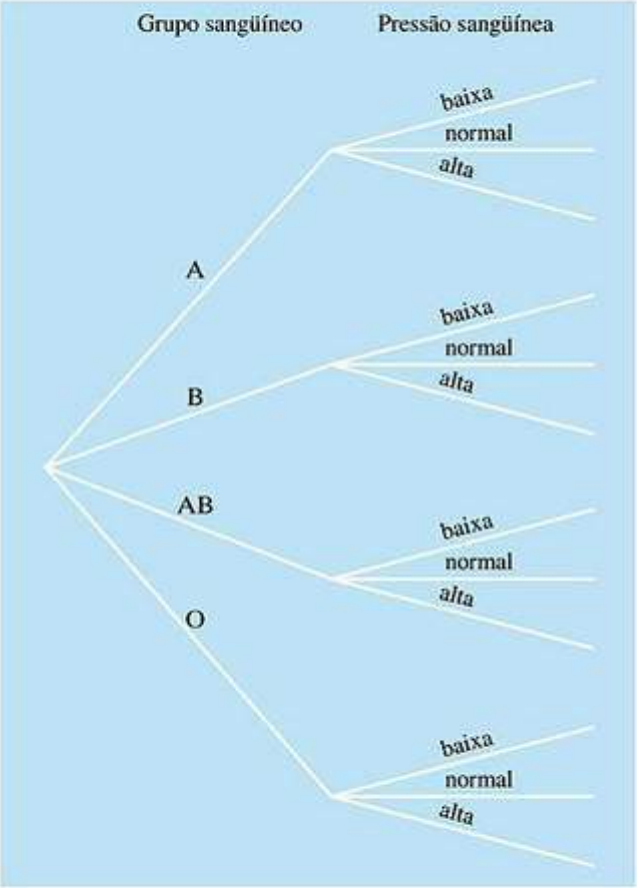

Figura 5.2
Diagrama de árvore para o Exemplo 5.2.

EXEMPLO 5.3 Se um cientista quer realizar uma experiência com um de 12 novos medicamentos para a sinusite, testando com camundongos, porquinhos-da-índia e ratos, de quantas maneiras o cientista pode escolher um dos medicamentos e uma das três cobaias?

Solução Como $m = 12$ e $n = 3$, há $12 \cdot 3 = 36$ maneiras diferentes de programar o experimento.

EXEMPLO 5.4 Se um departamento de Física oferece três turmas de aulas teóricas e quinze turmas de laboratório, de quantas maneiras pode um aluno escolher uma turma de cada? Também, quantas escolhas terá um aluno se duas das turmas de aulas teóricas e quatro das turmas de laboratório já estão sem vagas quando chegar sua vez de efetuar sua matrícula?

Solução Como $m = 4$ e $n = 15$, há $4 \cdot 15 = 60$ maneiras diferentes do aluno escolher uma turma de cada. Se duas das turmas de aulas teóricas e quatro das turmas de laboratório já estão sem vagas, temos $m = 4 - 2 = 2$ e $n = 15 - 4 = 11$ e, portanto, o número de escolhas é reduzido a $2 \cdot 11 = 22$.

Usando diagramas em árvores adequados, podemos facilmente generalizar a regra para a multiplicação de escolhas de modo a torná-la aplicável a escolhas envolvendo mais de dois passos. Para k passos, com k inteiro positivo, temos a regra seguinte:

Snow666

MULTIPLICAÇÃO DE ESCOLHAS (GENERALIZADA)

Se uma escolha consiste em k passos, o primeiro dos quais pode ser realizado de n_1 maneiras, para cada uma dessas o segundo passo pode ser realizado de n_2 maneiras, para cada combinação de escolhas feitas nos dois primeiros passos o terceiro passo pode ser realizado de n_3 maneiras, . . ., e para cada uma dessas combinações de escolhas nos primeiros $k - 1$ passos o k-ésimo passo pode ser realizado de n_k maneiras, então a escolha total pode ser feita de $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_k$ maneiras.

O que se faz é simplesmente continuar multiplicando as quantidades de maneiras em que podem ser realizados os diferentes passos.

EXEMPLO 5.5 Um vendedor de automóveis novos oferece um carro em quatro estilos, dez acabamentos e três potências. De quantas maneiras diferentes pode ser encomendado um desses carros?

Solução Como $n_1 = 4$, $n_2 = 10$ e $n_3 = 3$, há $4 \cdot 10 \cdot 3 = 120$ maneiras diferentes de encomendar um desses carros.

EXEMPLO 5.6 Continuando com o Exemplo 5.5, quantas escolhas existem se o comprador também precisar escolher o carro com transmissão automática ou manual e com ou sem ar-condicionado?

Solução Como $n_1 = 4$, $n_2 = 10$, $n_3 = 3$, $n_4 = 2$ e $n_5 = 2$, há $4 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 480$ escolhas diferentes.

EXEMPLO 5.7 Um teste consiste em 15 questões de múltipla escolha, cada questão apresentando quatro opções de respostas. De quantas maneiras diferentes um estudante pode marcar uma resposta para cada uma das questões?

Solução Como $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_{15} = 4$, existem um total de $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1.073.741.824$ maneiras diferentes de marcar uma resposta em cada questão. (Note que todas as respostas estão corretas em apenas uma dessas possibilidades.)

5.2 ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

A regra da multiplicação de escolhas e sua generalização são utilizadas freqüentemente quando fazemos várias escolhas de um único conjunto e queremos saber em que ordem essas escolhas são feitas.

EXEMPLO 5.8 Se 20 candidatas concorrem ao título de Miss Bahia, de quantas maneiras os juízes podem escolher a vencedora e a candidata que fica em segundo lugar?

Solução Como a vencedora pode ser escolhida de $m = 20$ maneiras e o segundo prêmio deve ser conferido a uma das outras $n = 19$ candidatas restantes, há um total de $20 \cdot 9 = 380$ maneiras de os juízes atribuírem os dois primeiros lugares.

EXEMPLO 5.9 De quantas maneiras distintas os 48 membros de um sindicato podem escolher um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro?

Snow666

Solução Como $n_1 = 48$, $n_2 = 47$, $n_3 = 46$ e $n_4 = 45$, (independentemente de quem seja o primeiro, o segundo, o terceiro ou o quarto escolhido), há um total de $48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 = 4.669.920$ possibilidades diferentes.

De modo geral, se r objetos são escolhidos de um conjunto de n objetos distintos, qualquer escolha ordenada particular desses objetos é denominada **arranjo**; se $r = n$, dizemos que o arranjo é uma **permutação**. Por exemplo, 4 1 2 3 é uma permutação dos quatro primeiros inteiros positivos; Pernambuco, Alagoas e Paraíba é um arranjo (uma escolha ordenada particular) de três dos seis estados da região nordeste e

Brasil Argentina Chile Venezuela
Bolívia Peru Paraguai Uruguai

são dois arranjos diferentes (escolhas ordenadas) de quatro dos 13 países da América do Sul.

EXEMPLO 5.10 Determine o número de arranjos distintos de duas das cinco vogais, *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, e elabore uma lista desses arranjos.

Solução Como $m = 5$ e $n = 4$, há $5 \cdot 4 = 20$ arranjos diferentes, que são *ae*, *ai*, *ao*, *au*, *ei*, *eo*, *eu*, *io*, *iu*, *ou*, *ea*, *ia*, *oa*, *ua*, *ie*, *oe*, *ue*, *oi*, *ui* e *uo*.

Em geral, é conveniente dispor de uma fórmula para o número total de arranjos de r objetos selecionados de um conjunto de n objetos distintos, como os 4 países escolhidos dentre os 13 países da América do Sul. Para ver isso, note que a primeira escolha é feita no conjunto total de n objetos, a segunda escolha é feita dentre os $n - 1$ objetos que restam após a primeira escolha, a terceira escolha é feita dentre os $n - 2$ objetos que restam após feitas as duas primeiras escolhas, . . ., e a r-ésima e última escolha é feita dentre os $n - (r - 1) = n - r + 1$ objetos que restam após feitas as $r - 1$ escolhas anteriores. Portanto, da aplicação direta da regra da multiplicação de escolhas generalizada resulta que o número total de arranjos de r objetos selecionados de um conjunto de n objetos distintos, que denotaremos por ${}_nP_r$, é

$$n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)$$

Como os produtos de inteiros consecutivos surgem em não poucos problemas relativos a arranjos e outros tipos especiais de agrupamentos ou escolhas, é conveniente introduzirmos aqui a **notação fatorial**. Nessa notação, o produto de todos os inteiros positivos menores do que ou iguais ao inteiro positivo n é denominado "fatorial de n" e denotado por $n!$. Assim,

$$\begin{aligned}
1! &= 1\\
2! &= 2 \cdot 1 = 2\\
3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6\\
4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24\\
5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120\\
6! &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

e, em geral,

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Além disso, para viabilizar a aplicabilidade de várias fórmulas, convencionamos que $0! = 1$ por definição.

Como os fatoriais crescem de maneira tão rápida, tem sido argumentado que o ponto de exclamação denota surpresa. De fato, o valor de 10! excede três milhões e 70! excede a capacidade de memória da maioria das calculadoras manuais.

Snow666

Para expressar a fórmula de ${}_nP_r$ mais concisamente em termos de fatoriais, observamos que, por exemplo, $12 \cdot 11 \cdot 10! = 12!$, $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6! = 9!$, e $37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33! = 37!$. Analogamente,

$$\begin{aligned} {}_nP_r \cdot (n-r)! &= n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot (n-r+1) \cdot (n-r)! \\ &= n! \end{aligned}$$

de modo que ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$. Resumindo, temos o seguinte:

NÚMERO DE ARRANJOS DE *n* OBJETOS TOMADOS *k* DE CADA VEZ

O número de arranjos de r objetos selecionados de um conjunto de n objetos distintos é

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot (n-r+1)$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

onde qualquer uma das duas fórmulas pode ser usada para $r = 1, 2, \ldots$, ou n. (A segunda fórmula, mas não a primeira, pode ser aplicada também para $r = 0$, caso em que dá o resultado trivial que há

$${}_nP_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$$

maneiras de escolher nenhum dos n objetos.) A primeira fórmula geralmente é de aplicação mais fácil, porque requer menos passos, mas muitos estudantes preferem a fórmula em notação de fatorial porque é mais fácil de ser memorizada.

EXEMPLO 5.11 Ache o número de permutações de $r = 4$ objetos selecionados de um conjunto de $n = 12$ objetos distintos (digamos, o número de maneiras em que um painel de críticos pode escolher quatro dentre 12 estréias cinematográficas como sendo as de melhor qualidade, uma delas a melhor, outra a segunda melhor, outra a terceira e mais uma a quarta.)

Solução Para $n = 12$ e $r = 4$, a primeira fórmula dá

$${}_{12}P_4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11.880$$

e a segunda fórmula fornece

$${}_{12}P_4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 11.880$$

Essencialmente, o trabalho é o mesmo, mas a segunda fórmula exige alguns passos a mais. ■

Para encontrar o número de permutações de n objetos distintos (tomados todos de uma só vez) tomamos $r = n$ em qualquer uma das duas fórmulas de ${}_nP_r$ e obtemos a fórmula seguinte.

NÚMERO DE PERMUTAÇÕES DE *n* OBJETOS TOMADOS DE UMA VEZ

$${}_nP_n = n!$$

Snow666

EXEMPLO 5.12 De quantas maneiras oito professores substitutos podem ser distribuídos para lecionar oito turmas de um curso de Economia?

Solução Tomando $n = 8$ na fórmula para ${}_nP_n$, obtemos ${}_8P_8 = 8! = 40.320$.

Em tudo que vimos até aqui, admitimos sempre que os n objetos fossem todos distintos. Se isso não ocorrer, devemos modificar a fórmula de ${}_nP_n$, o que será exemplificado nos Exercícios 5.29 e 5.30 em casos particulares. (Quando r é menor do que n, a modificação correspondente de ${}_nP_r$ é complicada e não será discutida neste livro.)

5.3 COMBINAÇÕES

Há muitos problemas em que precisamos saber o número de maneiras pelas quais podemos escolher r objetos de um conjunto de n objetos, sem que, no entanto, nos interesse a ordem em que a escolha será feita. Por exemplo, podemos estar interessados em conhecer o número de maneiras de formar um comitê de quatro dos 45 membros de um diretório acadêmico, ou o número de maneiras de escolher cinco dentre 36 declarações de imposto de renda para a malha fina. Para obter uma fórmula que se aplique a problemas como esses, examinemos primeiro os 24 arranjos de três das quatro primeiras letras do alfabeto:

abc	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*	*cba*
abd	*adb*	*bad*	*bda*	*dab*	*dba*
acd	*adc*	*cad*	*cda*	*dac*	*dca*
bcd	*bdc*	*cbd*	*cdb*	*dbc*	*dcb*

Se não nos interessar a ordem em que as três letras foram escolhidas dentre as quatro letras a, b, c e d, então há apenas quatro maneiras de fazer a escolha: *abc*, *abd*, *acd* e *bcd*. Note que esses são os grupos de letras que aparecem na primeira coluna da tabela e que cada linha contém as ${}_3P_3 = 3! = 6$ permutações das três letras da primeira coluna.

Em geral há ${}_rP_r = r!$ permutações de r objetos distintos, de forma que os ${}_nP_r$ arranjos de r objetos extraídos de um conjunto de n objetos distintos contêm cada grupo de r objetos $r!$ vezes. (No nosso exemplo, as ${}_4P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ permutações de três letras escolhidas dentre as quatro primeiras letras do alfabeto contêm ${}_3P_3 = 3! = 6$ vezes cada grupo de três letras.) Portanto, para obter uma fórmula para o número de maneiras nas quais r objetos podem ser extraídos de um conjunto de n objetos distintos, *independentemente da ordem em que são extraídos*, dividimos ${}_nP_r$ por $r!$ Dizemos que uma tal escolha é uma **combinação** de n objetos tomados r cada vez ou uma combinação de n objetos tomados r a r, denotamos o número dessas combinações por ${}_nC_r$ ou $\binom{n}{r}$ e escrevemos o que segue.

COMBINAÇÕES DE n OBJETOS TOMADOS r DE CADA VEZ

O número de maneiras pelas quais r objetos podem ser escolhidos de um conjunto de n objetos é

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)}{r!}$$

ou, em notação fatorial,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Snow666

Tal como no caso das fórmulas de ${}_nP_r$, aqui também qualquer uma das duas fórmulas pode ser utilizada para $r = 1, 2, \ldots,$ ou n, mas somente a segunda pode ser usada quando $r = 0$. Novamente, em geral a primeira fórmula é mais fácil de usar porque requer menos etapas, mas muitos estudantes consideram a fórmula em notação fatorial mais fácil de ser memorizada.

Para $n = 0$ a $n = 20$, os valores de $\binom{n}{r}$ podem ser lidos na Tabela XI, à página 514, onde essas quantidades são denominadas **coeficientes binomiais**. A razão dessa terminologia é explicada no Exercício 5.38.

EXEMPLO 5.13 Na página 117 perguntamos o número de maneiras em que um comitê de quatro pode ser selecionado dentre os 45 membros de um diretório acadêmico. Como não interessa a ordem da escolha dos membros do comitê, podemos perguntar o valor de ${}_nC_r$, ou então do coeficiente binomial $\binom{n}{r}$.

Solução Substituindo $n = 45$ e $r = 4$ na primeira das duas fórmulas para ${}_nC_r$, obtemos ${}_{45}C_4 = \dfrac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{4!} = 148.995$.

EXEMPLO 5.14 Na página 117 também perguntamos o número de maneiras de escolher cinco dentre 36 declarações de imposto de renda para a malha fina. Novamente não interessa a ordem da escolha e, portanto, podemos perguntar o valor de ${}_nC_r$, ou então do coeficiente binomial $\binom{n}{r}$.

Solução Substituindo $n = 36$ e $r = 5$ na primeira das duas fórmulas para $\binom{n}{r}$ obtemos $\binom{36}{5} = \dfrac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{5!} = 376.992$.

EXEMPLO 5.15 De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode escolher três livros de uma lista de dez *best-sellers*, supondo que é inconseqüente a ordem de escolha dos três livros?

Solução Substituindo $n = 10$ e $r = 3$ na primeira das duas fórmulas para ${}_nC_r$ obtemos

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$$

Analogamente, substituindo na segunda fórmula obtemos

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$$

Essencialmente, o trabalho é o mesmo, mas a primeira fórmula exige menos passos.

EXEMPLO 5.16 De quantas maneiras diferentes o diretor de um laboratório de pesquisa pode escolher dois químicos dentre sete candidatos e três físicos dentre nove candidatos?

Snow666

Solução Os dois químicos podem ser escolhidos de $\binom{7}{2}$ maneiras e os três físicos podem ser escolhidos de $\binom{9}{3}$ maneiras, de modo que pela multiplicação de escolhas, todos os cincos juntos podem ser escolhidos de

$$\binom{7}{2} \cdot \binom{9}{3} = 21 \cdot 84 = 1.764$$

maneiras. Os valores dos dois coeficientes binomiais foram obtidos na Tabela XI.

Na Seção 5.2, apresentamos a fórmula especial ${}_nP_n = n!$, mas isso não é necessário aqui; substituindo $r = n$ em qualquer uma das duas fórmulas para $\binom{n}{r}$ fornece $\binom{n}{n} = 1$. Em outras palavras, há uma, e uma só, maneira de escolher todos os n elementos que constituem um conjunto.

Quando tomamos r objetos de um conjunto de n objetos distintos deixamos $n - r$ dos objetos de fora e conseqüentemente há tantas maneiras de deixar de fora (ou de selecionar) $n - r$ objetos de um conjunto de n objetos distintos, quanto de escolher r objetos. Simbolicamente escrevemos

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \text{para} \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Às vezes essa regra serve para simplificar as contas e às vezes é usada junto com a Tabela XI.

EXEMPLO 5.17 Determine o valor de $\binom{75}{72}$.

Solução Em vez de escrever todo o produto $75 \cdot 74 \cdot 73 \cdot \cdots \cdot 4$ e depois cancelar $72 \cdot 71 \cdot 70 \cdot \cdots \cdot 4$, escrevemos diretamente

$$\binom{75}{72} = \binom{75}{3} = \frac{75 \cdot 74 \cdot 73}{3!} = 67.525$$

EXEMPLO 5.18 Determine o valor de $\binom{19}{13}$.

Solução $\binom{19}{13}$ não pode ser lido diretamente na Tabela XI, mas levando em conta o fato de que $\binom{19}{13} = \binom{19}{19-13} = \binom{19}{6}$, procuramos $\binom{19}{6}$ e obtemos 27.132.

Não podemos substituir $r = 0$ na primeira das duas fórmulas para $\binom{n}{r}$, mas substituindo na segunda fórmula, ou então escrevendo

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n-0} = \binom{n}{n}$$

obtemos $\binom{n}{0} = 1$. Evidentemente, há tantas maneiras de não escolher algum dos elementos de um conjunto quanto de escolher os n elementos que ainda restam.

Snow666

EXERCÍCIOS

5.1 Um restaurante sofisticado mantém duas lagostas vivas em estoque e encomenda duas novas lagostas ao final do expediente diário (para entrega na manhã do dia seguinte) se, e somente se, ambas lagostas foram consumidas. Construa um diagrama de árvore para mostrar que se o restaurante recebe duas lagostas vivas na manhã de uma segunda-feira existem oito maneiras nas quais podem ser consumidas lagostas nos expedientes da segunda e da terça-feira.

5.2 Em relação ao Exercício 5.1, de quantas maneiras diferentes aquele restaurante pode servir duas ou três lagostas naqueles dois dias?

5.3 O vencedor da série final de um torneio de beisebol é o time que primeiro ganhar quatro jogos. Suponhamos que o time A esteja em vantagem com três vitórias e uma derrota para o outro time finalista B. Sabendo que não pode haver empates, construa um diagrama de árvore que mostre o número de maneiras em que esses times podem prosseguir até completar a série final.

5.4 Um aluno pode estudar 1 ou 2 horas para um teste de astronomia em uma noite qualquer. Construa um diagrama de árvore para encontrar o número de maneiras nas quais o aluno pode estudar uma total de

(a) cinco horas em três noites consecutivas;
(b) pelo menos cinco horas em três noites consecutivas.

5.5 Uma pessoa com \$2 aposta \$1 contra \$1 na jogada de uma moeda e contínua apostando \$1 enquanto continuar com algum dinheiro. Construa um diagrama de árvore que mostre as várias possibilidades nas três primeiras jogadas da moeda (supondo, é claro, que haja uma terceira jogada). Em quantos dos casos ele estará

(a) exatamente \$1 na frente?
(b) exatamente \$1 atrás?

5.6 O corpo docente de uma faculdade conta com três professoras chamadas Maria: a Maria Alice, a Maria Fernanda e a Maria Paula. Construa um diagrama de árvore que mostre as várias maneiras em que podem ser entregues os contra-cheques dessas três professoras de modo que cada uma receba o seu contra-cheque ou o de uma das duas outras Marias. Em quantas dessas maneiras

(a) somente uma delas recebe o seu contra-cheque?
(b) pelo menos uma delas recebe seu contra-cheque?

5.7 Um artista apresenta duas de suas obras numa exposição durante dois dias. Construa um diagrama de árvore que mostre de quantas maneiras diferentes as obras podem ser vendidas se

(a) somente estamos interessados na quantidade de obras vendidas nos dois dias;
(b) estamos interessados em saber qual obra foi vendida em qual dia.

5.8 Em uma eleição para a diretoria de uma companhia, o Sr. José, a Sra. Gertrudes e a Sra. Helena disputam o cargo de presidente e o Sr. Adão, a Sra. Roberta e o Sr. Saulo disputam o cargo de vice-presidente. Construa um diagrama de árvore que mostre os nove resultados possíveis, e utilize-o para determinar o número de maneiras nas quais os dois cargos não sejam ocupados por pessoas do mesmo sexo.

5.9 Em uma pesquisa de ciência política, os eleitores são classificados em seis categorias de renda e cinco categorias de instrução. De quantas maneiras diferentes um eleitor pode ser assim classificado?

Snow666

5.10 Num tribunal que julga infrações de trânsito, os infratores são classificados segundo três quesitos: se seus documentos estão em dia, se a infração é leve ou grave e se cometeram ou não alguma infração nos doze meses anteriores.

(a) Construa um diagrama de árvore mostrando as várias maneiras pelas quais um infrator pode ser classificado pelo tribunal.

(b) Se há 20 infratores em cada uma das oito categorias obtidas na parte (a) e o juiz passar um sermão em cada infrator cujos documentos não estão em dia, quantos dos infratores ouvirão um sermão?

(c) Se o juiz aplicar uma multa de \$600 a cada infrator que cometeu uma infração grave e/ou uma infração nos últimos doze meses anteriores, quantos dos infratores receberão uma multa de \$600?

(d) Quantos infratores ouvirão um sermão e receberão uma multa de \$600?

5.11 Uma rede de lojas de conveniência tem quatro depósitos e opera 32 lojas. De quantas maneiras diferentes esta cadeia pode despachar um pacote de caixas de chiclete de um dos depósitos para uma das lojas?

5.12 Um agente de viagens coloca seus pedidos para uma companhia marítima por telefone, por fax, por *e-mail*, por correio prioritário ou por entregador e solicita que suas reservas sejam confirmadas por telefone, por fax, ou por correio prioritário. De quantas maneiras diferentes pode um pedido seu para uma companhia marítima ser colocado e confirmado?

5.13 Existem quatro trilhas distintas para o topo de uma montanha. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode subir e descer a montanha se

(a) deve usar a mesma trilha em ambos trajetos;

(b) pode, mas não precisa, usar a mesma trilha em ambos trajetos;

(c) não quiser usar a mesma trilha nos dois trajetos?

5.14 Em um estojo de instrumentos de ótica, há cinco lentes côncavas, cinco lentes convexas, dois prismas e três espelhos. De quantas maneiras distintas podemos escolher um instrumento de cada tipo?

5.15 Um restaurante oferece dez tipos de saladas, oito entradas e seis sobremesas. De quantas maneiras diferentes um cliente pode escolher uma salada, uma entrada e uma sobremesa?

5.16 Um teste de múltipla escolha consiste em dez questões, cada uma permitindo uma escolha de três respostas.

(a) De quantas maneiras diferentes podemos escolher uma resposta para cada questão?

(b) De quantas maneiras diferentes podemos escolher uma resposta para cada questão e errar todas? (Estamos supondo que cada questão tem somente uma resposta correta.)

5.17 Um teste do tipo verdadeiro ou falso consiste em 15 questões. De quantas maneiras diferentes um estudante pode assinalar "verdadeiro" ou "falso"?

5.18 Para cada afirmação a seguir, determine se é verdadeira ou falsa.

(a) $19! = 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!$;

(b) $\dfrac{12!}{3!} = 4!$;

(c) $3! + 0! = 7$;

(d) $6! + 3! = 9!$;

(e) $\dfrac{9!}{7!2!} = 36$;

(f) $15! \cdot 2! = 17!$.

5.19 De quantas maneiras distintas um técnico de laboratório pode escolher quatro de dezesseis camundongos e injetar em dois deles uma pequena quantidade de soro e nos outros dois uma grande quantidade do mesmo soro?

Snow666

5.20 De quantas maneiras distintas uma diretora de televisão pode distribuir os seis comerciais diferentes de um patrocinador nos intervalos a eles destinados durante o horário de uma novela?

5.21 Para cada afirmação a seguir, determine se é verdadeira ou falsa.

(a) $\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{5}{24}$;
(b) $0! \cdot 8! = 0$;
(c) $5 \cdot 4! = 5!$;
(d) $\frac{16!}{12!} = 16 \cdot 15 \cdot 14$.

5.22 Uma rede de hotéis quer inspecionar 5 de seus 32 hotéis. Se a ordem da inspeção não é relevante, de quantas maneiras pode ser planejada essa série de inspeções?

5.23 Se um grupo de teatro de uma escola quer apresentar quatro de dez peças de meia hora de duração numa noite entre as 20 e as 22 horas, de quantas maneiras pode ser arranjada a programação?

5.24 De quantas maneiras diferentes o curador de um museu pode arranjar horizontalmente cinco de oito pinturas numa parede?

5.25 De quantas maneiras diferentes cinco estudantes de pós-graduação podem escolher um de dez projetos de pesquisa se não podem dois ou mais escolher um mesmo projeto?

5.26 De quantas maneiras distintas o treinador de um time de futebol pode ordenar nove jogadores para a cobrança de pênalti?

5.27 Quatro pais e respectivos filhos compraram oito assentos numa fila para um jogo de futebol. De quantas maneiras diferentes eles podem sentar-se, se

(a) cada filho deve sentar ao lado do pai;
(b) todos os pais devem sentar-se juntos e todos os filhos devem sentar-se juntos?

5.28 Um psicólogo prepara um teste de memória utilizando palavras sem sentido de quatro letras, escolhendo a primeira letra da palavra dentre as consoantes q, w, x e z, a segunda letra dentre as vogais a, i e u, a terceira letra dentre as consoantes c, f e p e a quarta letra dentre as vogais e e o. Quantas dessas palavras sem sentido de quatro letras

(a) o psicólogo pode construir?
(b) começam com a letra q?
(c) começam com a letra z e terminam com a letra o?

5.29 Se r dentre n objetos são iguais entre si e os outros são todos distintos, o número de permutações desses n objetos tomados todos de uma vez é $\frac{n!}{r!}$.

(a) Quantas são as permutações das letras da palavra "cabra"?
(b) De quantas maneiras cinco carros podem terminar uma corrida de *stock-car* se três dos carros são Ford, um é Chevrolet e um é Fiat e somente estamos interessados no fabricante do carro?
(c) De quantas maneiras a diretora de televisão do Exercício 5.20 pode escolher os seis comerciais se ela dispõe de quatro comerciais diferentes, dos quais um deve ser exibido três vezes e cada um dos demais deve ser exibido uma única vez?
(d) Apresente um argumento que justifique a fórmula dada nesse exercício.

5.30 Se dentre n objetos, r_1 são idênticos, outros r_2 são idênticos e os restantes (se houver) são todos distintos entre si, o número de permutações desses n objetos tomados todos de uma vez é $\frac{n!}{r_1! \cdot r_2!}$.

(a) Quantas são as permutações das letras da palavra "maioria"?
(b) De quantas maneiras a diretora de televisão do Exercício 5.20 pode escolher os seis comerciais se ela dispõe de somente dois comerciais diferentes, cada um dos quais deve ser exibido três vezes?

Snow666

(c) Generalize a fórmula de modo que seja aplicável se dentre n objetos r_1 são idênticos, outros r_2 são idênticos e outros r_3 são idênticos e os restantes (se houver) são todos distintos entre si. De quantas maneiras a diretora de televisão do Exercício 5.20 pode escolher os seis comerciais de um intervalo se ela dispõe de três comerciais diferentes, cada um dos quais deve ser exibido duas vezes?

5.31 Calcule o número de maneiras nas quais uma rede de lojas de computação pode escolher três dentre 15 espaços para novas lojas?

5.32 Uma loja de material escolar oferece 15 tipos de lapiseiras.

(a) Calcule o número de maneiras nas quais o encarregado de pedidos pode encomendar uma dúzia de cada um de três tipos diferentes de lapiseiras?

(b) Use a Tabela XI para conferir o resultado obtido na parte (a).

5.33 Para desenvolver o Departamento de Matemática de uma universidade particular, a chefe de departamento deve escolher dois professores titulares dentre seis candidatos, dois professores adjuntos dentre dez candidatos e seis professores assistentes dentre dezesseis candidatos. De quantas maneiras a chefe pode fazer essa escolha?

5.34 Um estudante de Letras deve elaborar um relatório sobre três de dezoito livros de uma lista. Calcule o número de maneiras pelas quais o aluno pode escolher os três livros e confira sua resposta na Tabela XI.

5.35 Uma embalagem com 12 transistores contém um que é defeituoso. De quantas maneiras diferentes um inspetor pode escolher três dos transistores e

(a) pegar o transistor defeituoso;

(b) não pegar o transistor defeituoso?

5.36 Com relação ao Exercício 5.35, suponha que dois dos três transistores são defeituosos. De quantas maneiras distintas o inspetor pode escolher quatro dos transistores e pegar

(a) nenhum dos defeituosos;

(b) um dos transistores defeituosos;

(c) ambos transistores defeituosos?

5.37 A contagem do número de resultados possíveis em jogos de azar é praticada há muitos séculos. Não havia somente o aspecto da aposta mas os resultados que ocorriam também eram considerados como indicação de intenções divinas. Foi há cerca de 1.000 anos que um bispo do que é hoje a Bélgica determinou que existem 56 maneiras distintas em que três dados podem cair, desde que estejamos interessados apenas no resultado global e não nos resultados de cada dado individualmente. Ele associou uma virtude a cada uma dessas possibilidades e cada pecador devia concentrar-se por algum tempo na virtude que correspondia à sua jogada dos dados.

(a) Encontre o número de maneiras nas quais três dados podem apresentar o mesmo número de pontos.

(b) Encontre o número de maneiras nas quais dois dos três dados podem apresentar o mesmo número de pontos, enquanto que o terceiro dado apresenta um número diferente de pontos.

(c) Encontre o número de maneiras nas quais todos os três dados podem apresentar três resultados diferentes.

(d) Usando as partes (a), (b) e (c) confira a conta do bispo de que há 56 possibilidades.

5.38 A grandeza $\binom{n}{r}$ é denominada um coeficiente binomial porque é o coeficiente de $a^{n-r}b^r$ na expansão binomial de $(a+b)^n$.

Snow666

(a) Verifique isso para $n = 2$ expandindo $(a + b)^2$.
(b) Verifique isso para $n = 3$ expandindo $(a + b)^3$.
(c) Verifique isso para $n = 4$ expandindo $(a + b)^4$.

5.39 Use a Tabela XI para determinar os seguintes coeficientes binomiais:

(a) $\binom{16}{7}$; (c) $\binom{19}{14}$;
(b) $\binom{13}{5}$; (d) $\binom{15}{11}$.

5.40 É fácil construir uma tabela dos coeficientes binomiais seguindo o padrão mostrado a seguir.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Nesse arranjo, denominado **triângulo de Pascal**, cada linha começa com 1, termina com 1, e cada um dos outros elementos é a soma dos dois valores mais próximos da linha acima. Construa as três linhas seguintes do triângulo de Pascal e verifique pela Tabela XI que os elementos são os coeficientes binomiais correspondentes a

(a) $n = 6$;
(b) $n = 7$;
(c) $n = 8$.

5.41 Verifique a identidade $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$ expressando cada um dos coeficientes binomiais em termos de fatoriais. Explique por que essa identidade justifica o método utilizado na construção do triângulo de Pascal no exercício anterior.

5.42 Rodrigo é um dos seis câmeras trabalhando numa estação de televisão. Se três deles são escolhidos para cobrir uma partida de tênis,

(a) de quantas maneiras distintas podem ser escolhidos?
(b) de quantas maneiras distintas podem ser escolhidos de modo a não incluir Rodrigo;
(c) de quantas maneiras distintas podem ser escolhidos de modo a incluir Rodrigo?

Também verifique que o resultado obtido para a parte (a) é a soma dos resultados obtidos para as partes (b) e (c). Observe que isto é um caso particular da identidade dada no Exercício 5.41.

5.4 PROBABILIDADE

Até aqui neste capítulo estudamos apenas o que é possível numa determinada situação. Em algumas instâncias relacionamos todas as possibilidades e em outras apenas determinamos quantas possibilidades diferentes existem. Agora vamos dar um passo a mais e avaliar também o que é provável e o que é improvável.

A maneira mais comum de medir as incertezas relacionadas com eventos (digamos, o resultado de uma eleição presidencial, os efeitos colaterais de um novo remédio, a durabilidade de uma pintura externa, ou o número total de pontos que podemos obter na jogada de dois dados) consiste em atribuir-lhes **probabilidades** ou especificar as **chances** em que seria honesto apostar

Snow666

na ocorrência do evento. Nesta seção veremos como interpretar as probabilidades e como determinar seus valores numéricos; as chances serão discutidas na Seção 6.3.

Historicamente, a maneira mais antiga de medir as incertezas é o **conceito de probabilidade clássica**, desenvolvido originalmente em relação aos jogos de azar, e se presta facilmente a preencher a lacuna entre possibilidades e probabilidades. O conceito de probabilidade clássica aplica-se somente quando todos os resultados possíveis são igualmente prováveis, caso em que temos o que segue.

O CONCEITO DE PROBABILIDADE CLÁSSICA

Se há n possibilidades igualmente prováveis, das quais uma deve ocorrer, e s são consideradas como favoráveis, ou então um "sucesso", como a probabilidade de um "sucesso" é de $\frac{s}{n}$.

Na aplicação dessa regra, os termos "favorável" e "sucesso" são usados de maneira bastante livre, pois o que é favorável para um jogador é desfavorável para o outro, e o que é um sucesso de um ponto de vista é um fracasso de outro ponto de vista. Assim, os termos "favorável" e "sucesso" podem ser aplicados a qualquer tipo particular de resultado, mesmo que "favorável" signifique o fato de um aparelho de televisão não funcionar, ou de alguém pegar um resfriado. Esse uso remonta ao tempo em que as probabilidades se referiam exclusivamente a jogos de azar.

EXEMPLO 5.19 Qual é a probabilidade de se tirar um ás de um baralho bem misturado de 52 cartas?

Solução Por "bem misturado" queremos dizer que cada carta tem a mesma chance de ser tirada, podendo, portanto, aplicar-se o conceito de probabilidade clássica. Como há $s = 4$ ases entre as $n = 52$ cartas, a probabilidade de tirar um ás é

$$\frac{s}{n} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

EXEMPLO 5.20 Qual é a probabilidade de obter um 3, um 4, um 5 ou um 6 numa jogada de um dado equilibrado?

Solução Por "equilibrado" queremos dizer que cada face do dado tem a mesma chance de aparecer, podendo, portanto, aplicar-se o conceito de probabilidade clássica. Como $s = 4$ e $n = 6$, vemos que a probabilidade de obter um 3, um 4, um 5 ou um 6 é

$$\frac{s}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

EXEMPLO 5.21 Se K representa "cara" e C representa "coroa", os oito resultados possíveis de três jogadas de uma moeda equilibrada são KKK, KKC, KCK, CKK, CCK, CKC, KCC e CCC. Quais são as probabilidades de obter duas caras ou três caras?

Solução Novamente, moeda "equilibrada" significa que cada face da moeda tem a mesma chance de aparecer, podendo, portanto, aplicar-se o conceito de probabilidade clássica. Contando as possibilidades, vemos que para duas caras temos $s = 3$ e $n = 8$ e que para três caras temos $s = 1$ e $n = 8$. Assim, a probabilidade de obter duas caras é $\frac{s}{n} = \frac{3}{8}$ e a de obter três caras é $\frac{s}{n} = \frac{1}{8}$.

Embora as possibilidades igualmente prováveis sejam, em geral, encontradas nos jogos de azar, o conceito de probabilidade clássica aplica-se igualmente a uma grande variedade de situações em que se utilizam mecanismos de jogo para fazer **escolhas aleatórias**. Por exemplo, quan-

Snow666

do pesquisadores escolhem gabinetes de trabalho por sorteio, quando cobaias são escolhidas para um experimento de tal maneira que cada uma tenha a mesma chance de ser escolhida (talvez pelo método descrito na Seção 10.1), quando cada família de uma localidade tem a mesma chance de ser consultada numa pesquisa, ou quando se escolhem peças de uma máquina para inspeção, de modo que cada peça produzida tenha a mesma chance de ser selecionada.

EXEMPLO 5.22 Se três de um grupo de vinte levantadores de peso têm usado esteróides anabolizantes e quatro quaisquer deles são testados para o uso de esteróides, qual é a probabilidade de que exatamente um dos três levantadores de peso do grupo seja incluído no teste?

Solução Há $\binom{20}{4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} = 4.845$ maneiras de escolher os quatro levantadores de peso a serem testados e essas possibilidades podem ser consideradas igualmente prováveis em virtude da aleatoriedade da escolha. O número de resultados "favoráveis" é o número de maneiras pelas quais podemos escolher um dos três levantadores de peso que tem usado esteróides e três dos 17 levantadores de peso não têm usado esteróides, a saber, $s = \binom{3}{1}\binom{17}{3} = 3 \cdot 680 = 2.040$, onde os valores dos coeficientes binomiais foram obtidos na Tabela XI. Segue que a probabilidade de pegar exatamente um dos levantadores de peso que tem usado esteróides é

$$\frac{s}{n} = \frac{2.040}{4.845} = \frac{8}{19}$$

ou 0,42, aproximadamente.

Uma grande desvantagem do conceito de probabilidade clássica é a sua aplicabilidade limitada, porque existem muitas situações nas quais as várias possibilidades não podem ser consideradas como igualmente prováveis. Isso ocorre, por exemplo, se quisermos saber se uma experiência irá corroborar ou refutar uma nova teoria; se uma expedição será capaz de localizar um casco de navio afundado; se o desempenho de uma pessoa justificará um aumento salarial; se o índice da bolsa de valores terá uma alta ou uma queda.

Dentre os diversos conceitos de probabilidade, o de maior uso é a **interpretação freqüencial**, segundo a qual as probabilidades são interpretadas como segue.

A INTERPRETAÇÃO FREQÜENCIAL DA PROBABILIDADE

A probabilidade de um evento (acontecimento ou resultado) é a proporção do número de vezes em que eventos do mesmo tipo ocorrem a longo prazo.

Se dissermos que há uma probabilidade de 0,78 de um avião da linha São Paulo-Salvador chegar no horário, queremos dizer que esses vôos chegam no horário em 78% das vezes. Também, se o Serviço Meteorológico prevê que há 40% de chance de chuva (que a probabilidade de chover é de 0,40), ele quer dizer que, sob as mesmas condições meteorológicas, chove em 40% das vezes. Mais geralmente, dizemos que um evento tem uma probabilidade de, digamos 0,90, no mesmo sentido em que dizemos que nosso carro dará partida no frio em 90% das vezes. Não podemos garantir o que acontecerá em qualquer ocasião particular (o carro pode pegar mas também pode não pegar) mas se tivermos conservado os registros referentes a um longo período de tempo, verificamos que a proporção de "sucessos" estará bem próxima de 0,90.

Snow666

De acordo com a interpretação freqüencial, estimamos a probabilidade de um evento observando qual fração das vezes os eventos análogos têm ocorrido no passado.

EXEMPLO 5.23 Uma pesquisa conduzida há poucos anos mostrou que dentre 8.319 mulheres da faixa etária dos 20 aos 30 que casaram novamente depois do divórcio, 1.358 voltaram a se divorciar. Qual é a probabilidade de uma mulher divorciada da faixa etária dos 20 aos 30 divorciar-se novamente?

Solução No passado isso ocorreu $\frac{1.358}{8.319} \cdot 100 = 16{,}3\%$ das vezes (arredondando ao décimo de percentual mais próximo), de modo que podemos usar 0,163 como uma estimativa da probabilidade solicitada. ■

EXEMPLO 5.24 Os registros indicam que 34 de 956 pessoas que recentemente visitaram a África Central contraíram malária. Qual é a probabilidade de que uma pessoa que recentemente visitou a África Central *não* tenha contraído malária?

Solução Como 956 – 34 = 922 das 956 pessoas não contraíram malária, estimamos que a probabilidade solicitada é de aproximadamente $\frac{922}{956} = 0{,}96$. ■

Quando as probabilidades são estimadas dessa maneira, é muito natural perguntar se as estimativas têm alguma confiabilidade. Essa pergunta será respondida detalhadamente no Capítulo 14, mas, por ora, apresentamos um teorema importante denominado a **Lei dos Grandes Números**. Informalmente, esse teorema pode ser enunciado como segue.

LEI DOS GRANDES NÚMEROS

> *Se determinada situação, experimento ou tentativa é repetida um grande número de vezes, a proporção de sucessos tenderá para a probabilidade de que um dado resultado qualquer seja um sucesso.*

Esse teorema, conhecido como a "lei das médias", é uma afirmação sobre a proporção de sucessos a longo prazo, e quase nada tem a dizer sobre qualquer experimento isolado.

Nas seis primeiras edições deste livro ilustramos a lei dos grandes números jogando repetidamente uma moeda e anotando a proporção acumulada de caras depois de cada jogada. Desde então temos utilizado a **simulação por computador** mostrada na Figura 5.3, onde os dígitos 0 e 1 indicam cara e coroa.

Lendo através de linhas sucessivas, vemos que entre as primeiras cinco jogadas simuladas há 2 caras, entre as primeiras dez jogadas há 5 caras, entre as primeiras quinze há 8 caras, entre as primeiras vinte há 10 caras, entre as primeiras vinte e cinco jogadas há 13 caras, . . ., e entre todas as 100 primeiras jogadas há 51 caras. As proporções correspondentes, esboçadas na Figura 5.4, são $\frac{2}{5} = 0{,}40$, $\frac{5}{10} = 0{,}50$, $\frac{8}{15} = 0{,}53$, $\frac{10}{20} = 0{,}50$, $\frac{13}{25} = 0{,}52$, . . ., e $\frac{51}{100} = 0{,}51$. Observe que a proporção de caras flutua, mas fica cada vez mais próxima de 0,50, que é a probabilidade de dar "cara" em cada jogada da moeda.

Na interpretação freqüencial, define-se a probabilidade de um evento em termos do que ocorre com eventos similares a longo prazo; vejamos se realmente faz sentido falar da probabilidade de um evento que só pode ocorrer uma vez. Por exemplo, é possível atribuir uma probabilidade ao evento de a Sra. Marília deixar o hospital quatro dias após ter sido submetida a uma remoção de apêndice, ou ao evento de certo candidato do partido majoritário ser eleito governador? Se nos colocarmos na posição do médico da Sra. Marília, podemos conferir os registros e constatar que em 78% de centenas de casos os pacientes tiveram alta dentro de quatro dias e aplicar esse resul-

Snow666


```
MTB >Random 10 c21-c30;
SUBC>  Bernoulli 0.5.
MTB >Print c21-c30.


     0     0     1     0     1     0     1     0     1     1
     1     1     0     1     0     1     1     0     0     0
     1     0     0     1     1     1     0     1     1     0
     1     0     1     1     0     1     1     1     1     1
     1     0     1     1     0     0     1     0     0     0
     1     1     0     0     0     0     0     1     1     1
     0     1     1     0     0     1     1     1     0     1
     1     0     0     1     1     0     0     0     1     1
     0     0     0     0     1     1     0     1     0     0
     0     1     0     1     1     0     0     0     1     0
```

Figura 5.3
Simulação por computador de 100 jogadas de uma moeda.

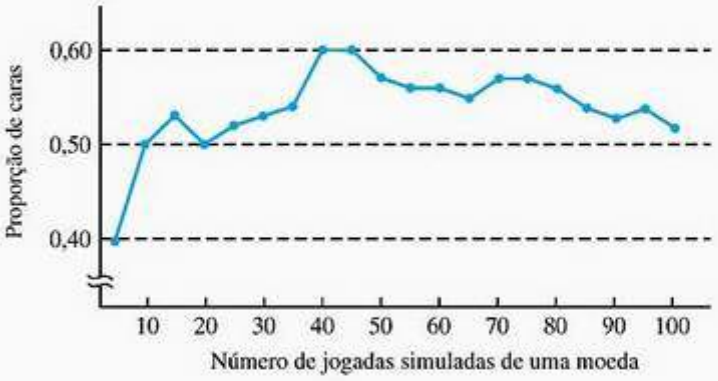

Figura 5.4
Gráfico ilustrativo da Lei dos Grandes Números.

tado à Sra. Marília. Isso pode não ser de muita ajuda para a Sra Marília, mas atribui um sentido à afirmação probabilística de que sua alta será dentro de quatro dias, pois a probabilidade é de 0,78.

Isso ilustra o seguinte fato: quando fazemos uma afirmação probabilística sobre um evento específico (não repetível), a interpretação freqüencial da probabilidade não nos deixa outra escolha a não ser referir-nos a um conjunto de eventos análogos. Entretanto, como se pode imaginar muito bem, isso facilmente pode levar a complicações pois, em geral, a escolha de eventos análogos não é nem óbvia, nem direta. Em relação à apendectomia da Sra. Marília, poderíamos considerar como análogos apenas os casos em que os pacientes são do mesmo sexo, ou apenas os casos em que também são da mesma idade que a Sra. Marília, ou ainda da mesma altura e peso que a Sra. Marília. No final das contas, a escolha de eventos análogos é uma questão de julgamento pessoal, e não é de forma alguma contraditório que cheguemos a diferentes estimativas de probabilidade, todas elas válidas, para um mesmo evento.

Quanto à questão de saber se um certo candidato de um partido importante ganhará a próxima eleição para governador, suponha que perguntemos às pessoas que conduziram uma pesquisa quão certas estão da vitória do candidato. Se elas disserem que estão "95% certas" (ou seja, se atribuírem uma probabilidade 0,95 à vitória do candidato), não quer dizer que ele ganharia 95% das vezes que concorresse a um cargo eletivo. O que significa é que a previsão do pesquisador eleitoral é baseada num método que funciona 95% das vezes. É dessa maneira que devemos interpretar muitas das probabilidades associadas a resultados estatísticos.

Snow666

Por fim, mencionemos um terceiro conceito de probabilidade que está atualmente gozando de popularidade. Segundo esse ponto de vista, as probabilidades são interpretadas como avaliações **pessoais** ou **subjetivas** e refletem a crença de uma pessoa quanto às incertezas que estão em jogo. Essas avaliações aplicam-se especialmente quando há pouca ou nenhuma evidência direta, de forma que realmente não resta outra escolha senão considerar informações colaterais (indiretas), adivinhações equilibradas ou, talvez, a intuição e outros fatores subjetivos. Às vezes, as probabilidades subjetivas são determinadas colocando-se o problema em termos de dinheiro, conforme veremos nas Seções 6.3 e 7.1

EXERCÍCIOS

5.43 Extraindo uma carta de um baralho bem embaralhado de 52 cartas, qual é a probabilidade de obter

(a) o rei de copas;
(b) uma carta vermelha com figura (valete, rainha, rei);
(c) um 5, um 6 ou um 7;
(d) uma carta de ouros?

5.44 Quando duas cartas são extraídas de um baralho bem embaralhado e a primeira carta não é recolocada antes de tirar a segunda carta, qual é a probabilidade de obter

(a) duas rainhas;
(b) uma carta vermelha e uma preta;
(c) duas cartas de paus?

5.45 Quando três cartas são extraídas sem reposição de um baralho bem embaralhado de 52 cartas, qual é a probabilidade de se obter um valete, uma rainha e um rei?

5.46 Se jogarmos um dado equilibrado, qual é a probabilidade de obter

(a) um 3;
(b) um número par?
(c) um número maior do que 4?

5.47 Se jogarmos um par de dados equilibrados, um vermelho e um verde, liste os 36 resultados possíveis e determine a probabilidade de obter um total de

(a) 4 pontos;
(b) 9 pontos;
(c) 7 ou 11 pontos.

5.48 Se K representa "cara" e C representa "coroa", os dezesseis resultados possíveis de quatro jogadas de uma moeda são KKKK, KKKC, KKCK, KCKK, CKKK, KKCC, KCKC, KCCK, CKKC, CKCK, CCKK, KCCC, CKCC, CCKC, CCCK e CCCC. Supondo que esses resultados são todos igualmente prováveis, encontre a probabilidade de obter 0, 1, 2, 3 ou 4 caras.

5.49 Uma vasilha contém 15 contas vermelhas, 30 contas brancas, 20 contas azuis e 7 contas pretas. Extraindo uma conta ao acaso, qual é a probabilidade de obter uma conta

(a) vermelha;
(b) branca ou azul;
(c) preta;
(d) nem branca nem preta?

5.50 Uma bolsa de couro contém 24 moedas de 10 centavos datadas de 2000, 14 moedas de 10 centavos datadas de 1999 e 10 moedas de 10 centavos datadas de 2002. Se uma moeda é escolhida ao acaso, qual é a probabilidade de escolhermos uma moeda datada de

(a) 2002;
(b) 1999 ou 2002?

Snow666

5.51 As bolas usadas no bingo são numeradas 1, 2, 3, . . ., 75. Se uma dessas bolas é extraída ao acaso, qual é a probabilidade de ser uma bola de

(a) número par;
(b) número 15 ou de um número menor;
(c) número 60 ou de um número maior?

5.52 Se um jogo tem n resultados igualmente prováveis, qual é a probabilidade de cada resultado individual?

5.53 Dentre os 12 candidatos a gerente de cinemas de uma rede de cinemas, oito têm diploma universitário. Se três dos candidatos são escolhidos ao acaso, qual é a probabilidade de

(a) todos três candidatos terem diploma universitário;
(b) somente um dos três ter diploma universitário?

5.54 Uma caixa com 24 lâmpadas contém duas defeituosas. Se duas das lâmpadas são extraídas ao acaso, qual é a probabilidade de

(a) nenhuma das lâmpadas ser defeituosa;
(b) uma delas ser defeituosa;
(c) ambas serem defeituosas?

5.55 Um tesouro de moedas medievais descoberto onde hoje se localiza a Bélgica continha 20 moedas cunhadas em Antuérpia e 16 cunhadas em Bruxelas. Se uma pessoa escolhe cinco dessas moedas ao acaso, qual é a probabilidade de escolher

(a) duas moedas cunhadas em Antuérpia e três moedas cunhadas em Bruxelas;
(b) quatro moedas cunhadas em Antuérpia e uma moeda cunhada em Bruxelas?

5.56 As oito cidades dos Estados Unidos com o maior número de crimes violentos registrados num certo ano foram Atlanta, Miami, St. Louis, Newark, Tampa, Baton Rouge, Baltimore e Washington. Se um programa de televisão escolhe duas dessas cidades ao acaso para uma reportagem especial, qual é a probabilidade de a escolha

(a) incluir Miami;
(b) consistir em Baltimore e Washington?

5.57 Numa pesquisa conduzida por um jornal, 424 de 954 leitores alegaram que a cobertura de esportes locais era inadequada. Baseado nesses dados, estime a probabilidade de um de seus leitores, escolhido ao acaso, concordar com essa alegação.

5.58 Num estudo detalhado de furtos numa loja de um *shopping*, foi observado que 816 de 4.800 clientes que foram pegos furtando não eram pegos antes de sua quinta tentativa. Baseado nesses dados, estime a probabilidade de uma pessoa furtando nessa loja não ser pega antes de sua quinta tentativa.

5.59 Se 678 de 904 carros foram aprovados na inspeção estadual de emissão de gases poluentes na primeira tentativa, estime a probabilidade de um carro dado ser aprovado na inspeção estadual na primeira tentativa.

5.60 Se 1.558 de 2.050 pessoas que visitaram a Chapada Diamantina disseram que pretendem voltar dentro de alguns anos, estime a probabilidade de uma dada pessoa que está visitando a Chapada Diamantina pretender voltar dentro de alguns anos.

5.61 As estatísticas de um instituto climatológico mostram que, em 28 dos últimos 52 anos, o céu esteve nublado numa cidade perto de Curitiba durante o primeiro domingo de novembro, quando um grupo de escoteiros realiza seu piquenique anual. Baseado nesses dados, estime a probabilidade de o céu estar coberto no próximo piquenique anual desse grupo de escoteiros.

Snow666

5.62 Para começar a entender a Lei dos Grandes Números, um aluno lançou uma moeda 150 vezes, obtendo

1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0	0

onde 1 denota cara e 0 denota coroa. Usando esses dados, reproduza o trabalho à página 127 que levou à Figura 5.4.

5.63 Repita o Exercício 5.62 obtendo seus dados com um computador ou uma calculadora.

5.64 Registre os quatro dígitos das placas de 200 automóveis e esboce num gráfico a proporção acumulada do dígito 5 em cada 25 automóveis. Decida se o resultado obtido corrobora a Lei dos Grandes Números.

(O que entendemos por "chance", "aleatoriedade" e "probabilidade" está sujeito a toda espécie de mitos e interpretações, alguns dos quais ilustramos nos exercícios a seguir.)

5.65 Alguns filósofos argumentaram que se absolutamente não dispusermos de informação alguma sobre as probabilidades de diferentes resultados possíveis, é razoável supor todos resultados como igualmente prováveis. Às vezes nos referimos a isso como o princípio da *ignorância igualitária*. Discuta o seguinte argumento sobre a existência ou não de vida humana em outro lugar do universo. Como realmente não dispomos de informação alguma num ou noutro sentido, a probabilidade de existir vida humana em algum outro lugar do universo é de $\frac{1}{2}$.

5.66 O que segue ilustra como nossa intuição pode ser induzida ao erro em relação a probabilidades. Suponha que uma caixa contenha 100 contas, cada uma delas vermelha ou branca. Uma conta será extraída ao acaso e perguntamos a uma pessoa se ela consegue dizer se a conta extraída será vermelha ou branca. Esta pessoa estaria disposta a apostar honestamente (digamos, ganhar \$5 se acertar e perder \$5 se errar) se

(a) ela não tem idéia alguma sobre quantas contas são vermelhas e quantas são brancas;
(b) ela souber que 50 contas são vermelhas e 50 são brancas?

Por estranho que possa parecer, a maioria das pessoas está mais disposta a apostar na circunstância (b) do que na (a).

5.67 O que segue é um bom exemplo das dificuldades em que nos podemos encontrar quando usamos somente "bom senso" ou a intuição em decisões sobre probabilidades.

"Uma dentre três caixas indistinguíveis contém duas moedas de 1 centavo, a outra contém uma moeda de 1 centavo e uma de 10 centavos e a terceira contém duas moedas de 10 centavos. Escolhendo uma dessas três caixas ao acaso (cada caixa com probabilidade 1/3), tiramos uma moeda ao acaso da caixa (cada moeda com probabilidade 1/2) sem

Snow666

olhar para a outra moeda. A moeda que tiramos é uma de 1 centavo e, sem pensar muito a respeito, podemos muito bem ser induzidos a concluir que, com probabilidade 1/2, a outra moeda da caixa também é uma de 1 centavo. Afinal de contas, a moeda de 1 centavo deve ter sido tirada ou da caixa com uma moeda de 1 centavo e uma de 10 centavos ou da caixa com duas moedas de 1 centavo. No primeiro caso, a outra moeda na caixa será uma de 10 centavos e no segundo uma de 1 centavo e é razoável concluir que essas duas possibilidades são igualmente prováveis."

A verdade é que o valor correto da probabilidade de a outra moeda ser também uma de 1 centavo é 2/3 e deixamos ao leitor verificar esse resultado rotulando mentalmente as duas moedas de 1 centavo por P_1 e P_2 e as duas de 10 centavos por D_1 e D_2 e esboçando um diagrama de árvore exibindo os seis resultados possíveis e igualmente prováveis do experimento.

5.68 Discuta a afirmação a seguir. Se um meteorologista diz que a probabilidade de chuva no dia seguinte é 0,30, o que quer que aconteça no dia seguinte não prova que ele estava certo ou errado.

5.69 Discuta a afirmação a seguir. Como as probabilidades são medidas da incerteza, a probabilidade que associamos a um evento futuro crescerá à medida que recebermos mais informação a respeito.

5.70 A probabilidade de um paciente sobreviver a uma pequena intervenção cirúrgica é 0,98 para o hospital A e 0,86 para o hospital B; a probabilidade de um paciente sobreviver a uma grande intervenção cirúrgica é 0,73 para o hospital A e 0,66 para o hospital B. Podemos concluir que para sobreviver a uma intervenção cirúrgica pequena ou grande o hospital A é mais indicado do que o hospital B? (Caso isso pareça familiar, olhe novamente o Exercício R.22.)

5.71 Nenhum teste clínico é perfeito para diagnosticar uma doença. Suponha que a probabilidade de um certo teste diagnosticar corretamente uma pessoa diabética como sendo diabética é de 0,95 e que a probabilidade de diagnosticar uma pessoa que não é diabética como sendo diabética é de 0,05. É sabido que cerca de 10% da população é diabética. Adivinhe a probabilidade de uma pessoa diagnosticada como sendo diabética realmente ser diabética. (Esse problema voltará a ser discutido no Exercício 6.75.)

5.72 Algumas pessoas alegam que se a probabilidade da ocorrência de um certo evento for maior do que 0,50, então a probabilidade será confirmada se o evento realmente ocorrer e refutada se o evento não ocorrer. Também, se a probabilidade da ocorrência de um certo evento for menor do que 0,50, então a probabilidade será confirmada se o evento não ocorrer e refutada se o evento ocorrer. Discuta esse método de confirmar e refutar probabilidades.

5.5 LISTA DE TERMOS-CHAVE (com indicação das páginas de suas definições)

Chances, 124
Coeficientes binomiais, 118
  tabela de, 514
Combinações, 117
Conceito de probabilidade clássica, 125
Diagrama de árvore, 111
Escolha aleatória, 125
Interpretação freqüencial da probabilidade, 126
Lei dos Grandes Números, 127
Multiplicação de escolhas, 112
  generalizada, 114
Notação de fatorial, 115
Permutações, 115
Probabilidade, 110, 124
Probabilidade pessoal, 129
Probabilidade subjetiva, 129
Simulação por computador, 127
Teoria de Probabilidade, 110
Triângulo de Pascal, 124

Snow666

5.6 REFERÊNCIAS

Introduções informais à probabilidade, escritas especialmente para leigos, podem ser encontradas em

GARVIN, A. D., *Probability in Your Life*. Portland, Maine: J. Weston Walch Publisher, 1978.

HUFF, D., and GEIS, I., *How to Take a Chance*. New York: W.W. Norton & Company, Inc., 1959.

KOTZ, S., and STROUP, D. E., *Educated Guessing: How to Cope in an Uncertain World*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1983.

LEVINSON, H. C., *Chance, Luck, and Statistics*. New York: Dover Publications, Inc., 1963.

MOSTELLER, F., KRUSKAI, W. H., LINK, R. F., PIETERS, R. S., and RISING, G. R., *Statistics by Example: Weighing Chances*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1973.

WEAVER, W., *Lady Luck: The Theory of Probability*. New York: Dover Publications, Inc., 1982.

Para uma leitura fascinante sobre a história da probabilidade, consulte

DAVID, F. N., *Games, Gods and Gambling*. New York: Hafner Press, 1962.

e os três primeiros capítulos de

STIGLER, S. M., *The History of Statistics*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1986.

Para complementar os Exercícios 5.65 até 5.72, na referência a seguir podem ser encontrados exemplos adicionais sobre mitos e concepções errôneas sobre probabilidades, incluindo alguns fascinantes paradoxos.

BENNETT, J. D., *Randomness*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1998.

Snow666

6

ALGUMAS REGRAS DE PROBABILIDADE

6.1 Espaços Amostrais e Eventos 135
6.2 Os Postulados de Probabilidade 142
6.3 Probabilidades e Chances 144
6.4 Regras de Adição 149
6.5 Probabilidade Condicional 154
6.6 Regras de Multiplicação 156
*6.7 O Teorema de Bayes 161
6.8 Lista de Termos-Chave 166
6.9 Referências 166

No estudo de Probabilidade, existem basicamente três tipos de questões:

O que queremos dizer quando afirmamos que a probabilidade de um evento é, por exemplo, 0,50; 0,78; ou 0,24?

Como determinar ou medir, na prática, os números que chamamos de probabilidades?

Quais são as regras matemáticas a que as probabilidades devem obedecer?

No Capítulo 5 já estudamos, em sua maior parte, os dois primeiros tipos de questões. No conceito de probabilidade clássica, estamos interessados em possibilidades iguais, contamos as que são favoráveis e aplicamos a fórmula $\frac{x}{n}$. Na interpretação freqüencial, lidamos com proporções de "sucessos" a longo prazo e baseamos nossas estimativas no que ocorreu no passado. Quando tratamos com probabilidades subjetivas, lidamos com uma medição da crença de uma pessoa e, na Seção 6.3 (e mais adiante, na Seção 7.1), vemos como tais probabilidades subjetivas podem efetivamente ser determinadas.

Neste capítulo, após alguns preliminares na Seção 6.1, concentramos nossa atenção nas regras matemáticas que as probabilidades devem obedecer, ou seja, no que chamamos de **Teoria de Probabilidade**. Assim, estudamos os postulados básicos de probabilidades na Seção 6.2, a rela-

Snow666

ção entre probabilidades e chances na Seção 6.3, as regras de adição na Seção 6.4, as probabilidades condicionais na Seção 6.5, as regras de multiplicação na Seção 6.6 e, finalmente, o Teorema de Bayes na Seção 6.7.

6.1 ESPAÇOS AMOSTRAIS E EVENTOS

Em Estatística, utilizamos a palavra "experimento" de maneira muito pouco convencional. Na falta de uma palavra mais apropriada, a aplicamos a qualquer processo de observação ou medida. Assim, um **experimento** pode consistir em contar quantos funcionários de uma agência governamental faltam ao trabalho num determinado dia, conferir se uma certa chave está ligada ou desligada ou descobrir se uma pessoa é ou não casada. Um experimento pode consistir também no processo muito complicado de prever tendências na Economia, em encontrar a origem de uma perturbação social, ou diagnosticar a causa de uma doença. A informação obtida de um experimento, quer seja a leitura de um instrumento, uma resposta "sim ou não", ou um valor obtido por meio de cálculos muito extensos, é denominada **resultado** do experimento.

Para cada experimento, o conjunto de todos os resultados possíveis é chamado o **espaço amostral**, denotado em geral pela letra S. Por exemplo, se um zoólogo deve escolher três dentre 24 porquinhos-da-índia para um experimento em sala de aula, o espaço amostral consiste nas $\binom{24}{3} = 2.024$ maneiras de fazer a escolha. Se o reitor de uma universidade deve indicar dois de seus 84 professores para servir como conselheiros de um clube de Ciências Políticas, o espaço amostral consiste nas $\binom{84}{2} = 3.486$ maneiras de fazer tal escolha.

Quando estudamos os resultados de um experimento, costumamos identificar as várias possibilidades por números, pontos ou algum outro tipo de símbolo, a fim de poder tratar de maneira matemática todas as questões relacionadas com elas sem precisar recorrer a longas descrições verbais sobre o que ocorreu, está ocorrendo ou ocorrerá. Por exemplo, se há oito candidatos a uma bolsa de estudos, e se denotarmos por a, b, c, d, e, f, g, ou h o fato de ser concedida à aluna Alice, ao aluno Paulo, às alunas Carolina e Letícia, ao aluno Guilherme, às alunas Fabiana, Georgina ou Alice, respectivamente, então o espaço amostral desse experimento (ou seja, dessa seleção) é o conjunto $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. O uso de pontos em vez de letras ou números para denotar os elementos de um espaço amostral tem a vantagem de facilitar a visualização das diversas possibilidades, permitindo talvez descobrir padrões especiais dentre os diversos resultados.

EXEMPLO 6.1 Uma revenda de caminhões usados tem três caminhões Ford 1998 para serem vendidos por qualquer um de seus dois vendedores. Queremos saber quantos desses caminhões cada um dos vendedores venderá em uma dada semana. Usando duas coordenadas, de modo que (1, 1), por exemplo, indique o resultado que cada um dos dois vendedores venderá um caminhão e (2, 0) indique o resultado que o primeiro vendedor venderá dois caminhões e o segundo nenhum, relacione todos os possíveis resultados desse "experimento." Também esboce um diagrama que exiba os pontos correspondentes do espaço amostral.

Solução Os dez resultados possíveis são (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1) e (3, 0) e os pontos correspondentes estão exibidos na Figura 6.1. ■

Em geral, classificamos os espaços amostrais de acordo com o número de elementos ou pontos que contêm. Os espaços que consideramos até agora nesta seção tinham 2.024, 3.486, 32, 8 e 10 elementos, e todos são designados como espaços **finitos**. Neste capítulo, vamos considerar ape-

Snow666

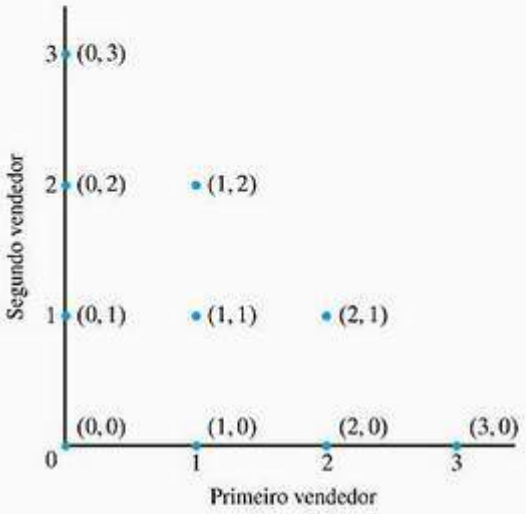

Figura 6.1
Espaço amostral do Exemplo 6.1.

nas espaços amostrais finitos, mas em capítulos posteriores trataremos também com espaços amostrais **infinitos**. Um espaço amostral infinito surge, por exemplo, quando tratamos com quantidades como temperaturas, pesos ou distâncias medidos em escala contínua. Mesmo quando jogamos um dardo contra um alvo, existe um contínuo de pontos que podemos atingir.

Em Estatística, qualquer **subconjunto** de um espaço amostral é denominado **evento**. Aqui, um subconjunto significa qualquer parte de um conjunto, inclusive o próprio conjunto como um todo e o **conjunto vazio**, denotado pelo símbolo $\emptyset$, que não contém elemento algum. Por exemplo, no caso dos oito candidatos à bolsa de estudos, $M = \{b, e\}$ denota o evento de algum aluno (nenhuma aluna) receber a bolsa; no Exemplo 6.1, $T = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$ denota o evento de os três caminhões serem vendidos na semana dada.

EXEMPLO 6.2 Com referência ao Exemplo 6.1 e à Figura 6.1, expresse em palavras que eventos são representados por $A = \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$, $B = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$ e $C = \{(0, 2), (1, 2), (0,3)\}$.

Solução A é o evento descrito por ambos vendedores juntos venderem dois caminhões, B é o evento descrito pelo segundo vendedor não vender caminhão algum e C é o evento descrito pelo segundo vendedor vender no mínimo dois caminhões.

No Exemplo 6.2, os eventos B e C não têm elementos (resultados) em comum; eventos desse tipo são denominados **mutuamente excludentes**, o que significa que a ocorrência de um deles impede a ocorrência do outro. Evidentemente, se o segundo vendedor não vender caminhão algum então ele certamente não venderá no mínimo dois caminhões. Note também que os eventos A e B não são mutuamente excludentes, e tampouco os eventos A e C, pois o primeiro par tem em comum o resultado (2, 0) e o segundo par compartilha o resultado (0, 2).

Em muitos problemas de probabilidade, interessam-nos eventos que possam ser expressos pela formação de **uniões**, **interseções** e **complementares**. Provavelmente o leitor tem alguma familiaridade com essas operações elementares de conjuntos; se não tiver, lembramos que a união de dois eventos X e Y, denotada por $X \cup Y$, é o evento que consiste em todos os elementos (resultados) contidos em X, em Y, ou em ambos. A interseção de dois eventos X e Y, denotado por $X \cap Y$, é o evento que consiste em todos os elementos contidos tanto em X quanto em Y e o complementar de X, denotado por X', é o evento que consiste em todos os elementos do espaço amostral que não estão contidos em X. Costumamos ler $\cup$ como "ou", $\cap$ como "e" e X' como "não X."

Snow666

EXEMPLO 6.3 Com referência aos Exemplos 6.1 e 6.2, relacione os resultados relativos a $\cup$ e $\cap$. Também expresse cada um desses eventos em palavras.

Solução Como $B \cup C$ contém todos elementos (resultados) que estão em B, em C, ou em ambos, obtemos

$$B \cup C = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 2), (1, 2), (0, 3)\}$$

e esse é o evento dado pelo segundo vendedor vender 0, 2 ou 3 caminhões, ou seja, que o segundo vendedor não irá vender exatamente um caminhão. Como já observamos, os eventos A e C compartilham o resultado (0, 2) e, como compartilham somente esse resultado, temos

$$A \cap C = \{(0, 2)\}$$

e esse é o evento dado pelo primeiro vendedor não vender caminhão algum e o segundo vendedor vender dois. Como B' contém todos elementos não contidos em B, podemos escrever

$$B' = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (0, 2), (1, 2), (0, 3)\}$$

e esse é o evento descrito pelo segundo vendedor vender pelo menos um dos caminhões.

Os espaços amostrais e os eventos, e especialmente as relações entre eventos, costumam ser ilustrados por **diagramas de Venn**, como os das Figuras 6.2 e 6.3. Em cada caso, o espaço amostral é representado por um retângulo, e os eventos são representados por círculos ou partes de círculos interiores ao retângulo. As partes sombreadas dos quatro diagramas de Venn da Figura 6.2 representam o evento X, o complementar do evento X, a união dos eventos X e Y e a interseção dos eventos X e Y.

EXEMPLO 6.4 Se X é o evento descrito por Paulo ser um aluno de pós-graduação da USP e Y é o evento descrito por Paulo gostar de ir à praia de Caraguatatuba, que eventos são representados pelas regiões sombreadas dos quatro diagramas de Venn da Figura 6.2?

Solução A região sombreada do primeiro diagrama representa o evento descrito por Paulo ser um aluno de pós-graduação da USP. A região sombreada do segundo diagrama representa o evento descrito por Paulo não ser um aluno de pós-graduação da USP. A região sombreada do terceiro diagrama

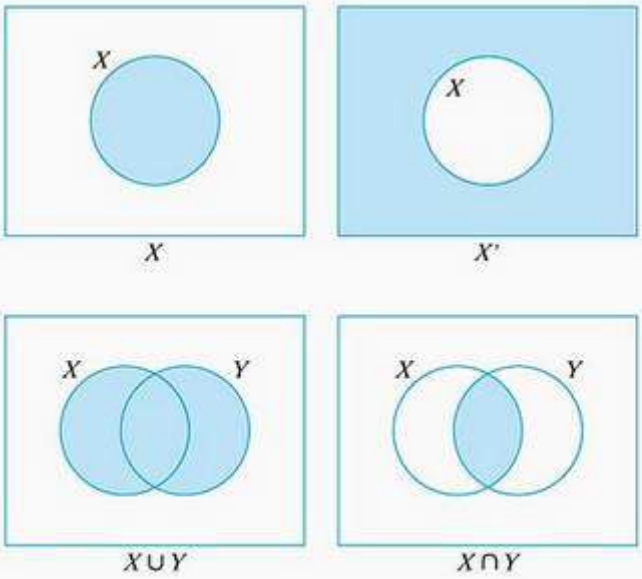

Figura 6.2
Diagramas de Venn.

Snow666

representa o evento descrito por Paulo ser um aluno de pós-graduação da USP e/ou gostar de ir à praia de Caraguatatuba. A região sombreada do quarto diagrama representa o evento descrito por Paulo ser um aluno de pós-graduação da USP e gostar de ir à praia de Caraguatatuba.

Quando lidamos com três eventos, traçamos os círculos como na Figura 6.3. Nesse diagrama, os círculos dividem o espaço amostral em oito regiões, numeradas de 1 a 8, e é fácil determinar se os eventos correspondentes estão em X ou em X', em Y ou em Y', e em Z ou em Z'.

EXEMPLO 6.5 Se X é o evento dado pelo aumento do nível de desemprego, Y é o evento dado pelo aumento na movimentação do mercado acionário e Z é o evento dado pelo aumento da taxa de juros, expresse em palavras os eventos representados pela região 4, pelas regiões 1 e 3 juntas e pelas regiões 3, 5, 6 e 8 juntas na Figura 6.3.

Solução Como a região 4 está contida em X e Z mas não em Y, ela representa o evento de aumentar o nível de desemprego e a taxa de juros mas não aumentar a movimentação do mercado acionário. Como as regiões 1 e 3 juntas constituem a região comum a Y e a Z, elas representam o evento de aumentar a movimentação do mercado acionário e a taxa de juros. Como as regiões 3, 5, 6 e 8 juntas constituem toda a região fora de X, elas representam o evento de não aumentar o nível de desemprego.

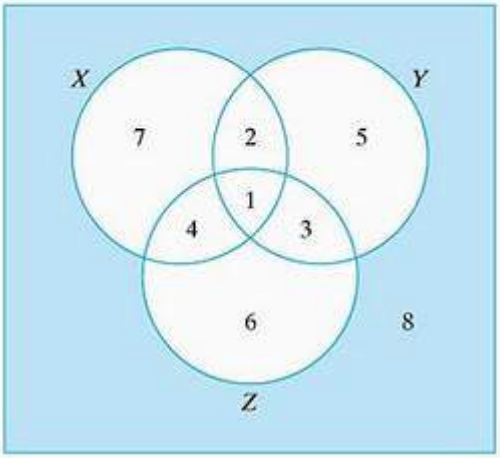

Figura 6.3
Diagrama de Venn.

EXERCÍCIOS

6.1 Com referência ao exemplificado à página 135, relativo à bolsa de estudos, considere $U = \{b, e, h\}$ e $V = \{e, f, g, h\}$ e relacione os resultados que compreendem U', $U \cap V$ e $U \cup V'$. Também expresse cada um desses eventos em palavras.

6.2 Com referência ao Exercício 6.1, os eventos U e V são mutuamente excludentes?

6.3 Com referência ao espaço amostral da Figura 6.1, relacione os conjuntos de pontos que constituem os seguintes eventos:

(a) um dos caminhões não é vendido;
(b) os dois vendedores vendem o mesmo número de caminhões;
(c) cada vendedor vende pelo menos um caminhão.

6.4 Pelo menos um de dois professores e dois dos cinco assistentes pós-graduados devem estar presentes quando for utilizado um certo laboratório de Química.

(a) Usando duas coordenadas, como no Exemplo 6.1, de modo que (1, 4), por exemplo, denote a presença de um dos professores e quatro dos assistentes, relacione todas as oito possibilidades.

Snow666

(b) Esboce um diagrama análogo ao da Figura 6.1.

6.5 Com referência ao Exercício 6.4, expresse em palavras os eventos representados por
(a) $K = \{(1, 2), (2, 3)\}$;
(b) $L = \{(1, 3), (2, 2)\}$;
(c) $M = \{(1, 2), (2, 2)\}$.

Também determine quais dos três pares de eventos, K e L; K e M; e L e M, são mutuamente excludentes.

6.6 Um crítico literário dispõe de dois dias para dar uma olhada em alguns dos sete livros recentemente lançados. Ele deseja conferir pelo menos cinco dos livros, mas não mais do que quatro em cada dia.
(a) Usando duas coordenadas, de modo que (2, 3), por exemplo, represente o evento de o crítico dar uma olhada em dois livros no primeiro dia e em três livros no segundo dia, relacione as nove possibilidades e esboce um diagrama do espaço amostral análogo ao da Figura 6.1.
(b) Relacione os pontos do espaço amostral que constituem o evento T caracterizado por o crítico dar uma olhada em cinco dos livros, o evento U caracterizado por olhar mais livros no primeiro que no segundo dia e o evento V caracterizado por dar uma olhada em três livros no segundo dia.

6.7 Com referência ao Exercício 6.6, relacione os pontos do espaço amostral que constituem os eventos $T \cap U$, $U \cap V$ e $V \cap T'$.

6.8 Uma pequena marina tem três barcos de pesca que às vezes estão num estaleiro para reparos.
(a) Utilizando duas coordenadas, de forma que (2, 1), por exemplo, represente o evento dado por dois dos barcos estarem no estaleiro e um estar alugado para o dia e (0, 2) represente o evento dado por nenhum dos barcos estar no estaleiro e dois estarem alugados para o dia, esboce um diagrama análogo ao da Figura 6.1 mostrando os 10 pontos do espaço amostral correspondente.
(b) Se K é o evento dado por pelo menos dois dos barcos estarem alugados para o dia, L é o evento dado por haver mais barcos no estaleiro do que alugados para o dia, e M é o evento dado por todos os barcos que não estiverem no estaleiro estarem alugados para o dia, relacione os resultados que compreendem cada um desses eventos.
(c) Quais dos três pares de eventos, K e L; K e M; e L e M, são mutuamente excludentes?

6.9 Com referência ao Exercício 6.8, relacione os pontos do espaço amostral que constituem os eventos K' e $L \cap M$. Também expresse cada um desses eventos em palavras.

6.10 Para construir espaços amostrais para experimentos em que tratamos com categorias, costumamos codificar as diversas alternativas associando-lhes números. Por exemplo, se perguntarmos a pessoas de um certo grupo se a sua cor favorita é vermelho, amarelo, azul, verde, marrom, branco, roxo ou alguma outra, podemos atribuir a essas alternativas os códigos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Se

$$A = \{3, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{e} \quad C = \{6, 7, 8\}$$

relacione os resultados que compreendem cada um dos eventos B', $A \cap B$, $B \cap C'$ e $A \cap B'$. Também expresse cada um desses eventos em palavras.

6.11 Dentre seis candidatos a um posto executivo, A tem curso universitário, é estrangeiro e solteiro; B não tem curso universitário, é estrangeiro e casado; C tem curso universitário, é brasileiro e casado; D não tem curso universitário, é brasileiro e solteiro; E tem curso uni-

Snow666

versitário, é brasileiro e casado e F não tem curso universitário, é brasileiro e casado. Um dos candidatos deve obter o emprego, e o evento que o emprego será dado a um candidato com curso universitário, por exemplo, é denotado por $\{A, C, E\}$. Represente de maneira análoga o evento que o emprego é dado a um candidato

(a) solteiro;
(b) brasileiro com curso universitário;
(c) estrangeiro casado.

6.12 Quais dos seguintes pares de eventos são mutuamente excludentes? Explique suas respostas.

(a) Um motorista ser multado por excesso de velocidade e ser multado por avançar um sinal vermelho.
(b) Ser estrangeiro e ser Presidente do Brasil.
(c) Um jogador de futebol marcar um gol e ser expulso da partida.
(d) Um jogador de futebol marcar um gol e não sair do banco de reservas.

6.13 Quais dos seguintes pares de eventos são mutuamente excludentes? Explique suas respostas.

(a) Chover e fazer sol em 7 de setembro de 2007.
(b) Uma pessoa vestindo meias verdes e calçando sapatos pretos.
(c) Uma pessoa saindo de avião às 11 da noite de São Paulo e chegando em Nova York no mesmo dia.
(d) Uma pessoa ter um diploma de curso superior da UFRGS e da USP.

6.14 Com referência à Figura 6.4, D é o evento dado por um estudante formado em curso universitário falar inglês muito bem e H é o evento que ele fará pós-graduação em Harvard. Descreva em palavras que eventos são representados pelas regiões 1 e 3 juntas, as regiões 3 e 4 juntas e as regiões 2, 3 e 4 juntas?

6.15 Os diagramas de Venn também são úteis para determinar o número de resultados possíveis associados a vários eventos. Digamos que um dos 360 sócios de um clube de golfe deve ser eleito Jogador do Ano. Se 224 sócios jogam pelo menos uma vez por semana, 98 são canhotos e 50 dos canhotos jogam pelo menos uma vez por semana, quantas das possíveis escolhas para Jogador do Ano seriam de sócios:

(a) canhotos que não jogam pelo menos uma vez por semana;
(b) que jogam pelo menos uma vez por semana mas não são canhotos;
(c) que não jogam pelo menos uma vez por semana e não são canhotos?

6.16 Um dos 200 estudantes de Administração de uma faculdade deve ser escolhido para o diretório acadêmico. Se 77 desses estudantes estão matriculados numa cadeira de Contabilidade, 64 estão matriculados numa cadeira de Direito Administrativo e 92 não estão ma-

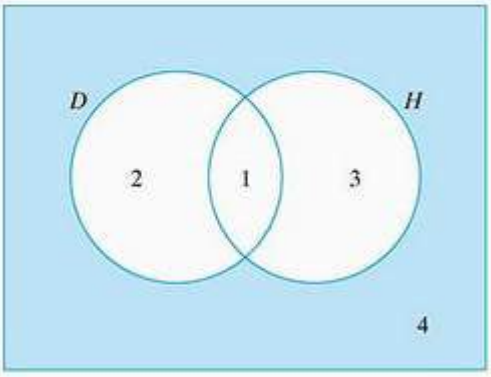

Figura 6.4 Diagrama de Venn para o Exercício 6.14.

Snow666

triculados em qualquer uma dessas duas cadeiras, quantos resultados correspondem à escola de um estudante de Administração que esteja matriculado em ambas cadeiras?

6.17 Na Figura 6.5, os conjuntos E, T e N representam os eventos dados por um carro levado a uma oficina necessitar de revisão geral, de reparos na transmissão ou de pneus novos. Expresse, em palavras, quais eventos são representados pela região 1, pela região 3, pela região 7, pelas regiões 1 e 4 juntas, pelas regiões 2 e 5 juntas e pelas regiões 7, 4, 6 e 8 juntas?

6.18 Com referência ao Exercício 6.17 e à Figura 6.5, relacione as regiões ou combinações de regiões que representam os eventos dados por um carro levado à oficina necessitar

(a) reparos na transmissão mas não revisão geral nem pneus novos;
(b) revisão geral e reparos na transmissão;
(c) reparos na transmissão ou pneus novos, mas não revisão geral;
(d) pneus novos.

6.19 Conforme salientamos no Exercício 6.15, os diagramas de Venn também são úteis para determinar o número de resultados associados a várias circunstâncias. Dentre 60 casas colocadas à venda, há 8 com piscinas, três ou mais quartos e carpete; 5 com piscinas, três ou mais quartos, mas sem carpete; 3 com piscinas, carpete mas menos do que três quartos; 8 com piscinas, mas sem carpete e com menos de três quartos; 24 com três ou mais quartos, mas sem piscina e sem carpete; 2 com três ou mais quartos, carpete, mas sem piscina; 3 com carpete, mas sem piscina e com menos do que três quartos e 7 sem nenhuma dessas características. Se uma dessas casas for escolhida para um comercial de televisão, quantos resultados correspondem à escolha de uma casa

(a) com piscina;
(b) com carpete?

6.20 Os diagramas de Venn costumam ser utilizados para verificar relações entre conjuntos e subconjuntos, ou eventos, sem exigir demonstrações formais baseadas na álgebra dos conjuntos. Simplesmente verificamos se as expressões que se supõem iguais são representadas pela mesma região de um diagrama de Venn. Com auxílio de diagramas de Venn, mostre que

(a) $A \cup (A \cap B) = A$;
(b) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$;
(c) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ e também $(A \cup B)' = A' \cap B'$;
(d) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$;
(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

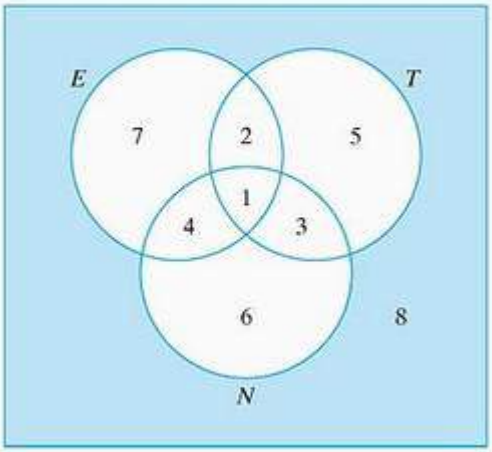

Figura 6.5 Diagrama de Venn para o Exercício 6.17.

Snow666

6.2 OS POSTULADOS DE PROBABILIDADE

As probabilidades sempre se referem à ocorrência de eventos, e agora que estamos em condições de lidar matematicamente com eventos, voltemos nossa atenção para as regras que as probabilidades devem obedecer. Para formular tais regras, continuamos a denotar os eventos por letras maiúsculas e escrevemos a probabilidade de um evento A como $P(A)$, a probabilidade de um evento B como $P(B)$, e assim por diante. Como antes, denotamos pela letra maiúscula, S, o conjunto de todos os resultados possíveis, ou seja, o espaço amostral.

As regras mais básicas de Probabilidade são os três postulados que, na forma como são enunciados aqui, se aplicam quando o espaço amostral S é finito; começamos com os dois primeiros, como segue.

OS DOIS PRIMEIROS POSTULADOS DE PROBABILIDADE

1. *As probabilidades são números reais positivos ou zero; simbolicamente,* $P(A) \geq 0$ *para qualquer evento* A.
2. *Qualquer espaço amostral tem probabilidade* 1; *simbolicamente,* $P(S) = 1$ *para qualquer espaço amostral* S.

Para justificar esses dois postulados, bem como o terceiro que será dado adiante, mostraremos que eles estão de acordo com o conceito de probabilidade clássica e também com a interpretação freqüencial. Na Seção 6.3, veremos até que ponto os postulados também são compatíveis com probabilidades subjetivas.

Os dois primeiros postulados estão de acordo com o conceito de probabilidade clássica porque a fração $\frac{s}{n}$ é sempre positiva ou zero, e para o espaço amostral inteiro (que inclui todos os n resultados) a probabilidade é $\frac{s}{n} = \frac{n}{n} = 1$. Quando se trata da interpretação freqüencial, a proporção de vezes que um evento ocorre não pode ser um número negativo e, como um dos resultados no espaço amostral sempre deve ocorrer (ou seja, 100% das vezes), a probabilidade de ocorrer algum dos resultados do espaço amostral é 1.

Embora a probabilidade 1 fique assim identificada com a certeza absoluta, na prática atribuímos uma probabilidade 1 também a eventos cuja ocorrência seja "praticamente certa". Por exemplo, associamos a probabilidade 1 ao evento de que pelo menos uma pessoa irá assistir ao noticiário de uma emissora de televisão numa dada noite, embora isso não esteja logicamente correto. Analogamente, atribuímos uma probabilidade 1 ao evento de que nem todo estudante brasileiro que concluir o Segundo Grau e que pretender ingressar numa faculdade no primeiro semestre de 2007 faça o vestibular na UFRJ.

O terceiro postulado de Probabilidade é especialmente importante, embora não seja tão exatamente tão óbvio como os outros dois.

O TERCEIRO POSTULADO DE PROBABILIDADE

3. *Se dois eventos são mutuamente excludentes, a probabilidade de ocorrência de um ou do outro é igual à soma de suas probabilidades. Simbolicamente,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

para dois eventos A *e* B *quaisquer mutuamente excludentes.*

Por exemplo, se a probabilidade de as condições meteorológicas melhorarem no decorrer de certa semana é 0,62 e a probabilidade de se manterem inalteradas é 0,23, então a probabilidade de as condições melhorarem ou se manterem inalteradas é 0,62 + 0,23 = 0,85. Da mesma forma, se as probabilidades de um estudante obter um conceito A ou um B numa disciplina são 0,13 e 0,29, res-

Snow666

pectivamente, então a probabilidade de o estudante obter um dos dois conceitos A ou B é 0,13 + 0,29 = 0,42.

Para mostrar que o terceiro postulado também é compatível com o conceito de probabilidade clássica, denotemos por s_1 e s_2 os números de resultados igualmente possíveis que compreendem os eventos A e B. Sendo A e B mutuamente excludentes, não há duas dessas possibilidades que sejam iguais e todas as $s_1 + s_2$ compreendem o evento $A \cup B$. Assim,

$$P(A) = \frac{s_1}{n} \quad P(B) = \frac{s_2}{n} \quad P(A \cup B) = \frac{s_1 + s_2}{n}$$

e $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$.

No que diz respeito à interpretação freqüencial, se um evento ocorre, digamos, 36% das vezes, um outro evento ocorre 41% das vezes, e ambos não podem ocorrer simultaneamente (isto é, são mutuamente excludentes), então ocorrerá um ou outro em 36 + 41 = 77% das vezes. Isso está de acordo com o terceiro postulado.

Utilizando os três postulados de Probabilidade, podemos deduzir muitas regras adicionais que devem ser "obedecidas" pelas probabilidades: algumas delas são fáceis de provar e outras não o são, mas todas têm importantes aplicações. Entre as conseqüências imediatas dos três postulados, temos que as probabilidades nunca podem ser superiores a 1, que um evento que não pode ocorrer tem probabilidade 0, e que as probabilidades de ocorrer e de não ocorrer um certo evento sempre têm 1 por soma. Simbolicamente,

$$P(A) \leq 1 \quad \textit{para qualquer evento } A$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A) + P(A') = 1 \quad \textit{para qualquer evento } A$$

A primeira dessas afirmações expressa o fato que não pode haver mais resultados favoráveis do que resultados, ou que um evento não pode ocorrer mais do que 100% das vezes. A segunda expressa o fato que, quando um evento não pode ocorrer, há $s = 0$ resultados favoráveis, ou que tal evento ocorre 0% das vezes. Na prática, também costumamos atribuir probabilidade 0 a eventos que são tão improváveis que estamos "praticamente certos" de que não ocorrerão. Por exemplo, atribuiríamos probabilidade 0 ao evento de um macaco deixado à frente de um teclado acabar datilografando palavra por palavra toda a obra de Machado de Assis, sem um único erro datilográfico. Ou, numa jogada de uma moeda, atribuiríamos a probabilidade zero ao evento de a moeda cair de pé.

O terceiro resultado também pode ser deduzido dos postulados de Probabilidade e pode ser visto com facilidade que é compatível tanto com o conceito clássico como com a interpretação freqüencial. No conceito clássico, se há s "sucessos" então há $n - s$ "fracassos", as probabilidades correspondentes são $\frac{s}{n}$ e $\frac{n-s}{n}$ e sua soma é

$$\frac{s}{n} + \frac{n-s}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

De acordo com a interpretação freqüencial, podemos dizer que se alguns determinados investimentos são bem-sucedidos 22% das vezes, então 78% das vezes esses investimentos não são bem-sucedidos, as probabilidades correspondentes são 0,22 e 0,78, e sua soma é 1.

Os exemplos que seguem mostram como são postos em prática os postulados e as regras dadas acima.

EXEMPLO 6.6 Se A e B são os eventos que uma certa revista de automobilismo cotar o sistema de som de um automóvel como sendo bom ou ruim e se $P(A) = 0{,}24$ e $P(B) = 0{,}35$, determine as seguintes probabilidades:

Snow666

(a) $P(A')$;
(b) $P(A \cup B)$;
(c) $P(A \cap B)$.

Solução **(a)** Usando a terceira das três regras à página 142, vemos que $P(A')$, ou seja, a probabilidade de a revista cotar o sistema de som como não sendo bom, é $1 - 0{,}24 = 0{,}76$.

(b) Como os eventos A e B são mutuamente excludentes, podemos usar o terceiro postulado de Probabilidade e escrever $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}24 + 0{,}35 = 0{,}59$ para a probabilidade de o sistema de som ser cotado como bom ou ruim.

(c) Como os eventos A e B são mutuamente excludentes, não podem ocorrer ambos e $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$.

Em problemas como esse, geralmente é útil construir um diagrama de Venn, preencher as probabilidades associadas às várias regiões, e então ler as respostas diretamente do diagrama.

EXEMPLO 6.7 Se C e D são os eventos de o Dr. Paulo estar em seu consultório às 9 horas da manhã ou de estar no hospital, se $P(C) = 0{,}48$ e $P(D) = 0{,}27$, encontre $P(C' \cap D')$.

Solução Construindo o diagrama de Venn da Figura 6.6, começamos colocando a probabilidade 0 na região 1, porque os eventos C e D são mutuamente excludentes. Decorre que a probabilidade 0,48 do evento C deve ir para a região 2 e a probabilidade 0,27 do evento D deve ir para a região 3. Portanto, a probabilidade remanescente de $1 - (0{,}48 + 0{,}27) = 0{,}25$ deve ir para a região 4. Como $C' \cap D'$ é representado pela região fora de ambos círculos, ou seja, pela região 4, vemos que a resposta é $P(C' \cap D') = 0{,}25$.

6.3 PROBABILIDADES E CHANCES

Se um evento tem duas vezes mais chances de ocorrer do que de não ocorrer, dizemos que as **chances** são de 2 para 1 de ocorrer; se um evento tem três vezes mais chances de ocorrer do que de não ocorrer, dizemos que as chances são de 3 para 1 de ocorrer; se um evento tem dez vezes mais chances de ocorrer do que de não ocorrer, dizemos que as chances são de 10 para 1 de ocorrer, e assim por diante. De um modo geral,

As chances de ocorrência de um evento são dadas pelo quociente da probabilidade de que vá ocorrer o evento pela probabilidade de que não vá ocorrer.

Simbolicamente,

A EXPRESSÃO DE CHANCES EM TERMOS DE PROBABILIDADES

Se a probabilidade de um evento é p, então a chance de sua ocorrência é de a para b, onde a e b são valores positivos tais que

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{1-p}$$

Costuma-se expressar as chances em termos do quociente de dois inteiros positivos sem fatores comuns. Também, se um evento tem mais chances de não ocorrer do que de ocorrer, é costume trabalhar com as chances de que não vá ocorrer, em vez de com as chances de que vá ocorrer.

Snow666

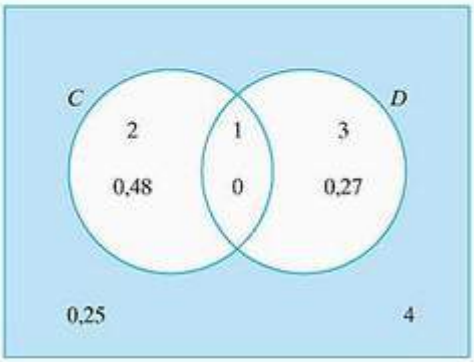

Figura 6.6
Diagrama de Venn para o Exemplo 6.7.

EXEMPLO 6.8 Quais são as chances de ocorrer um evento se sua probabilidade é

(a) $\frac{5}{9}$;

(b) 0,85;

(c) 0,20?

Solução **(a)** Por definição, as chances são $\frac{5}{9}$ para $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$, ou 5 para 4.

(b) Por definição, as chances são 0,85 para 1 – 0,85 = 0,15, 85 para 15, ou melhor, 17 para 3.

(c) Por definição, as chances são 0,20 para 1 – 0,20 = 0,80, 20 para 80, ou 1 para 4, e dizemos que as chances são de 4 para 1 *contra* a ocorrência do evento. Em geral, é assim que relatamos as chances quando um evento tem mais chances de *não* ocorrer.

Em apostas, o termo "chance" também é usado para denotar o quociente do valor apostado por um parceiro pelo valor apostado pelo outro. Por exemplo, se um jogador diz que aposta 3 contra 1 na ocorrência de um evento, ele quer dizer que está disposto a apostar \$3 contra \$1 (ou talvez \$30 contra \$10, ou \$1.500 contra \$500) que o evento vá ocorrer. Se tal **chance de aposta** é de fato igual à chance de ocorrência do evento, dizemos que a aposta é **honesta** (ou **equilibrada**). Se um jogador realmente acredita que uma aposta é honesta, ele estará disposto a apostar, pelo menos em princípio, em qualquer um dos dois lados. Em tal situação, o jogador apostaria igualmente \$1 contra \$3 (ou \$10 contra \$30, ou \$500 contra \$1.500) que o evento não vá ocorrer.

EXEMPLO 6.9 Os registros indicam que $\frac{1}{12}$ dos caminhões pesados em um posto de controle rodoviário acusam excesso de carga. É uma aposta honesta alguém apostar \$40 contra \$4 que o próximo caminhão a ser pesado não terá excesso de carga?

Solução Como a probabilidade de o caminhão não levar excesso de carga é $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$, as chances são de 11 para 1, e a aposta seria honesta se a pessoa oferecesse apostar \$44 contra \$4 que o próximo caminhão não acusasse excesso de carga. Assim, \$40 contra \$4 não é uma aposta honesta, pois favorece a pessoa que a faz.

Essa discussão de chances e chances em apostas proporciona o fundamento para uma maneira de medir **probabilidades subjetivas**. Se um comerciante "sente" que as chances de sucesso de uma nova loja de roupas são de 3 para 2, ele está disposto a apostar (ou que considera uma aposta honesta apostar) \$300 contra \$200, ou talvez \$3.000 contra \$2.000, que a nova loja será bem-sucedida. Dessa forma, ele expressa sua crença a respeito das incertezas ligadas ao sucesso da nova loja e, para convertê-la em uma probabilidade, tomamos a equação

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{1-p}$$

Snow666

com $a = 3$ e $b = 2$ e a resolvemos em relação a p. Em geral, resolvendo a equação $\frac{a}{b} = \frac{p}{1-p}$ em p, obtemos o resultado seguinte, que o leitor pode verificar no Exercício 6.39.

EXPRESSANDO PROBABILIDADES EM TERMOS DE CHANCES

Se as chances são de a para b que um evento vá ocorrer, então a probabilidade de sua ocorrência é

$$p = \frac{a}{a+b}$$

Substituindo agora $a = 3$ e $b = 2$ nessa fórmula para p encontramos que, de acordo com o comerciante, a probabilidade de sucesso da nova loja de roupas é de $\frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$ ou 0,60.

EXEMPLO 6.10 Se um candidato a treinador de um time de futebol acredita que suas chances são de 7 para 1 de conseguir o emprego, qual é a probabilidade subjetiva que ele está atribuindo a conseguir o emprego?

Solução Substituindo $a = 7$ e $b = 1$ na fórmula precedente, obtemos $p = \frac{7}{7+1} = \frac{7}{8} = 0{,}875$.

Vejamos agora se as probabilidades subjetivas determinadas dessa forma se "comportam" de acordo com os postulados de Probabilidade. Como a e b são números positivos, $\frac{a}{a+b}$ não pode ser negativo e, assim, o primeiro postulado é satisfeito. Quanto ao segundo postulado, observe que quanto mais certos estivermos da ocorrência de um evento, "melhores" chances estaremos dispostos a lhe atribuir: digamos, 99 para 1, 9.999 para 1, e quem sabe até 999.999 para 1. As probabilidades correspondentes são 0,99, 0,9999 e 0,999999 e vemos que, quanto mais certos estivermos da ocorrência de um evento, mais próxima de 1 será a sua probabilidade.

O terceiro postulado não necessariamente se aplica a probabilidades subjetivas, mas os proponentes do ponto de vista subjetivo impõem-no como um **critério de consistência**. Em outras palavras, se as probabilidades subjetivas de uma pessoa "se comportam" de acordo com o terceiro postulado, dizemos que essa pessoa é consistente; caso contrário, devemos encarar os julgamentos de probabilidades dessa pessoa com um certo cuidado.

EXEMPLO 6.11 Um colunista de jornal acredita que as chances são de 2 para 1 que a taxa de juros vá aumentar antes do fim do ano, de 1 para 5 que a taxa permanecerá a mesma e de 8 para 3 que aumentará ou permanecerá no mesmo patamar. São consistentes as probabilidades correspondentes?

Solução As probabilidades correspondentes à taxa de juros aumentar antes do fim do ano, de permanecer a mesma ou de permanecer inalterada são, respectivamente, $\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$ e $\frac{8}{8+3} = \frac{8}{11}$. Como $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, e não $\frac{8}{11}$, as probabilidades não são consistentes. Portanto, o julgamento do colunista deve ser questionado.

Snow666

EXERCÍCIOS

6.21 Num estudo das necessidades futuras de um aeroporto, C é o evento de que existirão fundos suficientes para a expansão planejada e E é o evento de que a expansão planejada incluirá um estacionamento suficientemente amplo. Expresse em palavras o que significam as probabilidades $P(C')$, $P(E')$, $P(C' \cap E)$ e $P(C \cap E')$.

6.22 Com referência ao Exercício 6.21, expresse simbolicamente as probabilidades de que haverá

(a) fundos suficientes mas não suficientes vagas de estacionamento;
(b) nem fundos suficientes nem estacionamento suficiente.

6.23 Em relação a um concerto sinfônico programado, seja A o evento que haverá um bom comparecimento de público e W o evento que mais do que a metade da platéia irá embora durante o intervalo. Expresse em palavras o que significam as probabilidades $P(A')$, $P(A' \cap W)$ e $P(A \cap W')$.

6.24 Com referência ao Exercício 6.23, seja F o evento de que o solista não conseguirá se apresentar e expresse simbolicamente as probabilidades de que

(a) o solista não conseguirá se apresentar e mais do que a metade da platéia irá embora durante o intervalo;
(b) o solista conseguirá se apresentar e haverá um bom comparecimento de público.

6.25 Quais postulados de Probabilidade são violados pelas afirmações seguintes?

(a) Como seu carro enguiçou, a probabilidade de chegar atrasado é – 40.
(b) A probabilidade de um espécime mineral conter cobre é 0,26 e a probabilidade de não conter cobre é 0,64.
(c) A probabilidade de uma conferência ser interessante é 0,35 e a probabilidade de não ser interessante é quatro vezes maior.
(d) As probabilidades de um estudante passar uma noite estudando ou vendo televisão são 0,22 e 0,48, respectivamente, e a probabilidade de acontecer uma ou a outra coisa é 0,80.

6.26 Quais das três regras à página 142 são violadas pelas afirmações seguintes?

(a) A probabilidade de uma cirurgia resultar em sucesso é 0,73 e a probabilidade de não resultar em sucesso é 0,33.
(b) A probabilidade de dois eventos mutuamente excludentes ocorrerem simultaneamente é sempre igual a 1.
(c) A probabilidade de uma nova vacina ser eficaz é 1,09.
(d) A probabilidade de um evento ocorrer e de ele não ocorrer é sempre igual a 1.

6.27 Use diagramas de Venn para provar que $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A')$ e expresse essa igualdade em palavras.

6.28 Use diagramas de Venn para provar que $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B')$ e expresse essa igualdade em palavras.

6.29 Explique em palavras por que cada uma das seguintes desigualdades deve ser falsa:

(a) $P(A \cup B) < P(A)$;
(b) $P(A \cap B) > P(A)$.

6.30 Encontre exemplos numéricos em que dois eventos A e B sejam mutuamente excludentes e os eventos A' e B'

(a) não sejam mutuamente excludentes;
(b) também sejam mutuamente excludentes.

Snow666

6.31 Sob quais circunstâncias os eventos A e B e também os eventos A e B' são mutuamente excludentes?

6.32 Ao digitar dados num computador, a probabilidade de um estudante cometer pelo menos três erros a cada 1.000 toques no teclado é de 0,64 e a probabilidade de ele cometer de 4 a 6 erros em cada 1.000 toques é de 0,21. Encontre as probabilidades de o estudante cometer em 1.000 toques

(a) pelo menos 4 erros;
(b) no máximo 6 erros;
(c) pelo menos 7 erros.

6.33 Converta as seguintes probabilidades em chances ou chances em probabilidades:

(a) A probabilidade de obter pelo menos duas caras em quatro jogadas de uma moeda honesta é $\frac{11}{16}$.
(b) Se três ladrilhos cerâmicos são escolhidos aleatoriamente de uma caixa com doze ladrilhos, dos quais três apresentam defeitos, as chances de pelo menos um deles apresentar defeito é de 34 para 21.
(c) Se um entrevistador escolher aleatoriamente cinco de 24 famílias para incluir numa pesquisa, a probabilidade de uma família em particular ser incluída na pesquisa é de $\frac{5}{24}$.
(d) Se uma secretária colocar aleatoriamente seis cartas em seis envelopes já endereçados, as chances são de 719 para 1 de que nem todas cartas acabem nos envelopes corretos.

6.34 Um torcedor de futebol recebe a oferta de uma aposta de \$15 contra seus \$5 que o time dos EUA perderá sua primeira partida na Copa do Mundo de futebol. Se o torcedor relutar em aceitar a aposta, o que essa aposta nos diz quanto à probabilidade subjetiva que o torcedor atribui ao time dos EUA ganhar essa partida?

6.35 Um produtor de televisão está disposto a apostar \$1.200 contra \$1.000, mas não \$1.500 contra \$1.000, que um certo novo programa será um sucesso. O que isso nos diz sobre a probabilidade que o produtor atribui ao sucesso do programa?

6.36 Consultado sobre seu futuro político, um político responde que as chances são de 2 para 1 de ele não concorrer à Câmara dos Deputados, e as chances são de 4 para 1 de ele não concorrer ao Senado. Além disso, ele supõe que há uma chance de 7 para 5 de ele concorrer a um ou outro cargo. As probabilidades correspondentes são consistentes?

6.37 O diretor de um colégio acha que existe uma chance de 7 para 5 contra ele obter um aumento de salário de \$1.000, e uma chance de 11 para 1 contra obter um aumento de \$2.000. Além disso, ele considera que é uma aposta equilibrada que obterá um ou o outro aumento. Discuta a consistência das probabilidades subjetivas correspondentes.

6.38 Alguns eventos são tão improváveis que convencionamos atribuir-lhes probabilidade zero. O leitor atribuiria probabilidade zero aos eventos

(a) de digitar aleatoriamente uma página em seu teclado e a impressão sair com o Hino da Independência;
(b) a mesma árvore ser atingida por um raio em quatro dias consecutivos;
(c) treze cartas servidas aleatoriamente de um baralho comum de 52 cartas serem todas de espadas?

6.39 Verifique algebricamente que a equação $\frac{a}{b} = \frac{p}{1-p}$, resolvida em p, dá $p = \frac{a}{a+b}$.

Snow666

6.4 REGRAS DE ADIÇÃO

O terceiro postulado de Probabilidade é aplicável apenas a dois eventos mutuamente excludentes, mas pode facilmente ser generalizado de duas maneiras de modo que seja aplicável a mais do que dois eventos mutuamente excludentes e também a dois eventos não necessariamente mutuamente excludentes. Dizemos que k eventos são mutuamente excludentes quando não há dois quaisquer deles que tenham algum elemento em comum. Nesse caso, podemos aplicar repetidamente o terceiro postulado e, assim, mostrar que

GENERALIZAÇÃO DO POSTULADO 3

Se k eventos são mutuamente excludentes, a probabilidade de ocorrência de um deles é igual à soma de suas probabilidades individuais; simbolicamente,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$$

para quaisquer eventos mutuamente excludentes $A_1, A_2, \ldots,$ e A_k.

Novamente, aqui lemos $\cup$ como "ou".

EXEMPLO 6.12 As probabilidades de uma pessoa que deseja adquirir um carro novo escolher um Chevrolet, um Ford ou um Honda são 0,17, 0,22 e 0,08, respectivamente. Supondo que ela compre apenas um carro, qual é a probabilidade de ser de uma dessas três marcas?

Solução Como as três possibilidades são mutuamente excludentes, uma substituição direta dá 0,17 + 0,22 + 0,08 = 0,47.

EXEMPLO 6.13 As probabilidades de um serviço de teste do consumidor classificar uma nova máquina fotográfica como ruim, razoável, boa, muito boa ou excelente são 0,07, 0,16, 0,34, 0,32 e 0,11. Qual é a probabilidade de a nova máquina ser classificada como boa, muito boa ou excelente?

Solução Como as cinco possibilidades são mutuamente excludentes, a probabilidade é 0,34 + 0,32 + 0,11 = 0,77.

A tarefa de atribuir probabilidades a todos os eventos possíveis relacionados com uma dada situação pode ser bastante entediante. Com efeito, pode-se mostrar que se um espaço amostral tem 10 elementos (pontos ou resultados) podemos formar mais de 1.000 eventos distintos; e se um espaço amostral tem 20 elementos, podemos formar mais de 1 milhão de eventos.* Felizmente, quase nunca é necessário atribuir probabilidades a todos os eventos possíveis (ou seja, a todos os subconjuntos possíveis de um espaço amostral). A regra seguinte, que é uma aplicação direta da generalização precedente do terceiro postulado de Probabilidade, facilita a determinação da probabilidade de qualquer evento com base nas probabilidades associadas com resultados individuais de um espaço amostral:

REGRA PARA CALCULAR A PROBABILIDADE DE UM EVENTO

A probabilidade de um evento A é dada pela soma das probabilidades dos resultados individuais que constituem A.

* Em geral, se um espaço amostral tem n elementos, podemos formar 2^n eventos diferentes. Cada elemento ou está incluído ou está excluído em um dado evento, de modo que, pela multiplicação de escolhas, há $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ possibilidades. Note que $2^{10} = 1.024$ e $2^{20} = 1.048.576$.

Snow666

EXEMPLO 6.14 Referindo-nos novamente ao Exemplo 6.1, que tratava de dois vendedores e três caminhões Ford 1998 numa revenda de caminhões usados, suponha que os dez pontos do espaço amostral, mostrados originalmente na Figura 6.1, tenham as probabilidades exibidas na Figura 6.7. Encontre as probabilidades de

(a) ambos vendedores juntos venderem dois caminhões;

(b) o segundo vendedor não vender caminhão algum;

(c) o segundo vendedor vender pelo menos dois caminhões.

Solução **(a)** Somando as probabilidades associadas aos pontos (2, 0), (1, 1) e (0, 2), obtemos 0,08 + 0,06 + 0,04 = 0,18.

(b) Somando as probabilidades associadas aos pontos (0, 0), (1, 0), (2, 0) e (3, 0), obtemos 0,44 + 0,10 + 0,88 + 0,05 = 0,67.

(c) Somando as probabilidades associadas aos pontos (0, 2), (1, 2) e (0, 3), obtemos 0,04 + 0,02 + 0,09 = 0,15.

No caso especial em que todos os resultados são equiprováveis, a regra precedente leva à fórmula $P(A) = \frac{s}{n}$, que já utilizamos acima em conexão com o conceito de probabilidade clássica. Aqui, n é o número total de resultados individuais no espaço amostral e s é o número de "sucessos", isto é, o número de resultados que constituem o evento A.

EXEMPLO 6.15 Dado que os 44 pontos (resultados) do espaço amostral da Figura 6.8 são todos equiprováveis, encontre $P(A)$.

Solução Como os 44 pontos (resultados) são equiprováveis, cada um tem a probabilidade $\frac{1}{44}$ e como podemos contar que há 10 resultados em A, temos $P(A) = \frac{1}{44} + \ldots + \frac{1}{44} = \frac{10}{44}$ ou, aproximadamente, 0,23.

Como o terceiro postulado e sua generalização são aplicáveis apenas a eventos mutuamente excludentes, não podem ser utilizados, por exemplo, para determinar a probabilidade de um observador de pássaros, num único passeio, avistar um sabiá ou um pica-pau. Também não podem ser utilizadas para determinar a probabilidade de um cliente de uma loja de um shopping comprar uma camisa, um suéter, um cinto ou uma gravata. No primeiro caso, o ornitólogo poderia avistar ambos pássaros e, no segundo caso, o cliente poderia comprar vários dos itens mencionados.

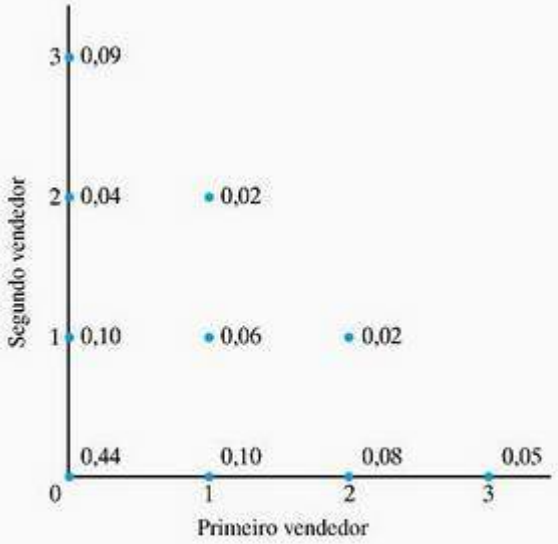

Figura 6.7 Espaço amostral do Exemplo 6.14.

Snow666

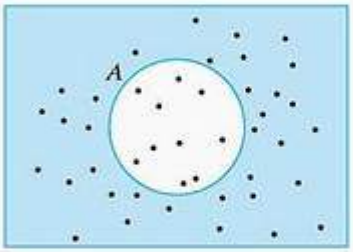

Figura 6.8
Espaço amostral com 44 resultados equiprováveis.

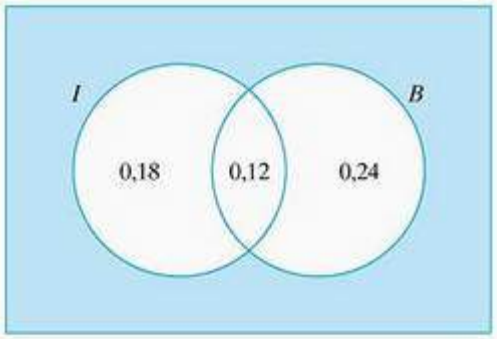

Figura 6.9
Diagrama de Venn para o exemplo.

Para encontrar uma fórmula para $P(A \cup B)$ que seja válida independentemente de os eventos A e B serem ou não mutuamente excludentes, considere o diagrama de Venn da Figura 6.9. Esse diagrama refere-se às propostas de emprego de um recém-formado de uma universidade, com I e B denotando a possibilidade de o recém-formado receber uma proposta de emprego de uma indústria e de um banco, respectivamente. Pode ser visto do diagrama de Venn da Figura 6.9 que

$$P(I) = 0{,}18 + 0{,}12 = 0{,}30$$

$$P(B) = 0{,}12 + 0{,}24 = 0{,}36$$

e

$$P(I \cup B) = 0{,}18 + 0{,}12 + 0{,}24 = 0{,}54$$

onde foi possível somar as respectivas probabilidades porque pertencem a eventos mutuamente excludentes (regiões que não se superpõem no diagrama de Venn).

Se tivéssemos aplicado erroneamente o terceiro postulado para calcular $P(I \cup B)$, teríamos obtido $P(I) + P(B) = 0{,}30 + 0{,}36 = 0{,}66$, que excede o valor correto em 0,12. Esse erro resulta de somar duas vezes $P(I \cap B) = 0{,}12$, uma vez em $P(I) = 0{,}30$ e outra em $P(B) = 0{,}36$; a correção se faz subtraindo 0,12 de 0,66. Assim, poderíamos escrever

$$\begin{aligned} P(I \cup B) &= P(I) + P(B) - P(I \cap B) \\ &= 0{,}30 + 0{,}36 - 0{,}12 = 0{,}54 \end{aligned}$$

o que está de acordo com o resultado anteriormente obtido.

Como o argumento usado nesse exemplo vale para dois eventos A e B quaisquer, podemos agora enunciar a seguinte **regra geral de adição**, que se aplica quer A e B sejam eventos mutuamente excludentes ou não.

REGRA GERAL DE ADIÇÃO

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Snow666

Quando A e B são mutuamente excludentes, $P(A \cap B) = 0$ e a fórmula precedente se reduz à do terceiro postulado de Probabilidade. Nesse contexto, o terceiro postulado é também designado **regra especial de adição**. Para ampliar a terminologia, a generalização do terceiro postulado, à página 149, é às vezes chamada **regra generalizada** (especial) **de adição**.

EXEMPLO 6.16 As probabilidades de que choverá no Recife num certo dia de agosto, de que haverá trovoadas nesse dia, e de que choverá e haverá trovoadas nesse dia são de 0,27, 0,24 e 0,15, respectivamente. Qual é a probabilidade de chover e/ou haver trovoadas nesse dia no Recife?

Solução Se R denota chuva e T denota trovoadas, temos $P(R) = 0{,}27$, $P(T) = 0{,}24$ e $P(R \cap T) = 0{,}15$. Substituindo esses valores na fórmula da regra geral de adição obtemos

$$\begin{aligned} P(R \cup T) &= P(R) + P(T) - P(R \cap T) \\ &= 0{,}27 + 0{,}24 - 0{,}15 \\ &= 0{,}36 \end{aligned}$$

EXEMPLO 6.17 Numa pesquisa por amostras realizada num certo bairro de uma cidade, as probabilidades são 0,92, 0,53 e 0,48 de que uma família selecionada ao acaso possua um automóvel sedan, um 4 por 4 ou ambos. Qual é a probabilidade de uma tal família possuir um automóvel sedan, um 4 por 4, ou ambos?

Solução Substituindo esses valores na fórmula da regra geral de adição, obtemos 0,92 + 0,53 − 0,48 = 0,97. Se tivéssemos aplicado *erroneamente* o terceiro postulado de Probabilidade, teríamos obtido o resultado impossível 0,92 + 0,53 = 1,45.

A regra geral de adição pode ser generalizada de modo a ser aplicável a três ou mais eventos que não precisam ser mutuamente excludentes, mas não entraremos nesse detalhe aqui.

EXERCÍCIOS

6.40 O departamento de polícia de uma cidade necessita de pneus novos para seus carros-patrulha. As probabilidades de o departamento comprar pneus Firestone, Goodyear, Michelin, Goodrich ou Pirelli são, respectivamente, 0,19, 0,26, 0,25, 0,20 e 0,07. Encontre as probabilidades de o departamento comprar pneus

(a) Goodyear ou Goodrich;
(b) Firestone ou Michelin;
(c) Goodyear, Michelin ou Pirelli.

6.41 Em relação ao Exercício 6.40, qual é a probabilidade de o departamento de polícia comprar pneus de uma outra marca?

6.42 As probabilidades de obter um total de 2, 3, 4,..., 11 ou 12 pontos jogando um par de dados equilibrados são, respectivamente, $\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}$, e $\frac{1}{36}$. Quais são as probabilidades de obter um total

(a) de 7 ou 11;
(b) de 2, 3 ou 12;
(c) que é um número ímpar, ou seja, 3, 5, 7, 9 ou 11?

6.43 Uma assistente de um laboratório de uma firma às vezes almoça no refeitório da firma, às vezes traz seu próprio lanche, às vezes almoça num restaurante perto da firma, às vezes ela vai para casa almoçar, e às vezes pula o almoço para fazer regime. Se as probabilidades respectivas são 0,23, 0,31, 0,15, 0,24 e 0,07, encontre as probabilidades de ela

Snow666

(a) almoçar no refeitório da firma ou no restaurante próximo da firma;
(b) trazer seu próprio lanche, ir para casa almoçar, ou pular o almoço;
(c) almoçar no refeitório da firma ou ir para casa almoçar;
(d) pular o almoço para fazer regime.

6.44 A Figura 6.10 se refere ao número de pessoas convidadas para conhecer um novo e luxuoso projeto imobiliário e ao número de pessoas que acabam aceitando o convite. Se os 45 resultados (pontos do espaço amostral) são todos equiprováveis, encontre as probabilidades de
(a) no máximo seis das pessoas aceitarem o convite;
(b) no mínimo sete das pessoas aceitarem o convite;
(c) somente duas das pessoas não aceitarem o convite.

6.45 Se K representa cara e C representa coroa, os 32 resultados possíveis de cinco jogadas de uma moeda são KKKKK, KKKKC, KKKCK, KKCKK, KCKKK, CKKKK, KKKCC, KKCKC, KKCCK, KCKKC, KCKCK, KCCKK, CKKKC, CKKCK, CKCKK, CCKKK, KKCCC, KCKCC, KCCKC, KCCCK, CKKCC, CKCKC, CKCCK, CCKKC, CCKCK, CCCKK, KCCCC, CKCCC, CCKCC, CCCKC, CCCCK e CCCCC. Se todos esses 32 resultados são igualmente prováveis, quais são as probabilidades de obter 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 caras?

6.46 As probabilidades de uma pessoa acusada de dirigir alcoolizada passar uma noite na cadeia, ter sua carteira de motorista cassada ou ambos são, respectivamente, 0,68, 0,51 e 0,22. Qual é a probabilidade de uma pessoa acusada de dirigir alcoolizada passar uma noite na cadeia e/ou ter sua carteira cassada?

6.47 Um leiloeiro conta com dois avaliadores de jóias com pedras preciosas. A probabilidade de o mais velho dos dois estar indisponível é 0,33, a probabilidade de o outro estar indisponível é 0,27 e a probabilidade de ambos estarem indisponíveis é de 0,19. Qual é a probabilidade de um dos dois ou ambos estar indisponíveis?

6.48 Um professor acredita que tem uma chance de 3 para 2 contra conseguir uma promoção, uma chance equilibrada de obter um aumento e uma chance de 4 para 1 contra obter ambos. Quais são as chances de o professor obter uma promoção e/ou um aumento?

6.49 Para casais sócios de um clube de golfe, as probabilidades de o marido, a esposa, ou ambos votarem nas eleições para presidente do clube são 0,39, 046 e 0,31, respectivamente. Qual é a probabilidade de um deles ou ambos votarem nessas eleições?

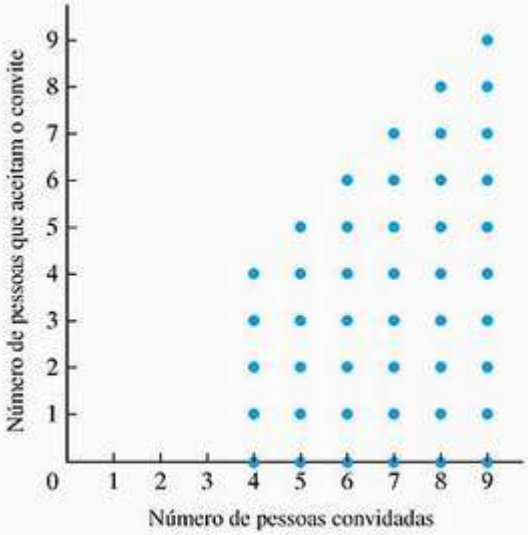

Figura 6.10
Espaço amostral do Exercício 6.44

Snow666

6.50 Explique por que deve haver um erro em cada uma das afirmações seguintes.

(a) As probabilidades de a diretoria de um time de futebol profissional demitir o treinador, o gerente de futebol, ou ambos, são 0,85, 0,49 e 0,27.

(b) As probabilidades de um paciente de um hospital ter febre, ter pressão alta, ou ambos, são 0,63, 0,29 e 0,45.

6.5 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Se quisermos saber a probabilidade de um evento, mas não especificarmos o espaço amostral, é bem possível que encontremos respostas diferentes que podem estar todas corretas. Por exemplo, se perguntarmos pela probabilidade de um advogado ganhar mais de $200.000,00 por ano dentro dos 10 anos seguintes à sua habilitação, podemos obter uma resposta que se aplica a todos os que praticam a lei no país, outra que é aplicável a advogados que trabalham para empresas, outra aplicável a advogados empregados pelo governo federal, outra para advogados especializados em casos de divórcio, e assim por diante. Como a escolha do espaço amostral de modo algum é sempre evidente, é conveniente utilizar o símbolo $P(A|S)$ para denotar a **probabilidade condicional** do evento A em relação ao espaço amostral S ou, como costumamos dizer, "a probabilidade de A dado S". O símbolo $P(A|S)$ explicita que estamos nos referindo a um determinado espaço amostral S, e em geral é preferível à notação abreviada $P(A)$, a menos que a escolha tácita de S fique perfeitamente entendida. Essa nova notação também é preferível quando nos referirmos a diferentes espaços amostrais no mesmo problema.

Para elaborar a idéia de uma probabilidade condicional, suponhamos que um instituto de pesquisa de consumidores tenha estudado os serviços prestados dentro da garantia por 200 lojas de pneus em uma grande cidade e que seus resultados estejam resumidos na tabela a seguir.

	Bom serviço dentro da garantia	*Serviço deficiente dentro da garantia*	*Total*
Lojas especializadas numa marca	64	16	80
Lojas não especializadas	42	78	120
Total	106	94	200

Selecionado aleatoriamente uma dessas lojas de pneus (isto é, cada loja tem a probabilidade $\frac{1}{200}$ de ser selecionada), constatamos que as probabilidades do evento N (escolher uma loja especializada numa marca), do evento G (escolher uma loja que preste bom serviço dentro da garantia) e do evento $N \cap G$ (escolher uma loja especializada numa marca que preste bom serviço dentro da garantia) são

$$P(N) = \frac{80}{200} = 0{,}40$$

$$P(G) = \frac{106}{200} = 0{,}53$$

e

$$P(N \cap G) = \frac{64}{200} = 0{,}32$$

Todas essas probabilidades foram calculadas por meio da fórmula $\frac{s}{n}$ para possibilidades equiprováveis.

Como a segunda dessas possibilidades é particularmente desconcertante — há uma chance quase equilibrada de se escolher uma loja que não presta serviço adequado dentro da garantia — veja-

Snow666

mos o que acontece se limitamos a escolha a lojas especializadas numa marca. Isso reduz o espaço amostral às 80 escolhas correspondentes à primeira linha da tabela e vemos que a probabilidade de se escolher uma loja especializada numa marca que preste bons serviços dentro da garantia é

$$P(G|N) = \frac{64}{80} = 0{,}80$$

Isso é uma melhora considerável em relação a $P(G) = 0{,}53$, como, aliás, era de se esperar. Note que a probabilidade condicional que obtivemos aqui,

$$P(G|N) = 0{,}80$$

também pode ser escrita como

$$P(G|N) = \frac{\frac{64}{200}}{\frac{80}{200}} = \frac{P(N \cap G)}{P(N)}$$

a saber, como a razão da probabilidade de escolher uma loja especializada numa marca que preste bons serviços dentro da garantia e a probabilidade de escolher uma loja especializada numa marca.

Generalizando esse exemplo, formulemos a seguinte definição de probabilidade condicional, que se aplica a dois eventos quaisquer A e B pertencentes a um dado espaço amostral S.

DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE CONDICIONAL

Se $P(B)$ é diferente de zero, então a probabilidade condicional de A em relação a B, isto é, a probabilidade de A dado B, é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Quando $P(B)$ é igual a zero, não é definida a probabilidade de A em relação a B.

EXEMPLO 6.18 Com referência às lojas de pneus apresentadas anteriormente, qual é a probabilidade de uma loja que não é especializada numa marca prestar bons serviços sob garantia, ou seja, qual é a probabilidade $P(G \mid N')$?

Solução Como pode ser visto na tabela,

$$P(G \cap N') = \frac{42}{200} = 0{,}21 \quad \text{e} \quad P(N') = \frac{120}{200} = 0{,}60$$

de modo que substituindo essas probabilidades na fórmula obtemos

$$P(G|N') = \frac{P(G \cap N')}{P(N')} = \frac{0{,}21}{0{,}60} = 0{,}35$$

Naturalmente, poderíamos ter obtido esse resultado diretamente da segunda linha da tabela à página 154, escrevendo

$$P(G|N') = \frac{42}{120} = 0{,}35$$

EXEMPLO 6.19 Numa certa escola de primeiro grau, a probabilidade de um aluno selecionado aleatoriamente provir de um lar com somente o pai ou a mãe presente é 0,36 e a probabilidade de ele provir de um lar com somente o pai ou a mãe presente e ser um estudante fraco (que geralmente é reprova-

Snow666

do) é 0,27. Qual é a probabilidade de um aluno selecionado aleatoriamente ser um estudante fraco, dado que ele provém de um lar com somente o pai ou a mãe presente?

Solução Denotando por L um estudante fraco e por O um estudante que provém de um lar com somente o pai ou a mãe presente, temos $P(O) = 0{,}36$ e $P(O \cap L) = 0{,}27$ e obtemos

$$P(L|O) = \frac{P(O \cap L)}{P(O)} = \frac{0{,}27}{0{,}36} = 0{,}75$$

EXEMPLO 6.20 A probabilidade de Henrique gostar de um filme que estreou nos cinemas é de 0,70 e a probabilidade de Janaína, sua namorada, gostar do filme é de 0,60. Se a probabilidade de Henrique gostar da estréia e de Janaína não gostar é de 0,28, qual é a probabilidade de que Henrique goste da estréia, dado que Janaína não irá gostar?

Solução Se H e J são os eventos de Henrique gostar da estréia de Janaína gostar da estréia, temos $P(J') = 1 - 0{,}60 = 0{,}40$ e $P(H \cap J') = 0{,}28$ e obtemos

$$P(H|J') = \frac{P(H \cap J')}{P(J')} = \frac{0{,}28}{0{,}40} = 0{,}70$$

O que é especial e interessante nesse resultado é que $P(H)$ e $P(H \mid J')$ são ambas iguais a 0,70 e que, como o leitor poderá conferir no Exercício 6.66, segue da informação dada que $P(H \mid J)$ também é igual a 0,70. Assim, a probabilidade do evento H é a mesma, independentemente de o evento J ter ou não ocorrido, de estar ou não ocorrendo, de ocorrer ou não no futuro, e dizemos que o evento H é independente do evento J. Em geral, pode ser verificado facilmente que, quando um evento é independente de um outro, o segundo evento também é independente do primeiro, e dizemos que os dois eventos são **independentes**. Quando dois eventos não são independentes, dizemos que eles são **dependentes**.

Quando formulamos essas definições, deveríamos ter especificado que nem H nem J têm probabilidade zero, pois nesse caso as probabilidades condicionais sequer existem. É por esse motivo que em geral é preferida uma definição alternativa de independência, uma que daremos à página 157.

6.6 REGRAS DE MULTIPLICAÇÃO

Na Seção 6.5, utilizamos a fórmula $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ apenas para definir e calcular probabilidades condicionais, mas se multiplicarmos ambos os membros da equação por $P(B)$, obteremos a fórmula seguinte, que nos permite calcular a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos.

REGRA GERAL DE MULTIPLICAÇÃO

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Como indicamos, essa fórmula é denominada **regra geral de multiplicação** e afirma que a probabilidade da ocorrência de dois eventos é o produto da probabilidade da ocorrência de um deles pela probabilidade condicional da ocorrência do outro evento, dado que o primeiro ocorreu, está

Snow666

ocorrendo, ou ocorrerá. Como não interessa qual dos dois eventos designamos por A e qual designamos por B, a fórmula também pode ser escrita como

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

EXEMPLO 6.21 Um júri consiste em 15 pessoas que somente completaram o Ensino Médio e em 9 pessoas que tiveram alguma educação superior. Se um advogado seleciona ao acaso dois dos membros do júri para uma argüição, qual é a probabilidade de nenhum dos dois ter tido alguma educação superior?

Solução Se A é o evento de a primeira pessoa selecionada não ter tido alguma educação superior, então $P(A) = \frac{15}{24}$. Também, se B é o evento de a segunda pessoa selecionada não ter tido alguma educação superior, segue que $P(B \mid A) = \frac{14}{23}$, já que há somente 14 pessoas sem alguma educação superior dentre as 23 que restam depois de ter sido selecionada uma pessoa sem alguma educação superior. Portanto, a regra geral de multiplicação fornece

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{15}{24} \cdot \frac{14}{23} = \frac{105}{276}$$

ou, aproximadamente, 0,38.

EXEMPLO 6.22 Suponha que a probabilidade de uma doença tropical rara ser corretamente diagnosticada é de 0,45 e que, uma vez diagnosticada corretamente, a probabilidade de cura é de 0,60. Qual é a probabilidade de uma pessoa que contraiu essa doença ser diagnosticada corretamente e ser curada?

Solução Usando a regra geral de multiplicação, obtemos (0,45)(0,60) = 0,27.

Quando A e B são eventos independentes, podemos substituir $P(A)$ por $P(A|B)$ na primeira das duas fórmulas para $P(A \cap B)$, ou $P(B)$ por $P(B|A)$ na segunda, obtendo a fórmula a seguir.

REGRA ESPECIAL DE MULTIPLICAÇÃO (EVENTOS INDEPENDENTES)

Se A e B são eventos independentes, então

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Em outras palavras, a regra diz que a probabilidade de ocorrência simultânea de dois eventos independentes é simplesmente o produto de suas probabilidades respectivas.

Como pode ser mostrado facilmente, também é verdade que se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, então A e B são eventos independentes. Dividindo por $P(B)$, obtemos

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

e então, substituindo $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ por $P(A|B)$, de acordo com a definição de probabilidade condicional, chegamos ao resultado que $P(A|B) = P(A)$, ou seja, que A e B são independentes. Portanto, podemos utilizar a regra de multiplicação especial como uma *definição* de independência, que torna muito fácil conferir se dois eventos A e B são independentes.

Snow666

EXEMPLO 6.23 Confira cada par de eventos dados a seguir quanto à independência.

(a) Eventos A e B para os quais $P(A) = 0{,}40$, $P(B) = 0{,}90$ e $P(A \cap B) = 0{,}36$.

(b) Eventos C e D para os quais $P(C) = 0{,}75$, $P(D) = 0{,}80$ e $P(C \cap D') = 0{,}15$.

(c) Eventos E e F para os quais $P(E) = 0{,}30$, $P(F) = 0{,}35$ e $P(E' \cap F') = 0{,}40$.

Solução **(a)** Como $(0{,}40)(0{,}90) = 0{,}36$, os dois eventos são independentes.

(b) Como $P(D') = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$ e $(0{,}75)(0{,}20) = 0{,}15$, os eventos C e D' são independentes e, portanto, também o são os eventos C e D.

(c) Como $P(E') = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$, $P(F') = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$ e $(0{,}70)(0{,}65) = 0{,}455$ e não $0{,}40$, os eventos E' e F' não são independentes e, portanto, tampouco o são os eventos E e F.

A regra especial de multiplicação pode ser facilmente generalizada, de modo a aplicar-se à ocorrência de três ou mais eventos independentes. Novamente, basta multiplicar todas as probabilidades individuais.

EXEMPLO 6.24 Se for de 0,70 a probabilidade de uma pessoa entrevistada em um *shopping* ser contra o aumento de impostos para o financiamento de obras de saneamento, qual é a probabilidade de entrevistar quatro pessoas no *shopping* e as três primeiras pessoas entrevistadas serem contra o aumento de impostos, mas a quarta não ser contra?

Solução Admitindo a independência dos eventos, multiplicamos todas as probabilidades e obtemos $(0{,}70)(0{,}70)(0{,}70)(0{,}30) = 0{,}1029$.

EXEMPLO 6.25 Com relação ao Exemplo 6.21, se três dos membros do júri forem escolhidos ao acaso pelo advogado, qual é a probabilidade de nenhum deles ter tido alguma educação superior?

Solução Como é de $\frac{15}{24}$ a probabilidade de a primeira pessoa escolhida não ter tido alguma educação superior, é de $\frac{14}{23}$ a probabilidade de a segunda pessoa escolhida não ter tido alguma educação superior, dado que a primeira pessoa escolhida não ter tido alguma educação superior e é de $\frac{13}{22}$ a probabilidade de a terceira pessoa escolhida não ter tido alguma educação superior, dado que as duas primeiras pessoas escolhidas não terem tido alguma educação superior, a probabilidade solicitada é de $\frac{15}{24} \cdot \frac{14}{23} \cdot \frac{13}{22} = \frac{455}{2.024}$ ou, aproximadamente, 0,225.

EXERCÍCIOS

6.51 Se A é o evento de um astronauta ser integrante das forças armadas, T é o evento de ter sido um piloto de testes e W é o evento de ser um cientista renomado, expresse cada uma das probabilidades seguintes em símbolos: a probabilidade de que um astronauta

(a) que foi piloto de testes ser integrante das forças armadas;
(b) que é integrante das forças armadas ser um cientista renomado;
(c) que não é um cientista renomado ter sido um piloto de testes;
(d) que não é integrante das forças armadas e que nunca foi um piloto de testes ser um cientista renomado.

6.52 Com referência ao Exercício 6.51, expresse cada uma das probabilidades seguintes em palavras: $P(A|W)$, $P(A'|T')$, $P(A' \cap W|T)$ e $(A|W \cap T)$.

6.53 Um departamento de orientação profissional testa estudantes de várias maneiras. Se I é o evento de um estudante apresentar alto escore de inteligência, A é o evento de um estudan-

Snow666

te acusar escore elevado em adaptação social e N é o evento de um estudante apresentar tendências neuróticas, expresse simbolicamente a probabilidade de que um estudante

(a) com alto escore de inteligência apresentar tendências neuróticas;
(b) que não apresenta alto escore em adaptação social não apresentar alto escore de inteligência;
(c) com tendências neuróticas não apresentar escore elevado nem em inteligência nem em adaptação social.

6.54 Dentre os 30 candidatos a um cargo numa instituição financeira, alguns são casados e outros não são, alguns tem experiência no mercado bancário e outros não tem, segundo os dados exatos apresentados a seguir.

	Casados	*Solteiros*
Alguma experiência	6	3
Nenhuma experiência	12	9

Se o gerente da instituição escolher ao acaso o primeiro candidato a ser entrevistado, se M é o evento de o primeiro candidato a ser entrevistado ser casado, E é o evento de o primeiro candidato a ser entrevistado ter experiência no mercado bancário, expresse em palavras e calcule as probabilidades seguintes: $P(M \cap E)$ e $P(E|M)$.

6.55 Utilize os resultados obtidos no Exercício 6.54 para verificar que

$$P(E|M) = \frac{P(M \cap E)}{P(M)}$$

6.56 Com relação ao Exercício 6.54, expresse em palavras e calcule as probabilidades seguintes: $P(E')$, $P(M' \cap E')$ e $P(M' \mid E')$.

6.57 Utilize os resultados obtidos no Exercício 6.56 para verificar que

$$P(M'|E') = \frac{P(M' \cap E')}{P(E')}$$

6.58 A probabilidade de um ônibus da linha Rio – São Paulo partir no horário é de 0,80 e a probabilidade de o ônibus partir no horário e chegar também no horário é de 0,72.

(a) Qual é a probabilidade de um ônibus que parte no horário chegar também no horário?
(b) Se há uma probabilidade de 0,75 de que tal ônibus chegar no horário, qual é a probabilidade de um ônibus que chegar no horário ter partido também no horário?

6.59 Uma pesquisa realizada junto a mulheres em posição de chefia mostrou que há uma probabilidade de 0,80 de uma tal mulher gostar de tomar decisões financeiras e uma probabilidade de 0,44 de uma tal mulher gostar de tomar decisões financeiras e também estar disposta a assumir riscos sérios. Qual é a probabilidade de que uma mulher em posição de chefia, que goste de tomar decisões financeiras, esteja também disposta a assumir riscos sérios?

6.60 A probabilidade de uma estudante de uma faculdade adquirir um computador portátil é de 0,75; se ela comprar um tal computador, as chances de suas notas melhorarem são de 4 para 1. Qual é a probabilidade de essa aluna adquirir um computador portátil e melhorar suas notas?

6.61 Dentre os 40 volumes de bagagem embarcados num ônibus do aeroporto de Heathrow para o centro de Londres, 30 são destinados ao Hotel Dorchester e 10 são destinados ao Hotel Savoy. Se dois dos volumes são furtados do ônibus enquanto este aguarda uma luz verde, qual é a probabilidade de ambos terem por destino o Hotel Dorchester?

Snow666

6.62 Se duas cartas são retiradas ao acaso de um baralho comum de 52 cartas, qual são as probabilidades de ambas cartas serem de copas se a primeira carta retirada

(a) for recolocada antes de retirar a segunda;

(b) não for recolocada antes de retirar a segunda?

A distinção entre as duas partes desse exercício é importante em Estatística. O que fizemos na parte (a) chama-se **amostragem com reposição**, e o que foi feito na parte (b), chama-se **amostragem sem reposição**.

6.63 Os eventos A e C são independentes se $P(A) = 0{,}80$, $P(C) = 0{,}95$ e $P(A \cap C) = 0{,}76$?

6.64 Os eventos M e N são independentes se $P(M) = 0{,}15$, $P(N) = 0{,}82$ e $P(M \cap N) = 0{,}12$?

6.65 No Exemplo 6.20, fornecemos $P(H \cap J') = 0{,}28$ e por isso escrevemos 0,28 na região correspondente a $H \cap J'$ no diagrama de Venn da Figura 6.11. Utilizando a informação fornecida no Exemplo 6.20, a saber, que $P(H) = 0{,}70$ e $P(J) = 0{,}60$, complete as probabilidades associadas com as três outras regiões do diagrama de Venn da Figura 6.11.

6.66 Consultando o Exercício 6.65 e utilizando as probabilidades associadas com as quatro regiões do diagrama de Venn da Figura 6.11, mostre que

(a) $P(H|J) = 0{,}70$, o que confere com o que foi dito à página 156 sobre o evento H ser independente do evento J.

(b) $P(J) = P(J|H) = P(J|H') = 0{,}60$, o que confere com o que foi dito à página 156 sobre o evento J ser independente do evento H.

6.67 Numa certa cidade, a probabilidade de ser aprovado na primeira tentativa no exame de direção para a carteira de motorista é de 0,75. Depois disso, a probabilidade de ser aprova-

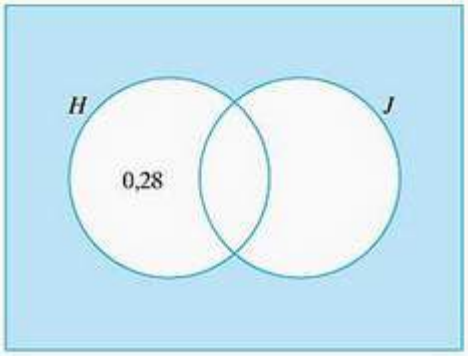

Figura 6.11
Diagrama de Venn do Exercício 6.65.

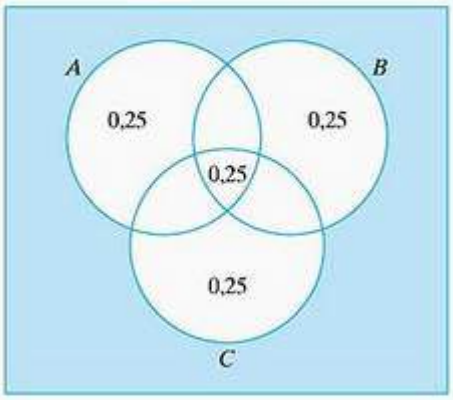

Figura 6.12
Diagrama de Venn do Exercício 6.68.

Snow666

do é de 0,60, independentemente de quantas vezes a pessoa tenha sido reprovada. Qual é a probabilidade de conseguir ser aprovado no exame de direção na quarta tentativa?

6.68 Por mais estranho que pareça, é possível um evento A ser independente de dois eventos B e C quando considerados individualmente, mas não quando considerados em conjunto. Verifique que essa é a situação retratada na Figura 6.12, mostrando que $P(A|B) = P(A)$ e $P(A|C) = P(A)$ mas $P(A|B \cup C) \neq P(A)$.

6.13 Em certa cidade, a probabilidade de um dia chuvoso de julho ser seguido por um outro dia chuvoso é de 0,70, e a probabilidade de um dia ensolarado ser seguido por um dia chuvoso é de 0,40. Supondo que todos os dias nessa cidade são ensolarados ou chuvosos e que o tempo de um dia depende somente do tempo do dia anterior, qual é a probabilidade de um dia chuvoso ser seguido por dois outros dias chuvosos, depois por dois dias ensolarados e, finalmente, por outro dia chuvoso?

*6.7 O TEOREMA DE BAYES

Embora $P(A|B)$ e $P(B|A)$ sejam símbolos um pouco parecidos, há uma grande diferença entre as probabilidades que representam. Por exemplo, na página 155, calculamos a probabilidade $P(G|N)$ de uma loja especializada numa marca de pneus fornecer bom serviço dentro da garantia, mas o que queremos dizer quando escrevemos $P(N|G)$? Essa é a probabilidade de uma loja de pneus que presta bons serviços dentro da garantia ser uma loja especializada numa marca de pneus. Para dar um outro exemplo, suponha que B seja o evento de uma pessoa cometer um furto e G o evento de a pessoa ser condenada pelo furto. Então $P(G|B)$ é a probabilidade de a pessoa que cometeu um furto ser condenada pelo crime, e $P(B|G)$ é a probabilidade de uma pessoa que foi condenada por um furto ter efetivamente cometido o crime. Portanto, em ambos exemplos, invertemos a situação; por assim dizer, a causa se tornou o efeito e o efeito se tornou a causa.

Como, em Estatística, há muitos problemas que envolvem tais pares de probabilidades condicionais, procuremos uma fórmula que expresse $P(B|A)$ em termos de $P(A|B)$ para quaisquer dois eventos A e B. Para tanto, igualamos as expressões de $P(A \cap B)$ nas duas formas da regra geral de multiplicação à página 157, e obtemos

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

e portanto

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$$

depois de dividir por $P(A)$.

EXEMPLO 6.26 Num certo estado onde os automóveis devem ser testados quanto à emissão de gases poluentes, 25% de todos os automóveis emitem quantidades excessivas de gases poluentes. Ao serem testados, 99% de todos os automóveis que emitem quantidades excessivas de gases poluentes são reprovados, mas 17% dos que não emitem quantidades excessivas de gases poluentes também são reprovados. Qual é a probabilidade de um automóvel que é reprovado no teste efetivamente emitir uma quantidade excessiva de gases poluentes?

Solução Denotando por A o evento de o automóvel ser reprovado no teste e por B o evento de o automóvel emitir uma quantidade excessiva de gases poluentes, inicialmente traduzimos as percentagens dadas em probabilidades e escrevemos $P(B) = 0{,}25$, $P(A|B) = 0{,}99$ e $P(A|B') = 0{,}17$. Para calcular

Snow666

$P(B|A)$ pela fórmula

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$$

precisamos primeiro determinar $P(A)$ e, para isso, consideremos o diagrama de árvore da Figura 6.13. Nesse diagrama, podemos alcançar A ou ao longo do ramo que passa por B, ou ao longo do ramo que passa por B', e as probabilidades de isso ocorrer são, respectivamente, de (0,25)(0,99) = 0,2475 e (0,75)(0,17) = 0,1275.

Como as duas alternativas representadas pelos dois ramos são mutuamente excludentes, vemos que $P(A) = 0{,}2475 + 0{,}1275 = 0{,}3750$. Assim, substituindo na fórmula de $P(B|A)$ obtemos

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{0{,}2475}{0{,}3750} = 0{,}66$$

Essa é a probabilidade de um automóvel reprovado no teste realmente emitir uma quantidade excessiva de gases poluentes.

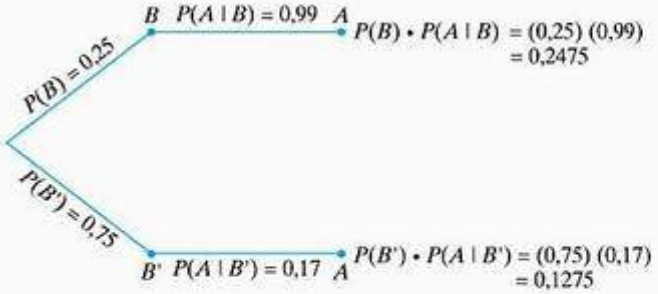

Figura 6.13
Diagrama de árvore para o exemplo de teste de emissão.

Com referência ao diagrama de árvore da Figura 6.13, podemos dizer que $P(B|A)$ é a probabilidade de o evento A ter sido alcançado através do ramo superior da árvore e mostramos que essa probabilidade é igual à razão da probabilidade associada àquele ramo da árvore pela soma das probabilidades associadas com ambos ramos. Esse argumento pode ser generalizado para o caso em que há mais de duas "causas" possíveis, ou seja, mais de dois ramos conduzindo ao evento A. Com referência à Figura 6.14, podemos dizer que $P(B_i \mid A)$ é a probabilidade de o evento A ter sido alcançado através do i-ésimo ramo da árvore (com $i = 1, 2, 3, \ldots$, ou k) e pode ser mostrado que essa probabilidade é igual à razão da probabilidade associada ao i-ésimo ramo pela soma das probabilidades associadas com todos os k ramos que alcançam A. Formalmente, escrevemos

TEOREMA DE BAYES

Se $B_1, B_2, \ldots$, e B_k são eventos mutuamente excludentes dos quais um deve ocorrer, então

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \cdots + P(B_k) \cdot P(A|B_k)}$$

para $i = 1, 2, \ldots$, ou k.

Observe que a expressão no denominador é, na verdade, igual a $P(A)$. Essa fórmula para calcular $P(A)$, quando A é alcançado através de um dentre vários passos intermediários, é denominada **regra de eliminação** ou **regra de probabilidade total**.

Snow666

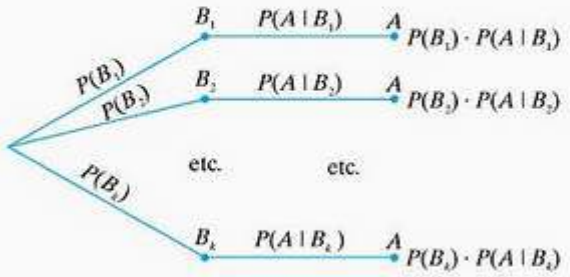

Figura 6.14
Diagrama de árvore para o teorema de Bayes.

EXEMPLO 6.27 Numa fábrica de enlatados, as linhas de produção I, II e III respondem por 50, 30 e 20% da produção total. Se 0,4% das latas da linha I são lacradas inadequadamente e as percentagens correspondentes às linhas II e III são de 0,6% e 1,2%, respectivamente, qual é a probabilidade de uma lata lacrada impropriamente (e descoberta na inspeção final de produtos prontos) provir da linha de produção I?

Solução Denotando por A o evento de uma lata ser lacrada inadequadamente e por B_1, B_2 e B_3 os eventos de uma lata provir das linhas I, II ou III, podemos traduzir as percentagens dadas em probabilidades e escrever $P(B_1) = 0{,}50$, $P(B_2) = 0{,}30$, $P(B_3) = 0{,}20$, $P(A \mid B_1) = 0{,}004$, $P(A \mid B_2) = 0{,}006$ e $P(A \mid B_3) = 0{,}012$. Assim, as probabilidades associadas aos três ramos do diagrama de árvore da Figura 6.15 são $(0{,}50)((0{,}004) = 0{,}0020$, $(0{,}30)(0{,}006) = 0{,}0018$ e $(0{,}20)(0{,}012) = 0{,}0024$, e a regra de eliminação fornece $P(A) = 0{,}0020 + 0{,}0018 + 0{,}0024 = 0{,}0062$. Em seguida, substituindo esse resultado junto com a probabilidade associada ao primeiro ramo do diagrama de árvore, obtemos

$$P(B_1|A) = \frac{0{,}0020}{0{,}0062} = 0{,}32$$

arredondado até a segunda casa decimal

Como pode ser visto nos dois exemplos desta seção, a fórmula de Bayes é uma regra matemática relativamente simples. Sua validade é inquestionável, mas freqüentemente têm surgido críticas quanto à sua aplicabilidade. Isso ocorre porque ela envolve uma espécie de raciocínio "inverso", a saber, um raciocínio que parte do efeito para a causa. Isso ocorreu no Exemplo 6.26, onde ficamos imaginando se o fato de um automóvel ser reprovado no teste de emissão foi ocasionado ou causado pela emissão de uma quantidade excessiva de gases poluentes. Analogamente, no exemplo precedente, ficamos imaginando se o fato de uma lata ter sido lacrada inadequadamente foi ocasionado ou causado pela linha de produção I. É precisamente esse aspecto do Teorema de Bayes que faz com que ele desempenhe um papel importante na inferência estatística, na qual nosso raciocínio vai dos dados amostrais observados para as populações de onde provêm.

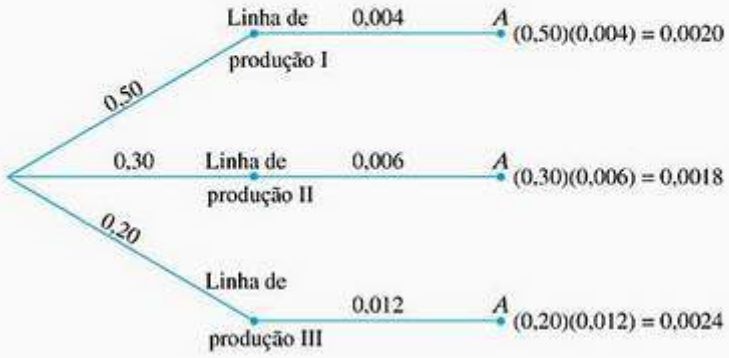

Figura 6.15
Diagrama de árvore para o Exemplo 6.27.

Snow666

EXERCÍCIOS

***6.70** A probabilidade de um famoso maratonista nigeriano participar da Corrida de São Silvestre é de 0,60. Se ele não disputar a corrida, a probabilidade de o campeão do ano passado voltar a vencer é de 0,66 mas se ele disputar a corrida, a probabilidade de o campeão do ano passado voltar a vencer é de apenas 0,18. Qual é a probabilidade de o campeão do ano passado voltar a vencer?

***6.71** Com referência ao Exercício 6.70, suponha que não saibamos muito sobre a corrida mas que ouvimos pelo rádio que o campeão do ano passado voltou a vencer. Qual é a probabilidade de o famoso maratonista nigeriano não ter participado da corrida?

***6.72** Um rato de laboratório num labirinto ganha comida se dobrar à esquerda e uma descarga elétrica se dobrar à direita. Na primeira tentativa existe uma chance equilibrada de o rato dobrar para qualquer lado; depois, se tiver ganho comida na primeira tentativa, a probabilidade de dobrar à esquerda na segunda tentativa é de 0,68 e se tiver levado um choque na primeira tentativa, a probabilidade de dobrar à esquerda na segunda tentativa é de 0,84. Qual é a probabilidade de o rato dobrar à esquerda na segunda tentativa?

***6.73** Com referência ao Exercício 6.72, qual é a probabilidade de o rato que dobrar à esquerda na segunda tentativa também ter dobrado à esquerda na primeira tentativa?

***6.74** Numa fábrica de produtos eletrônicos, é sabido por experiência acumulada que a probabilidade de um operário novo que tenha freqüentado o curso de treinamento de pessoal cumprir sua quota de produção é de 0,86 e que a probabilidade de um operário novo que não tenha freqüentado o curso de treinamento de pessoal cumprir sua quota de produção é de 0,35. Se 80% de todos operários novos freqüentarem o curso de treinamento, qual é a probabilidade de um operário novo

(a) não cumprir sua quota;
(b) que cumprir sua quota não ter freqüentado o curso de treinamento de pessoal?

***6.75** No Exercício 5.71, pedimos ao leitor supor que a probabilidade de um certo teste diagnosticar corretamente uma pessoa diabética como sendo diabética é de 0,95 e que a probabilidade de diagnosticar uma pessoa que não é diabética como sendo diabética é de 0,05. Dado que cerca de 10% da população é diabética, pedimos ao leitor adivinhar a probabilidade de uma pessoa diagnosticada como sendo diabética realmente ser diabética. Agora utilize o Teorema de Bayes para responder corretamente essa questão.

***6.76** O jardineiro de uma certa casa não é confiável: a probabilidade de ele esquecer de molhar as roseiras durante a ausência dos donos da casa é de $\frac{2}{3}$. As roseiras dessa casa já estão em situação deplorável; se regadas, a probabilidade de morrerem é de $\frac{1}{2}$, mas se não forem regadas, a probabilidade de morrerem é de $\frac{3}{4}$. Quando retornam à casa, os donos constatam que as roseiras morreram. Qual é a probabilidade de o jardineiro não ter regado as roseiras? (Do livro *The Theory of Probability* de Hans Reichenbach, University of California Press, 1949.)

***6.77** As duas firmas V e W pretendem apresentar propostas para a concorrência de uma obra de construção de uma rodovia, que pode ou não ser concedida, dependendo do volume das propostas. A firma V apresenta sua proposta com uma probabilidade de $\frac{3}{4}$ de ganhar a concorrência, desde que a firma W não concorra. Há uma chance de 3 para 1 de que W concorra e, nesse caso, a probabilidade de V ganhar a concorrência é de apenas $\frac{1}{3}$.

(a) Qual é a probabilidade de V ganhar a concorrência?
(b) Se V ganhar a concorrência, qual é a probabilidade de W não ter concorrido?

Snow666

***6.78** Uma firma de programas de computador tem uma linha telefônica 0800 à disposição de seus clientes. A firma constata que 48% das chamadas envolvem questões sobre a aplicação do programa, 38% envolvem problemas de incompatibilidade com o computador e 14% envolvem a impossibilidade de instalar o programa no computador do usuário. Essas três categorias de problema têm probabilidades de 0,90, 0,15 e 0,80 de serem resolvidas.

(a) Encontre a probabilidade de um telefonema para a linha 0800 envolver um problema que não pode ser resolvido.

(b) Se uma chamada envolver um problema que não pode ser resolvido, qual é a probabilidade de esse problema se referir à incompatibilidade com o computador?

***6.79** Uma explosão num tanque de gás natural liquefeito que estava sofrendo reparos pode ter sido o resultado de eletricidade estática, do mau funcionamento do equipamento elétrico, da chama direta em contato com o revestimento, ou de ação deliberada (sabotagem industrial). Entrevistas com os engenheiros que estiveram analisando o risco levaram às estimativas que uma tal explosão ocorre com probabilidade de 0,25 por causa de eletricidade estática, com probabilidade de 0,20 por causa de mau funcionamento do equipamento elétrico, com probabilidade de 0,40 por causa de chama direta e com probabilidade de 0,75 por causa de ação deliberada. Essas entrevistas também forneceram estimativas subjetivas das probabilidades dos quatro casos, como sendo de 0,30, 0,40, 0,15 e 0,15, respectivamente. Com base em toda essa informação, qual é a causa mais provável da explosão? (Do livro *Probability and Statistics for Engineers*, 3rd. Ed., de I. Miller and J. E. Freund, Upper Saddle River, N.J., Prentice Hall, Inc., 1985.)

***6.80** Para obter respostas a questões delicadas, utiliza-se às vezes um método denominado **técnica de resposta aleatorizada**. Suponha, por exemplo, que queiramos determinar a percentagem dos alunos de uma grande universidade que fumam maconha. Preparamos 20 cartões e escrevemos "Eu fumo maconha pelo menos uma vez por semana" em 12 deles, onde 12 é uma escolha arbitrária, e "Eu não fumo maconha no mínimo uma vez por semana" nos outros. Em seguida, pedimos a cada estudante (dos escolhidos para a entrevista) que escolha um dos cartões ao acaso e responda "sim" ou "não" sem revelar a pergunta que está no cartão.

(a) Estabeleça uma relação entre $P(Y)$, a probabilidade de um estudante responder "sim", e $P(M)$, a probabilidade de um estudante da universidade escolhido aleatoriamente fumar maconha pelo menos uma vez por semana.

(b) Se 106 dos 250 estudantes responderam "sim" sob essas condições, utilize o resultado da parte (a) e $\frac{160}{250}$ como uma estimativa de $P(Y)$ para estimar $P(M)$.

***6.81** "Uma dentre três caixas indistinguíveis contém 2 moedas de 1 centavo, a outra contém uma moeda de 1 centavo e uma de 10 centavos e a terceira contém duas moedas de 10 centavos. Escolhendo uma destas três caixas ao acaso, tiramos uma moeda ao acaso da caixa sem olhar para a outra moeda. Se a moeda que tirarmos for uma de 1 centavo, qual é a probabilidade de a outra moeda da caixa também ser uma de 1 centavo? Sem pensar muito a respeito, podemos argumentar que há uma probabilidade equilibrada de a outra moeda da caixa também ser de 1 centavo. Afinal de contas, a moeda que tiramos deve ter sido tirada da caixa com uma moeda de 1 centavo e uma de 10 centavos ou da caixa com duas moedas de 1 centavo. No primeiro caso, a outra moeda na caixa será uma de 10 centavos e no segundo uma de 1 centavo e é razoável dizer que estas duas possibilidades são igualmente prováveis."

Utilize o teorema de Bayes para mostrar que a probabilidade de a outra moeda também ser de um centavo é, na realidade, $\frac{2}{3}$.

Snow666

6.8 LISTA DE TERMOS-CHAVE (com indicação das páginas de suas definições)

Amostragem com reposição, 160
Amostragem sem reposição, 160
Chance honesta (equilibrada), 145
Chances, 144
Chances de aposta, 145
Complementar, 136
Conjunto vazio, 136
Critério de consistência, 146
Diagrama de Venn, 137
Espaço amostral, 135
Espaço amostral finito, 135
Espaço amostral infinito, 136
Evento, 136
Eventos dependentes, 156
Eventos independentes, 156
Eventos mutuamente excludentes, 136
Experimento, 135
Interseção, 136
Postulados de Probabilidade, 142
Probabilidade condicional, 154
Probabilidade subjetiva, 145
*Regra de eliminação, 162
*Regra de probabilidade total, 162
Regra especial de adição, 152
Regra especial de multiplicação, 157
Regra generalizada de adição, 152
Regra geral de adição, 151
Regra geral de multiplicação, 156
Regras de adição, 149
Regras de multiplicação, 156
Resultado, 135
Subconjunto, 136
*Técnica da resposta aleatorizada, 165
*Teorema de Bayes, 162
Teoria de Probabilidade, 134
União, 136

6.9 REFERÊNCIAS

Tratamentos mais detalhados de Probabilidade, embora ainda elementares, pode ser encontrado em:

BARR, D. R., and ZEHNA, P. W., *Probability: Modeling Uncertainty*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1983.

DRAPER, N. R., and LAWRENCE, W. E., *Probability: An Introductory Course*. Chicago: Markham Publishing Co., 1970.

FREUND, J. E., *Introduction to Probability*. New York: Dover Publications, Inc., 1993 Reprint.

GOLDBERG, S., *Probability–An Introduction*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1960.

HODGES, J. L., and LEHMANN, E. L., *Elements of Finite Probability*, 2nd ed. San Francisco: Holden-Day Inc., 1970.

MOSTELLER, F., ROURKE, R. E. K., and THOMAS, G. B., *Probability with Statistical Applications*, 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1970

SCHEAFFER, R. L., and MENDENHALL, W., *Introduction to Probability: Theory and Applications*. North Scituate, Mass.: Duxbury Press, 1975.

A obra a seguir é uma introdução à matemática de apostas e vários jogos de azar:

PACKEL, E. W., *The Mathematical of Games and Gambling*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1981.

Snow666

7

ESPERANÇAS E DECISÕES

7.1 Esperança Matemática 168

***7.2** Tomada de Decisão 172

***7.3** Problemas de Decisão Estatística 176

7.4 Lista de Termos-Chave 179

7.5 Referências 179

O material deste capítulo raramente é coberto em cursos introdutórios de Estatística, exceto pela discussão acerca da esperança matemática na Seção 7.1. Decidimos incluí-lo aqui por causa do papel básico nos fundamentos da Estatística desempenhado pela teoria de decisão, que é uma abordagem formal de tomada de decisão. Como são pequenas as chances de o leitor ter contato com esse material em outros textos, exceto talvez em trabalhos avançados de Administração, esperamos que o material das Seções 7.2 e 7.3 não seja omitido de todo. Por outro lado, as Seções 7.2 e 7.3 foram marcadas com um asterisco como sendo opcionais, e poderiam ser omitidas sem perda de continuidade. Em outras palavras, uma abordagem mais informal de tomada de decisões é suficientemente adequada para o restante do texto.

Quando tomamos decisões em face de incerteza, elas raramente se baseiam apenas na probabilidade. Comumente, devemos também saber algo sobre as conseqüências potenciais (lucros, perdas, penalidades ou recompensas). Se precisarmos decidir se compramos ou não um carro novo, não basta sabermos que nosso carro velho dentro em breve necessitará de reparos; para tomar uma decisão sensata, precisamos saber, entre outras coisas, o custo dos reparos e o valor de troca de nosso carro velho. Suponhamos, também, que um construtor precise decidir se apresenta proposta para um trabalho que lhe promete um lucro de 120.000 unidades monetárias com probabilidade de 0,20, ou um prejuízo de 27.000 unidades monetárias (em conseqüência, por exemplo, de uma greve) com probabilidade de 0,80. A probabilidade de o construtor ter lucro não é muito grande, mas, por outro lado, a quantia que ele pode ganhar é muito maior do que a quantia que pode perder. Esses dois exemplos mostram a necessidade de um método que permita combinar probabilidades e conseqüências, e por isso introduzimos o conceito de **esperança matemática** na Seção 7.1.

Snow666

Nos Capítulos 11 a 18, abordamos muitos problemas diferentes sobre inferência. Estimamos quantidades desconhecidas, testamos hipóteses (suposições ou alegações) e fazemos previsões, sendo que em tais problemas é essencial que, direta ou indiretamente, tenhamos em vista as conseqüências do que fazemos. Afinal, se não há nada em jogo, nem penalidades, nem recompensas e ninguém se importa, por que não estimar em 210 kg o peso médio de um gato doméstico, por que não aceitar a alegação de que, adicionando água à gasolina, poderemos fazer 250 km por litro de gasolina com nosso velho carro, e por que não prever que, por volta do ano 2250, as pessoas viverão até uma idade de 200 anos? **POR QUE NÃO, se não há nada em jogo, nem penalidades, nem recompensas e ninguém se importa?** Assim, na Seção 7.2 damos alguns exemplos que mostram como as esperanças matemáticas baseadas em penalidades, recompensas e outros tipos de pagamentos podem ser utilizados na tomada de decisões e, na Seção 7.3, mostramos como tais fatores podem ter de ser considerados a na escolha de técnicas estatísticas apropriadas.

7.1 ESPERANÇA MATEMÁTICA

Se uma tabela de mortalidade diz que uma mulher de 50 anos de idade pode esperar viver mais 31 anos, isso não quer dizer que realmente esperemos que uma mulher de 50 anos viva até completar 81 anos e morra no dia seguinte. Da mesma forma, se lemos que uma pessoa nos Estados Unidos pode esperar comer 47,4 kg de carne e beber 148,8 l de refrigerante por ano, ou que uma criança de 6 a 16 anos pode esperar ir ao dentista 2,2 vezes por ano, é óbvio que a palavra "esperar" não está sendo empregada no sentido usual. Uma criança não pode ir ao dentista 2,2 vezes, e seria realmente surpreendente se encontrássemos alguém que comesse 47,4 kg de carne e bebesse 148,8 l de refrigerante num determinado ano. No que diz respeito às mulheres de 50 anos, algumas viverão mais 12 anos, algumas viverão mais 20 anos, algumas viverão mais 33 anos,..., e a esperança de vida de "mais 31 anos" deve ser interpretada como uma média ou, como chamamos aqui, uma **esperança matemática**.

Originalmente, o conceito de esperança matemática surgiu em relação aos jogos de azar e, em sua forma mais simples, é o produto da quantia que um jogador pode ganhar pela probabilidade de o jogador ganhar.

EXEMPLO 7.1 Qual é a esperança matemática de um jogador que pode ganhar 50 unidades monetárias se, e somente se, uma moeda equilibrada apresentar coroa?

Solução Se a moeda for equilibrada e jogada aleatoriamente, ou seja, a probabilidade de dar coroa é $\frac{1}{2}$, então a esperança matemática do jogador é $50 \cdot \frac{1}{2} = 25$ unidades monetárias. ■

EXEMPLO 7.2 Qual é a esperança matemática de alguém que compra um dentre 2.000 bilhetes de uma rifa de uma viagem para Fernando de Noronha, estimada em 1.960 unidades monetárias?

Solução Como a probabilidade de ganhar a viagem é de $\frac{1}{2.000} = 0{,}0005$, a esperança matemática é $1.960(0{,}0005) = 0{,}98$. Assim, do ponto de vista financeiro, seria insensato pagar mais do que 98 centavos de unidade monetária por um bilhete dessa rifa, a menos que a rifa fosse para alguma causa nobre ou que a pessoa que comprasse o bilhete estivesse obtendo algum prazer com a aposta. ■

Em cada um desses dois exemplos, existe somente um prêmio, mas dois pagamentos (resultados) possíveis. No Exemplo 7.1, o prêmio era de 50 unidades monetárias e os dois resultados eram 50 unidades monetárias e coisa alguma; no Exemplo 7.2, o prêmio era a viagem no valor de

Snow666

1.960 unidades monetárias e os dois resultados eram a viagem no valor de 1.960 unidades monetárias e coisa alguma. No Exemplo 7.2, poderíamos argumentar que um dos bilhetes da rifa pagará o equivalente a 1.960 unidades monetárias, e que cada um dos demais 1.999 bilhetes pagará coisa alguma, de modo que, na totalidade, os 2.000 bilhetes pagarão o equivalente a 1.960 unidades monetárias ou, em média, $\frac{1.960}{2.000} = 0{,}98$ unidades monetárias por bilhete. Essa média é a esperança matemática. Para generalizar o conceito de esperança matemática, considere a modificação na rifa do Exemplo 7.2 a seguir.

EXEMPLO 7.3 Qual é a esperança matemática por bilhete se a rifa também sorteia um jantar para dois num restaurante famoso, no valor de 200 unidades monetárias, como prêmio de segundo lugar, e duas entradas de cinema, no valor de 16 unidades monetárias, como prêmio de terceiro lugar?

Solução Agora podemos argumentar que um dos bilhetes pagará o equivalente a 1.960 unidades monetárias, um outro bilhete pagará o equivalente a 200 unidades monetárias, um terceiro pagará o equivalente a 16 unidades monetárias e cada um dos demais 1.997 bilhetes não pagará coisa alguma. Em sua totalidade, portanto, os 2.000 bilhetes pagarão o equivalente a $1.960 + 200 + 16 = 2.176$ unidades monetárias, ou uma média equivalente a $\frac{2.176}{2.000} = 1{,}088$ unidades monetárias por bilhete.Olhando para o exemplo de uma maneira diferente, poderíamos argumentar que, se o sorteio fosse repetido muitas vezes, uma pessoa com um dos bilhetes ganharia coisa alguma $\frac{1.997}{2.000} \cdot 100 = 99{,}85\%$ do tempo (ou com uma probabilidade de 0,9985) e cada um dos três prêmios $\frac{1}{2.000} \cdot 100 = 0{,}05\%$ do tempo (ou com uma probabilidade de 0,05). Em média, uma pessoa com um dos bilhetes ganharia o equivalente a $0(0{,}9985) + 1.960(0{,}0005) + 200(0{,}0005) + 16(0{,}0005) = 1{,}088$ unidades monetárias, que é a soma dos produtos obtidos multiplicando cada pagamento pela probabilidade correspondente.

A generalização desse exemplo leva à definição a seguir.

ESPERANÇA MATEMÁTICA

Se as probabilidades de ganhar as quantias $a_1, a_2, \ldots,$ ou a_k são $p_1, p_2, \ldots,$ e p_k, onde $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$, então a esperança matemática é

$$E = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_k p_k$$

Cada quantia é multiplicada pela probabilidade correspondente e a esperança matemática, E, é dada pela soma de todos esses produtos. Na notação $\sum$, temos $E = \sum a \cdot p$.

No que diz respeito às quantias a, é importante ter em mente que elas são positivas quando representam lucros, prêmios ou ganhos (isto é, importâncias que recebemos), e são negativas quando representam perdas, penalidades ou déficits (isto é, quantias que devemos pagar).

EXEMPLO 7.4 Qual é nossa esperança matemática se ganharmos 25 unidades monetárias quando um dado lançado aparecer com 1 ou 6 pontos e perdermos 12,50 unidades monetárias quando aparecer com 2, 3, 4 ou 5 pontos?

Solução As quantias são $a_1 = 25$ e $a_2 = -12{,}5$, e as probabilidades são $p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e $p_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (supondo que o dado é equilibrado e que foi jogado ao acaso). Assim, nossa esperança matemática é

$$E = 25 \cdot \frac{1}{3} + (-12{,}5) \cdot \frac{2}{3} = 0$$

Snow666

EXEMPLO 7.5 As probabilidades de um investidor vender um terreno para uma casa na montanha com um lucro de 2.500, de 1.500, de 500 unidades monetárias ou com um prejuízo de 500 unidades monetárias são de 0,22, 0,36, 0,28 e 0,14, respectivamente. Qual é o lucro esperado do investidor?

Solução Substituindo $a_1 = 2.500$, $a_2 = 1.500$, $a_3 = 500$, $a_4 = -500$ $p_1 = 0{,}22$, $p_2 = 0{,}36$, $p_3 = 0{,}28$ e $p_4 = 0{,}14$ na fórmula de E obtemos

$$\begin{aligned} E &= 2.500(0{,}22) + 1.500(0{,}36) + 500(0{,}28) - 500(0{,}14) \\ &= 1.160 \text{ unidades monetárias} \end{aligned}$$

O primeiro dos dois exemplos anteriores ilustra o que significa um **jogo equilibrado** ou **honesto**. É um jogo que não favorece nenhum dos jogadores, ou seja, um jogo em que a esperança matemática de cada jogador é zero.

Embora tenhamos nos referido às quantidades $a_1, a_2, \ldots$, e a_k como "quantias", não se trata necessariamente de quantias de dinheiro. À página 168 dissemos que uma criança da faixa etária dos 6 aos 16 anos de idade pode esperar ir ao dentista 2,2 vezes por ano. Esse valor é uma esperança matemática, a saber, a soma dos produtos obtidos multiplicando-se 0, 1, 2, 3, 4,..., pelas correspondentes probabilidades de a criança daquela faixa etária ir ao dentista aquele número de vezes por ano.

EXEMPLO 7.6 As probabilidades de a agência de uma companhia aérea num certo aeroporto receber 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 reclamações sobre extravio de bagagem por dia, são 0,06, 0,21, 0,24, 0,18, 0,14, 0,10, 0,04, 0,02 e 0,01, respectivamente. Quantas dessas reclamações essa agência pode esperar receber por dia?

Solução Substituindo na fórmula da esperança matemática, obtemos

$$\begin{aligned} E &= 0(0{,}06) + 1(0{,}21) + 2(0{,}24) + 3(0{,}18) + 4(0{,}14) \\ &\quad + 5(0{,}10) + 6(0{,}04) + 7(0{,}02) + 8(0{,}01) \\ &= 2{,}75 \end{aligned}$$

Em todos os exemplos desta seção, foram dados os valores de todos as quantias a e as probabilidades p e calculamos E. Consideremos, agora, um exemplo em que são dados o valor da quantia a e de E, e procuramos algum resultado sobre a probabilidade p, e também um exemplo em que são dados p e E e procuramos chegar em algum resultado sobre a.

EXEMPLO 7.7 Para defender um cliente num processo por danos resultante de um acidente de carro, uma advogada deve decidir se cobra honorários fixos de 7.500 unidades monetárias ou de contingência, que ela receberá somente se seu cliente ganhar a causa. Como a advogada está estimando as chances de seu cliente se:

(a) ela prefere honorários fixos de 7.500 unidades monetárias a uma contingência de 25.000 unidades monetárias;

(b) ela prefere honorários de contingência de 60.000 unidades monetárias aos honorários fixos de 7.500 unidades monetárias?

Solução **(a)** Se ela acredita que a probabilidade de seu cliente ganhar é de p, a advogada associa uma esperança matemática de $25.000p$ à contingência de 25.000 unidades monetárias. Como ele acredita que os honorários fixos de 7.500 unidades monetárias são preferíveis a essa es-

Snow666

perança, podemos escrever $7.500 > 25.000p$ e, portanto,

$$p < \frac{7.500}{25.000} = 0{,}30$$

(b) Agora a esperança matemática associada à contingência é de $60.000p$ e, como ela acredita que isso é preferível aos 7.500 fixos, podemos escrever $60.000p > 7.500$ e, portanto,

$$p > \frac{7.500}{60.000} = 0{,}125$$

Combinando os resultados das partes (a) e (b) do Exemplo 7.7, mostramos que $0{,}125 < p < 0{,}30$, onde p é a probabilidade subjetiva da advogada sobre o sucesso de seu cliente. Para reduzir ainda mais o intervalo de probabilidade, poderíamos variar os honorários como nos Exercícios 7.9 e 7.10.

EXEMPLO 7.8 Um amigo diz que "daria seu braço direito" por nossos dois ingressos para uma noite nos camarotes do Sambódromo. Para colocar isso em termos de dinheiro, propomos que ele nos pague 220 unidades monetárias (o preço real dos dois ingressos) mas que só receberá os ingressos se tirar um valete, uma dama, um rei ou um ás de um baralho de 52 cartas; caso contrário, ficamos com os ingressos e os 220. Qual é o valor dos dois ingressos para o nosso amigo se ele considera equilibrado esse acordo?

Solução Como há quatro valetes, quatro damas, quatro reis e quatro ases, a probabilidade de nosso amigo obter os ingressos é de $\frac{16}{52}$. Portanto, a probabilidade de ele não obter os ingressos é de $1 - \frac{16}{52} = \frac{36}{52}$ e a esperança matemática associada à aposta é

$$E = a \cdot \frac{16}{52} + 0 \cdot \frac{36}{52} = a \cdot \frac{16}{52}$$

onde a é o valor que ele atribui a esses ingressos. Igualando essa esperança matemática a 220 unidades monetárias, que ele considera um preço justo a pagar pelo risco, obtemos

$$a \cdot \frac{16}{52} = 220 \quad \text{e} \quad a = \frac{52 \cdot 220}{16} = 715 \text{ unidades monetárias}$$

Isso é quando valem os dois bilhetes para o nosso amigo.

EXERCÍCIOS

7.1 Uma associação imprimiu e vendeu 3.000 bilhetes de uma rifa para um quadro que vale 750 unidades monetárias. Qual é a esperança matemática de uma pessoa que compra um desses bilhetes?

7.2 Com referência ao Exercício 7.1, qual teria sido a esperança matemática de uma pessoa que tivesse comprado um desses bilhetes se a associação tivesse vendido somente 1.875 dos bilhetes da rifa?

7.3 Como parte de uma promoção, um fabricante de sabão oferece um primeiro prêmio de 3.000 unidades monetárias e um segundo prêmio de 1.000 unidades monetárias a pessoas escolhidas aleatoriamente dentre 15.000 pessoas dispostas a experimentar um novo produto e enviar seu nome e endereço no rótulo. Qual é a esperança matemática de uma pessoa que participa dessa promoção?

7.4 Um joalheiro quer liquidar 45 relógios masculinos, com custo unitário de 12 unidades monetárias. Esses 45 relógios, junto com outros cinco relógios masculinos de custo unitário de 600 unidades monetárias, são colocados em caixas idênticas não identificadas e cada cliente pode escolher uma caixa.

Snow666

(a) Encontre a esperança matemática de cada cliente.
(b) Qual é o lucro esperado do joalheiro se ele cobra 100 unidades monetárias pelo privilégio de poder escolher uma caixa?

7.5 Dois jogadores chegam empatados na final de um torneio de golfe que paga 300.000 unidades monetárias ao vencedor e 120.000 ao segundo lugar. Nas finais, quais são as esperanças matemáticas dos dois jogadores se:
(a) eles têm as mesmas chances;
(b) o mais jovem é favorito com apostas de 3 a 2?

7.6 Se dois times chegam empatados numa série final do tipo melhor de sete partidas (ganha quem vencer quatro), as probabilidades de a série final durar 4, 5, 6 ou 7 jogos são 1/8, 1/4, 5/16 e 5/16, respectivamente. Nessas condições, quantos jogos podemos esperar que se tenha na série final?

7.7 Um importador paga 12.000 unidades monetárias por um carregamento de ameixas e as probabilidades de que ele conseguirá vendê-las por 16.000, 13.000, 12.000 ou somente 10.000 unidades monetárias são, respectivamente, 0,25, 0,46, 0,19 e 0,10. Qual é o lucro bruto esperado do importador?

7.8 Uma firma de segurança sabe de experiência que as probabilidades de ocorrência de 2, 3, 4, 5 ou 6 alarmes falsos numa dada noite são de 0,12, 0,26, 0,37, 0,18 e 0,07, respectivamente. Quantos alarmes falsos a firma pode esperar numa noite qualquer?

7.9 Com referência ao Exemplo 7.7, suponha que a advogada prefira honorários fixos de 7.500 unidades monetárias a honorários de contingência de 30.000 unidades monetárias. Como a advogada está estimando as chances de seu cliente vencer o processo?

7.10 Com referência ao Exemplo 7.7, suponha que a advogada prefira honorários de contingência de 37.500 unidades monetárias a honorários fixos de 7.500 unidades monetárias. Como a advogada está estimando as chances de seu cliente vencer o processo?

7.11 Uma construtora oferece consertar uma rodovia por 45.000 unidades monetárias e outra construtora oferece fazer o mesmo serviço por 50.000 unidades monetárias, mas com uma penalidade de 12.500 unidades monetárias se não terminar o serviço em tempo. Se a pessoa que decide o contrato escolher a segunda construtora, o que isso diz quanto à estimativa dessa pessoa sobre a probabilidade de a segunda construtora não terminar o serviço em tempo?

7.12 O Sr. Pereira acredita que é apenas uma questão equilibrada aceitar um prêmio em dinheiro de 26 unidades monetárias ou apostar em duas jogadas de uma moeda para receber uma furadeira elétrica se a moeda apresentar cara duas vezes ou, caso contrário, receber 5 unidades monetárias. Qual é o valor em dinheiro que ele atribui a possuir a furadeira?

7.13 O Sr. Santos gostaria de vencer o Sr. Silva no próximo torneio de golfe, mas suas chances são nulas, a menos que ele pague 400 unidades monetárias por algumas aulas que (de acordo com o treinador do clube) lhe darão uma chance equilibrada de vencer. Se o Sr. Santos puder contar com essas aulas para ficar em igualdade de condições e se ele apostar 1.000 contra x unidades monetárias com o Sr. Silva numa vitória, determine o valor de x.

*7.2 TOMADA DE DECISÃO

Diante de incerteza, muitas vezes as esperanças matemáticas podem ser usadas com muita vantagem em tomadas de decisões. Em geral, se devemos escolher entre duas ou mais alternativas, é considerado racional optar pela que oferece esperança matemática "mais promissora": a que maximiza

Snow666

o lucro esperado, minimiza os custos esperados, maximiza as vantagens tributárias, minimiza as perdas esperadas, e assim por diante. Essa abordagem a tomada de decisões tem um apelo intuitivo, mas não está livre de complicações. Em muitos problemas é difícil, se não impossível, associar valores numéricos a todas as quantias a e probabilidades p envolvidas na fórmula para a esperança E. Algumas dessas complicações serão ilustradas nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 7.9 A divisão de pesquisa de uma companhia farmacêutica já gastou 400.000 unidades monetárias na determinação da eficácia de um novo medicamento contra enjôo do mar. Agora o diretor da divisão precisa decidir se devem gastar 200.000 unidades monetárias adicionais para completar os testes, sabendo que a probabilidade de sucesso é de somente $\frac{1}{3}$. Ele também sabe que se os testes continuarem e o medicamento provar ser eficaz, resultará um lucro de 1.500.000 unidades monetárias para sua companhia. É claro que se os testes continuarem e o medicamento acabar sendo ineficaz, isso significará que 600.000 unidades monetárias da companhia teriam ido "pelo cano". Ele também sabe que se os testes não continuarem e o medicamento for produzido com sucesso pela concorrência, isso acarretaria uma perda adicional de 100.000 unidades monetárias para a companhia por estar em desvantagem competitiva. O que o diretor da divisão deveria decidir para maximizar o lucro esperado da companhia?

Solução Em problemas deste tipo geralmente é útil apresentar as informações dadas em forma de tabela como a seguinte, denominada **tabela de pagamentos**:

	Continuar os testes	*Acabar com os testes*
Medicamento eficaz	1.500.000	– 500.000
Medicamento ineficaz	– 600.000	– 400.000

Utilizando essa informação e as probabilidades $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ para a eficácia e ineficácia do medicamento, o diretor da divisão de pesquisa pode argumentar que o lucro esperado é

$$1.500.000 \cdot \frac{1}{3} + (-600.000) \cdot \frac{2}{3} = 100.000 \text{ unidades monetárias}$$

se os testes continuarem e

$$(-500.000) \cdot \frac{1}{3} + (-400.000)\frac{2}{3} \approx -433.333 \text{ unidades monetárias}$$

se os testes não continuarem. Como um lucro esperado de 100.000 unidades monetárias é preferível a um prejuízo esperado de 433.333 unidades monetárias, o diretor decide pela continuação dos testes.

A maneira pela qual estudamos esse problema é chamada de **análise bayesiana**. Nesse tipo de análise, atribuímos probabilidades às alternativas sobre as quais pairam incertezas (os **estados da natureza** que, no nosso exemplo, são a eficácia e a ineficácia o medicamento) e então escolhemos a alternativa que prometa o maior lucro esperado ou a menor perda esperada. Como já foi dito, essa abordagem da tomada de decisões não é sem fatores complicadores. Se vamos utilizar esperanças matemáticas na tomada de decisões, é essencial que nossos julgamentos de todas as probabilidades e todos os resultados relevantes sejam razoavelmente precisos.

EXEMPLO 7.10 Com referência ao Exemplo 7.9, suponha que o diretor da divisão de pesquisa tem um assistente que está convencido de que o diretor sobreestimou a probabilidade de sucesso, a saber, que a efi-

Snow666

cácia do medicamento deveria ser de $\frac{1}{15}$ e não de $\frac{1}{3}$. Em que medida essa mudança na probabilidade de sucesso afeta o resultado?

Solução Com essa mudança, o lucro esperado passa a ser

$$1.500.000 \cdot \frac{1}{15} + (-600.000) \cdot \frac{14}{15} = -460.000 \text{ unidades monetárias}$$

se os testes continuarem e

$$(-500.000) \cdot \frac{1}{15} + (-400.000) \cdot \frac{14}{15} \approx -406.667 \text{ unidades monetárias}$$

se os testes não continuarem. Nenhuma dessas alternativas parece muito promissora, mas como uma perda esperada de 406.667 unidades monetárias é preferível a uma perda esperada de 460.000 unidades monetárias, a decisão alcançada no Exemplo 7.9 deveria ser revertida.

EXEMPLO 7.11 Agora suponha que o mesmo assistente diga ao diretor da divisão de pesquisa que a antecipação de lucro no montante de 1.500.000 unidades monetárias também esteja incorreta, já que ele está convencido de que deveria ter sido estimado em 2.300.000 unidades monetárias. Como essa mudança afeta o resultado?

Solução Com essa mudança e a probabilidade de sucesso de $\frac{1}{15}$ como no Exemplo 7.10, o lucro esperado passa a ser

$$2.300.000 \cdot \frac{1}{15} + (-600.000) \cdot \frac{14}{15} = -406.667 \text{ unidades monetárias}$$

se os testes continuarem e também de – 406.667 unidades monetárias se os testes não continuarem, exatamente como no Exemplo 7.10. Novamente mudou o resultado; agora parece que a decisão poderia ser tomada com uma jogada de moeda.

EXERCÍCIOS

***7.14** Uma cesta de ofertas contém 5 pacotes que valem 1 unidade monetária cada um, 5 pacotes que valem 3 unidades monetárias cada um e 10 pacotes que valem 5 unidades monetárias cada um. É racional pagar 4 unidades monetárias pelo privilégio de escolher aleatoriamente um desses pacotes?

***7.15** Um empreiteiro precisa escolher entre duas propostas de trabalho. A primeira promete um lucro de 120.000 unidades monetárias com uma probabilidade de $\frac{3}{4}$ ou um prejuízo de 30.000 unidades monetárias com uma probabilidade de $\frac{1}{4}$ (devido a greves e outras interrupções); a segunda proposta promete um lucro de 180.000 unidades monetárias com uma probabilidade de $\frac{1}{2}$ ou um prejuízo de 45.000 unidades monetárias com uma probabilidade de $\frac{1}{2}$. Qual das duas propostas o empreiteiro deve escolher para maximizar seu lucro esperado?

***7.16** Uma arquiteta paisagista deve decidir se concorrerá ao projeto paisagístico de um prédio público. O que ela deve fazer se acredita que o projeto oferece uma perspectiva de lucro de 10.800 unidades monetárias com uma probabilidade de 0,40, ou de perda de 7.000 unidades monetárias com uma probabilidade de 0,60 (devido às condições climáticas), e que a obra só compensa o investimento de tempo se o lucro esperado for de, pelo menos, 1.000 unidades monetárias?

Snow666

***7.17** Um caminhoneiro deve entregar um carregamento de material de construção em um de dois locais, uma fazenda que está a 18 km do depósito, ou um *shopping* que está a 22 km do depósito. Ele perdeu a ordem de serviço que indicava o local de entrega. Além disso, ele deve voltar ao depósito após a entrega. A fazenda e o *shopping* distam 8 km um do outro. Para complicar ainda mais, o telefone do depósito não está funcionando. Se o caminhoneiro achar que há uma probabilidade de $\frac{1}{6}$ de que a carga deveria ir para a fazenda e de $\frac{5}{6}$ de que deveria ir para o *shopping*, para onde deve ele ir primeiro a fim de minimizar a distância a ser percorrida?

***7.18** Com referência ao Exercício 7.17, para onde o caminhoneiro deveria ir primeiro a fim de minimizar a distância percorrida esperada se as probabilidades fossem $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ em vez de $\frac{1}{6}$ e $\frac{5}{6}$?

***7.19** Com referência ao Exercício 7.17, para onde o caminhoneiro deveria ir primeiro a fim de minimizar a distância percorrida esperada se as probabilidades fossem $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ em vez de $\frac{1}{6}$ e $\frac{5}{6}$?

***7.20** O gerente de uma companhia de mineração deve decidir se continua uma operação numa certa localidade. Se continuar e tiver sucesso, a companhia fará um lucro de 4.500.000 unidades monetárias; se continuar e não tiverem sucesso, perderá 2.700.000 unidades monetárias; se interromper a operação tendo tido sucesso se tivesse continuado, perderá 1.800.000 unidades monetárias (por motivos de concorrência); e se interromper a operação não tendo tido sucesso se tivesse continuado, terá um lucro de 450.000 unidades monetárias (porque os fundos destinados à operação não teriam sido gastos). Qual decisão maximizaria o lucro esperado da companhia, se o gerente entender que são equilibradas as chances de sucesso?

***7.21** Com referência ao Exercício 7.20, mostre que não importa a decisão tomada, se o gerente entender que as probabilidades a favor e contra o sucesso são de $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

***7.22** Um grupo de investidores precisa decidir se deve tentar financiar a construção de um novo estádio ou continuar a realizar suas promoções esportivas no estádio de um colégio. O grupo acredita que se construir o novo estádio e conseguir a franquia de um time de basquete profissional, terá um lucro de 2.050.000 unidades monetárias ao longo dos próximos cinco anos; se construir o novo estádio e não conseguir a franquia de um time de basquete profissional, terá um prejuízo de 500.000 unidades monetárias; se não construir o novo estádio e conseguir a franquia de um time de basquete profissional, terá um lucro de 1.000.000 unidades monetárias; e se não construir o novo estádio e não conseguir a franquia de um time de basquete profissional, poderá lucrar apenas 100.000 unidades monetárias com suas outras promoções.

(a) Apresente toda essa informação numa tabela como a da página 173.

(b) Se os investidores acreditarem num dirigente da liga de basquete profissional que lhes diz que as chances são de 2 a 1 contra eles conseguirem a franquia de um time de basquete profissional, o que o grupo deveria decidir a fim de maximizar o lucro esperado ao longo dos próximos cinco anos?

(c) Se os investidores acreditarem num editor de esportes de um jornal local que lhes diz que as chances são realmente só de 3 a 2 contra eles conseguirem a franquia, o que o grupo deveria decidir a fim de maximizar o lucro esperado ao longo dos próximos cinco anos?

***7.23** Na ausência de qualquer informação sobre as probabilidades relevantes, um pessimista pode muito bem querer minimizar a perda máxima ou maximizar o lucro mínimo, ou seja, querer utilizar o critério **minimax** ou **maximin**.

Snow666

(a) Com referência ao Exemplo 7.9, suponha que o diretor da divisão de pesquisa da companhia farmacêutica não faz idéia da probabilidade da eficácia do medicamento. Qual decisão minimizaria sua perda máxima?

(b) Com referência ao Exercício 7.17, suponha que o caminhoneiro não faz idéia sobre as probabilidades de o material de construção ter de ser entregue em um dos dois locais de construção. Para onde deveria ir primeiro para minimizar a distância máxima a ser percorrida?

***7.24** Na ausência de qualquer informação sobre as probabilidades relevantes, um otimista pode muito bem querer minimizar a perda mínima ou maximizar o lucro máximo, ou seja, querer utilizar o critério **minimin** ou **maximax**.

(a) Com referência ao Exemplo 7.10, suponha que o assistente do diretor de pesquisa também não faz idéia da probabilidade da eficácia do medicamento. O que ele deveria recomendar, de modo a maximizar o lucro máximo?

(b) Com referência ao Exercício 7.17, suponha que o caminhoneiro não faz idéia sobre as probabilidades de o material de construção ter de ser entregue em um dos dois locais de construção. Para onde deveria ir primeiro para minimizar a distância mínima a ser percorrida?

***7.25** Com referência ao Exercício 7.20, suponha que não exista informação alguma sobre o as chances de sucesso da operação de mineração. Qual decisão o gerente da companhia deveria recomendar à diretoria se ele é sempre

(a) muito otimista;

(b) muito pessimista?

***7.26** Com referência ao Exercício 7.22, suponha que não exista informação alguma sobre o as chances de o grupo de investidores conseguir a franquia. Um dos investidores votaria a favor ou contra a construção de um novo estádio se ele é

(a) um otimista convicto;

(b) um pessimista convicto?

*7.3 PROBLEMAS DE DECISÃO ESTATÍSTICA

A Estatística moderna, com sua ênfase na inferência, pode ser encarada como a arte, ou a ciência, da tomada de decisões em face da incerteza. Essa abordagem da Estatística, chamada **teoria de decisão**, remonta apenas aos meados do século XX e à publicação, em 1944, do livro *Theory of Games and Economic Behavior*, de John von Neumann e Oscar Morgenstern e, em 1950, do livro *Statistical Decision Functions*, de Abraham Wald. Como o estudo da teoria de decisão é bastante complicado matematicamente, limitamos nossa discussão aqui a um exemplo em que se aplica o método da Seção 7.2 a um problema de natureza estatística.

EXEMPLO 7.12 Dos cinco grupos nomeados pelo governo para estudar o a discriminação de sexo no comércio, 1, 2, 5, 1 e 6 dos membros são mulheres. Os grupos são encaminhados aleatoriamente a várias cidades e o prefeito de uma das cidades contrata um consultor para prever quantos membros do grupo enviado à sua cidade serão mulheres. Se o consultor for pago com 300 unidades monetárias mais um bônus de 600 unidades monetárias, que ele só receberá se a sua previsão estiver certa (ou seja, exatamente correta), qual previsão maximiza a importância que o consultor pode esperar ganhar?

Solução Se a previsão do consultor é 1, o que é a moda dos cinco números, ele ganhará apenas 300 unidades monetárias com probabilidade $\frac{3}{5}$ ou 900 unidades monetárias com probabilidade $\frac{2}{5}$. Assim, ele pode esperar ganhar

Snow666

$$300 \cdot \frac{3}{5} + 900 \cdot \frac{2}{5} = 540 \text{ unidades monetárias}$$

Como pode ser facilmente verificado, isso é o melhor que ele pode fazer. Se sua previsão for 2, 5 ou 6, ele pode esperar ganhar

$$300 \cdot \frac{4}{5} + 900 \cdot \frac{1}{5} = 420 \text{ unidades monetárias}$$

e, para qualquer outra previsão, sua esperança é de apenas 300 unidades monetárias.

Este exemplo ilustra o fato (talvez óbvio) de que, se uma pessoa deve escolher um valor exato "no chute" e se não há recompensa por resposta próxima, a melhor previsão é a moda. Para ilustrar melhor como as conseqüências de uma decisão podem ditar a escolha de um método estatístico de decisão ou previsão, consideremos a seguinte variação do Exemplo 7.12.

EXEMPLO 7.13 Suponha que o consultor receba 600 unidades monetárias menos uma importância igual a 40 vezes a magnitude de seu erro. Que previsão maximizará a importância que ele pode esperar ganhar?

Solução Agora é a mediana que dá as melhores previsões. Se a previsão do consultor for 2, que é a mediana dos cinco números 1, 1, 2, 5 e 6, a magnitude do erro será 1, 0, 3 ou 4, dependendo de serem mulheres 1, 2, 5 ou 6 dos membros do grupo enviado à cidade. Conseqüentemente, o consultor ganhará 560, 600, 480 ou 440 unidades monetárias com probabilidades $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{5}$, e ele pode esperar ganhar

$$560 \cdot \frac{2}{5} + 600 \cdot \frac{1}{5} + 480 \cdot \frac{1}{5} + 440 \cdot \frac{1}{5} = 528 \text{ unidades monetárias}$$

Pode ser mostrado que a esperança do consultor é inferior a 528 unidades monetárias para qualquer valor diferente de 2, mas vamos verificar isso apenas para a média dos cinco números, que é 3. Nesse caso, a magnitude do erro será 2, 1, 2 ou 3, dependendo de serem mulheres 1, 2, 5 ou 6 dos membros do grupo enviado à cidade. Assim, o consultor ganhará 520, 560, 520 ou 480 unidades monetárias com probabilidades $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{5}$, e ele pode esperar ganhar

$$520 \cdot \frac{2}{5} + 560 \cdot \frac{1}{5} + 520 \cdot \frac{1}{5} + 480 \cdot \frac{1}{5} = 520 \text{ unidades monetárias}$$

A média começa a ser valorizada quando a penalidade, ou seja, a quantia subtraída, aumenta mais rapidamente com o tamanho do erro; a saber, quando é proporcional ao quadrado do erro.

EXEMPLO 7.14 Suponha que o consultor receba 600 unidades monetárias menos uma importância igual a 20 vezes o quadrado de seu erro. Que previsão maximizará a importância que ele pode esperar ganhar?

Solução Se a previsão do consultor é $\frac{1+2+1+5+6}{5} = 3$, os quadrados dos erros serão 4, 1, 4 ou 9, dependendo de serem mulheres 1, 2, 5 ou 6 dos membros do grupo enviado à cidade. Correspondentemente, o consultor ganhará 520, 580, 520 ou 420 unidades monetárias com probabilidades $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{5}$, e ele pode esperar ganhar

$$520 \cdot \frac{2}{5} + 580 \cdot \frac{1}{5} + 520 \cdot \frac{1}{5} + 420 \cdot \frac{1}{5} = 512 \text{ unidades monetárias}$$

Como pode ser verificado, a esperança do consultor é inferior a 512 unidades monetárias para qualquer outra previsão (ver Exercício 7.27).

Snow666

Este terceiro caso é de especial importância em Estatística, pois está estreitamente relacionado com o *método dos mínimos quadrados*. Vamos estudar esse método no Capítulo 16, em que será utilizado no ajuste de curvas a dados de observação mas, além disso, possui outras aplicações importantes na teoria de Estatística. A idéia de trabalhar com os quadrados dos erros é justificada porque, na prática, o grau de seriedade de um erro muitas vezes aumenta rapidamente com o tamanho do erro, mais rapidamente do que a magnitude do próprio erro.

A maior dificuldade na aplicação dos métodos deste capítulo a problemas reais de Estatística é que raramente sabemos os valores exatos de todos os riscos envolvidos, ou seja, raramente sabemos o valor exato dos "pagamentos" correspondentes às várias possibilidades. Por exemplo, se o Ministério de Saúde deve decidir se libera ou não um novo medicamento para uso geral, como poderia atribuir um valor em dinheiro ao dano decorrente do fato de não ter aguardado uma análise mais detalhada de possíveis efeitos colaterais ou das vidas que poderiam ser perdidas por não liberar imediatamente o medicamento para o público? Analogamente, se a banca de admissão deve decidir quais dentre vários candidatos devem ser admitidos como internos no hospital de uma faculdade de medicina ou até receber uma bolsa, como é possível prever todas as conseqüências que podem estar envolvidas?

O fato de quase nunca dispormos de informações precisas sobre probabilidades relevantes também cria obstáculos à obtenção de critérios adequados de decisão; sem eles, é razoável basear as decisões, digamos, no pessimismo ou no otimismo, como foi feito nos Exercícios 7.23 e 7.24? Questões como essas são difíceis de responder, mas sua análise subsidia o objetivo importante de revelar a lógica subjacente ao pensamento estatístico.

EXERCÍCIOS

7.27 Com referência ao Exemplo 7.14, em que o consultor recebe 600 unidades monetárias menos uma quantia igual a 20 vezes o quadrado do erro, quanto ele pode esperar ganhar se

(a) sua previsão é 1, a moda;
(b) sua previsão é 2, a média?

(Em geral, pode ser mostrado que, para qualquer conjunto de números $x_1, x_2, \ldots$, e x_n, a quantidade $\sum(x-k)^2$ é mínima quando $k = \bar{x}$. Neste caso, a importância subtraída de 600 unidades monetárias é mínima quando a previsão é $\bar{x} = 3$.)

7.28 As idades dos sete competidores de um concurso de redação são 17, 17, 17, 18, 20, 21 e 23 e suas chances de ganhar são iguais. Se quisermos prever a idade do vencedor e existe uma recompensa por acertar, mas nenhuma por errar, por pouco ou não, qual previsão maximiza a recompensa esperada?

7.29 Com relação ao Exercício 7.28, qual previsão maximiza a recompensa esperada se

(a) há uma penalidade proporcional ao tamanho do erro;
(b) há uma penalidade proporcional ao quadrado do erro?

7.30 Alguns carros exibidos num pátio de um revendedor estão cotados a 1.895 unidades monetárias, alguns estão cotados a 2.395 unidades monetárias, alguns estão cotados a 2.795 unidades monetárias e alguns estão cotados a 3.495 unidades monetárias. Se quisermos prever a cotação do primeiro carro a ser vendido, qual é a previsão que minimiza o tamanho máximo do erro? Qual é o nome dessa estatística, mencionada num dos exercícios do Capítulo 3?

Snow666

7.4 LISTA DE TERMOS-CHAVE (com indicação das páginas de suas definições)

*Análise bayesiana, 173
*Critério maximax, 176
*Critério maximin, 175
*Critério minimax, 175
*Critério minimin, 176
*Esperança matemática, 167
*Estados da natureza, 173
*Jogo equilibrado, 170
*Jogo honesto, 170
*Tabela de pagamentos, 173
*Teoria de decisão, 176

7.5 REFERÊNCIAS

Um tratamento mais detalhado do assunto deste capítulo pode ser encontrado em

BROSS, I. D. J., *Design for Decision*. New York: Macmillan Publishing Co, Inc., 1953.

JEFFREY, R. C., *The Logic of Decision*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.

bem como em alguns textos de Estatística para Administração. Um material bastante elementar sobre teoria de decisão pode ser encontrado em

CHERNOFF, H., and MOSES, L. E., *Elementary Decision Theory*. New York: Dover Publications, Inc., 1987 reprint.

"O problema do dote" e "Um Empate é Como Beijar sua Irmã" (em inglês, "The Dowry Problem" e "A Tie is Like Kissing Your Sister") são dois exemplos divertidos de tomada de decisão dados em

HOLLANDER, M., and PROSCHAN, F., *The Statistical Exorcist: Dispelling Statistics Anxiety*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1984.

Snow666

EXERCÍCIOS DE REVISÃO PARA OS CAPÍTULOS 5, 6 E 7

R.48 Com referência à Figura R.1, expresse simbolicamente os eventos representados pelas regiões 1, 2, 3 e 4 do diagrama de Venn.

R.49 Com referência à Figura R.1, associe as probabilidades 0,48, 0,12, 0,32 e 0,08 aos eventos representados pelas regiões 1, 2, 3 e 4 do diagrama de Venn, respectivamente, e encontre $P(C)$, $P(D')$ e $P(C \cap D')$.

R.50 Use os resultados do Exercício R.49 para conferir se os eventos C e D' são independentes.

R.51 As probabilidades de que a redação de um jornal local vá receber pelo menos 0, 1, 2,..., 7 ou 8 cartas a respeito de uma decisão impopular da direção da escola municipal são 0,01; 0,02; 0,05; 0,14; 0,16; 0,20; 0,18; 0,15; e 0,09, respectivamente. Quais são as probabilidades de o jornal receber

(a) no máximo 4 cartas a respeito da decisão da direção da escola municipal;
(b) pelo menos 6;
(c) entre 3 e 5?

R.52 Determine se cada uma das igualdades seguintes é verdadeira ou falsa:

(a) $\frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} = \frac{31}{6!}$;
(b) $\frac{20!}{17!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$;
(c) $5! + 6! = 7 \cdot 5!$;
(d) $3! + 2! + 1! = 6$.

R.53 Uma pequena imobiliária conta com cinco vendedores em regime de tempo parcial. Utilizando duas coordenadas, de modo que (3, 1), por exemplo, represente o evento de três vendedores estarem trabalhando e um estar atendendo um cliente, e (2, 0) represente o evento de dois vendedores estarem trabalhando mas nenhum deles estar atendendo um cliente, construa um diagrama análogo ao da Figura 6.1, mostrando os 21 pontos do espaço amostral correspondente.

R.54 Com referência ao Exercício R.53, suponha que cada um dos 21 pontos do espaço amostral tenha a probabilidade $\frac{1}{21}$ e encontre as probabilidades de

(a) haver pelo menos três vendedores trabalhando;
(b) pelo menos três vendedores estarem atendendo clientes;
(c) nenhum dos vendedores estar atendendo algum cliente;
(d) somente um vendedor trabalhando mas não atendendo cliente.

R.55 Um jogador reserva está disposto a apostar 3 contra 1, mas não 4 contra 1, que ele é capaz de correr mais rápido que um outro jogador reserva. O que isso nos diz sobre a probabilidade que ele associa a ser mais rápido que o outro jogador reserva?

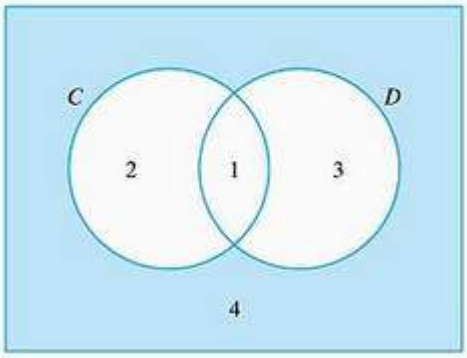

Figura R.1
Diagrama de Venn para os Exercícios R.48, R.49 e R.50.

Snow666

***R.56** O fabricante de um novo aditivo para bateria precisa decidir se vende uma lata de seu produto ao preço de 1,00 unidade monetária ou então ao de 1,25 unidades monetárias com uma garantia do tipo "o dobro do seu dinheiro de volta se não ficar satisfeito". O que pensa ele das chances de um cliente efetivamente vir reclamar o dobro do seu dinheiro, se

(a) ele decide vender o produto por 1,00 unidade monetária;
(b) ele decide vender o produto por 1,25 com a garantia;
(c) ele não consegue tomar uma decisão?

R.57 De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode comprar 250 gramas de quatro dos 15 tipos de café disponíveis numa loja especializada?

R.58 Suponha que uma pessoa jogue uma moeda 100 vezes e obtenha 34 caras, que é um resultado muito abaixo do que ela poderia esperar. Em seguida essa pessoa joga a moeda outras 100 vezes e obtém 46 caras, que ainda está abaixo do número de caras que ela espera. Elabore uma resposta à alegação dessa pessoa de que a Lei dos Grandes Números a está decepcionando.

R.59 Se 1.134 dos 1.800 alunos de uma pequena universidade residem na cidade em que se encontra a universidade, estime a probabilidade de que um aluno qualquer da universidade, escolhido ao acaso, resida na cidade em que se encontra a universidade.

R.60 Numa dieta de baixo colesterol, uma pessoa pode comer quatro ovos em três semanas, com não mais do que dois ovos numa determinada semana qualquer. Esboce um diagrama de árvore para mostrar as várias maneiras em que essa pessoa pode planejar a distribuição dos quatro ovos ao longo das três emanas.

***R.61** O gerente da carteira hipotecária de um banco acredita que, se um candidato a uma hipoteca de 150.000 unidades monetárias é um bom risco e o banco o aceita, o lucro do banco será de 8.000. Se o candidato é um mau risco e o banco o aceita, o banco perderá 20.000. Se o gerente recusa a proposta do candidato, não haverá lucro nem perda para o banco. O que deveria fazer o gerente se ele deseja

(a) maximizar o lucro esperado e sente que há uma probabilidade de 0,10 de o candidato ser um mau risco;
(b) maximizar o lucro esperado e sente que há uma probabilidade de 0,30 de o candidato ser um mau risco;
(c) minimizar a perda máxima e não faz idéia da probabilidade de o candidato ser um mau risco?

R.62 Como parte de uma campanha promocional no Maranhão e Piauí, uma companhia distribuidora de alimentos congelados oferecerá um grande prêmio de 100.000 unidades monetárias a alguma pessoa que enviar seu nome num formulário, com a opção de incluir um rótulo de um dos produtos da companhia. A distribuição dos 225.000 formulários recebidos está dada na tabela seguinte:

	Com rótulo	*Sem rótulo*
Maranhão	120.000	42.000
Piauí	30.000	33.000

Se o ganhador do grande prêmio for escolhido por sorteio, mas se o sorteio for arranjado de modo que as chances de uma pessoa receber o grande prêmio sejam triplicadas se ela tiver incluído um rótulo, quais são as probabilidades de que o grande prêmio seja dado a alguém

Snow666

(a) que tenha incluído um rótulo;
(b) do Piauí?

R.63 Um teste consiste em oito questões do tipo verdadeiro ou falso e quatro questões de múltipla escolha, cada uma com quatro respostas diferentes. De quantas maneiras um estudante pode marcar uma resposta para cada uma das questões do teste?

R.64 Dentre 1.200 bacharéis entrevistados, 972 disseram que preferem ser tratados por "doutor" do que por "senhor". Estime a probabilidade de um bacharel preferir ser tratado por "doutor" em vez de por "senhor".

R.65 Um armazém dispõe de 12 caixas de leite integral e 15 caixas de leite desnatado. Se o primeiro de dois clientes comprar uma caixa de leite e o segundo cliente comprar uma caixa de leite de cada tipo, de quantas escolhas possíveis dispõe o segundo cliente se o primeiro cliente comprar
(a) uma caixa de leite integral;
(b) uma caixa de leite desnatado.

R.66 Um hotel utiliza três agências locadoras para fornecer carros para seus hóspedes: 20% dos carros provém da agência X, 40% da agência Y e 40% da agência Z. Se 14% dos carros de X, 4% dos carros de Y e 8% dos de Z necessitam de alguma regulagem, qual é a probabilidade de que
(a) um carro necessitando de alguma regulagem seja entregue a um dos hóspedes;
(b) se um carro necessitando de alguma regulagem for entregue a um dos hóspedes, o carro provenha da agência X?

R.67 Se for de 0,24 a probabilidade de um colunista esportivo qualquer considerar o Flamengo o melhor time de futebol do Rio de Janeiro, qual é a probabilidade de três colunistas esportivos escolhidos ao acaso escolherem todos o Flamengo como o melhor time de futebol do Rio de Janeiro?

R.68 Se Q é o evento de uma pessoa ser qualificada para um emprego no serviço público e A é o evento de a pessoa obter o emprego, expresse em palavras quais probabilidades são representadas por $P(Q')$, $P(A \mid Q)$, $P(A' \mid Q')$ e $P(Q' \mid A')$.

R.69 Transforme cada uma das chances seguintes em probabilidades.
(a) As chances são de 21 para 3 de que um determinado piloto não vá ganhar as 500 milhas de Indianápolis.
(b) Se são extraídas, com reposição, quatro cartas de um baralho comum de 52 cartas, há uma chance de 11 para 5 de que no máximo duas delas sejam pretas.

R.70 As probabilidades de que um serviço de auxílio mecânico vá receber 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 pedidos de ajuda durante o horário de pique do fim da tarde são de 0,05; 0,12; 0,31; 0,34; 0,12; 0,05; e 0,01, respectivamente. Quantos pedidos de ajuda o serviço de auxílio mecânico pode esperar receber durante o horário de pique do fim da tarde?

R.71 Se $P(A) = 0{,}37$, $P(B) = 0{,}25$ e $P(A \cup B)$ são os eventos A e B
(a) mutuamente excludentes;
(b) independentes?

R.72 Explique por que deve haver um erro em cada uma das afirmações seguintes:
(a) $P(A) = 0{,}53$ e $P(A \cap B) = 0{,}59$.
(b) $P(C) = 0{,}83$ e $P(C') = 0{,}27$.
(c) Para os eventos independentes E e F, temos $P(E) = 0{,}60$, $P(F) = 0{,}15$ e $P(E \cap F) = 0{,}075$.
(d) Se $P(G) = 0{,}40$ e $P(G \cap H) = 0{,}30$, então $P(G \mid H) = 0.75$.

Snow666

R.73 Uma senhora considera que é uma questão equilibrada aceitar 30 unidades monetárias em dinheiro ou então fazer uma aposta extraindo uma bola de uma urna com 15 bolas vermelhas e 45 bolas azuis, com a promessa de receber 3 unidades monetárias se a bola extraída for vermelha ou um frasco de um perfume se a bola extraída for azul. Qual é o valor, ou utilidade, que ela atribui ao frasco de perfume?

R.74 Uma artista estima que possa receber 5.000 unidades monetárias para um de seus quadros expostos numa galeria de arte se o quadro receber um prêmio, mas somente 2.000 unidades monetárias se o quadro não receber um prêmio. Qual é a estimativa que a artista faz das chances de seu quadro receber um prêmio se ela decide vender o quadro por 3.000 unidades monetárias antes dos quadros premiados serem anunciados?

R.75 Os tipos de carros considerados para integrar uma frota de táxis de uma companhia fazem médias de 12, 10, 10, 13 e 10 quilômetros por litro de gasolina. Para preparar o orçamento da companhia o contador suporá que cada um dos cinco tipos de carros tem a mesma chance de ser escolhido. Qual é o consumo, em quilômetros por litro de gasolina, que ele deve usar para os novos carros se

(a) é muito mais importante para ele estar certo do que estar perto;
(b) ele quer minimizar o quadrado de seu erro?

R.76 A umidade relativa e a temperatura do ar de uma sala de cirurgia de um hospital podem ser reguladas de seis e oito maneiras, respectivamente. De quantas maneiras diferentes essas duas variáveis podem ser reguladas?

R.77 Quantas permutações diferentes podem ser obtidas com as letras da palavra

(a) poste;
(b) aposta;
(c) macaco;
(d) abacate?

R.78 Um piloto de carros de corrida sente que suas chances de não vencer a próxima corrida são de 5 para 1, de não chegar em segundo lugar são de 8 para 1 e de não chegar nem em primeiro nem em segundo são de 2 para 1. São consistentes as probabilidades correspondes?

R.79 O corpo docente do departamento de desenho industrial de uma escola de Engenharia conta com três doutores, dois mestres e cinco graduados. Se três professores são escolhidos aleatoriamente para uma banca de monitoria, obtenha as probabilidades de a banca incluir

(a) um professor de cada tipo de formação;
(b) somente professores graduados;
(c) um doutor e dois graduados.

R.80 Na Figura R.2, B é o evento de uma pessoa que viajar para o Pacífico Sul visitar a ilha de Bora Bora, M é o evento de ela visitar a ilha de Moorea e T é o evento de ela visitar o Taiti. Explique em palavras quais eventos são representados pela região 4, pelas regiões 1 e 3 conjuntamente, pelas regiões 3 e 6 conjuntamente, e pelas regiões 2, 5, 7 e 8 conjuntamente.

R.81 Os detectores de mentira foram utilizados durante a guerra para revelar riscos de segurança. Como é sabido, os detectores de mentira não são infalíveis. Suponhamos que haja uma probabilidade de 0,10 de um detector de mentiras não detectar uma pessoa que represente realmente um risco de segurança, e uma probabilidade de 0,08 de o detector classificar incorretamente uma pessoa que não represente um risco. Se 2% das pessoas que são submetidas ao teste constituem efetivamente risco de segurança, qual é a probabilidade de que

Snow666

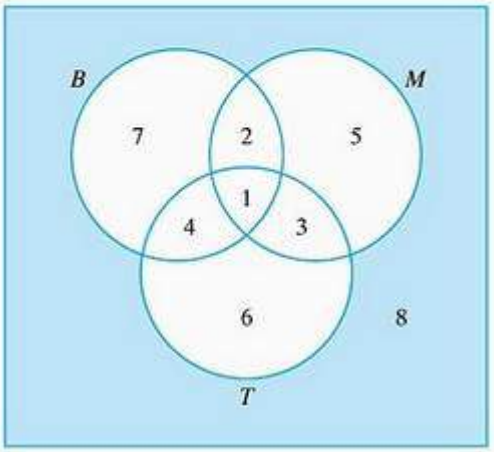

Figura R.2
Diagrama de Venn para o Exercício R.80.

(a) uma pessoa classificada pelo detector como constituindo um risco de segurança constitua realmente um risco de segurança;
(b) uma pessoa liberada pelo detector realmente não constitua um risco de segurança?

R.82 Um de dois parceiros de uma expedição em busca de um naufrágio pensa que as chances de terem localizado o navio correto no fundo do mar são de no máximo 3 para 1 e o outro parceiro pensa que são de no mínimo 13 para 7. Encontre chances de aposta que satisfaçam ambos parceiros. (Note que não há uma única resposta.)

R.83 Às vezes preferimos uma escolha que tem uma esperança matemática inferior. Suponha que possamos escolher entre investir 5.000 unidades monetárias num fundo de investimento garantido pelo governo que paga 4,5% ou em ações de uma companhia de mineração que não paga rendimentos mas que tem tido um crescimento médio de 6,2%. Por que alguém preferiria aplicar no fundo de investimentos?

R.84 As probabilidades de que o sucesso de um pesquisador leve a um aumento de salário, uma promoção, ou ambos são, respectivamente, de 0,33, 0,40 e 0,25. Qual é a probabilidade de que leve a um ou ambos?

R.85 Na Figura R.3, cada resultado do evento A tem o dobro das chances de cada resultado do evento A'. Qual é a probabilidade do evento A?

R.86 Esboce um diagrama de árvore para determinar o número de maneiras pelas quais podemos obter um total de 6 pontos em três jogadas de um dado.

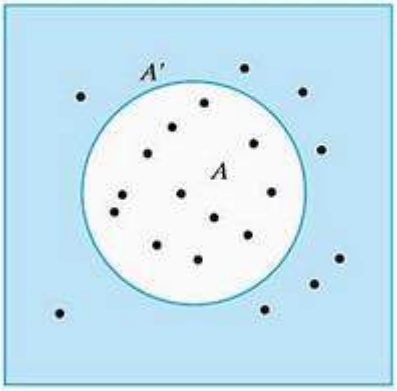

Figura R.3
Diagrama de Venn para o Exercício R.85.

Snow666

R.87 Suponha que decidamos com o lançamento de uma moeda as respostas de um teste constituído por 18 questões do tipo verdadeiro ou falso. Qual é a probabilidade de acertar dez e errar oito questões?

R.88 Quatro pessoas estão se preparando para jogar *bridge*.

(a) De quantas maneiras diferentes elas podem escolher parceiros?

(b) De quantas maneiras diferentes elas podem ficar sentadas à mesa se só nos interessarmos por quem senta à esquerda de quem e quem senta à direita de quem?

R.89 De quantas maneiras distintas quatro motoristas podem estacionar seus quatro carros

(a) em quatro vagas;

(b) em cinco vagas de um estacionamento?

R.90 Dois amigos estão apostando em jogadas sucessivas de uma moeda equilibrada. Um deles começa com 7 unidades monetárias e o outro com 3 unidades monetárias e, a cada jogada, o perdedor paga 1 unidade monetária ao vencedor. Se p é a probabilidade de que aquele que começou com 7 unidades monetárias ganhe as 3 unidades monetárias de seu amigo antes de perder suas 7, explique por que $3p - 7(1 - p)$ deveria ser igual a zero e então resolva a equação

$$3p - 7(1 - p) = 0$$

em p. Generalize esse resultado para o caso em que os dois jogadores começam com a e b unidades monetárias, respectivamente.

Snow666

8

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE*

8.1 Variáveis Aleatórias 187
8.2 Distribuições de Probabilidade 188
8.3 A Distribuição Binomial 190
8.4 A Distribuição Hipergeométrica 197
8.5 A Distribuição de Poisson 201
*8.6 A Distribuição Multinomial 205
8.7 A Média de uma Distribuição de Probabilidade 206
8.8 O Desvio Padrão de uma Distribuição de Probabilidade 208
8.9 Lista de Termos-Chave 213
8.10 Referências 213

Quando analisamos um conjunto de dados, em geral estamos interessados somente em um ou, no máximo, em dois ou três aspectos do experimento. Por exemplo, um estudante que fez um teste do tipo verdadeiro ou falso pode estar interessado apenas no número de questões que ele respondeu corretamente, e não em quais são essas questões; um geólogo pode estar interessado apenas na idade de uma amostra de rocha, e não em sua dureza ou composição; e um sociólogo pode estar interessado apenas no nível sócio-econômico das pessoas entrevistadas numa pesquisa, e não em seu QI, seu peso ou seu saldo bancário. Também um agrônomo pode estar interessado não só no rendimento por hectare de uma nova modalidade de trigo, mas também na temperatura em que germina; e um engenheiro de automóveis pode estar interessado no tipo e durabilidade dos faróis propostos para um novo carro-modelo e depois em seu custo projetado.

Nesses cinco exemplos, o estudante, o geólogo, o sociólogo, o agrônomo e o engenheiro estão todos interessados em números associados com os resultados de situações envolvendo um elemento de chance ou, mais precisamente, em valores de **variáveis aleatórias**. Como as variáveis aleatórias não são nem variáveis e nem aleatórias, por que têm esse nome? Isso é difícil de saber,

* Como neste capítulo e nos próximos aparece muito material produzido por computador e reproduções de janelas de calculadoras gráficas, vamos repetir o que já foi dito no Prefácio e no rodapé à página 25, a saber, que o objetivo do material de computador e das reproduções de calculadoras gráficas é conscientizar o leitor da existência desses recursos para trabalhar em Estatística. Entretanto, queremos deixar bem claro que não são requeridos nem computador nem calculadora gráfica para o uso deste livro. De fato, este livro pode ser utilizado efetivamente por leitores que não possuam nem tenham acesso fácil a computadores e a aplicativos estatísticos ou a calculadoras gráficas. Alguns dos exercícios estão marcados com ícones especiais que sugerem o uso de um computador ou de uma calculadora gráfica, mas são opcionais.

Snow666

mas um certo professor de Matemática, dotado de um bom senso de humor, uma vez as comparou aos pés-de-cabra, que não são nem pés e nem cabras.

No estudo de variáveis aleatórias, em geral estamos interessados nas probabilidades com que assumem os diversos valores dentro de seu domínio de definição, ou seja, nas suas **distribuições de probabilidade**. A introdução geral às variáveis aleatórias e às distribuições de probabilidade nas Seções 8.1 e 8.2 é seguida do estudo de algumas das mais importantes distribuições de probabilidade nas Seções 8.3 até 8.6. Então abordaremos algumas maneiras de descrever as características mais importantes das distribuições de probabilidade nas Seções 8.7 e 8.8.

8.1 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Para sermos mais explícitos sobre o conceito de variável aleatória, retornemos aos Exemplos 6.1 e 6.14, que tratavam de uma revenda de caminhões usados, com seus dois vendedores e os três caminhões Ford 1998. Desta vez, contudo, queremos saber quantos desses caminhões os dois vendedores *juntos* venderão durante a dada semana. Esse total é uma variável aleatória, e seus valores estão mostrados em azul na Figura 8.1, ao lado de cada ponto do espaço amostral dado originalmente na Figura 6.7.

Em trabalhos mais avançados de Matemática, a associação de números a pontos de um espaço amostral é apenas uma forma de definir uma função. Isso significa que, falando estritamente, as variáveis aleatórias são funções e não variáveis, mas a maioria dos principiantes considerada mais fácil pensar nas variáveis aleatórias simplesmente como quantidades que podem assumir diferentes valores, dependendo do acaso. Por exemplo, uma variável aleatória é o número de multas aplicadas por excesso de velocidade diariamente na Rodovia dos Imigrantes e outras são a produção anual brasileira de café, o número de pessoas que semanalmente visitam a Disneylândia, a velocidade do vento no aeroporto Kennedy, o tamanho da platéia de um jogo de futebol e o número de erros cometidos por uma pessoa digitando um texto.

Costumamos classificar as variáveis aleatórias de acordo com o número de valores que elas podem tomar e, neste capítulo, vamos considerar apenas variáveis aleatórias que são **discretas**, ou seja, variáveis aleatórias que podem tomar apenas um número finito de valores, ou então um

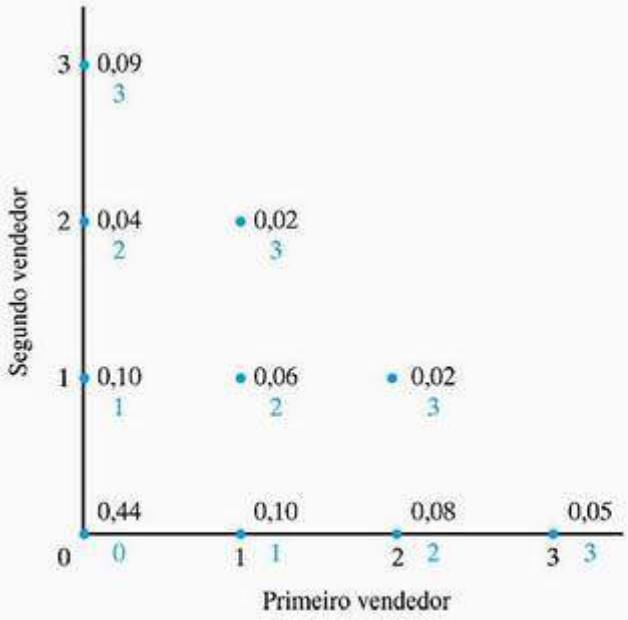

Figura 8.1
Espaço amostral com valores da variável aleatória em azul.

Snow666

número infinito enumerável de valores (tantos valores quantos são os números inteiros). Para quase todas as variáveis aleatórias discretas, os valores possíveis constituem um subconjunto dos inteiros. Por exemplo, o número de caminhões que os dois vendedores, conjuntamente, venderão é uma variável aleatória discreta que apenas pode tomar um valor do conjunto finito de quatro valores 0, 1, 2 e 3. Em comparação, o número do lançamento em que um dado apresenta o 6 pela primeira vez é uma variável aleatória discreta que pode tomar um valor no conjunto infinito enumerável de valores 1, 2, 3, 4, ... É possível, embora extremamente improvável, que sejam necessários 1.000 lançamentos do dado, ou um milhão de lançamentos, ou talvez até mais, para que o 6 apareça pela primeira vez. Há também variáveis aleatórias contínuas, que surgem quando lidamos com grandezas medidas numa escala contínua, como o tempo, o peso ou a distância. Essas variáveis serão estudadas no Capítulo 9.

8.2 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Para obter a probabilidade assumida por uma variável aleatória num valor particular, simplesmente somamos as probabilidades associadas com todos pontos do espaço amostral nos quais a variável aleatória assume aquele valor. Por exemplo, para encontrar a probabilidade de ambos vendedores juntos venderem dois dos caminhões na semana dada, somamos as probabilidades associadas com os pontos (0, 2), (1, 1) e (2, 0) na Figura 8.1, obtendo 0,04 + 0,06 + 0,08 = 0,18. Analogamente, a variável aleatória toma o valor 1 com uma probabilidade de 0,10 + 0,10 = 0,20, e deixamos a cargo do leitor mostrar que para 0 e 3 as probabilidades são 0,44 e 0,18. Tudo isso está resumido na seguinte tabela:

Número de caminhões vendidos	*Probabilidade*
0	0,44
1	0,20
2	0,18
3	0,18

Esta tabela e as duas que seguem ilustram o que queremos dizer com uma **distribuição de probabilidade**, ou seja, é uma correspondência que associa probabilidades aos valores de uma variável aleatória.

Uma outra correspondência dessas é dada pela tabela a seguir, que mostra o número de pontos obtidos na jogada de um dado equilibrado:

Número de pontos na jogada de um dado	*Probabilidade*
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$

Finalmente, para quatro lançamentos de uma moeda equilibrada há dezesseis resultados igualmente possíveis: KKKK, KKKC, KKCK, KCKK, CKKK, KKCC, KCKC, KCCK, CKKC, CK-

Snow666

CK, CCKK, KCCC, CKCC, CCKC, CCCK e CCCC, onde K representa cara e C representa coroa. Contando o número de caras em cada caso e aplicando a fórmula $\frac{s}{n}$ para resultados equiprováveis, obtemos a seguinte distribuição de probabilidade para o número total de caras:

Número de formas	*Probabilidade*
0	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{4}{16}$
2	$\frac{6}{16}$
3	$\frac{4}{16}$
4	$\frac{1}{16}$

Sempre que for possível, procuramos expressar as distribuições de probabilidade por meio de fórmulas que nos permitam calcular as probabilidades associadas aos diversos valores de uma variável aleatória. Por exemplo, para o número de pontos obtidos na jogada de um dado podemos escrever

$$f(x) = \frac{1}{6} \quad \text{para } x = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ e } 6$$

onde $f(1)$ denota a probabilidade de obter um 1, $f(2)$ denota a probabilidade de obter um 2, e assim por diante, na notação funcional usual. Aqui, a probabilidade de a variável aleatória tomar o valor x foi denotada por $f(x)$, mas poderíamos tê-la escrito igualmente como $g(x)$, $h(x)$, $m(x)$, etc.

EXEMPLO 8.1 Verifique que a distribuição de probabilidade do número de caras obtidas em quatro lançamentos de uma moeda equilibrada é dada por

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}}{16} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3 \text{ e } 4$$

Solução Calculando diretamente, ou utilizando a Tabela XI do final do livro, obtemos $\binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$ e $\binom{4}{4} = 1$. Assim, as probabilidades para $x = 0, 1, 2, 3$ e 4 são $\frac{1}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{4}{16}$ e $\frac{1}{16}$, o que concorda com os valores dados na tabela à página 514.

Como os valores das distribuições de probabilidades são probabilidades, e como as variáveis aleatórias devem tomar um de seus valores, temos as duas regras seguintes que se aplicam a qualquer distribuição de probabilidade:

Os valores de uma distribuição de probabilidades devem ser números do intervalo de 0 a 1.
A soma de todos os valores de uma distribuição de probabilidades deve ser igual a 1.

Essas regras permitem-nos determinar se uma função (dada por uma equação ou por uma tabela) pode ou não servir como distribuição de probabilidades de alguma variável aleatória.