

Da mesma forma, a Figura 5.9(b) e (c) nos mostra que, quando $f'(c)$ não existe, $f(x)$ pode ter ou não um extremo relativo em c .

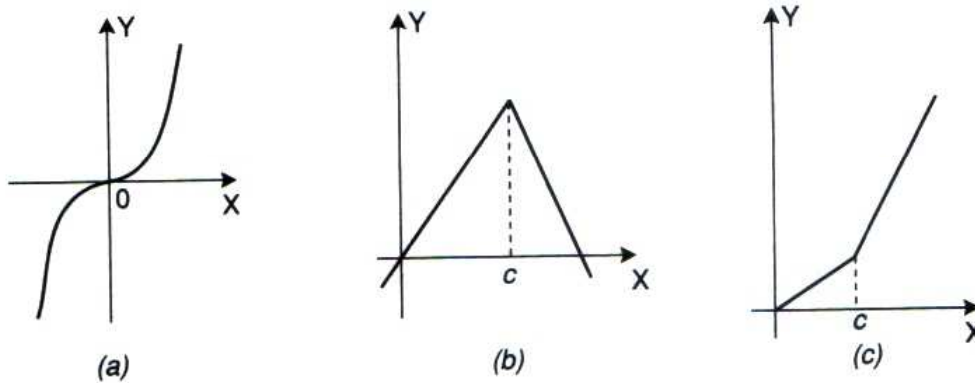


Figura 5.9

O ponto $c \in D(f)$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe, é chamado *ponto crítico* de f .

Portanto, uma condição necessária para a existência de um extremo relativo em um ponto c é que c seja um ponto crítico.

É interessante verificar que uma função definida num dado intervalo pode admitir diversos pontos extremos relativos. O maior valor da função num intervalo é chamado *máximo absoluto* da função nesse intervalo. Analogamente, o menor valor é chamado *mínimo absoluto*.

Por exemplo, a função $f(x) = 3x$ tem um mínimo absoluto igual a 3 em $[1, 3)$. Não existe um máximo absoluto em $[1, 3)$.

A função $f(x) = -x^2 + 2$ possui um máximo absoluto igual a 2 em $(-3, 2)$. Também podemos dizer que -7 é mínimo absoluto em $[-3, 2]$.

Temos a seguinte proposição, cuja demonstração será omitida.

5.4.5 Proposição Seja $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então f assume máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

Para analisarmos o máximo e o mínimo absoluto de uma função quando o intervalo não for especificado usamos as definições que seguem.

5.4.6 Definição Dizemos que $f(c)$ é o máximo absoluto da função f , se $c \in D(f)$ e $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f .

5.4.7 Definição Dizemos que $f(c)$ é o mínimo absoluto da função f se $c \in D(f)$, e $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f .

5.4.8 Exemplos

- (i) A função $f(x) = x^2 + 6x - 3$ tem um mínimo absoluto igual a -12 em $c = -3$, já que $f(-3) = -12 \leq f(x)$ para todos os valores de $x \in D(f)$ (ver Figura 5.10(a)).
- (ii) A função $f(x) = -x^2 + 6x - 3$ tem um máximo absoluto igual a 6 em $c = 3$, já que $f(3) = 6 \geq f(x)$ para todos os $x \in D(f)$ (ver Figura 5.10(b)).

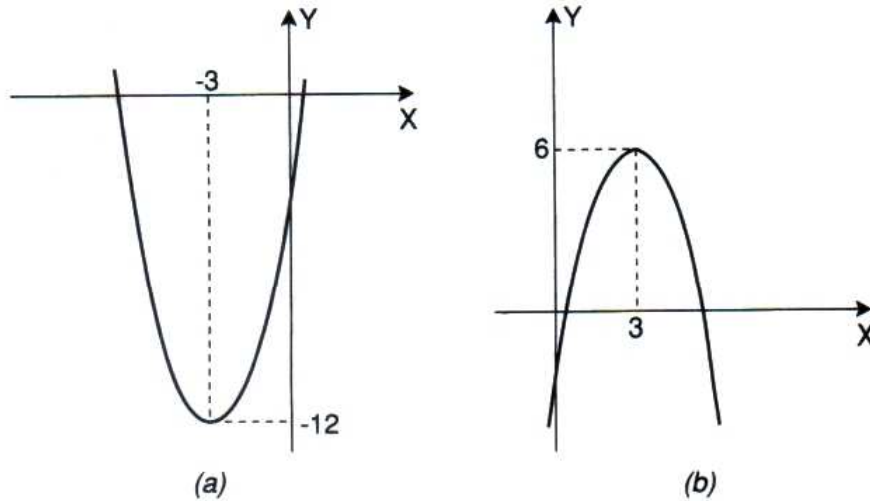


Figura 5.10

5.5 Teoremas sobre Derivadas

5.5.1 Teorema de Rolle Seja f uma função definida e contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto c entre a e b tal que $f'(c) = 0$.

Sob as mesmas hipóteses o teorema de Rolle pode ser estendido para funções tais que $f(a) = f(b) \neq 0$. As Figuras 5.11 (a), (b), (c) e (d) mostram exemplos de funções em que o Teorema de Rolle é válido.

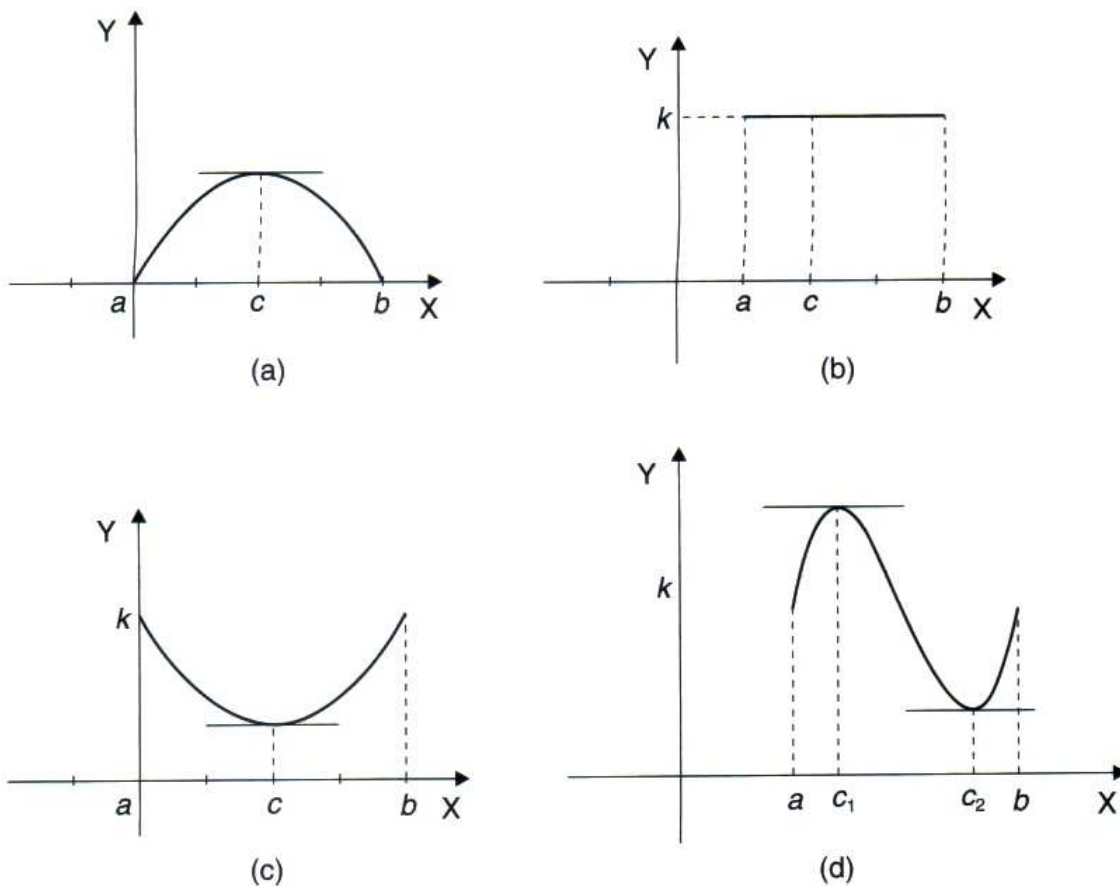


Figura 5.11

Prova: Faremos a prova em duas partes.

1ª parte. Seja $f(x) = 0$, para todo x , $a \leq x \leq b$. Então $f'(x) = 0$ para todo x , $a < x < b$. Portanto, qualquer número entre a e b pode ser tomado para c .

2ª parte. Seja $f(x) \neq 0$, para algum x , $a < x < b$. Como f é contínua em $[a, b]$, pela proposição 5.4.5, f atinge seu máximo e seu mínimo em $[a, b]$. Sendo $f(x) \neq 0$ para algum $x \in (a, b)$, um dos extremos de f será diferente de zero. Como $f(a) = f(b) = 0$, esse extremo será atingido em um ponto $c \in (a, b)$.

Como f é derivável em $c \in (a, b)$, usando a proposição 5.4.4, concluímos que $f'(c) = 0$.

5.5.2 Teorema do Valor Médio. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Então existe um número c no intervalo (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Antes de provar este teorema apresentaremos sua *interpretação geométrica*.

Geometricamente, o teorema do valor médio estabelece que, se a função $y = f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , então existe pelo menos um ponto c entre a e b onde a tangente à curva é paralela à corda que une os pontos $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$ (ver Figura 5.12).

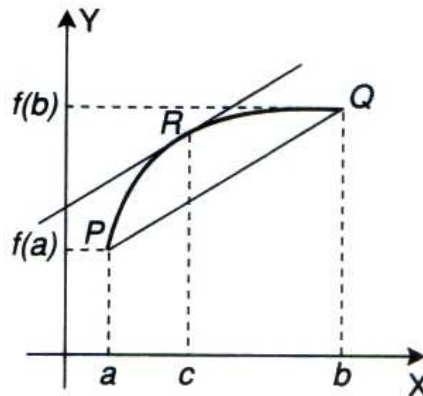


Figura 5.12

Prova do teorema do valor médio: Sejam $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$. A equação da reta \vec{PQ} é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Fazendo $y = h(x)$, temos:

$$h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Como $h(x)$ é uma função polinomial, $h(x)$ é contínua e derivável em todos os pontos.

Consideremos a função $g(x) = f(x) - h(x)$. Essa função determina a distância vertical entre um ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f e o ponto correspondente na reta secante \vec{PQ} .

Temos:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

A função $g(x)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle em $[a, b]$. De fato,

- (i) $g(x)$ é contínua em $[a, b]$, já que $f(x)$ e $h(x)$ são contínuas em $[a, b]$.
- (ii) $g(x)$ é derivável em (a, b) , pois $f(x)$ e $h(x)$ são deriváveis em (a, b) .
- (iii) $g(a) = g(b) = 0$, pois

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (a - a) - f(a) = 0$$

e

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) - f(a) = 0$$

Portanto, existe um ponto c entre a e b tal que $g'(c) = 0$.

Como $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, temos:

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

e, desta forma,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

5.6 Funções Crescentes e Decrescentes

5.6.1 Definição Dizemos que uma função f , definida num intervalo I , é *crescente* neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ver Figura 5.13).

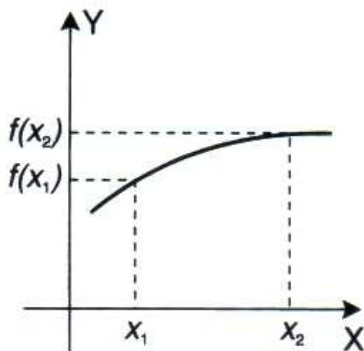


Figura 5.13

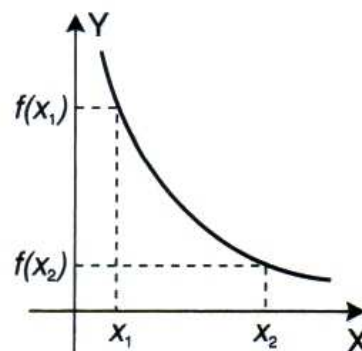


Figura 5.14

5.6.2 Definição Dizemos que uma função f , definida num intervalo I , é *decrescente* nesse intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \geq f(x_2)$ (ver Figura 5.14).

Se uma função é crescente ou decrescente num intervalo, dizemos que é *monótona* neste intervalo.

Analisando geometricamente o sinal da derivada podemos determinar os intervalos onde uma função derivável é crescente ou decrescente. Temos a seguinte proposição.

5.6.3 Proposição Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b) .

- (i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$;
- (ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Prova: Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em $[a, b]$ tais que $x_1 < x_2$. Então f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2) . Pelo teorema do valor médio, segue que:

$$\exists c \in (x_1, x_2) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

(i) Por hipótese, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então $f'(c) > 0$. Como $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1 > 0$.

Analisando a igualdade (1), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$.

Logo, f é crescente em $[a, b]$.

(ii) Neste caso, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Temos então $f'(c) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$.

Analisando a igualdade (1), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) < 0$ e, dessa forma, $f(x_2) < f(x_1)$.

Logo, f é decrescente em $[a, b]$.

Observamos que a hipótese da continuidade de f no intervalo fechado $[a, b]$ é muito importante. De fato, tomando por exemplo, a função:

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

temos que $f'(x) = 1 > 0$ para todo $x \in (0, 1)$ e, no entanto, f não é crescente em $[0, 1]$.

A proposição não pode ser aplicada porque $f(x)$ não é contínua no ponto 1.

5.6.4 Exemplos Determinar os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes.

(i) $f(x) = x^3 + 1$.

Vamos derivar a função e analisar quais os números x tais que $f'(x) > 0$ e quais os números x tais que $f'(x) < 0$. Temos:

$$f'(x) = 3x^2.$$

Como $3x^2$ é maior que zero para todo $x \neq 0$, concluímos que a função é sempre crescente. A Figura 5.15 ilustra este exemplo.

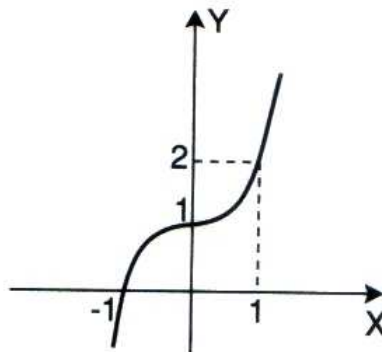


Figura 5.15

(ii) $f(x) = x^2 - x + 5$.

Temos $f'(x) = 2x - 1$. Então, para $2x - 1 > 0$ ou $x > 1/2$ a função é crescente.

Para $2x - 1 < 0$ ou $x < 1/2$ a função é decrescente (ver Figura 5.16).

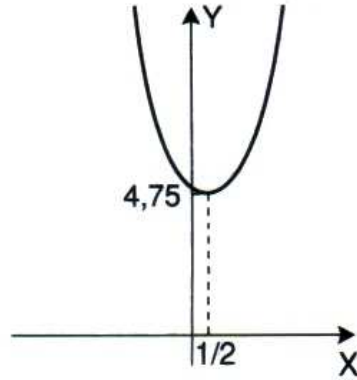


Figura 5.16

$$(iii) \quad f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4, & \text{se } x \leq 1 \\ -x - 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

O gráfico de $f(x)$ pode ser visto na Figura 5.17.

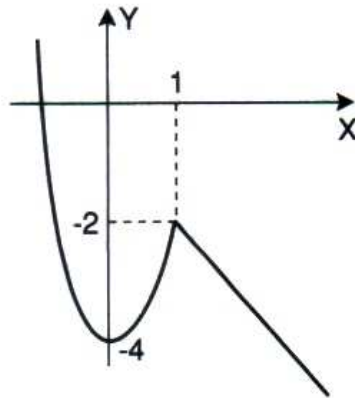


Figura 5.17

Se $x < 1$, então $f'(x) = 4x$. Temos:

$4x > 0$ para $x \in (0, 1)$;

$4x < 0$ para $x \in (-\infty, 0)$.

Se $x > 1$, temos $f'(x) = -1$. Então, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (1, +\infty)$. Concluimos que f é crescente em $[0, 1]$ e decrescente em $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

5.7 Critérios para Determinar os Extremos de uma Função

A seguir demonstraremos teoremas que estabelecem critérios para determinar os extremos de uma função.

5.7.1 Teorema (Critério da derivada primeira para determinação de extremos) Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b) , exceto possivelmente num ponto c .

- (i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c .
- (ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c .

Prova do item (i): Usando a proposição 5.6.3, podemos concluir que f é crescente em $[a, c]$ e decrescente em $[c, b]$. Portanto, $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b) e assim f tem um máximo relativo em c .

Prova do item (ii): Pela proposição 5.6.3, concluímos que f é decrescente em $[a, c]$ e crescente em $[c, b]$. Logo $f(x) > f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b) . Portanto, f tem um mínimo relativo em c .

A Figura 5.18 ilustra as diversas possibilidades do teorema.

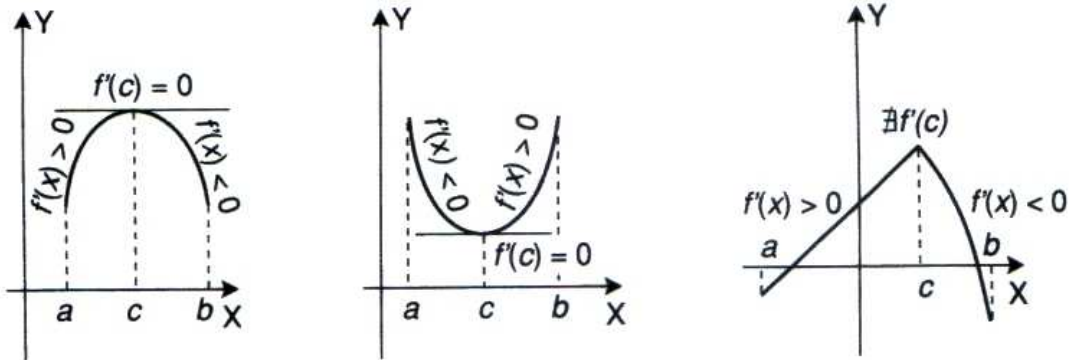


Figura 5.18

5.7.2 Exemplos

(i) Encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento e os máximos e mínimos relativos da função

$$f(x) = x^3 - 7x + 6.$$

Temos $f'(x) = 3x^2 - 7$, para todo x . Fazendo $f'(x) = 0$, vem:

$$3x^2 - 7 = 0$$

ou, $x = \pm\sqrt{7/3}$.

Portanto, os pontos críticos da função f são $+\sqrt{7/3}$ e $-\sqrt{7/3}$.

Para $x < -\sqrt{7/3}$, $f'(x)$ é positiva. Aplicando a proposição 5.6.3, concluímos que f é crescente em $(-\infty, -\sqrt{7/3})$. Para $-\sqrt{7/3} < x < \sqrt{7/3}$, $f'(x)$ é negativa. Então f é decrescente em $[-\sqrt{7/3}, \sqrt{7/3}]$. Para $x > \sqrt{7/3}$, $f'(x)$ é positiva e, então, f é crescente em $[\sqrt{7/3}, +\infty)$.

Pelo critério da derivada primeira concluímos que f tem um máximo relativo em $-\sqrt{7/3}$ e f tem um mínimo relativo em $+\sqrt{7/3}$.

A Figura 5.19 mostra um esboço do gráfico de f .

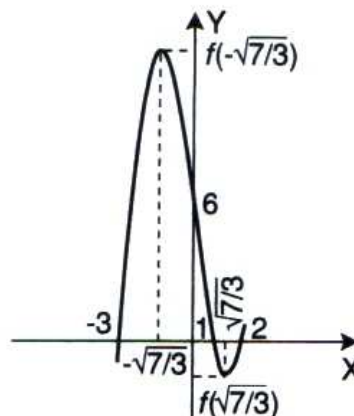


Figura 5.19

(ii) Seja

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 3, & \text{se } x \leq 5 \\ 1/2(x+7), & \text{se } x > 5. \end{cases}$$

Se $x < 5$, temos $f'(x) = 2(x-2)$ e, se $x > 5$, temos $f'(x) = 1/2$.

Ainda $f'_+(5) = 1/2$ e $f'_-(5) = 6$. Logo, $f'(5)$ não existe e então 5 é um ponto crítico de f .

O ponto $x = 2$ também é ponto crítico, pois $f'(2) = 0$.

Se $x < 2$, $f'(x)$ é negativa. Então, pela proposição 5.6.3, f é decrescente em $(-\infty, 2]$.

Se $2 < x < 5$, $f'(x)$ é positiva. Então f é crescente em $[2, 5]$.

Se $x > 5$, $f'(x)$ é positiva. Então f é crescente em $[5, +\infty)$.

Pelo critério da derivada primeira, concluímos que f tem um mínimo relativo em $x = 2$.

Apresentamos o gráfico de f na Figura 5.20.

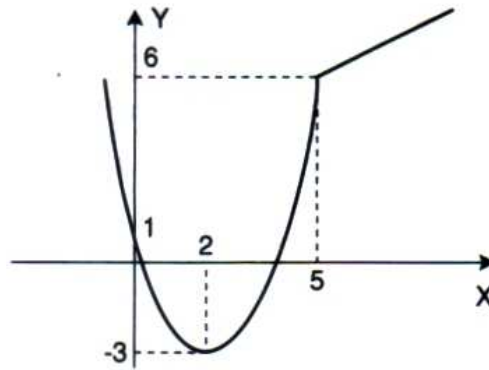


Figura 5.20

5.7.3 Teorema (Critério da derivada 2ª para determinação de extremos de uma função) Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b) , temos:

- (i) Se $f''(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c .
- (ii) Se $f''(c) > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c .

Prova: Para provar este teorema utilizaremos o seguinte resultado que não foi mencionado no Capítulo 3. “Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe e é negativo, existe um intervalo aberto contendo a tal que $f(x) < 0$ para todo $x \neq a$ no intervalo.”

Prova do item (i): Por hipótese $f''(c)$ existe e $f''(c) < 0$. Então,

$$f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0.$$

Portanto, existe um intervalo aberto I , contendo c , tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0, \text{ para todo } x \in I. \quad (1)$$

Seja A o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x < c$. Então, c é o extremo direito do intervalo aberto A .

Seja B o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x > c$. Assim, c é o extremo esquerdo do intervalo aberto B .

Se $x \in A$, temos $x - c < 0$. De (1), resulta que $f'(x) > f'(c)$.

Se $x \in B$, $x - c > 0$. De (1), resulta que $f'(x) < f'(c)$.

Como $f'(c) = 0$, concluímos que, se $x \in A$, $f'(x) > 0$ e, se $x \in B$, $f'(x) < 0$. Pelo critério da derivada primeira (Teorema 5.7.1), f tem um valor máximo relativo em c .

A prova de (ii) é análoga.

5.7.4 Exemplos Encontre os máximos e os mínimos relativos de f aplicando o critério da derivada segunda.

(i) $f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$.

Temos:

$$f'(x) = 18 + 6x - 12x^2$$

e $f''(x) = 6 - 24x$.

Fazendo $f'(x) = 0$, temos $18 + 6x - 12x^2 = 0$. Resolvendo esta equação obtemos os pontos críticos de f que são $3/2$ e -1 .

Como $f''(3/2) = -30 < 0$, f tem um valor máximo relativo em $3/2$.

Como $f''(-1) = 30 > 0$, f tem um valor mínimo relativo em -1 .

(ii) $f(x) = x(x - 1)^2$.

Neste exemplo, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cdot 2(x - 1) + (x - 1)^2 \cdot 1 \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

e $f''(x) = 6x - 4$.

Fazendo $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$ e resolvendo a equação obtemos os pontos críticos de f , que neste caso são 1 e $1/3$.

Como $f''(1) = 2 > 0$, f tem um valor mínimo relativo em 1 . Como $f''(1/3) = -2 < 0$, f tem um valor máximo relativo em $1/3$.

(iii) $f(x) = 6x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3$.

Temos:

$$f'(x) = 6 - 6x + \frac{3}{2}x^2$$

e $f''(x) = -6 + 3x$.

Fazendo $f'(x) = 0$, temos $6 - 6x + \frac{3}{2}x^2 = 0$. Resolvendo a equação, obtemos $x = 2$, que neste caso é o único ponto crítico de f .

Como $f''(2) = 0$, nada podemos afirmar com auxílio do Teorema 5.7.3.

Usando o critério da derivada primeira ou a visualização do gráfico da função na Figura 5.21, podemos concluir que a função dada é sempre crescente. Portanto, não existem máximos nem mínimos relativos.

Com as informações da seção seguinte vamos poder constatar que $(2, 4)$ é um ponto de inflexão.

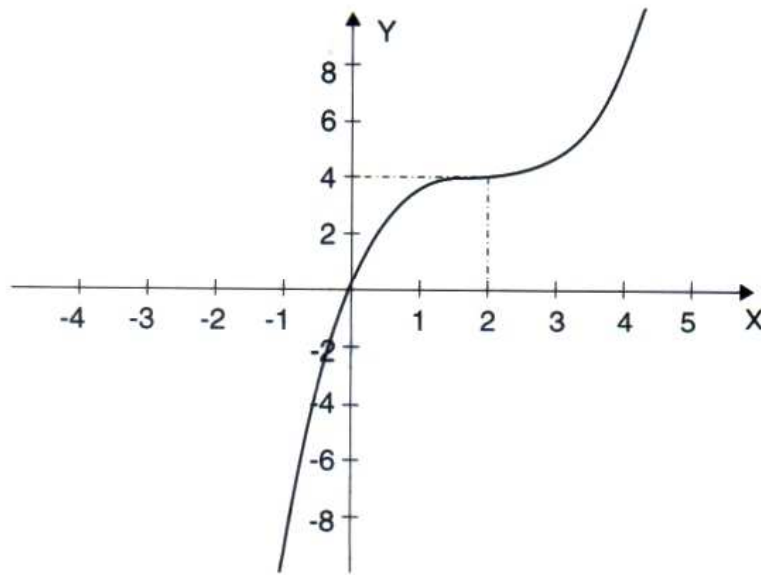


Figura 5.21

5.8 Concavidade e Pontos de Inflexão

O conceito de concavidade é muito útil no esboço do gráfico de uma curva.

Vamos introduzi-lo analisando geometricamente a Figura 5.22.

Na Figura 5.22 (a) observamos que dado um ponto qualquer c entre a e b , em pontos próximos de c o gráfico de f está acima da tangente à curva no ponto $P(c, f(c))$. Dizemos que a curva tem concavidade voltada para cima no intervalo (a, b) .

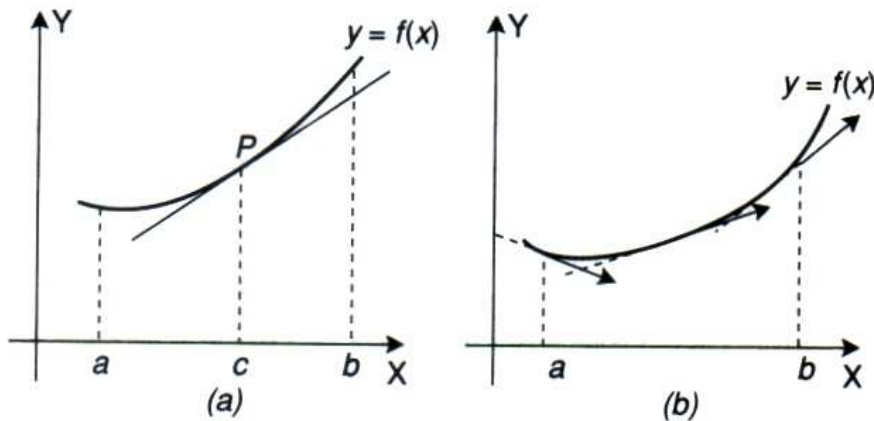


Figura 5.22

Como $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente à curva, observa-se na Figura 5.22(b) que podemos descrever essa mesma situação afirmando que no intervalo (a, b) a derivada $f'(x)$ é crescente. Geometricamente, isto significa que a reta tangente gira no sentido anti-horário à medida que avançamos sobre a curva da esquerda para a direita.

Analogamente, a Figura 5.23 descreve uma função que tem concavidade voltada para baixo no intervalo (a, b) .

Na Figura 5.23(b) vemos que a tangente gira no sentido horário quando nos deslocamos sobre a curva da esquerda para a direita. A derivada $f'(x)$ é decrescente em (a, b) .

Temos as seguintes definições:

5.8.1 Definição Uma função f é dita côncava para cima no intervalo (a, b) , se $f'(x)$ é crescente neste intervalo.

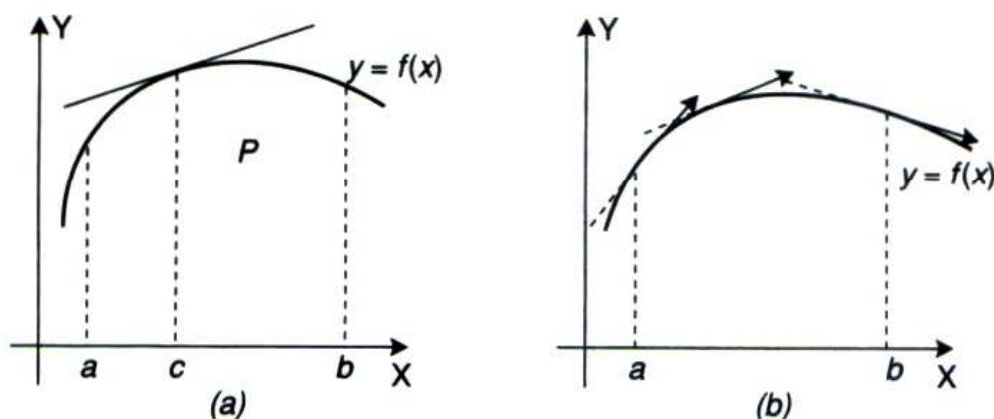


Figura 5.23

5.8.2 Definição Uma função f é côncava para baixo no intervalo (a, b) , se $f'(x)$ for decrescente neste intervalo.

Reconhecer os intervalos onde uma curva tem concavidade voltada para cima ou para baixo, auxilia muito no traçado de seu gráfico. Faremos isso analisando o sinal da derivada $f''(x)$.

5.8.3 Proposição Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável até 2ª ordem no intervalo (a, b) .

- (i) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para cima em (a, b) .
- (ii) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para baixo em (a, b) .

Prova de (i): $f''(x) = [f'(x)]'$, se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, pela proposição 5.6.3, $f'(x)$ é crescente no intervalo (a, b) . Logo, f é côncava para cima em (a, b) .

Analogamente, se prova (ii).

Podem existir pontos no gráfico de uma função em que a concavidade muda de sentido. Esses pontos são chamados *pontos de inflexão*.

5.8.4 Definição Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é chamado um ponto de inflexão, se existe um intervalo (a, b) contendo c , tal que uma das seguintes situações ocorra:

- (i) f é côncava para cima em (a, c) e côncava para baixo em (c, b) .
- (ii) f é côncava para baixo em (a, c) e côncava para cima em (c, b) .

Na Figura 5.24, os pontos de abscissa c_1, c_2, c_3 e c_4 são pontos de inflexão. Vale observar que c_2 e c_3 são pontos de extremos de f e que f não é derivável nesses pontos. Nos pontos c_1 e c_4 , existem as derivadas $f'(c_1)$ e $f'(c_4)$. Nos correspondentes pontos $(c_1, f(c_1))$ e $(c_4, f(c_4))$ a reta tangente corta o gráfico de f .

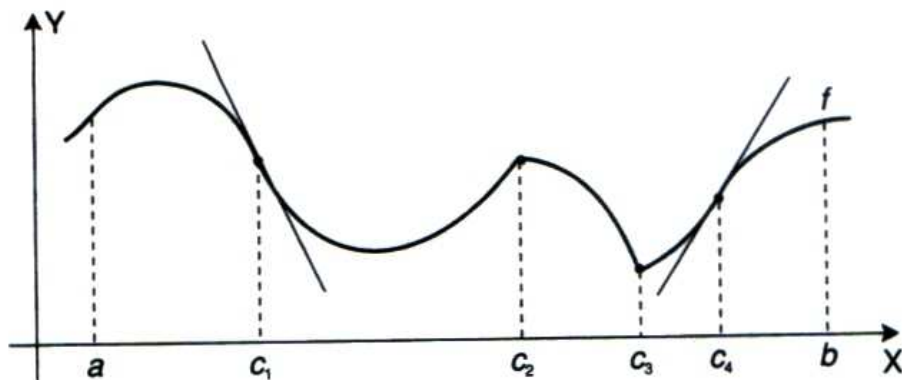


Figura 5.24

5.8.5 Exemplos Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

(i) $f(x) = (x - 1)^3$.

Temos:

$$f'(x) = 3(x - 1)^2$$

e $f''(x) = 6(x - 1)$.

Fazendo $f''(x) > 0$, temos as seguintes desigualdades equivalentes:

$$6(x - 1) > 0$$

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1.$$

Portanto, no intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) > 0$. Analogamente, no intervalo $(-\infty, 1)$, $f''(x) < 0$. Pela proposição 5.8.3 f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 1)$ e no intervalo $(1, +\infty)$ f é côncava para cima.

No ponto $c = 1$ a concavidade muda de sentido. Logo, neste ponto, o gráfico de f tem um ponto de inflexão.

Podemos ver o gráfico de f na Figura 5.25.

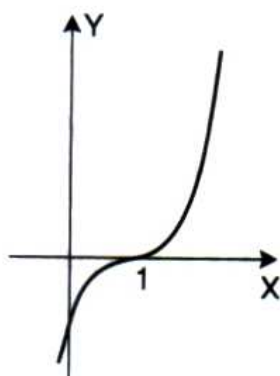


Figura 5.25

(ii) $f(x) = x^4 - x^2$.

Temos:

$$f'(x) = 4x^3 - 2x$$

e $f''(x) = 12x^2 - 2$.

Fazendo $f''(x) > 0$, vem:

$$12x^2 - 2 > 0$$

$$x^2 > 1/6.$$

Então, $x > \frac{\sqrt{6}}{6}$ ou $x < -\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Portanto, f tem concavidade para cima nos intervalos

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, +\infty\right).$$

No intervalo $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $f''(x) < 0$. Portanto, neste intervalo f é côncava para baixo.

Nos pontos $c_1 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ e $c_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$ a concavidade muda de sentido. Logo, nestes pontos o gráfico de f tem pontos de inflexão.

A Figura 5.26 mostra o gráfico de f onde assinalamos os pontos de inflexão.

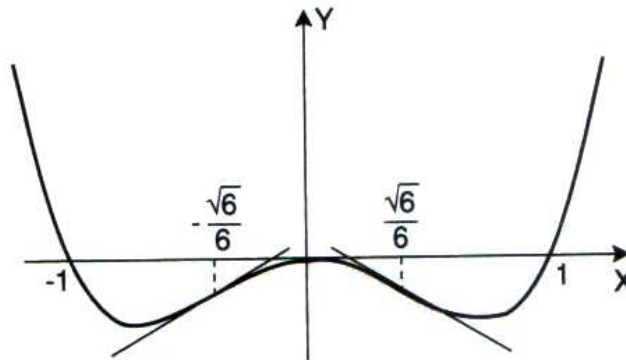


Figura 5.26

$$(iii) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{para } x \leq 1 \\ 1 - (x - 1)^2, & \text{para } x > 1. \end{cases}$$

Para $x < 1$, $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$. Para $x > 1$, $f'(x) = -2(x - 1)$ e $f''(x) = -2$. Logo, para $x \in (-\infty, 1)$, $f''(x) > 0$ e, portanto, f é côncava para cima neste intervalo. No intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) < 0$. Portanto, neste intervalo f é côncava para baixo.

No ponto $c = 1$, a concavidade muda de sentido e assim o gráfico de f apresenta um ponto de inflexão em $c = 1$.

O gráfico de f pode ser visto na Figura 5.27. Observamos que no ponto $c = 1$, f tem um máximo relativo.

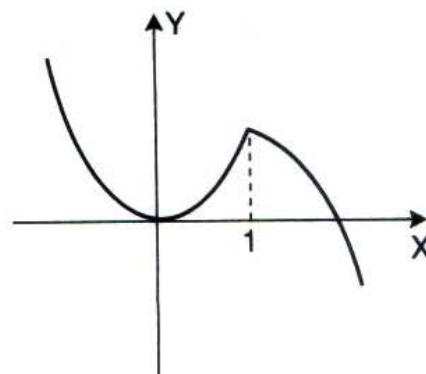


Figura 5.27

5.9 Análise Geral do Comportamento de uma Função

Utilizando os conceitos e resultados discutidos nas últimas seções, podemos formar um conjunto de informações que permite fazer a análise do comportamento das funções. O uso da representação algébrica em sintonia com a representação gráfica vai propiciar uma discussão interessante sobre várias propriedades e características das funções. Essa análise é importante no contexto da resolução de problemas práticos que será discutida na seção seguinte.

5.9.1 Construção de Gráficos

O quadro a seguir apresenta um resumo que poderá ser seguido para analisar o comportamento de uma função a partir de sua representação algébrica. Neste caso sua análise pode culminar com um esboço gráfico destacando as propriedades e características da função.

Etapas	Procedimento	Definições e Teoremas Utilizados
1 ^a	Encontrar $D(f)$.	
2 ^a	Calcular os pontos de intersecção com os eixos. (Quando não requer muito cálculo.)	
3 ^a	Encontrar os pontos críticos.	Seção 5.4.
4 ^a	Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$.	Proposição 5.6.3.
5 ^a	Encontrar os máximos e mínimos relativos.	Teoremas 5.7.1 ou 5.7.3.
6 ^a	Determinar a concavidade e os pontos de inflexão de f .	Proposição 5.8.3.
7 ^a	Encontrar as assíntotas horizontais e verticais, se existirem.	Definições 3.14.1 e 3.14.3.
8 ^a	Esboçar o gráfico.	

5.9.2 Exemplos Esboçar o gráfico das funções:

(i) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$.

Seguindo as etapas propostas, temos:

1^a etapa. $D(f) = \mathbb{R}$.

2^a etapa. Intersecção com o eixo dos y .

$$f(0) = 2.$$

3^a etapa. $f'(x) = 12x^3 + 24x^2 + 12x$.

Resolvendo $12x^3 + 24x^2 + 12x = 0$, encontramos $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, que são os pontos críticos.

4^a etapa. Fazendo $f'(x) > 0$, obtemos que $12x^3 - 24x^2 + 12x > 0$ quando $x > 0$. Portanto, f é crescente para $x \geq 0$.

Fazendo $f'(x) < 0$, obtemos que $12x^3 - 24x^2 + 12x < 0$ quando $x < 0$. Portanto, f é decrescente para $x \leq 0$.

5^a etapa. Temos $f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$.

Como $f''(0) = 12 > 0$, temos que o ponto 0 é um ponto mínimo e $f(0) = 2$ é um mínimo relativo de f .

Como $f''(1) = 0$, nada podemos afirmar.

6^a etapa. Fazendo $f''(x) > 0$, temos que $36x^2 - 48x + 12 > 0$ quando $x \in [(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)]$.

Então, f é côncava para cima em $(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)$.

Fazendo $f''(x) < 0$, temos que $36x^2 - 48x + 12 < 0$ para $x \in (1/3, 1)$. Então f é côncava para baixo em $(1/3, 1)$.

Os pontos de abscissa $1/3$ e 1 são pontos de inflexão.

7^a etapa. Não existem assíntotas.

8ª etapa. Temos na Figura 5.28 o esboço do gráfico.

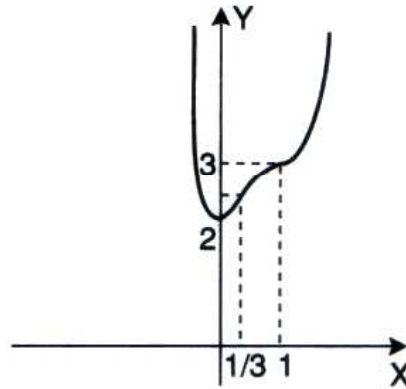


Figura 5.28

$$(ii) \quad f(x) = \frac{x^2}{x-3}$$

O domínio de f é $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

Temos,

$$f'(x) = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$$

e

$$f''(x) = \frac{18x-54}{(x-3)^4}$$

Fazendo $f'(x) = 0$, temos:

$$\frac{x(x-6)}{(x-3)^2} = 0$$

e, então, $x = 0$ e $x = 6$ são pontos críticos.

Vemos que $f'(x) > 0$ quando $x \in [(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)]$. Assim, f é crescente em $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$. Fazendo $f'(x) < 0$, vemos que f é decrescente em $[0, 6]$.

Como $f''(0) < 0$, temos que 0 é ponto de máximo relativo e, como $f''(6) > 0$, temos que 6 é ponto de mínimo relativo.

Ainda $f(0) = 0$ é o máximo relativo de f e $f(6) = 12$ é o mínimo relativo de f .

Fazendo

$$f''(x) = \frac{18x-54}{(x-3)^4} > 0,$$

obtemos que f é côncava para cima em $(3, +\infty)$ e fazendo

$$f''(x) = \frac{18x-54}{(x-3)^4} < 0,$$

obtemos que f é côncava para baixo em $(-\infty, 3)$.

Determinando os limites

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

encontramos que $x = 3$ é assíntota vertical. Não existe assíntota horizontal.

A Figura 5.29 mostra o esboço do gráfico de $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$.

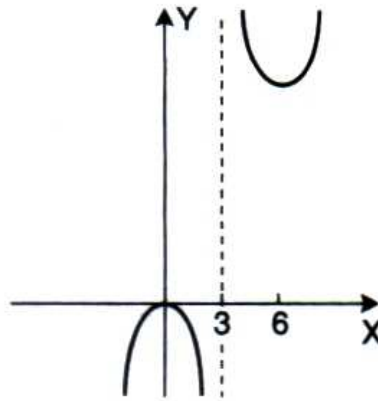


Figura 5.29

(iii) $f(x) = (x+1)^{1/3}$.

O domínio de $f(x)$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

$f(x)$ corta o eixo dos y no ponto $y = 1$, já que $f(0) = 1$. Corta o eixo dos x em -1 , já que resolvendo $(x+1)^{1/3} = 0$, obtemos $x = -1$.

Fazendo

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} = 0,$$

concluimos que não existe x que satisfaça $f'(x) = 0$. Como $f'(-1)$ não existe, o único ponto crítico de f é $x = -1$.

Como $f'(x)$ é sempre positiva, concluimos que a função é sempre crescente. Não existem máximos nem mínimos.

Como

$$f''(x) = \frac{-2}{9}(x+1)^{-5/3},$$

concluimos que, para $x < -1$, $f''(x) > 0$ e, portanto, f é côncava para cima em $(-\infty, -1)$. Quando $x > -1$, $f''(x) < 0$ e então f é côncava para baixo em $(-1, +\infty)$.

O ponto de abscissa $x = -1$ é um ponto de inflexão.

Não existem assíntotas.

A Figura 5.30 mostra o gráfico de $f(x)$.

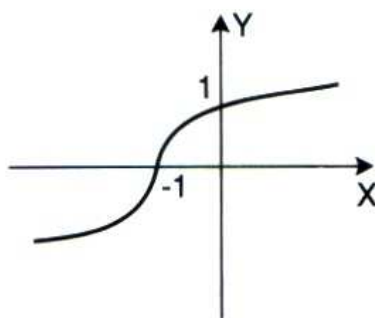


Figura 5.30

5.9.3 Análise de Gráficos

Para o desenvolvimento desta seção estamos supondo o uso de uma ferramenta gráfica para a construção inicial do gráfico da função. A partir do gráfico sugerimos as etapas apresentadas no quadro a seguir para a análise do comportamento da função, destacando suas propriedades e características.

Etapas	Procedimento	Observação Visual
1 ^a	Construção do gráfico usando um software.	Verificar se a janela e a escala utilizadas estão adequadas para uma boa visualização.
2 ^a	Encontrar $D(f)$.	Observar a variação no eixo dos x .
3 ^a	Encontrar o conjunto imagem.	Observar a variação no eixo dos y .
4 ^a	Analisar as raízes reais da função.	Verificar pontos em que a curva corta o eixo dos x .
5 ^a	Analisar os pontos críticos, identificamos os extremos da função.	Observar o formato do gráfico, identificando pontos angulosos ou pontos em que a reta tangente seja paralela ao eixo dos x .
6 ^a	Analisar os intervalos de crescimento ou decréscimo.	Observar o gráfico, verificando o crescimento e o decréscimo no eixo dos y à medida que os valores de x crescem.
7 ^a	Discutir a concavidade da função e a existência de pontos de inflexão.	Observar o formato do gráfico: “concavidade para baixo” ou “concavidade para cima”.
8 ^a	Analisar a existência de assíntotas.	Visualizar as tendências da curva.

5.9.4 Exemplos

Discutir as propriedades e características das funções:

$$(i) \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 30x + 10$$

Vamos seguir as etapas propostas:

1^a Etapa. Na Figura 5.31 temos o gráfico da função.

2^a Etapa. Para encontrar o domínio vamos observar o gráfico e constatar que estamos diante de uma função cujo domínio é formado por todos os números reais, conferindo com o fato de estarmos diante de uma função polinomial.

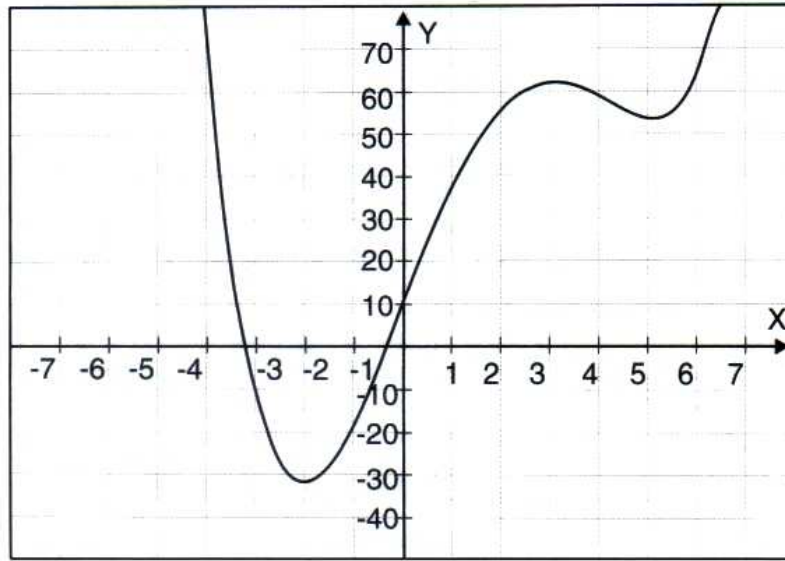


Figura 5.31

3ª Etapa. É possível observar que o conjunto imagem está no intervalo $[f(-2), +\infty)$. Podemos fazer o cálculo da imagem de -2 e confirmar o resultado $[-32, +\infty)$.

4ª Etapa. Ao observar os pontos em que a curva corta o eixo dos x , podemos afirmar que esta função tem duas raízes reais. De forma aproximada podemos estimar os valores $x \cong -0,3$ e $x \cong -3,1$.

5ª Etapa. É possível verificar a existência de dois pontos de mínimos relativos e um ponto de máximo relativo. Temos:

- ponto de mínimo em $x = -2$;
- ponto de máximo em $x = 3$;
- ponto de mínimo em $x = 5$.

6ª Etapa. O crescimento desta função está bem identificado a partir da visualização gráfica. Temos:

- decréscimo em $(-\infty, -2)$;
- crescimento em $(-2, 3)$;
- decréscimo em $(3, 5)$;
- crescimento em $(5, +\infty)$.

7ª Etapa. Podemos observar que a função tem concavidade distinta em diferentes intervalos, apresentando dois pontos de inflexão. As abscissas desses pontos estão próximas do zero e do quatro, delimitando os intervalos da concavidade inicialmente para cima, posteriormente para baixo e finalmente para cima.

8ª Etapa. Esta função não tem assíntotas.

(ii) $f(t) = t + \cos t$

Seguindo as etapas propostas, temos:

1ª Etapa. Na Figura 5.32 mostramos o gráfico da função.

2ª Etapa. O domínio da função é o conjunto dos números reais.

3ª Etapa. O conjunto imagem da função é o conjunto dos números reais.

4ª Etapa. A função tem uma única raiz real próxima de $x = -\frac{\pi}{4}$.

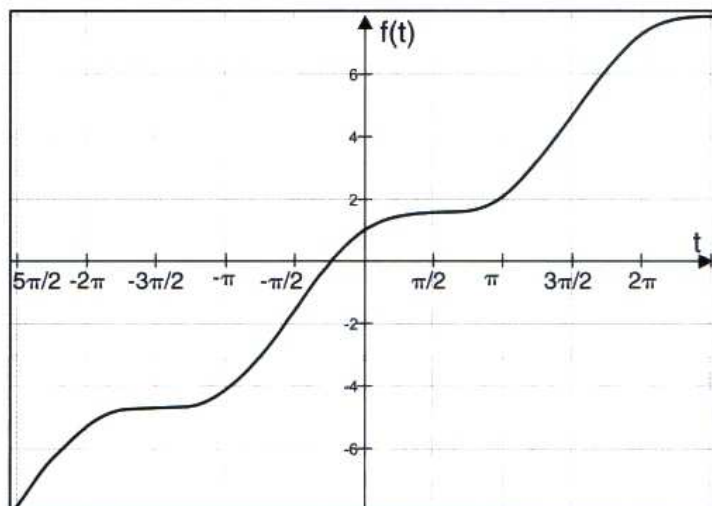


Figura 5.32

5ª Etapa. A função não admite pontos de máximos e de mínimos.

6ª Etapa. A função é sempre crescente.

7ª Etapa. A função tem de forma alternada intervalos de comprimento π em que a sua concavidade é voltada para cima e depois para baixo. Os pontos de inflexão estão localizados em pontos tais que $x = \frac{(2n + 1)\pi}{2}$, com n pertencente ao conjunto dos números inteiros.

8ª Etapa. O gráfico não tem assíntotas.

$$(iii) f(x) = \frac{4 + x^2}{4 - x^2}$$

1ª Etapa. A Figura 5.33 mostra o gráfico da função dada.

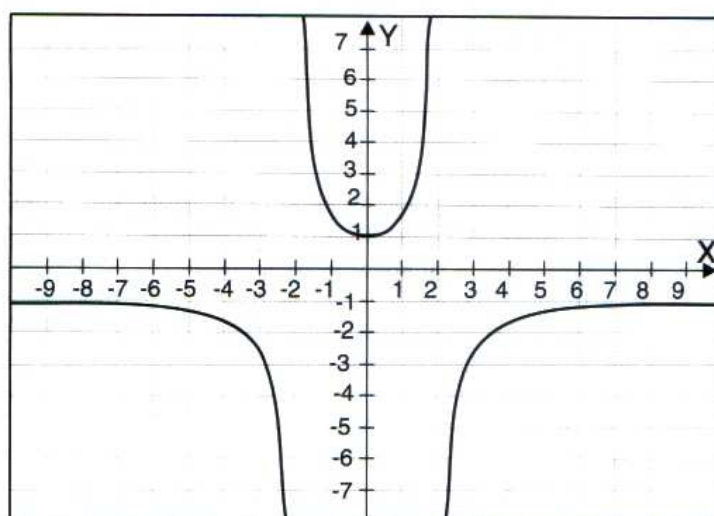


Figura 5.33

2ª Etapa. A função está definida no conjunto dos números reais, exceto nos pontos $x = 2$ e $x = -2$.

3ª Etapa. O conjunto imagem da função pode ser representado por $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

4^a Etapa. Esta função não tem raízes reais.

5^a Etapa. A função apresenta em seu domínio um ponto de mínimo relativo em $x = 0$.

6^a Etapa. Temos os seguintes intervalos de crescimento e decrescimento:

- decrescimento em $(-\infty, -2)$ e $(-2, 0)$;
- crescimento em $(0, 2)$ e $(2, +\infty)$.


7^a Etapa. A função é côncava para cima no intervalo $(-2, 2)$ e côncava para baixo nos intervalos $(-\infty, -2)$ e $(2, +\infty)$. Apesar de existir a mudança da concavidade, a função não tem pontos de inflexão, pois a mudança de concavidade ocorre em pontos que não pertencem ao domínio da função.

8^a Etapa. Observamos a existência das seguintes assíntotas:

- vertical em $x = -2$ e $x = 2$;
- horizontal em $y = -1$.

Salientamos a partir dos exemplos discutidos que, para fazermos uma análise detalhada do comportamento de uma função, é importante contar com as representações algébrica e gráfica da função.

5.10 Exercícios

1.  Em cada um dos seguintes casos, verificar se o Teorema do Valor Médio se aplica. Em caso afirmativo, achar um número c em (a, b) , tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretar geometricamente.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = 2, b = 3$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = -1, b = 3$.

(c) $f(x) = x^3$; $a = 0, b = 4$.

(d) $f(x) = x^3$; $a = -2, b = 0$.

(e) $f(x) = \cos x$; $a = 0, b = \pi/2$.

(f) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $a = \pi/4, b = 3\pi/4$.

(g) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $a = 0, b = \pi/4$.

(h) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $a = -1, b = 0$.

(i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $a = -1, b = 1$.

(j) $f(x) = |x|$; $a = -1, b = 1$.

2. A função $f(x) = x^{2/3} - 1$ é tal que $f(-1) = f(1) = 0$. Por que ela não verifica o Teorema de Rolle no intervalo $[-1, 1]$?
3. Seja $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$. Mostrar que f satisfaz as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[-3, 3]$ e determinar os valores de $c \in (-3, 3)$ que satisfaçam $f'(c) = 0$.
4. Usando o teorema do valor médio provar que:
- (a) $|\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \alpha| \leq |\theta - \alpha|, \forall \theta, \alpha \in \mathbb{R}$;
- (b) $\operatorname{sen} \theta \leq \theta, \theta \geq 0$.
5. Determinar os pontos críticos das seguintes funções, se existirem.

(a) $y = 3x + 4$.

(b) $y = x^2 - 3x + 8$.

(c) $y = 2 + 2x - x^2$.

(e) $y = 3 - x^3$.

(g) $y = x^4 + 4x^3$.

(i) $y = \cos x$.

(k) $y = e^x - x$.

(m) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$.

(o) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

(d) $y = (x - 2)(x + 4)$.


(f) $y = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$.

(h) $y = \sin x$.

(j) $y = \sin x - \cos x$.

(l) $y = (x^2 - 9)^{2/3}$.

(n) $y = |2x - 3|$.

6.  Determinar, algebricamente, os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes. Fazer um esboço do gráfico, comparando os resultados.

(a) $f(x) = 2x - 1$.

(c) $f(x) = 3x^2 + 6x + 7$.

(e) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

(g) $f(x) = 2^x$.

(i) $f(x) = xe^{-x}$.

(k) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

(b) $f(x) = 3 - 5x$.

(d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$.

(f) $f(x) = \frac{x}{2} + \sin x$.

(h) $f(x) = e^{-x}$.

(j) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$.

(l) $f(x) = e^x \sin x, x \in [0, 2\pi]$.

7. Determinar os máximos e mínimos das seguintes funções, nos intervalos indicados.

(a) $f(x) = 1 - 3x, [-2, 2]$.

(c) $f(x) = 4 - 3x + 3x^2, [0, 3]$.

(e) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}, [-2, 2]$.

(g) $f(x) = \cosh x, [-2, 2]$.

(i) $f(x) = \cos 3x, [0, 2\pi]$.

(k) $f(x) = \sin^3 x - 1, [0, \pi/2]$.

(b) $f(x) = x^2 - 4, [-1, 3]$.

(d) $f(x) = x^3 - x^2, [0, 5]$.

(f) $f(x) = |x - 2|, [1, 4]$.

(h) $f(x) = \operatorname{tgh} x, [-2, 2]$.

(j) $f(x) = \cos^2 x, [0, 2\pi]$.

8. Encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento, os máximos e os mínimos relativos das seguintes funções.

(a) $f(x) = 2x + 5$.

(c) $g(x) = 4x^3 - 8x^2$.

(e) $f(t) = \frac{t - 1}{t + 1}$.

(b) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$.

(d) $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 5$.

(f) $f(t) = t + \frac{1}{t}$.

(g) $g(x) = x e^x$.

(h) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.


(i) $f(x) = |2 - 6x|$.

(j) $g(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq -2 \\ x^2 - 2, & x > -2 \end{cases}$

(k) $h(t) = \begin{cases} 3 - 4t, & t > 0 \\ 4t + 3, & t \leq 0 \end{cases}$

(l) $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < -1 \\ 1 - x^2, & x \geq -1 \end{cases}$

(m) $g(x) = \begin{cases} 10 - (x - 3)^2, & x \leq -2 \\ 5(x - 1), & -2 < x \leq -1 \\ -\sqrt{91 + (x - 2)^2}, & x > -1 \end{cases}$

9.  Encontrar os pontos de máximo e mínimo relativos das seguintes funções, se existirem. Fazer um esboço do gráfico e comparar os resultados.

(a) $f(x) = 7x^2 - 6x + 3$.

(b) $g(x) = 4x - x^2$.

(c) $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 9$.

(d) $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + 8$.

(e) $f(t) = \begin{cases} t^2, & t < 0 \\ 3t^2, & t \geq 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = 6x^{2/3} - 2x$.

(g) $f(x) = 5 + (x - 2)^{7/5}$.

(h) $f(x) = 3 + (2x + 3)^{4/3}$.

(i) $g(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$.

(j) $h(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 2}$.

(k) $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^3$.

(l) $f(x) = x^2\sqrt{16 - x}$.

10. Mostrar que $y = \frac{\log_a x}{x}$ tem seu valor máximo em $x = e$ (número neperiano) para todos os números $a > 1$.

11. Determinar os coeficientes a e b de forma que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenha um extremo relativo no ponto $(-2, 1)$.

12. Encontrar a , b , c e d tal que a função $f(x) = 2ax^3 + bx^2 - cx + d$ tenha pontos críticos em $x = 0$ e $x = 1$. Se $a > 0$, qual deles é ponto de máximo, qual é ponto de mínimo?

13. Demonstrar que a função $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, tem máximo se, e somente se, $a < 0$; e mínimo se, e somente se, $a > 0$.

14. Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

(a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$.

(b) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x + 9$.

(c) $f(x) = \frac{1}{x + 4}$.

(d) $f(x) = 2x e^{-3x}$.

(e) $f(x) = x^2 e^x$.

(f) $f(x) = 4\sqrt{x + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 1$.

(g) $f(t) = \frac{t^2 + 9}{(t - 3)^2}$.

(h) $f(t) = e^{-t} \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$(i) f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(j) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 2 \\ 4 - x^2, & x > 2 \end{cases}$$

15. Seguindo as etapas apresentadas em 5.9.1, fazer um esboço do gráfico das seguintes funções:

$$(a) y = x^2 + 4x + 2$$

$$(b) y = \frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{5}{6}$$

$$(c) y = \frac{-1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2$$

$$(d) y = x + \frac{2}{x}$$

$$(e) y = \frac{3x + 1}{(x + 2)(x - 3)}$$

$$(f) y = \frac{4}{\sqrt{x + 2}}$$

$$(g) y = x^{3/2}$$

$$(h) y = \ln(2x + 3)$$

16.  Usando uma ferramenta gráfica, construir o gráfico das funções seguintes, analisando suas propriedades e características como apresentado em 5.9.3.

$$(a) y = (x - 3)(x + 2)$$

$$(b) y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x + 3$$

$$(c) y = x^4 - 32x + 48$$

$$(d) y = \frac{2x}{x + 2}$$

$$(e) y = \frac{2}{x^2 - 2x - 3}$$

$$(f) y = \cosh x$$

$$(g) y = e^{x-x^2}$$

$$(h) f(x) = x^2 \sin x$$

$$(i) f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

$$(j) f(x) = x^2 \ln x$$

$$(k) f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$(l) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$$

5.11 Problemas de Maximização e Minimização

A seguir apresentamos alguns problemas práticos em diversas áreas, onde aplicamos o que foi visto nas Seções 5.4 e 5.7 sobre máximos e mínimos.

O primeiro passo para solucionar estes problemas é escrever precisamente qual a função que deverá ser analisada. Esta função poderá ser escrita em função de uma ou mais variáveis. Quando a função é de mais de uma variável, devemos procurar expressar uma das variáveis em função da outra.

Com a função bem definida, devemos identificar um intervalo apropriado e então proceder a rotina matemática aplicando definições e teoremas.

5.11.1 Exemplos

- (1) Na Biologia, encontramos a fórmula $\phi = V \cdot A$, onde ϕ é o fluxo de ar na traquéia, V é a velocidade do ar e A a área do círculo formado ao seccionarmos a traquéia (ver Figura 5.34).

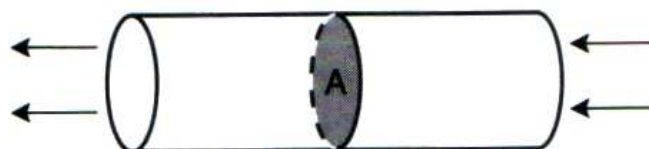


Figura 5.34

Quando tossimos, o raio diminui, afetando a velocidade do ar na traquéia. Sendo r_0 o raio normal da traquéia, a relação entre a velocidade V e o raio r da traquéia durante a tosse é dada por $V(r) = a \cdot r^2(r_0 - r)$, onde a é uma constante positiva.

- (a) Calcular o raio r em que é maior a velocidade do ar.
 (b) Calcular o valor de r com o qual teremos o maior fluxo possível.

Solução:

- (a) O raio r da traquéia contraída não pode ser maior que o raio normal r_0 , nem menor que zero, ou seja, $0 \leq r \leq r_0$.

Neste item vamos encontrar o máximo absoluto da função $V(r)$ em $0 \leq r \leq r_0$.

Temos:

$$V(r) = a r^2(r_0 - r);$$

$$V'(r) = 2a r_0 r - 3a r^2.$$

Fazendo $V'(r) = 2a r_0 r - 3a r^2$, obtemos os pontos críticos $r_1 = \frac{2}{3} r_0$ e $r_2 = 0$.

Temos $V''(r) = 2a r_0 - 6ar$. Como $V''(0) = 2a r_0 > 0$, concluímos que $r_2 = 0$ é um mínimo relativo. Como $V''(2/3 r_0)$ é um valor negativo, concluímos que $r_1 = 2/3 r_0$ é um valor máximo relativo.

Para $r \in [0, r_0]$, temos que o máximo absoluto é $V(2/3 r_0) = 4a/27 r_0^3$.

Diante deste resultado, afirmamos que a velocidade do ar na traquéia é maior quando o raio r dela é dois terços do raio r_0 da traquéia não contraída.

- (b) Podemos escrever a função $\phi = V \cdot A$ em função do raio r da traquéia:

$$\phi(r) = ar^2(r_0 - r) \cdot \pi r^2.$$

Queremos encontrar o máximo absoluto da função $\phi(r)$ em $0 \leq r \leq r_0$.

$$\text{Temos } \phi'(r) = 4a \pi r_0 r^3 - 5a \pi r^4.$$

Fazendo $\phi'(r) = 4a \pi r_0 r^3 - 5a \pi r^4 = 0$, obtemos $r_1 = 0$ e $r_2 = 4/5 r_0$ como pontos críticos de $\phi(r)$.

$$\text{Temos } \phi''(r) = 12a \pi r_0 r^2 - 20a \pi r^3.$$

Logo, $\phi''(0) = 0$ e $\phi''(4/5 r_0) = -64/25a \pi r_0^3$. Concluímos que em $4/5 r_0$ temos um ponto de máximo relativo.

O ponto $r_1 = 0$ é um ponto de mínimo relativo, pois a função $\phi(r)$ decresce em $(-\infty, 0]$ e cresce em $[0, 4/5 r_0]$.

O máximo absoluto em $[0, r_0]$ será $\phi(4/5 r_0)$, que é igual a $256/3.125a \pi r_0^5$.

Portanto, o maior fluxo possível é obtido quando $r = 4/5 r_0$.

- (2) Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento situada na margem de um rio de 500 metros de largura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2.000 metros abaixo da central. O custo da obra através do rio é de R\$ 640,00 por metro, enquanto, em terra, custa R\$ 312,00. Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável?

Solução: A Figura 5.35 esquematiza a função que dará o custo da obra:

$$f(x) = (2.000 - x) \cdot 312,00 + \sqrt{x^2 + 500^2} \cdot 640,00.$$

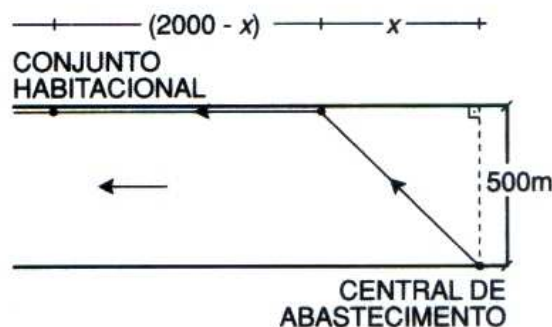


Figura 5.35

Nosso objetivo será calcular o mínimo absoluto dessa função para $0 \leq x \leq 2.000$.

Temos:

$$f'(x) = -312,00 + \frac{640,00x}{\sqrt{x^2 + 500^2}}$$

Resolvendo a equação

$$-312,00 + \frac{640,00x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} = 0,$$

obtemos que $x \cong 279,17$ m é um ponto crítico.

Temos:

$$f''(x) = \frac{500^2 \cdot 640,00}{(x^2 + 500^2)^{3/2}}$$

Como $f''(279,17) > 0$, temos que $x = 279,17$ é um ponto de mínimo relativo. Resta-nos saber se este mínimo é absoluto no intervalo $0 \leq x \leq 2.000$.

Como o único ponto crítico de f no intervalo aberto $(0, 2.000)$ é $x \cong 279,17$, este ponto é mínimo absoluto neste intervalo. Como $f(0) > f(279,17)$ e $f(2.000) > f(279,17)$, concluímos que a obra poderá ser realizada com o menor custo possível se a canalização de água alcançar o outro lado do rio 279,17 m abaixo da central de abastecimento.

- (3) Um galpão deve ser construído tendo uma área retangular de 12.100 m^2 . A prefeitura exige que exista um espaço livre de 25 m na frente, 20 m atrás e 12 m em cada lado. Encontre as dimensões do lote que tenha a área mínima na qual possa ser construído este galpão.

Solução: A Figura 5.36 ajuda a definir a função que vamos minimizar.

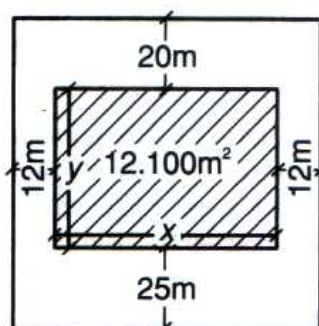


Figura 5.36

Sabemos que $A = 12.100 \text{ m}^2 = x \cdot y$.

(1)

A função que definirá a área do lote é

$$\begin{aligned} S &= (x + 12 + 12)(y + 25 + 20) \\ &= (x + 24)(y + 45). \end{aligned} \quad (2)$$

De (1), obtemos que $y = \frac{12.100}{x}$. Substituindo em (2), vem

$$S(x) = (x + 24)\left(\frac{12.100}{x} + 45\right).$$

Esta é a função que queremos minimizar.

Temos:

$$S'(x) = \frac{45x^2 - 290.400}{x^2}.$$

Resolvendo a equação $\frac{45x^2 - 290.400}{x^2} = 0$, obtemos que $x = \frac{44\sqrt{30}}{3}$ é um ponto crítico. (x é uma medida e, portanto, consideramos só o valor positivo.)

Temos que $S''(x) = \frac{580.800}{x^3}$ e, portanto, $S''\left(\frac{44\sqrt{30}}{3}\right) > 0$. Logo $x = \frac{44\sqrt{30}}{3}$ é um ponto de mínimo. Fazendo $x = \frac{44\sqrt{30}}{3} \cong 80,33$ m, obtemos que

$$y = \frac{12.100}{x} = \frac{12.100}{44\sqrt{30}/3} \cong 150,62 \text{ m,}$$

e, então, a área mínima é obtida quando as dimensões do lote forem aproximadamente $(80,33 + 24)$ m \cdot $(150,62 + 45)$ m.

- (4) Uma caixa sem tampa, de base quadrada, deve ser construída de forma que o seu volume seja 2.500 m^3 . O material da base vai custar R\$ 1.200,00 por m^2 e o material dos lados R\$ 980,00 por m^2 . Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.

Solução:

Observando a Figura 5.37, escrevemos a função que dá o custo do material:

$$C = x^2 \cdot 1.200,00 + 4xy \cdot 980,00. \quad (1)$$

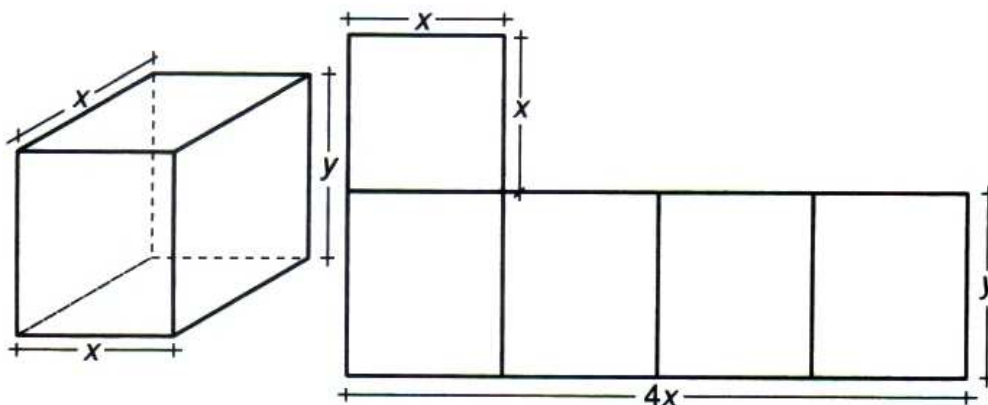


Figura 5.37

Como $V = x^2y = 2.500 \text{ cm}^3$, temos que a dimensão y pode ser escrita como $y = 2.500/x^2$.

Substituindo esse resultado em (1), obtemos

$$C(x) = 1.200,00 \cdot x^2 + 9.800.000,00/x,$$

que é a função que queremos minimizar.

Temos:

$$C'(x) = \frac{2.400,00x^3 - 9.800.000,00}{x^2}.$$

Resolvendo a equação $\frac{2.400,00x^3 - 9.800.000,00}{x^2} = 0$, encontramos

$$x = 5 \sqrt[3]{\frac{98}{3}} \cong 15,983 \text{ m, que é o ponto crítico que nos interessa.}$$

De fato, para $x \cong 15,983$ vamos ter um ponto de mínimo, já que $C''(15,983) > 0$.

Portanto, as dimensões da caixa de modo a obter o menor custo possível são $x \cong 15,983 \text{ m}$ e $y \cong 9,785 \text{ m}$.

(5) Supor que o custo total $C(q)$ de produção q toneladas de um produto, em milhares de reais, é dado por

$$C(q) = 0,03q^3 - 1,8q^2 + 39q$$

Supondo que a empresa possa vender tudo o que produz, determinar o lucro máximo que pode ser obtido, se cada tonelada do produto é vendida a um preço de 21 milhares de reais.

Solução:

A função receita total é dada pelo produto da quantidade q de toneladas vendidas pelo preço unitário de cada tonelada, ou seja,

$$R(q) = 21q.$$

O lucro obtido pela empresa é dado por

$$L(q) = 21q - R(q) - C(q).$$

Temos:

$$\begin{aligned} L(q) &= 21q - 0,03q^3 + 1,8q^2 - 39q \\ &= -0,03q^3 + 1,8q^2 - 18q \end{aligned}$$

Esta é a função que queremos maximizar. Derivando $L(q)$, vem

$$L'(q) = -0,09q^2 + 3,6q - 18.$$

Igualando a zero $L'(q)$, obtemos $q_1 \cong 34,14$ e $q_2 \cong 5,86$, que são os pontos críticos.

Calculando a derivada segunda de L , vem

$$L''(q) = -0,18q + 3,6$$

e, portanto,

$$L''(34,14) < 0 \text{ e } L''(5,86) > 0$$

Logo, $q_1 = 34,14$ é o ponto de máximo.

O lucro máximo que pode ser obtido é $L(34,14) \cong 289,705$ milhares de reais.

A Figura 5.38 ilustra esse exemplo.

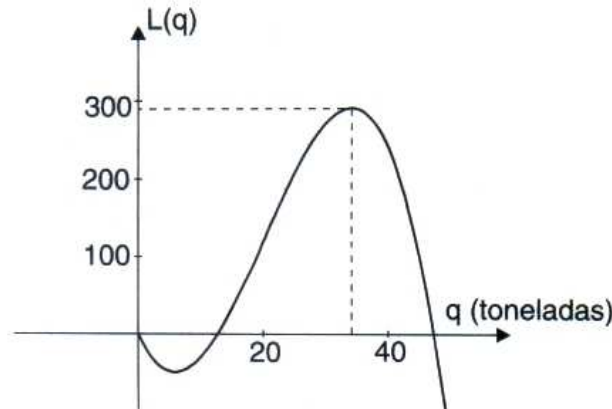


Figura 5.38

- (6) A receita total e o custo total com a produção e a comercialização de um produto são dados pelas curvas R e C da Figura 5.39. Determinar o nível de produção que maximiza o lucro.

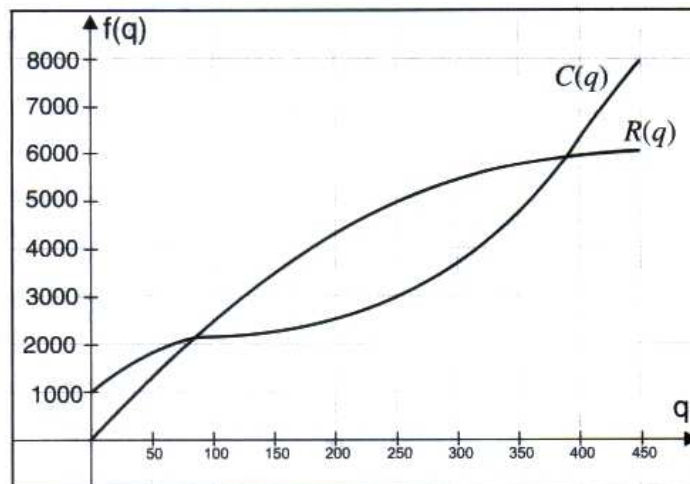


Figura 5.39

Solução: O lucro L é dado pela diferença entre a receita e o custo, ou seja,

$$L = R - C$$

Observando os gráficos de R e C , podemos verificar que o nível de produção que maximiza o lucro é aproximadamente $q = 250$.

O lucro máximo é:

$$\begin{aligned} L(250) &= R(250) - C(250) \\ &= 5.000 - 3.000 \\ &= 2.000 \end{aligned}$$

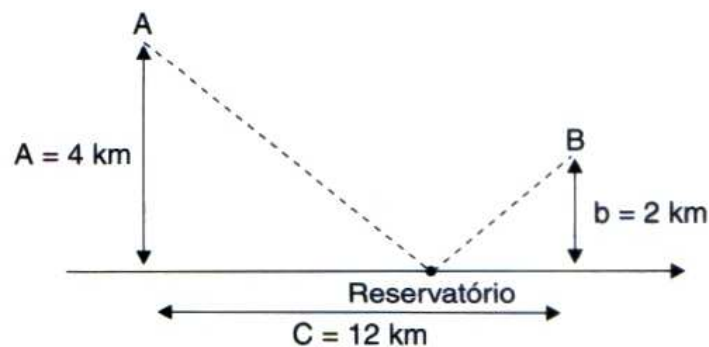
É interessante observar que a análise gráfica nos permite estimar qual o intervalo em que pode variar o nível de produção para que a empresa tenha lucro. Se a produção deve ocorrer em lotes de 50 unidades, esse intervalo é de $q = 100$ até $q = 350$ unidades.

Também é interessante observar que no nível de produção correspondente ao lucro máximo as curvas R e C tem tangentes paralelas. Isso equivale a dizer que $R' = C'$, isto é, a receita marginal é igual ao custo marginal. Como $L' = R' - C'$, temos $L' = 0$ nesse ponto, ou seja, $q = 250$ é o ponto crítico de L .

Assim, esse exemplo ilustra como as análises gráfica e analítica conduzem ao mesmo resultado. Em geral, a utilização de uma ou outra depende das informações disponíveis.

5.12 Exercícios

- Um fio de comprimento l é cortado em dois pedaços. Com um deles se fará um círculo e com o outro, um quadrado.
 - Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pelas figuras seja mínima?
 - Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das áreas compreendidas seja máxima?
- Determinar o ponto P situado sobre o gráfico da hipérbole $xy = 1$, que está mais próximo da origem.
- Um fazendeiro tem 200 bois, cada um pesando 300 kg. Até agora ele gastou R\$ 380.000,00 para criar os bois e continuará gastando R\$ 2,00 por dia para manter um boi. Os bois aumentam de peso a uma razão de 1,5 kg por dia. Seu preço de venda, hoje, é de R\$ 18,00 o quilo, mas o preço cai 5 centavos por dia. Quantos dias deveria o fazendeiro aguardar para maximizar seu lucro?
- Achar dois números positivos cuja soma seja 70 e cujo produto seja o maior possível.
- Usando uma folha quadrada de cartolina, de lado a , deseja-se construir uma caixa sem tampa, cortando em seus cantos quadrados iguais e dobrando convenientemente a parte restante. Determinar o lado dos quadrados que devem ser cortados de modo que o volume da caixa seja o maior possível.
- Determinar as dimensões de uma lata cilíndrica, com tampa, com volume V , de forma que a sua área total seja mínima.
- Duas indústrias A e B necessitam de água potável. A figura a seguir esquematiza a posição das indústrias, bem como a posição de um encanamento retilíneo l , já existente. Em que ponto do encanamento deve ser instalado um reservatório de modo que a metragem de cano a ser utilizada seja mínima?

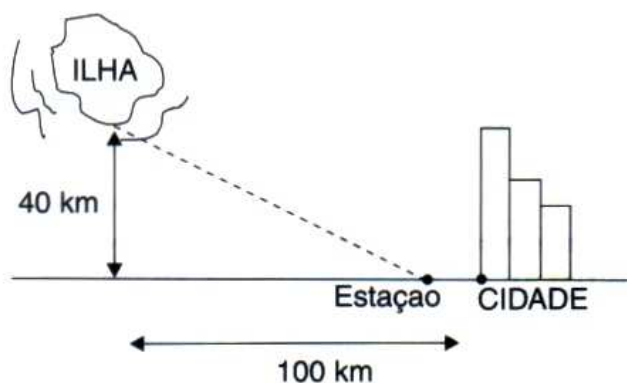


- O custo e a receita total com a produção e comercialização de um produto são dados por:

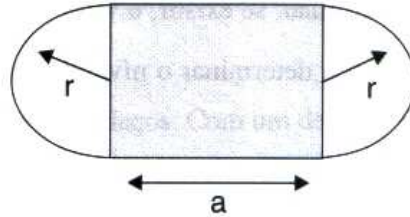
$$C(q) = 600 + 2,2q$$

$$R(q) = 10q - 0,006q^2$$
 sendo $0 \leq q \leq 900$.
 - Encontrar a quantidade q que maximiza o lucro com a venda desse produto.
 - Qual o nível de produção que minimiza o lucro?
 - Qual o nível de produção correspondente ao prejuízo máximo?
- O gráfico da função $C(q) = Kq^{1/\alpha} + F$, $q \in [q_0, q_1]$, sendo K , α e F constantes positivas, é denominado curva de custos a curto prazo de Cobb-Douglas. Essa curva é bastante utilizada para representar os custos de uma empresa com a produção de um produto.
 - Dar o significado da constante F .
 - Verificar que, quando $\alpha > 1$, a curva é côncava para baixo e interpretar esse resultado do ponto de vista da Economia.

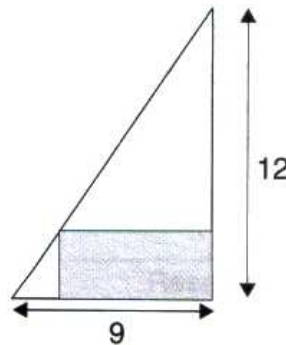
- (c) Supor $K = 2$, $\alpha = 3$ e $F = 8$ e determinar, se existir, o valor de q que fornece o custo médio mínimo.
- (d) Usando os mesmos valores do item (c), determinar o nível de produção que minimiza o custo marginal, no intervalo $125 \leq q \leq 125.000$.
10. Qual é o retângulo de perímetro máximo inscrito no círculo de raio 12 cm?
11. Traçar uma tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 2$ de modo que a área do triângulo que ela forma com os eixos coordenados positivos seja mínima. Obter as coordenadas do ponto de tangência e a área mínima.
12. Mostrar que o volume do maior cilindro reto que pode ser inscrito num cone reto é $4/9$ do volume do cone.
13. Um cone reto é cortado por um plano paralelo à sua base. A que distância da base deve ser feito esse corte, para que o cone reto de base na secção determinada, e de vértice no centro da base do cone dado tenha volume máximo?
14. Determinar o ponto A da curva $y = x^2 + x$ que se encontra mais próximo de $(7, 0)$. Mostrar que a reta que passa por $(7, 0)$ e por A é normal à curva dada em A .
15. Uma folha de papel contém 375 cm^2 de matéria impressa, com margem superior de 3,5 cm, margem inferior de 2 cm, margem lateral direita de 2 cm e margem lateral esquerda de 2,5 cm. Determinar quais devem ser as dimensões da folha para que haja o máximo de economia de papel.
16. Uma janela tem a forma de um retângulo encimado por um semicírculo. Achar as dimensões de modo que o perímetro seja 3,2 m e a área a maior possível.
17. Um canhão, situado no solo, é posto sob um ângulo de inclinação α . Seja l o alcance do canhão, dado por $l = \frac{2v^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$, onde v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo?
18. Uma agência de turismo está organizando um serviço de barcas, de uma ilha situada a 40 km de uma costa quase reta, para uma cidade que dista 100 km, como mostra a figura a seguir. Se a barca tem uma velocidade de 18 km por hora e os carros têm uma velocidade média de 50 km/h, onde deverá estar situada a estação das barcas a fim de tornar a viagem a mais rápida possível?



19. Uma cerca de 1 m de altura está situada a uma distância de 1 m da parede lateral de um galpão. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apóiam na parede e no chão do lado de fora da cerca?
20. Seja s uma reta que passa pelo ponto $(4, 3)$ formando um triângulo com os eixos coordenados positivos. Qual a equação de s para que a área desse triângulo seja mínima?
21. Uma pista de atletismo com comprimento total de 400 m consiste de 2 semicírculos e dois segmentos retos, conforme figura a seguir. Determinar as dimensões da pista, de tal forma que a área retangular, demarcada na figura, seja máxima.



22. Um cilindro circular reto está inscrito num cone circular reto de altura $H = 6$ m e raio da base $R = 3,5$ m. Determinar a altura e o raio da base do cilindro de volume máximo.
23. Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo de produção é dado por $C = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 60$ e o valor obtido na venda é dado por $R = 60x - 12x^2$, determinar o número ótimo de unidades mensais que maximiza o lucro $L = R - C$.
24. Um cilindro reto é inscrito numa esfera de raio R . Determinar esse cilindro, de forma que seu volume seja máximo.
25. Um fazendeiro deve cercar dois pastos retangulares, de dimensões a e b , com um lado comum a . Se cada pasto deve medir 400 m^2 de área, determinar as dimensões a e b , de forma que o comprimento da cerca seja mínimo.
26. Um fabricante, ao comprar caixas de embalagens retangulares exige que o comprimento de cada caixa seja 2 m e o volume 3 m^3 . Para gastar a menor quantidade de material possível na fabricação de caixas, quais devem ser suas dimensões.
27. Um retângulo é inscrito num triângulo retângulo de catetos que mede 9 cm e 12 cm. Encontrar as dimensões do retângulo com maior área, supondo que sua posição é dada na figura a seguir.



5.13 Regras de L'Hôpital

Nesta seção apresentaremos um método geral para levantar indeterminações do tipo $0/0$ ou ∞/∞ . Esse método é dado pelas regras de L'Hospital, cuja demonstração necessita da seguinte proposição.

5.13.1 Proposição (Fórmula de Cauchy) Se f e g são duas funções contínuas em $[a, b]$, deriváveis em (a, b) e se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então existe um número $z \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Prova: Provemos primeiro que $g(b) - g(a) \neq 0$. Como g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , pelo teorema do valor médio, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad (1)$$

Como, por hipótese, $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, temos $g'(c) \neq 0$ e, assim, pela igualdade (1), $g(b) - g(a) \neq 0$.

Consideremos a função

$$h(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] [g(x) - g(a)].$$

A função h satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle em $[a, b]$, pois:

- (i) Como f e g são contínuas em $[a, b]$, h é contínua em $[a, b]$;
- (ii) Como f e g são deriváveis em (a, b) , h é derivável em (a, b) ;
- (iii) $h(a) = h(b) = 0$.

Portanto, existe $z \in (a, b)$ tal que $h'(z) = 0$.

Como $h'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] g'(x)$, temos:

$$f'(z) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] \cdot g'(z) = 0. \quad (2)$$

Mas $g'(z) \neq 0$. Logo, podemos escrever (2) na forma:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

5.13.2 Proposição (Regras de L'Hospital) Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto I , exceto, possivelmente, em um ponto $a \in I$. Suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em I .

- (i) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$;
- (ii) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Prova do item (i): Suponhamos que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ tome a forma indeterminada $0/0$ e que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Queremos provar que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Consideremos as duas funções F e G tais que:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a \end{cases} \quad e \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = F(a)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a} G(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 = G(a).$$

Assim, as funções F e G são contínuas no ponto a e, portanto, em todo intervalo I .

Seja $x \in I$, $x \neq a$. Como para todo $x \neq a$ em I , f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$, as funções F e G satisfazem as hipóteses da fórmula de Cauchy no intervalo $[x, a]$ ou $[a, x]$. Segue que existe um número z entre a e x tal que

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}.$$

Como $F(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$, $F(a) = G(a) = 0$, $F'(z) = f'(z)$ e $G'(z) = g'(z)$, vem:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Como z está entre a e x , quando $x \rightarrow a$ temos que $z \rightarrow a$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = L.$$

Observamos que se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, a regra de L'Hospital continua válida, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty.$$

Ela também é válida para os limites laterais e para os limites no infinito.

A seguir apresentaremos vários exemplos, ilustrando como muitos limites que tomam formas indeterminadas podem ser resolvidos com o auxílio da regra de L'Hospital.

5.13.3 Exemplos

(i) Determinar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - 1}$.

Quando $x \rightarrow 0$, o quociente $\frac{2x}{e^x - 1}$ toma a forma indeterminada $0/0$. Aplicando a regra L'Hospital, vem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^0} = 2.$$

(ii) Determinar $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

O limite toma a forma indeterminada $0/0$. Aplicando a regra de L'Hospital, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{2x - 3} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2 - 3} = 5.$$

(iii) Determinar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x - x}{e^x + e^{-x} - 2}$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $0/0$. Aplicando a regra de L'Hospital uma vez, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x - x}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}}.$$

Como o último limite ainda toma a forma indeterminada $0/0$, podemos aplicar novamente a regra de L'Hospital. Temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{e^x + e^{-x}} = \frac{-0}{2} = 0.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{e^x + e^{-x} - 2} = 0.$$

$$(iv) \text{ Determinar } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^3 + 4x}.$$

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo ∞/∞ . Aplicando a regra de L'Hospital sucessivas vezes, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^3 + 4x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2 + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

$$(v) \text{ Determinar } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 9)^{1/x}.$$

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo ∞^0 . Vamos transformá-la numa indeterminação do tipo ∞/∞ com o auxílio de logaritmos e em seguida aplicar a regra de L'Hospital.

$$\text{Seja } L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 9)^{1/x}. \text{ Então, } \ln L = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 9)^{1/x} \right].$$

Aplicando a Proposição 3.5.2(g) e as propriedades de logaritmo, vem:

$$\begin{aligned} \ln L &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln (3x + 9)^{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln (3x + 9) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln (3x + 9)}{x}. \end{aligned}$$

Temos agora uma indeterminação do tipo ∞/∞ . Aplicando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3/(3x + 9)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{3x + 9} = 0.$$

Como $\ln L = 0$, temos $L = 1$ e, dessa forma,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 9)^{1/x} = 1.$$

$$(iv) \text{ Determinar } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \operatorname{sen} 1/x.$$

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Reescrevendo o limite dado na forma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \operatorname{sen} 1/x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/x}{1/x},$$

temos uma indeterminação do tipo $0/0$.

Aplicando a regra de L'Hospital, vem:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} 1/x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/x}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos 1/x \\ &= \cos 0 \\ &= 1.\end{aligned}$$

(vii) Determinar $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{\cos x - 1} \right)$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Reescrevendo o limite dado, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{\cos x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 - x^2 - x}{(x^2 + x)(\cos x - 1)}.$$

Temos, então, uma indeterminação do tipo $0/0$. Aplicando a regra de L'Hospital, vem:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{\cos x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 - x^2 - x}{(x^2 + x)(\cos x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x - 2x - 1}{(x^2 + x) \cdot (-\operatorname{sen} x) + (\cos x - 1)(2x + 1)} \\ &= \frac{-1}{0} \\ &= \infty.\end{aligned}$$

(viii) Determinar $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 + x)^x$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo 0^0 . Com o auxílio de logaritmos, vamos transformá-la numa indeterminação da forma ∞/∞ .

Seja $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 + x)^x$. Então,

$$\begin{aligned}\ln L &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 + x)^x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln (2x^2 + x)^x] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln (2x^2 + x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln (2x^2 + x)}{1/x}.\end{aligned}$$

Temos agora uma indeterminação do tipo ∞/∞ . Aplicando a regra de L'Hospital, vem:

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x + 1}{2x^2 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{4x^3 + x^2}{2x^2 + x} \right).\end{aligned}$$

Aplicando novamente a regra de L'Hospital, obtemos:

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{12x^2 + 2x}{4x + 1} \right) \\ &= \frac{0}{1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como $\ln L = 0$, temos $L = 1$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 + x)^x = 1.$$

(ix) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo 1^∞ . Usando logaritmos, vamos transformá-la numa indeterminação da forma $0/0$.

Seja $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x$. Então,

$$\begin{aligned}\ln L &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2x} \right)}{1/x}.\end{aligned}$$

Temos agora uma indeterminação do tipo $0/0$. Aplicando a regra de L'Hospital, obtemos:

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1}{2x^2} / \left(1 + \frac{1}{2x} \right)}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/2}{1 + \frac{1}{2x}}\end{aligned}$$

$$= \frac{1/2}{1}$$

$$= 1/2.$$

Portanto, $\ln L = \frac{1}{2}$ e dessa forma $L = e^{1/2}$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = e^{1/2}.$$

5.14 Exercícios

Determinar os seguintes limites com auxílio das regras de L'Hospital.

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x}{x^3 + 7x^2 + 5x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 4x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 - 2x + 3x^2 - x^3}{x^4 - 3x^3 - x + 3}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 7}{x^3 + 7x - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - 5x^3}{2 - 2x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5 - 6}{4x^2 - 2x + 4}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - x + x^2}{2 - x - 2x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{99}}{e^x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - \cos x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(e^{1/x} - 1)$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{(x - \pi/2)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{2^x - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2x - 4} - \frac{1}{x - 2}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x}{x + 1}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{x}{\cotg x} - \frac{\pi}{2 \cos x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tgh} x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{sen} x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cotg x$
- $\lim_{x \rightarrow 1} [\ln x \ln (x - 1)]$

$$27. \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{2(1 - \sqrt{x})} - \frac{1}{3(1 - \sqrt[3]{x})} \right]$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2/3}}{(x^2 + 2)^{1/3}}$$

$$35. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1)^{2/x}$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} ax)}{\ln(\operatorname{sen} x)}$$

$$39. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$$

$$41. \lim_{x \rightarrow \pi/4} (1 - \operatorname{tg} x) \operatorname{sec} 2x$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{3}{x^4 + \ln x}}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \pi/x$$

$$34. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{senh} x}{x}$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right)$$

$$40. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{x^2 + \ln x}}$$

$$42. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}$$

5.15 Fórmula de Taylor

A Fórmula de Taylor consiste num método de aproximação de uma função por um polinômio, com um erro possível de ser estimado.

5.15.1 Definição Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas até ordem n num ponto c do intervalo I . O *polinômio de Taylor* de ordem n de f no ponto c , que denotamos por $P_n(x)$, é dado por:

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Observamos que no ponto $x = c$, $P_n(c) = f(c)$.

5.15.2 Exemplo Determinar o polinômio de Taylor de ordem 4 da função $f(x) = e^x$ no ponto $c = 0$.

Temos, $f(x) = f'(x) = \dots = f^{(iv)}(x) = e^x$ e assim

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(iv)}(0) = e^0 = 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 1 + 1(x - 0) + \frac{1}{2!}(x - 0)^2 + \frac{1}{3!}(x - 0)^3 + \frac{1}{4!}(x - 0)^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}, \end{aligned}$$

é o polinômio de Taylor de grau 4 da função $f(x) = e^x$ no ponto $c = 0$.

Dado o polinômio de Taylor de grau n de uma função $f(x)$, denotamos por $R_n(x)$ a diferença entre $f(x)$ e $P_n(x)$, isto é, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ (ver Figura 5.40).

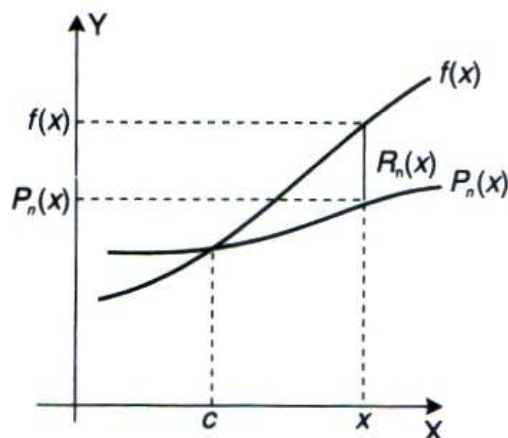


Figura 5.40

Temos, então, $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, ou mais explicitamente,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x). \quad (1)$$

Para os valores de x nos quais $R_n(x)$ é “pequeno”, o polinômio $P_n(x)$ dá uma boa aproximação de $f(x)$. Por isso, $R_n(x)$ chama-se *resto*. O problema, agora, consiste em determinar uma fórmula para $R_n(x)$ de tal modo que ele possa ser avaliado. Temos a seguinte proposição.

5.15.3 Proposição (Fórmula de Taylor) Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo $[a, b]$.

Suponhamos que as derivadas $f', f'', \dots, f^{(n)}$ existam e sejam contínuas em $[a, b]$ e que $f^{(n+1)}$ exista em (a, b) .

Seja c um ponto qualquer fixado em $[a, b]$. Então, para cada $x \in [a, b]$, $x \neq c$, existe um ponto z entre c e x tal que:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}. \quad (2)$$

Quando $c = 0$, a Fórmula de Taylor fica

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

e recebe o nome de Fórmula de Mac-Laurin.

Prova: Faremos a demonstração supondo $x > c$. Para $x < c$, o procedimento é análogo.

Sejam $P_n(t)$ o polinômio de Taylor de grau n de f no ponto c e $R_n(t)$ o resto correspondente. Então, $f(t) = P_n(t) + R_n(t)$, para qualquer $t \in [a, b]$.

Portanto, no ponto x , temos:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x).$$

Para provar (2), devemos mostrar que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}, \text{ onde } z \text{ é um número entre } c \text{ e } x.$$

Para isso, vamos considerar a seguinte função auxiliar:

$$g: [c, x] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots \\ \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - R_n(x) \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}}.$$

Pelas propriedades das funções contínuas, segue que g é contínua em $[c, x]$. Pelas propriedades das funções deriváveis, segue que g é derivável em (c, x) . Além disso, podemos verificar que $g(c) = g(x) = 0$.

Logo, g satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle em $[c, x]$ e, portanto, existe um ponto z , entre c e x , tal que $g'(z) = 0$.

Derivando a função g com o auxílio das regras de derivação e simplificando, obtemos:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1},$$

e, conseqüentemente, a fórmula (2) fica provada.

Observando as fórmulas (1) e (2), vemos que, na Fórmula de Taylor apresentada, o resto $R_n(x)$ é dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}.$$

Essa forma para o resto é chamada *Forma de Lagrange do Resto* e a fórmula (2) é dita *Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange*. Existem outras formas para o resto, como a forma integral, que não abordaremos aqui.

5.15.4 Exemplos

- (i) Determinar os polinômios de Taylor de grau 2 e de grau 4 da função $f(x) = \cos x$, no ponto $c = 0$. Esboçar o gráfico de f e dos polinômios encontrados.

Usando o polinômio $P_4(x)$ para determinar um valor aproximado para $\cos \frac{\pi}{6}$, o que se pode afirmar sobre o erro cometido?

Solução: Para determinar os polinômios pedidos, necessitamos do valor de f e de suas derivadas até ordem 4, no ponto $c = 0$.

Temos:

$$f(x) = \cos x, \quad f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$$

$$f''(x) = -\cos x, \quad f''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x, \quad f'''(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$f^{iv}(x) = \cos x, \quad f^{iv}(0) = \cos 0 = 1.$$

O polinômio de Taylor de grau 2, no ponto c , é dado por

$$P_2(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2.$$

Como no nosso caso $c = 0$, vem:

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\
 &= 1 + 0 \cdot x + \frac{(-1)}{2!}x^2 \\
 &= 1 - \frac{x^2}{2}.
 \end{aligned}$$

O polinômio de Taylor de grau 4, no ponto c , é dado por

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(x)}{4!}x^4 \\
 &= 1 + 0 \cdot x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\
 &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.
 \end{aligned}$$

A Figura 5.41 mostra o gráfico de $f(x)$, $P_2(x)$ e $P_4(x)$. Comparando esses gráficos, podemos observar que o gráfico de $P_4(x)$ está mais próximo do gráfico de $f(x)$. Se aumentarmos n , o gráfico de $P_n(x)$ se aproxima cada vez mais do gráfico de $f(x)$.

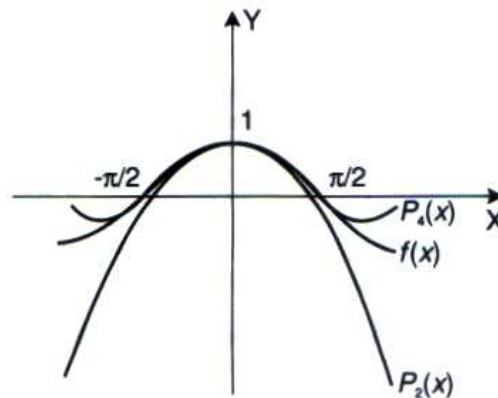


Figura 5.41

Usando o polinômio $P_4(x)$ para determinar um valor aproximado de $\cos \frac{\pi}{6}$, pela Fórmula de Taylor, temos:

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{\pi}{6} &= P_4(\pi/6) + R_4(\pi/6) \\
 &= 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{6} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{6} \right)^4 + \frac{f^{(5)}(z)}{5!} \left(\frac{\pi}{6} \right)^5,
 \end{aligned}$$

onde z é um número entre 0 e $\pi/6$.

Como $f^{(v)}(x) = -\text{sen } x$ e $|\text{sen } x| \leq 1$ para qualquer valor de x , podemos afirmar que o resto $R_4\left(\frac{\pi}{6}\right)$ satisfaz

$$\begin{aligned}
 |R_4(\pi/6)| &= \frac{|\text{sen } z|}{5!} \left(\frac{\pi}{6} \right)^5 \leq \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{6} \right)^5 \\
 &\cong 0,000327.
 \end{aligned}$$

Logo, quando calculamos o valor de $\cos \frac{\pi}{6}$ pelo polinômio $P_4(x)$, temos:

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{6} &= 1 - \frac{(\pi/6)^2}{2!} + \frac{(\pi/6)^4}{24} \\ &\cong 0,86606\end{aligned}$$

e podemos afirmar que o erro cometido, em módulo, é menor ou igual a 0,000327.

- (iii) Determinar o polinômio de Taylor de grau 6 da função $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ no ponto $c = \frac{\pi}{4}$. Usar este polinômio para determinar um valor aproximado para $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$. Fazer uma estimativa para o erro.

Solução: Devemos calcular o valor da função e suas derivadas até ordem 6, no ponto $c = \frac{\pi}{4}$.

Temos:

$$\begin{aligned}f(x) &= \operatorname{sen} 2x, & f(\pi/4) &= \operatorname{sen} \pi/2 = 1 \\ f'(x) &= 2 \cos 2x, & f'(\pi/4) &= 2 \cos \pi/2 = 0 \\ f''(x) &= -4 \operatorname{sen} 2x, & f''(\pi/4) &= -4 \\ f'''(x) &= -8 \cos 2x, & f'''(\pi/4) &= 0 \\ f^{iv}(x) &= 16 \operatorname{sen} 2x, & f^{iv}(\pi/4) &= 16 \\ f^v(x) &= 32 \cos 2x, & f^v(\pi/4) &= 0 \\ f^{vi}(x) &= -64 \operatorname{sen} 2x, & f^{vi}(\pi/4) &= -64\end{aligned}$$

O polinômio de Taylor de grau 6, no ponto $c = \pi/4$, é dado por:

$$\begin{aligned}P_6(x) &= f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f'(\pi/4)}{1!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''(\pi/4)}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \dots + \frac{f^{(vi)}(\pi/4)}{6!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6 \\ &= 1 + 0 + \frac{(-4)}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + 0 + \frac{16}{4!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + 0 + \frac{(-64)}{6!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6 \\ &= 1 - \frac{2^2}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2^4}{4!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{2^6}{6!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6.\end{aligned}$$

Usando o polinômio $P_6(x)$ para determinar $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$, obtemos pela Fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} &= \operatorname{sen} (2 \cdot \pi/6) = f(\pi/6) = P_6(\pi/6) + R_6(\pi/6) \\ &= 1 - \frac{2^2}{2!} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2^4}{4!} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{2^6}{6!} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^6 + \frac{f^{(vii)}(z)}{7!} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^7 \\ &= 0,86602526 + \frac{f^{(vii)}(z)}{7!} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^7.\end{aligned}$$

Como $f^{(vii)}(x) = -128 \cos 2x$ e $|\cos 2x| \leq 1$ para todo x , o resto $R_6\left(\frac{\pi}{6}\right)$ satisfaz

$$|R_6(\pi/6)| \leq \left| \frac{128}{7!} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^7 \right| \cong 2,1407 \cdot 10^{-6}.$$

Logo, usando o polinômio $P_6(x)$ obtemos $\sin \frac{\pi}{3} = 0,86602526$ e o erro cometido, em módulo, será inferior a $2,1407 \cdot 10^{-6}$.

Usando a Fórmula de Taylor, pode-se demonstrar a seguinte proposição que nos dá mais um critério para determinação de máximos e mínimos de uma função.

5.15.5 Proposição Seja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável n vezes e cujas derivadas $f', f'', \dots, f^{(n)}$ são contínuas em (a, b) . Seja $c \in (a, b)$ um ponto crítico de f tal que $f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ e $f^{(n)}(c) \neq 0$. Então,

- (i) se n é par e $f^{(n)}(c) \leq 0$, f tem um máximo relativo em c ;
- (ii) se n é par e $f^{(n)}(c) \geq 0$, f tem um mínimo relativo em c ;
- (iii) se n é ímpar, c é um ponto de inflexão.

5.15.6 Exemplos

- (i) Determinar os extremos da função $f(x) = (x - 2)^6$.

Temos $f'(x) = 6(x - 2)^5$. Fazendo $f'(x) = 0$, obtemos $x = 2$, que é o único ponto crítico de f .

Calculando as derivadas seguintes no ponto $x = 2$, temos:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 30(x - 2)^4, & f''(2) &= 0 \\ f'''(x) &= 120(x - 2)^3, & f'''(2) &= 0 \\ f^{iv}(x) &= 360(x - 2)^2, & f^{iv}(2) &= 0 \\ f^{(v)}(x) &= 720(x - 2), & f^{(v)}(2) &= 0 \\ f^{(vi)}(x) &= 720, & f^{(vi)}(2) &= 720 \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, $x = 2$ é um ponto de mínimo relativo.

- (ii) Pesquisar máximos e mínimos da função $f(x) = x^5 - x^3$.

Fazendo $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 = 0$, obtemos os pontos críticos que são $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3/5}$ e $x_3 = -\sqrt{3/5}$. Calculando o valor das derivadas seguintes no ponto $x_1 = 0$, temos:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 20x^3 - 6x, & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= 60x^2 - 6, & f'''(0) &= -6 \neq 0 \end{aligned}$$

Como $f'''(0) \neq 0$, concluímos que 0 é um ponto de inflexão.

No ponto $x_2 = \sqrt{3/5}$, temos:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 20x^3 - 6x, & f''(\sqrt{3/5}) &= 20(3/5)^{3/2} - 6\sqrt{3/5} \\ & & &= \sqrt{3/5} \left(20 \cdot \frac{3}{5} - 6 \right) \\ & & &= 6\sqrt{3/5} > 0. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $x_1 = \sqrt{3/5}$ é um ponto de mínimo relativo.

No ponto $x_3 = -\sqrt{3/5}$, temos:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 20x^3 - 6x, f''(-\sqrt{3/5}) = -20\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} - 6(-\sqrt{3/5}) \\ &= -6\sqrt{3/5} < 0. \end{aligned}$$

Logo, o ponto $x_3 = -\sqrt{3/5}$ é um ponto de máximo relativo.

5.16 Exercícios

- Determinar o polinômio de Taylor de ordem n , no ponto c dado, das seguintes funções:
 - $f(x) = e^{x/2}; c = 0$ e $1; n = 5$.
 - $f(x) = e^{-x}; c = -1$ e $2; n = 4$.
 - $f(x) = \ln(1 - x); c = 0$ e $1/2; n = 4$.
 - $f(x) = \operatorname{sen} x; c = \pi/2; n = 8$.
 - $f(x) = \cos 2x; c = 0$ e $\pi/2; n = 6$.
 - $f(x) = \frac{1}{1+x}; c = 0$ e $1; n = 4$.
- Encontrar o polinômio de Taylor de grau n no ponto c e escrever a função que define o resto na forma de Lagrange, das seguintes funções:
 - $y = \cosh x; n = 4; c = 0$.
 - $y = \operatorname{tg} x; n = 3; c = \pi$.
 - $y = \sqrt{x}; n = 3; c = 1$.
 - $y = e^{-x^2}; n = 4; c = 0$.
- Usando o resultado encontrado no exercício 1, item (c), com $c = 0$, determinar um valor aproximado para $\ln 0,5$. Fazer uma estimativa para o erro.
- Determinar o polinômio de Taylor de grau 6 da função $f(x) = 1 + \cos x$ no ponto $c = \pi$. Usar este polinômio para determinar um valor aproximado para $\cos(5\pi/6)$. Fazer uma estimativa para o erro.
- Demonstrar que a diferença entre $\operatorname{sen}(a + h)$ e $\operatorname{sen} a + h \cos a$ é menor ou igual a $\frac{1}{2}h^2$.
- Um fio delgado, pela ação da gravidade, assume a forma da catenária $y = a \cosh \frac{x}{a}$. Demonstrar que para valores pequenos de $|x|$, a forma que o fio toma pode ser representada, aproximadamente, pela parábola $y = a + \frac{x^2}{2a}$.
- Pesquisar máximos e mínimos das seguintes funções:
 - $f(x) = 2x - 4$.
 - $f(x) = 4 - 5x + 6x^2$.
 - $f(x) = (x - 4)^{10}$.
 - $f(x) = 4(x + 2)^7$.
 - $f(x) = x^6 - 2x^4$.
 - $f(x) = x^5 - \frac{125}{3}x^3$.

6

Introdução à Integração

Neste capítulo introduziremos a integral. Em primeiro lugar, trataremos da integração indefinida, que consiste no processo inverso da derivação. Em seguida, veremos a integral definida – que é a integral propriamente dita – e sua relação com o problema de determinar a área de uma figura plana, depois o Teorema Fundamental do Cálculo, que é peça chave de todo Cálculo Diferencial e Integral, pois estabelece a ligação entre as operações de derivação e integração. Finalmente, estenderemos o conceito de integral para funções contínuas por partes e abordaremos as integrais impróprias.

6.1 Integral Indefinida

6.1.1 Definição Uma função $F(x)$ é chamada uma primitiva da função $f(x)$ em um intervalo I (ou simplesmente uma primitiva de $f(x)$), se, para todo $x \in I$, temos $F'(x) = f(x)$.

Observamos que, de acordo com nossa definição, as primitivas de uma função $f(x)$ estão sempre definidas sobre algum intervalo. Quando não explicitamos o intervalo e nos referimos a duas primitivas da mesma função f , entendemos que essas funções são primitivas de f no mesmo intervalo I .

6.1.2 Exemplos

(i) $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva da função $f(x) = x^2$, pois

$$F'(x) = 1/3 \cdot 3x^2 = x^2 = f(x).$$

(ii) As funções $G(x) = x^3/3 + 4$, $H(x) = 1/3(x^3 + 3)$ também são primitivas da função $f(x) = x^2$, pois $G'(x) = H'(x) = f(x)$.

(iii) A função $F(x) = 1/2 \text{ sen } 2x + c$, onde c é uma constante, é primitiva da função $f(x) = \cos 2x$.

(iv) A função $F(x) = 1/2x^2$ é uma primitiva da função $f(x) = -1/x^3$ em qualquer intervalo que não contém a origem, pois, para todo $x \neq 0$, temos $F'(x) = f(x)$.

Os exemplos anteriores nos mostram que uma mesma função $f(x)$ admite mais de uma primitiva. Temos as seguintes proposições.

6.1.3 Proposição Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, se c é uma constante qualquer, a função $G(x) = F(x) + c$ também é primitiva de $f(x)$.

Prova: Como $F(x)$ é primitiva de $f(x)$, temos que $F'(x) = f(x)$. Assim:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x),$$

o que prova que $G(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

6.1.4 Proposição Se $f'(x)$ se anula em todos os pontos de um intervalo I , então f é constante em I .

Prova: Sejam $x, y \in I, x < y$. Como f é derivável em I , f é contínua em $[x, y]$ e derivável em (x, y) . Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (x, y)$, tal que

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Como $f'(z) = 0$, vem que $f(y) - f(x) = 0$ ou $f(y) = f(x)$. Sendo x e y dois pontos quaisquer de I , concluímos que f é constante em I .

6.1.5 Proposição Se $F(x)$ e $G(x)$ são funções primitivas de $f(x)$ no intervalo I , então existe uma constante c tal que $G(x) - F(x) = c$, para todo $x \in I$.

Prova: Seja $H(x) = G(x) - F(x)$. Como F e G são primitivas de $f(x)$ no intervalo I , temos $F'(x) = G'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$. Assim:

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \text{ para todo } x \in I.$$

Pela Proposição 6.1.4, existe uma constante c , tal que $H(x) = c$, para todo $x \in I$. Logo, para todo $x \in I$, temos:

$$G(x) - F(x) = c.$$

Da Proposição 6.1.5, concluímos que, se $F(x)$ é uma particular primitiva de f , então toda primitiva de f é da forma

$$G(x) = F(x) + c,$$

onde c é uma constante. Assim, o problema de determinar as primitivas de f se resume em achar uma primitiva particular.

6.1.6 Exemplo Sabemos que $(\sin x)' = \cos x$. Assim, $F(x) = \sin x$ é uma primitiva da função $f(x) = \cos x$ e toda primitiva de $f(x) = \cos x$ é da forma

$$G(x) = \sin x + c,$$

para alguma constante c .

6.1.7 Definição Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + c$ é chamada *integral indefinida* da função $f(x)$ e é denotada por

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

De acordo com esta notação o símbolo \int é chamado *sinal de integração*, $f(x)$ *função integrando* e $f(x) dx$ *integrando*. O processo que permite achar a integral indefinida de uma função é chamado *integração*. O símbolo dx que aparece no integrando serve para identificar a variável de integração.

Da definição da integral indefinida, decorre que:

$$(i) \quad \int f(x) dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

$$(ii) \quad \int f(x) dx \text{ representa uma família de funções (a família de todas as primitivas da função integrando).}$$

A Figura 6.1 mostra uma família de primitivas da função integrando $f(x) = x^2 + 1$. Observamos que o valor da constante, para a figura apresentada assumiu os valores $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

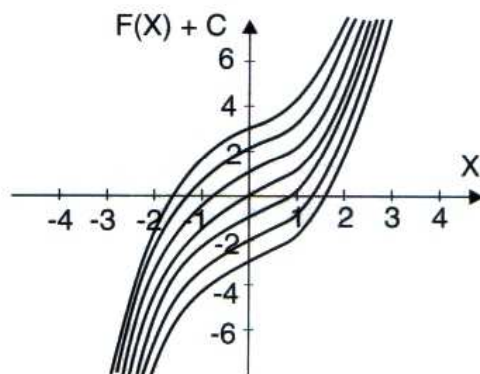


Figura 6.1

Propriedades da Integral Indefinida

6.1.8 Proposição Sejam $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ e K uma constante. Então:

- (i) $\int Kf(x) dx = K \int f(x) dx.$
- (ii) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$

Prova do item (i):

Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$. Então, $Kf(x)$ é uma primitiva de $Kf(x)$, pois $(KF(x))' = KF'(x) = Kf(x)$. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \int Kf(x) dx &= KF(x) + c = KF(x) + Kc_1 \\ &= K[F(x) + c_1] = K \int f(x) dx. \end{aligned}$$

Prova do item (ii):

Sejam $F(x)$ e $G(x)$ funções primitivas de $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. Então, $F(x) + G(x)$ é uma primitiva da função $(f(x) + g(x))$, pois $[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x)) dx &= [F(x) + G(x)] + c \\ &= [F(x) + G(x)] + c_1 + c_2, \text{ onde } c = c_1 + c_2 \\ &= [F(x) + c_1] + [G(x) + c_2] \\ &= \int f(x) dx + \int g(x) dx. \end{aligned}$$

O processo de integração exige muita intuição, pois conhecendo apenas a derivada de uma dada função nós queremos descobrir a função. Podemos obter uma tabela de integrais, chamadas imediatas, a partir das derivadas das funções elementares.

6.1.9 Exemplos

(i) Sabemos que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$. Então $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$.

(ii) Como $(-\cos \theta)' = \operatorname{sen} \theta$, então $\int \operatorname{sen} \theta \, d\theta = -\cos \theta + c$.

(iii) $\int e^x \, dx = e^x + c$, pois $(e^x)' = e^x$.

(iv) $\int x^{2/3} \, dx = \frac{3}{5} x^{5/3} + c$, pois $(3/5 x^{5/3})' = x^{2/3}$.

(v) $\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + c$, pois $(2\sqrt{t})' = 1/\sqrt{t}$.

6.1.10 Tabela de Integrais Imediatas

(1) $\int du = u + c$

(2) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

(3) $\int u^\alpha \, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ (α é constante $\neq -1$)

(4) $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

(5) $\int e^u \, du = e^u + c$

(6) $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + c$

(7) $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + c$

(8) $\int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + c$

(9) $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\operatorname{cotg} u + c$

(10) $\int \sec u \cdot \operatorname{tg} u \, du = \sec u + c$

(11) $\int \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cosec} u + c$

(12) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u + c$

(13) $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u + c$

(14) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arc} \operatorname{sec} u + c$

(15) $\int \operatorname{senh} u \, du = \operatorname{cosh} u + c$

(16) $\int \operatorname{cosh} u \, du = \operatorname{senh} u + c$

(17) $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tgh} u + c$

(18) $\int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\operatorname{cotgh} u + c$

(19) $\int \operatorname{sech} u \cdot \operatorname{tgh} u \, du = -\operatorname{sech} u + c$

(20) $\int \operatorname{cosech} u \cdot \operatorname{cotgh} u \, du = -\operatorname{cosech} u + c$

(21) $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arg} \operatorname{senh} u + c = \ln|u + \sqrt{u^2+1}| + c$

(22) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arg} \operatorname{cosh} u + c = \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + c$

$$(23) \int \frac{du}{1-u^2} = \begin{cases} \arg \operatorname{tgh} u + c, & \text{se } |u| < 1 \\ \arg \operatorname{cotgh} u + c, & \text{se } |u| > 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + c$$

$$(24) \int \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}} = -\arg \operatorname{sech} |u| + c$$

$$(25) \int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\arg \operatorname{cosech} |u| + c.$$

Usando as propriedades da integral indefinida e a tabela de integrais, podemos calcular a integral indefinida de algumas funções.

6.1.11 Exemplos Calcular as integrais indefinidas.

$$(i) \int (3x^2 + 5 + \sqrt{x}) dx.$$

Usando as propriedades da integral indefinida e a tabela de integrais, temos:

$$\begin{aligned} \int (3x^2 + 5 + \sqrt{x}) dx &= 3 \int x^2 dx + 5 \int dx + \int x^{1/2} dx \\ &= 3 \frac{x^3}{3} + 5x + \frac{x^{3/2}}{3/2} + c \\ &= x^3 + 5x + \frac{2}{3} x^{3/2} + c. \end{aligned}$$

$$(ii) \int (3 \sec x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{cosec}^2 x) dx.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \int (3 \sec x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{cosec}^2 x) dx &= 3 \int \sec x \operatorname{tg} x dx + \int \operatorname{cosec}^2 x dx \\ &= 3 \sec x - \cotg x + c. \end{aligned}$$

$$(iii) \int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec} x} dx.$$

Nesse caso, temos:

$$\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec} x} dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \sec x dx = \sec x + c.$$

$$(iv) \int (\sqrt[3]{x^2} + 1/3x) dx.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \int (\sqrt[3]{x^2} + 1/3x) dx &= \int \sqrt[3]{x^2} dx + \int 1/3x dx \\ &= \int x^{2/3} dx + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^{5/3}}{5/3} + \frac{1}{3} \ln|x| + c \\
 &= \frac{3}{5}x^{5/3} + \frac{1}{3} \ln|x| + c.
 \end{aligned}$$

$$(v) \int \frac{x^4 + 3x^{-1/2} + 4}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^4 + 3x^{-1/2} + 4}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \left(\frac{x^4}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3x^{-1/2}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} \right) dx \\
 &= \int (x^{11/3} + 3x^{-5/6} + 4x^{-1/3}) dx \\
 &= \int x^{11/3} dx + 3 \int x^{-5/6} dx + 4 \int x^{-1/3} dx \\
 &= \frac{x^{14/3}}{14/3} + 3 \cdot \frac{x^{1/6}}{1/6} + 4 \cdot \frac{x^{2/3}}{2/3} + c \\
 &= \frac{3}{14}x^{14/3} + 18x^{1/6} + 6x^{2/3} + c.
 \end{aligned}$$

$$(vi) \int \left(2 \cos x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
 \int \left(2 \cos x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int 2 \cos x dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \\
 &= \int 2 \cos x dx + \int x^{-1/2} dx \\
 &= 2 \operatorname{sen} x + \frac{x^{1/2}}{1/2} + c \\
 &= 2 \operatorname{sen} x + 2\sqrt{x} + c.
 \end{aligned}$$

$$(vii) \int \left(2e^x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{2}{x^7} \right) dx.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
 \int \left(2e^x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{2}{x^7} \right) dx &= \int 2e^x dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{2 dx}{x^7} \\
 &= 2 \int e^x dx - \int \sec x \cdot \operatorname{tg} x dx + 2 \int x^{-7} dx \\
 &= 2e^x - \sec x + 2 \cdot \frac{x^{-6}}{-6} + c \\
 &= 2e^x - \sec x - \frac{1}{3x^6} + c.
 \end{aligned}$$

6.2 Exercícios

Nos exercícios de 1 a 10, calcular a integral e, em seguida, derivar as respostas para conferir os resultados.

1. $\int \frac{dx}{x^3}$

3. $\int (ax^4 + bx^3 + 3c) dx$

5. $\int (2x^2 - 3)^2 dx$

7. $\int \left(\sqrt{2y} - \frac{1}{\sqrt{2y}} \right) dy$

9. $\int x^3 \sqrt{x} dx$

2. $\int \left(9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^3}} \right) dt$

4. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{3} \right) dx$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

8. $\int \frac{\sqrt{2} dt}{3t^2 + 3}$

10. $\int \frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4} dx$

Nos exercícios de 11 a 31, calcular as integrais indefinidas.

11. $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$

13. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

15. $\int \sqrt{\frac{4}{x^4 - x^2}} dx$

17. $\int \left(\frac{e^t}{2} + \sqrt{t} + \frac{1}{t} \right) dt$

19. $\int (e^x - e^{-x}) dx$

21. $\int \frac{x^{-1/3} - 5}{x} dx$

23. $\int \sec^2 x (\cos^3 x + 1) dx$

25. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$

27. $\int \left(e^t - \sqrt[4]{16t} + \frac{3}{t^3} \right) dt$

29. $\int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{cosec}^2 x dx$

31. $\int \frac{dt}{(n - 1/2)t^n}$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

12. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx$

14. $\int \sqrt{\frac{9}{1 - x^2}} dx$

16. $\int \frac{8x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 2x + 1}{x^2} dx$

18. $\int \cos \theta \cdot \operatorname{tg} \theta d\theta$

20. $\int (t + \sqrt{t} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[4]{t} + \sqrt[5]{t}) dt$

22. $\int (2^t - \sqrt{2} e^t + \cosh t) dt$

24. $\int \frac{dx}{(ax)^2 + a^2}$, $a \neq 0$, constante.

26. $\int \sqrt[3]{8(t - 2)^6 \left(t + \frac{1}{2} \right)^3} dt$

28. $\int \frac{\ln x}{x \ln x^2} dx$

30. $\int (x - 1)^2 (x + 1)^2 dx$

32. Encontrar uma primitiva F , da função $f(x) = x^{2/3} + x$, que satisfaça $F(1) = 1$.

33. Determinar a função $f(x)$ tal que

$$\int f(x) dx = x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + c.$$

34. Encontrar uma primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ que se anule no ponto $x = 2$.

35. Sabendo que a função $f(x)$ satisfaz a igualdade

$$\int f(x) dx = \sin x - x \cos x - \frac{1}{2}x^2 + c, \text{ determinar } f(\pi/4).$$

36. Encontrar uma função f tal que $f'(x) + \sin x = 0$ e $f(0) = 2$.

6.3 Método da Substituição ou Mudança de Variável para Integração

Algumas vezes, é possível determinar a integral de uma dada função aplicando uma das fórmulas básicas depois de ser feita uma mudança de variável. Esse processo é análogo à regra da cadeia para derivação e pode ser justificado como segue.

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funções tais que $F'(x) = f(x)$. Suponhamos que g seja outra função derivável tal que a imagem de g esteja contida no domínio de F . Podemos considerar a função composta $F \circ g$.

Pela regra da cadeia, temos:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x), \text{ isto é, } F(g(x)) \text{ é uma primitiva de } f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Temos, então:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c. \quad (1)$$

Fazendo $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$ e substituindo em (1), vem:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c.$$

Na prática, devemos então definir uma função $u = g(x)$ conveniente, de tal forma que a integral obtida seja mais simples.

6.3.1 Exemplos Calcular as integrais:

$$(i) \int \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

Fazemos $u = 1 + x^2$. Então, $du = 2x dx$. Temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{1+x^2} dx &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln |u| + c \\ &= \ln (1 + x^2) + c. \end{aligned}$$

$$(ii) \int \text{sen}^2 x \cos x \, dx.$$

Se fizermos $u = \text{sen } x$, então $du = \cos x \, dx$. Assim:

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^2 x \cos x \, dx &= \int u^2 \, du \\ &= \frac{u^3}{3} + c \\ &= \frac{\text{sen}^3 x}{3} + c. \end{aligned}$$

$$(iii) \int \text{sen}(x + 7) \, dx.$$

Fazendo $u = x + 7$, temos $du = dx$. Então,

$$\begin{aligned} \int \text{sen}(x + 7) \, dx &= \int \text{sen } u \, du \\ &= -\cos u + c \\ &= -\cos(x + 7) + c. \end{aligned}$$

$$(iv) \int \text{tg } x \, dx.$$

$$\text{Podemos escrever } \int \text{tg } x \, dx = \int \frac{\text{sen } x}{\cos x} \, dx.$$

Fazendo $u = \cos x$, temos $du = -\text{sen } x \, dx$ e então $\text{sen } x \, dx = -du$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \text{tg } x \, dx &= \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c \\ &= -\ln|\cos x| + c. \end{aligned}$$

$$(v) \int \frac{dx}{(3x - 5)^8}.$$

Fazendo $u = 3x - 5$, temos $du = 3 \, dx$ ou $dx = 1/3 \, du$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(3x - 5)^8} &= \int \frac{1/3 \, du}{u^8} = \frac{1}{3} \int u^{-8} \, du = \frac{1}{3} \frac{u^{-7}}{-7} + c \\ &= \frac{-1}{21(3x - 5)^7} + c. \end{aligned}$$

$$(vi) \int (x + \sec^2 3x) \, dx.$$

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} \int (x + \sec^2 3x) \, dx &= \int x \, dx + \int \sec^2 3x \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \int \sec^2 3x \, dx. \end{aligned}$$

Para resolver $\int \sec^2 3x \, dx$, fazemos a substituição $u = 3x$. Temos, então, $du = 3dx$ ou $dx = 1/3 \, du$. Assim:

$$\begin{aligned} \int \sec^2 3x \, dx &= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{3} \, du = \frac{1}{3} \int \sec^2 u \, du \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{tg} u + c = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + c. \end{aligned}$$

Substituindo em (1), obtemos:

$$\int (x + \sec^2 3x) \, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + c.$$

(vii) $\int \frac{du}{u^2 + a^2}, (a \neq 0).$

Como $a \neq 0$, podemos escrever a integral dada na forma

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \int \frac{\frac{du}{a^2}}{\frac{u^2}{a^2} + 1} = \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{\frac{u^2}{a^2} + 1}.$$

Fazemos a substituição $v = u/a$. Temos, então, $dv = 1/a \, du$ ou $du = a \, dv$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u^2 + a^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a \, dv}{v^2 + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{dv}{v^2 + 1} \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} v + c \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{a} + c. \end{aligned}$$

(viii) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$

Para resolver esta integral devemos completar o quadrado do denominador. Escrevemos:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 13 &= x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 13 \\ &= (x + 3)^2 + 4. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 4}$$

Fazendo $u = x + 3$, $du = dx$ e usando o exemplo anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} &= \int \frac{du}{u^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{2} + c \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + 3}{2} + c. \end{aligned}$$

(ix) $\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1} \, dx.$

Nesse caso, fazemos a substituição $u = \sqrt{x-2}$. Então, $u^2 = x-2$ ou $x = u^2 + 2$, ou ainda, $dx = 2u \, du$.

Substituindo na integral, vem:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1} dx &= \int \frac{u}{u^2+2+1} \cdot 2u du \\ &= \int \frac{2u^2 du}{u^2+3} = 2 \int \frac{u^2 du}{u^2+3}.\end{aligned}$$

Efetuada a divisão dos polinômios, temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1} dx &= 2 \int \left(1 + \frac{-3}{u^2+3}\right) du \\ &= 2 \left[\int du - 3 \int \frac{du}{u^2+3} \right] \\ &= 2u - 6 \int \frac{du}{u^2+3} \\ &= 2u - \frac{6}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{\sqrt{3}} + c \\ &= 2\sqrt{x-2} - \frac{6}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3}} + c.\end{aligned}$$

$$(x) \int \sqrt{t^2 - 2t^4} dt.$$

Escrevemos:

$$\int \sqrt{t^2 - 2t^4} dt = \int \sqrt{t^2(1 - 2t^2)} dt = \int t \sqrt{1 - 2t^2} dt.$$

Fazendo $u = 1 - 2t^2$, temos $du = -4t dt$ e então $t dt = \frac{-du}{4}$. Assim:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{t^2 - 2t^4} dt &= \int u^{1/2} \cdot \frac{-du}{4} = -\frac{1}{4} \int u^{1/2} du \\ &= -\frac{1}{4} \frac{u^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{1}{6} (1 - 2t^2)^{3/2} + c.\end{aligned}$$

6.4 Exercícios

Calcular as integrais seguintes usando o método da substituição.

1. $\int (2x^2 + 2x - 3)^{10} (2x + 1) dx$

2. $\int (x^3 - 2)^{1/7} x^2 dx$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt[5]{x^2 - 1}}$

4. $\int 5x\sqrt{4 - 3x^2} dx$

5. $\int \sqrt{x^2 + 2x^4} dx$

6. $\int (e^{2t} + 2)^{1/3} e^{2t} dt$

7. $\int \frac{e^t dt}{e^t + 4}$

8. $\int \frac{e^{1/x} + 2}{x^2} dx$

9. $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x \, dx$
10. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx$
11. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^5 x} \, dx$
12. $\int \frac{2 \operatorname{sen} x - 5 \cos x}{\cos x} \, dx$
13. $\int e^x \cos 2e^x \, dx$
14. $\int \frac{x}{2} \cos x^2 \, dx$
15. $\int \operatorname{sen}(5\theta - \pi) \, d\theta$
16. $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} y}{2\sqrt{1-y^2}} \, dy$
17. $\int \frac{2 \sec^2 \theta}{a + b \operatorname{tg} \theta} \, d\theta$
18. $\int \frac{dx}{16 + x^2}$
19. $\int \frac{dy}{y^2 - 4y + 4}$
20. $\int \sqrt[3]{\operatorname{sen} \theta} \cos \theta \, d\theta$
21. $\int \frac{\ln x^2}{x} \, dx$
22. $\int (e^{ax} + e^{-ax})^2 \, dx$
23. $\int \sqrt{3t^4 + t^2} \, dt$
24. $\int \frac{4dx}{4x^2 + 20x + 34}$
25. $\int \frac{3 \, dx}{x^2 - 4x + 1}$
26. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 16}$
27. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{x-1} \, dx$
28. $\int \frac{3 \, dx}{x \ln^2 3x}$
29. $\int (\operatorname{sen} 4x + \cos 2\pi) \, dx$
30. $\int 2^{x^2+1} x \, dx$
31. $\int x e^{3x^2} \, dx$
32. $\int \frac{dt}{(2+t)^2}$
33. $\int \frac{dt}{t \ln t}$
34. $\int 8x \sqrt{1-2x^2} \, dx$
35. $\int (e^{2x} + 2)^5 e^{2x} \, dx$
36. $\int \frac{4t \, dt}{\sqrt{4t^2 + 5}}$
37. $\int \frac{\cos x}{3 - \operatorname{sen} x} \, dx$
38. $\int \frac{dv}{\sqrt{v}(1 + \sqrt{v})^5}$
39. $\int x^2 \sqrt{1+x} \, dx$
40. $\int x^4 e^{-x^5} \, dx$
41. $\int t \cos t^2 \, dt$
42. $\int 8x^2 \sqrt{6x^3 + 5} \, dx$
43. $\int \operatorname{sen}^{1/2} 2\theta \cos 2\theta \, d\theta$
44. $\int \sec^2(5x + 3) \, dx$
45. $\int \frac{\operatorname{sen} \theta \, d\theta}{(5 - \cos \theta)^3}$
46. $\int \operatorname{cotg} u \, du$

47. $\int (1 + e^{-at})^{3/2} e^{-at} dt, a > 0$

48. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

49. $\int t\sqrt{t-4} dt$

50. $\int x^2(\sin 2x^3 + 4x) dx$

6.5 Método de Integração por Partes

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis no intervalo I . Temos:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

ou,

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - g(x) \cdot f'(x).$$

Integrando ambos os lados dessa equação, obtemos:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = \int [f(x) \cdot g(x)]' dx - \int g(x) \cdot f'(x) dx,$$

ou ainda,

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) dx. \quad (1)$$

Observamos que na expressão (1) deixamos de escrever a constante de integração, já que no decorrer do desenvolvimento aparecerão outras. Todas elas podem ser representadas por uma única constante c , que introduziremos no final do processo.

Na prática, costumamos fazer

$$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx$$

e

$$v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x) dx.$$

Substituindo em (1), vem

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

que é a fórmula de integração por partes.

6.5.1 Exemplos

(i) Calcular $\int x e^{-2x} dx$.

Antes de resolver essa integral, queremos salientar que a escolha de u e dv são feitas convenientemente.

Nesse exemplo, escolhemos $u = x$ e $dv = e^{-2x} dx$. Temos:

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^{-2x} dx \quad \Rightarrow \quad v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}.$$

Aplicamos, então, a fórmula

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

e obtemos:

$$\int x e^{-2x} dx = x \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) e^{-2x} - \int \frac{-1}{2} e^{-2x} dx.$$

Calculando a última integral, vem:

$$\int x \cdot e^{-2x} dx = \frac{-1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + c.$$

Observamos que, se tivéssemos escolhido $u = e^{-2x}$ e $dv = x dx$, o processo nos levaria a uma integral mais complicada.

(ii) Calcular $\int \ln x dx$.

Seja

$$u = \ln x \Rightarrow du = 1/x dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x.$$

Integrando por partes, vem:

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= (\ln x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + c. \end{aligned}$$

(iii) Calcular $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$.

Neste exemplo, vamos aplicar o método duas vezes. Seja:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x dx \Rightarrow v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x.$$

Integrando por partes, vem:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \operatorname{sen} x dx &= x^2(-\cos x) - \int (-\cos x)2x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx. \end{aligned}$$

A integral $\int x \cos x dx$ deve ser resolvida também por partes. Fazemos,

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x.$$

Temos:

$$\int x \cos x dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx.$$

Logo:

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx &= -x^2 \cos x + 2[x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx] \\ &= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + c.\end{aligned}$$

(iv) Calcular $\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$.

Esse exemplo ilustra um artifício para o cálculo, que envolve também duas aplicações da fórmula de integração por partes.

Seja:

$$u = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad du = 2e^{2x} \, dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x.$$

Aplicando a integração por partes, vem:

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx &= e^{2x}(-\cos x) - \int (-\cos x)2e^{2x} \, dx \\ &= -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx.\end{aligned}$$

Resolvendo $\int e^{2x} \cos x \, dx$ por partes, fazendo $u = e^{2x}$ e $dv = \cos x \, dx$, encontramos

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx &= -e^{2x} \cos x + 2[e^{2x} \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot 2e^{2x} \, dx] \\ &= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \operatorname{sen} x - 4 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx.\end{aligned} \quad (2)$$

Observamos que a integral do 2º membro é exatamente a integral que queremos calcular. Somando $4 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$ a ambos os lados de (2), obtemos:

$$5 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \operatorname{sen} x.$$

Logo,

$$\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{5} (2e^{2x} \operatorname{sen} x - e^{2x} \cos x) + c.$$

(v) Calcular $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$.

Nesse caso, fazemos:

$$u = \operatorname{sen}^2 x \quad \Rightarrow \quad du = 2 \operatorname{sen} x \cos x \, dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x.$$

Então:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \operatorname{sen}^2 x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x \, dx$$

$$\begin{aligned}
 &= -\operatorname{sen}^2 x \cos x + 2 \int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx \\
 &= -\operatorname{sen}^2 x \cos x - 2 \frac{\cos^3 x}{3} + c.
 \end{aligned}$$

6.6 Exercícios

Resolver as seguintes integrais usando a técnica de integração por partes.

1. $\int x \operatorname{sen} 5x \, dx$

2. $\int \ln(1-x) \, dx$

3. $\int t e^{4t} \, dt$

4. $\int (x+1) \cos 2x \, dx$

5. $\int x \ln 3x \, dx$

6. $\int \cos^3 x \, dx$

7. $\int e^x \cos \frac{x}{2} \, dx$

8. $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

9. $\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx$

10. $\int x^2 \cos ax \, dx$

11. $\int x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

12. $\int \operatorname{arc} \operatorname{cotg} 2x \, dx$

13. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx$

14. $\int \frac{\ln(ax+b)}{\sqrt{ax+b}} \, dx$

15. $\int x^3 \sqrt{1-x^2} \, dx$

16. $\int \ln^3 2x \, dx$

17. $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} ax \, dx$

18. $\int x^3 \operatorname{sen} 4x \, dx$

19. $\int (x-1)e^{-x} \, dx$

20. $\int x^2 \ln x \, dx$

21. $\int x^2 e^x \, dx$

22. $\int \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, dx$

23. $\int (x-1) \sec^2 x \, dx$

24. $\int e^{3x} \cos 4x \, dx$

25. $\int x^n \ln x \, dx, n \in \mathbb{N}$

26. $\int \ln(x^2+1) \, dx$

27. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$

28. $\int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$

29. $\int x^5 e^{x^2} dx$

30. $\int x \cos^2 x dx$

31. $\int (x + 3)^2 e^x dx$

32. $\int x \sqrt{x + 1} dx$

33. $\int \cos(\ln x) dx$

34. $\int \arccos x dx$

35. $\int \sec^3 x dx$

36. $\int \frac{1}{x^3} e^{1/x} dx.$

6.7 Área

Desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocupam com o problema de determinar a área de uma figura plana. O procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas.

Como exemplo, podemos citar o círculo. Para definir sua área, consideramos um polígono regular inscrito de n lados, que denotamos por P_n (Figura 6.2(a)).

Seja A_n a área do polígono P_n . Então, $A_n = n \cdot A_{T_n}$, onde A_{T_n} é a área do triângulo de base l_n e altura h_n (Figura 6.2(b)).

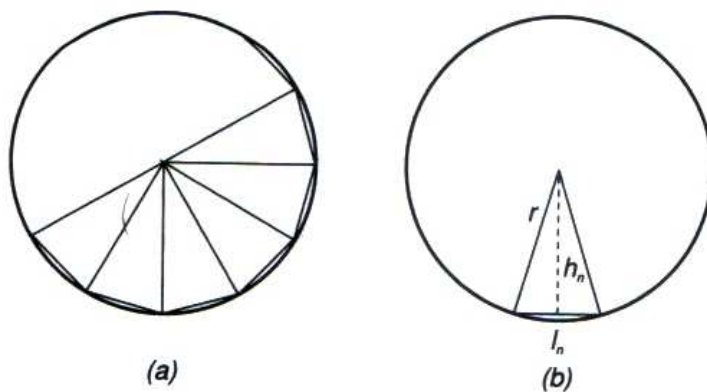


Figura 6.2

Como $A_{T_n} = \frac{l_n \cdot h_n}{2}$ e o perímetro do polígono P_n é dado por $p_n = n l_n$, vem:

$$A_n = n \cdot \frac{l_n \cdot h_n}{2} = \frac{p_n \cdot h_n}{2}.$$

Fazendo n crescer cada vez mais, isto é, $n \rightarrow +\infty$, o polígono P_n torna-se uma aproximação do círculo. O perímetro p_n aproxima-se do comprimento da circunferência $2\pi r$ e a altura h_n aproxima-se do raio r .

Temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2, \text{ que é a área do círculo.}$$

Para definir a área de uma figura plana qualquer, procedemos de forma análoga. Aproximamos a figura por polígonos cujas áreas possam ser calculadas pelos métodos da geometria elementar.

Consideremos agora o problema de definir a área de uma região plana S , delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa f , pelo eixo dos x e por duas retas $x = a$ e $x = b$ (ver Figura 6.3).

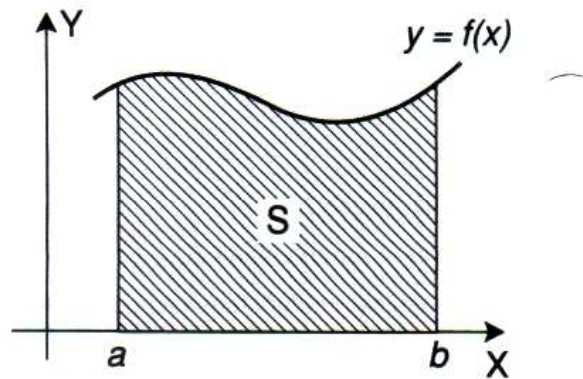


Figura 6.3

Para isso, fazemos uma partição do intervalo $[a, b]$, isto é, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, escolhendo os pontos:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Em cada um destes intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto qualquer c_i .

Para cada $i, i = 1, \dots, n$, construímos um retângulo de base Δx_i e altura $f(c_i)$ (ver Figura 6.4).

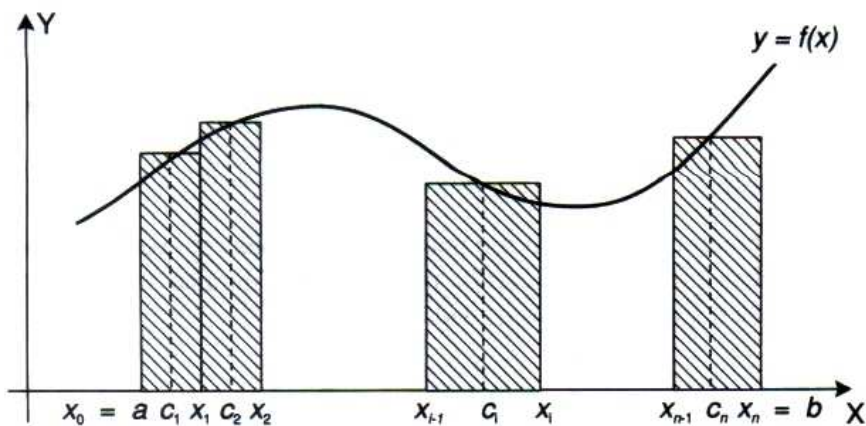


Figura 6.4

A Figura 6.5 ilustra esses retângulos nos casos $n = 4$ e $n = 8$.

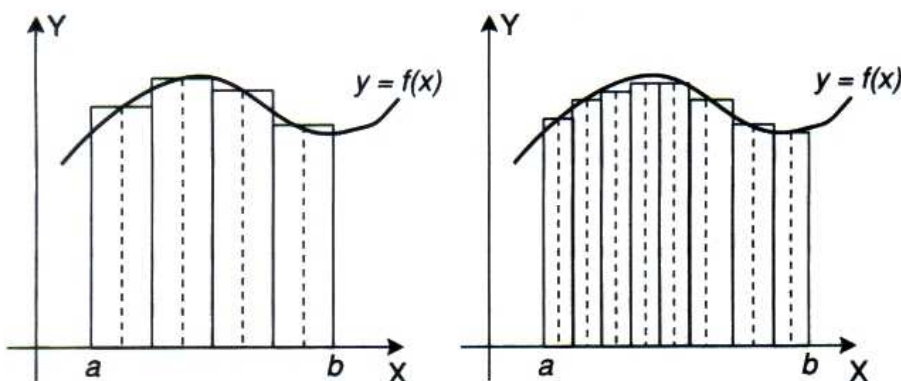


Figura 6.5

A soma das áreas dos n retângulos, que representamos por S_n , é dada por

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i.$$

Esta soma é chamada *soma de Riemann* da função $f(x)$.

Podemos observar que à medida que n cresce muito e cada Δx_i , $i = 1, \dots, n$, torna-se muito pequeno, a soma das áreas retangulares aproxima-se do que intuitivamente entendemos como a área de S .

6.7.1 Definição Seja $y = f(x)$ uma função contínua, não negativa em $[a, b]$. A área sob a curva $y = f(x)$, de a até b , é definida por:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i,$$

onde para cada $i = 1, \dots, n$, c_i é um ponto arbitrário do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

É possível provar que o limite desta definição existe e é um número não negativo.

6.8 Distâncias

O cálculo da distância percorrida por um móvel durante um período de tempo, sendo conhecida a velocidade do móvel em todos os instantes, pode ser visualizado como um problema inverso ao cálculo da velocidade, como foi discutido na Seção 4.2.

Quando a velocidade é constante, o problema do cálculo da distância reduz-se a procedimentos elementares a partir do conceito de que:

$$\text{distância} = \text{velocidade} \times \text{tempo}.$$

Quando a velocidade varia, precisamos elaborar um pouco mais as idéias para encontrar a distância percorrida.

Como exemplo, podemos citar a distância percorrida por um móvel durante 10 segundos. A cada 2 segundos, a velocidade é registrada. Na Tabela 6.1 apresentamos os dados obtidos.

Tabela 6.1

Tempo (segundos)	0	2	4	6	8	10
Velocidade (metros/segundo)	22	78	126	166	198	222

Para fazer uma estimativa da distância percorrida nos primeiros dois segundos, podemos considerar neste período de tempo a velocidade como uma constante igual a 22 m/seg. Assim, a distância percorrida nos dois primeiros segundos é igual a:

$$22 \text{ m/seg} \times 2 \text{ seg} = 44 \text{ metros}$$

Analogamente, durante o intervalo de tempo de 2 a 4 segundos, podemos considerar a velocidade constante igual a 78 m/seg e então a distância percorrida é de:

$$78 \text{ m/seg} \times 2 \text{ seg} = 156 \text{ metros}$$

Se somarmos todas as estimativas, vamos ter a distância total de forma aproximada:

$$22 \times 2 + 78 \times 2 + 126 \times 2 + 166 \times 2 + 198 \times 2 + 222 \times 2 = 1.624 \text{ metros}.$$

Esses cálculos podem ser visualizados graficamente na Figura 6.6.

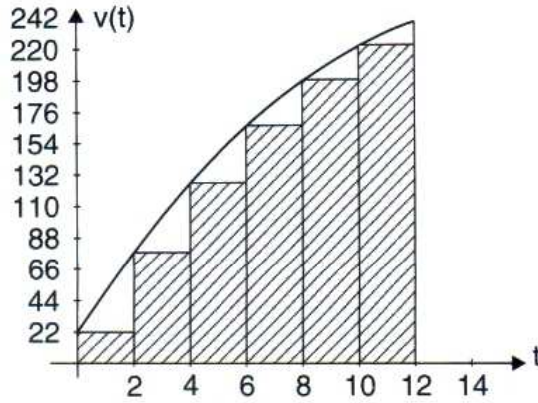


Figura 6.6

Podemos melhorar a nossa estimativa obtendo os valores da velocidade em intervalos de tempo menores (ver Tabela 6.2). Por exemplo, na Figura 6.7 mostramos a análise para intervalos de segundo a segundo.

Tabela 6.2

Tempo (segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Velocidade (metros/segundo)	22	52	78	103	126	147	166	183	198	211	222	231

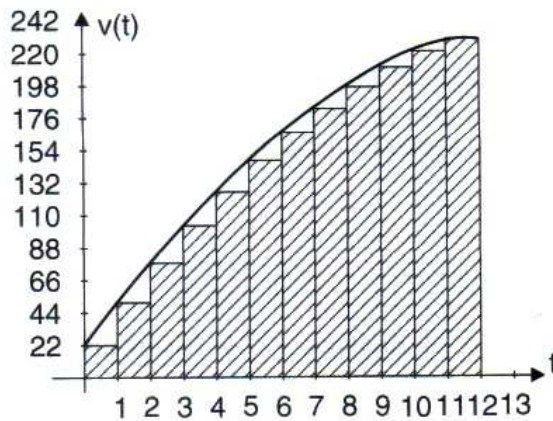


Figura 6.7

Para o conjunto de informações dadas na Figura 6.7 vamos ter o espaço percorrido pelo móvel estimado em:

$$22 + 51 + 78 + 103 + 126 + 147 + 166 + 183 + 198 + 211 + 222 + 231 = 1.738 \text{ metros.}$$

Observando este exemplo é possível associar com a área como foi discutida na seção anterior, isto é, para calcular a distância percorrida por um móvel cuja velocidade é dada por uma função $v = v(t)$ podemos usar a Soma de Riemann da função para fazer estimativas ou usar similarmente a definição de área:

$$\text{Distância} = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(c_i) \Delta t_i$$

É bom lembrar que a grandeza distância não é igual a área. O valor numérico é igual, mas estamos lidando com grandezas diferentes.

6.9 Integral Definida

A integral definida está associada ao limite da Definição 6.7.1 e do Exemplo 6.8. Ela nasceu com a formalização matemática dos problemas de áreas e problemas físicos. De acordo com a terminologia introduzida na seção anterior, temos a seguinte definição.

6.9.1 Definição Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a, b]$. A *integral definida* de f de a até b , denotada por:

$$\int_a^b f(x) dx,$$

é dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

desde que o limite do 2º membro exista.

Se $\int_a^b f(x) dx$ existe, dizemos que f é *integrável* em $[a, b]$.

Na notação $\int_a^b f(x) dx$, os números a e b são chamados *limites de integração* (a = limite inferior e b = limite superior).

Se f é integrável em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(s) ds,$$

isto é, podemos usar qualquer símbolo para representar a variável independente.

Quando a função f é contínua e não negativa em $[a, b]$, a definição da integral definida coincide com a definição da área (Definição 6.7.1). Portanto, neste caso, a integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

é a área da região sob o gráfico de f de a até b .

Sempre que utilizamos um intervalo $[a, b]$, supomos $a < b$. Assim, em nossa definição não levamos em conta os casos em que o limite inferior é maior que o limite superior.

6.9.2 Definição

(a) Se $a > b$, então:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

se a integral à direita existir.

(b) Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

É muito importante saber quais funções são integráveis. Uma ampla classe de funções usadas no Cálculo é a classe das funções contínuas. O teorema a seguir, cuja demonstração será omitida, garante que elas são integráveis.

6.9.3 Teorema Se f é contínua sobre $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

Propriedades da Integral Definida

6.9.4 Proposição Se f é integrável em $[a, b]$ e k é um número real arbitrário, então kf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

Prova: Como f é integrável em $[a, b]$, existe o

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

e portanto, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \int_a^b kf(x)dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(c_i) \Delta x_i \\ &= k \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= k \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

6.9.5 Proposição Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Prova: Se f é integrável em $[a, b]$, existe o limite

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \text{ que é a } \int_a^b f(x)dx.$$

Se g é integrável em $[a, b]$, existe o limite

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i) \Delta x_i, \text{ que é a } \int_a^b g(x)dx.$$

Escrevemos, então:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)]dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(c_i) + g(c_i)) \Delta x_i \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

Observamos que esta proposição pode ser estendida para um número finito de funções, ou seja,

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \dots + \int_a^b f_n(x)dx.$$

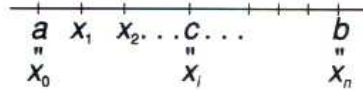
Vale também para o caso de termos diferença de funções, isto é,

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

6.9.6 Proposição Se $a < c < b$ e f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Prova: Consideremos uma partição no intervalo $[a, b]$ de tal forma que o ponto c ($a < c < b$) seja um ponto da partição, isto é, $c = x_i$, para algum i .



Podemos dizer que o intervalo $[a, c]$ ficou dividido em r subintervalos e $[c, b]$ em $(n - r)$ subintervalos. Escrevemos as respectivas somas de Riemann:

$$\sum_{i=1}^r f(c_i) \Delta x_i \text{ e } \sum_{i=r+1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Então,

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^r f(c_i) \Delta x_i + \sum_{i=r+1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Usando a definição de integral definida, vem:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\text{máx } \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\text{máx } \Delta x_i \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^r f(c_i) \Delta x_i + \sum_{i=r+1}^n f(c_i) \Delta x_i \right) \\ &= \lim_{\text{máx } \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r f(c_i) \Delta x_i + \lim_{\text{máx } \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=r+1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Esta propriedade pode ser generalizada: “Se f é integrável em um intervalo fechado e se a, b, c são pontos quaisquer desse intervalo, então:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.”$$

A Figura 6.8 ilustra a Proposição 6.8.6 para o caso em que $f(x) > 0$. A área do trapézóide $ABCD$ adicionada à área do trapézóide $BEFC$ é igual à área do trapézóide $AEFD$.

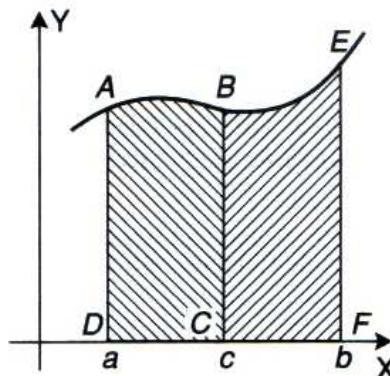


Figura 6.8

6.9.7 Proposição Se f integrável e se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Prova: Como $f(c_i) \geq 0$ para todo c_i em $[x_{i-1}, x_i]$, segue que:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \geq 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \geq 0$$

e, dessa forma, $\int_a^b f(x) dx \geq 0.$

6.9.8 Proposição Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Prova: Fazemos:

$$I = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Devemos mostrar que $I \geq 0$. Usando a Proposição 6.9.5, podemos escrever:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \end{aligned}$$

Como $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, temos que $f(x) - g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Usando a Proposição 6.9.7, concluímos que $I \geq 0$.

6.9.9 Proposição Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Prova: Se f é contínua em $[a, b]$, então:

- f é integrável em $[a, b]$;
- $|f|$ é contínua em $[a, b]$;
- $|f|$ também é integrável em $[a, b]$.

Sabemos que:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Usando a Proposição 6.9.8, escrevemos:

$$\int_a^b -|f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Pela Proposição 6.9.4, vem:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Usando a Propriedade 1.3.3(i), segue que:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Na Proposição a seguir, cuja demonstração será omitida, apresentamos o Teorema do Valor Médio para integrais.

6.9.10 Proposição Se f é uma função contínua em $[a, b]$, existe um ponto c entre a e b tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c).$$

Se $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, podemos visualizar geometricamente esta proposição. Ela nos diz que a área abaixo da curva $y = f(x)$, entre a e b , é igual à área de um retângulo de base $b - a$ e altura $f(c)$ (ver Figura 6.9).

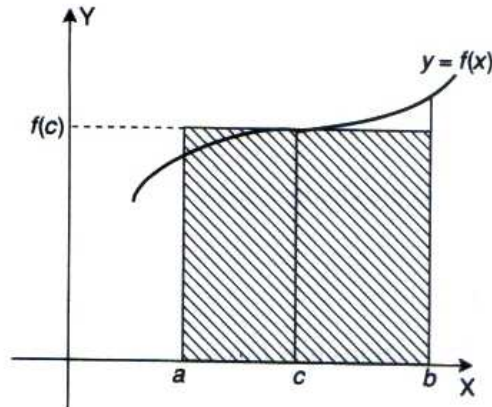


Figura 6.9

6.10 Teorema Fundamental do Cálculo

O teorema fundamental do Cálculo nos permite relacionar as operações de derivação e integração. Ele nos diz que, conhecendo uma primitiva de uma função contínua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, podemos calcular a sua integral definida $\int_a^b f(t) dt$. Com isso, obtemos uma maneira rápida e simples de resolver inúmeros problemas práticos que envolvem o cálculo da integral definida.

Para apresentar formalmente o teorema, inicialmente vamos definir uma importante função auxiliar, como segue.

Tomamos a integral definida

$$\int_a^b f(t) dt,$$

fixamos o limite inferior a e fazemos variar o limite superior. Então, o valor da integral dependerá desse limite superior variável, que indicaremos por x . Fazendo x variar no intervalo $[a, b]$, obtemos uma função $G(x)$, dada por:

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Intuitivamente, podemos compreender o significado de $G(x)$ através de uma análise geométrica. Conforme vimos na Seção 6.9, se $f(t) \geq 0, \forall t \in [a, b]$, a integral

$$\int_a^b f(t) dt$$

representa a área abaixo do gráfico de f entre a e b (ver Figura 6.10(a)).

Da mesma forma,

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

nos dá a área abaixo do gráfico de f entre a e x (ver Figura 6.10(b)). Podemos observar que $G(a) = 0$ e $G(b)$ nos dá a área da Figura 6.10 (a).

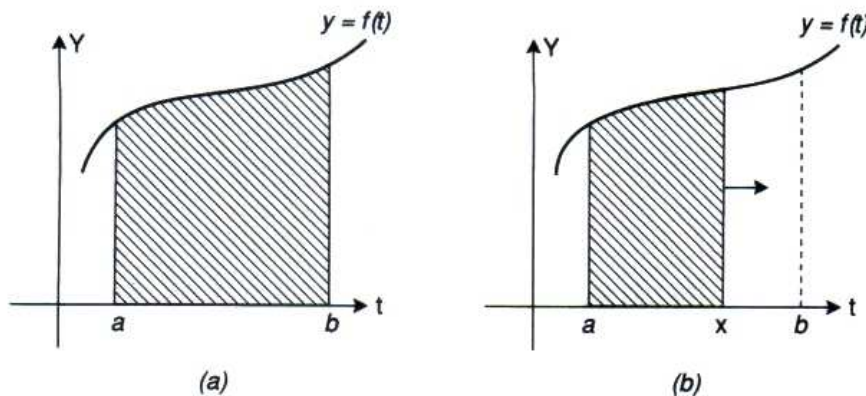


Figura 6.10

Vamos, agora, determinar a derivada da função $G(x)$. Temos a seguinte proposição.

6.10.1 Proposição Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$. Então a função $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

tem derivada em todos os pontos $x \in [a, b]$ que é dada por:

$$G'(x) = f(x), \text{ ou seja,}$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Prova: Vamos determinar a derivada $G'(x)$, usando a definição:

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x}.$$

Temos:

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt;$$

$$G(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt;$$

$$G(x + \Delta x) - G(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt.$$

Usando a Proposição 6.9.6, podemos escrever:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

e, então,

$$\begin{aligned} G(x + \Delta x) - G(x) &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \end{aligned}$$

Como f é contínua em $[x, x + \Delta x]$, pela Proposição 6.9.10, existe um ponto \bar{x} entre x e $x + \Delta x$ tal que

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt &= (x + \Delta x - x)f(\bar{x}) \\ &= f(\bar{x})\Delta x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x})\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}). \end{aligned}$$

Como \bar{x} está entre x e $x + \Delta x$, segue que $\bar{x} \rightarrow x$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Como f é contínua, temos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} f(\bar{x}) = f(x).$$

Logo,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = f(x), \text{ ou seja,}$$

$$G'(x) = f(x).$$

Observamos que, quando x é um dos extremos do intervalo $[a, b]$, os limites usados na demonstração serão limites laterais. $G'(a)$ será uma derivada à direita e $G'(b)$, uma derivada à esquerda.

Uma importante consequência desta proposição é que toda função $f(x)$ contínua num intervalo $[a, b]$ possui uma primitiva que é dada por

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Outro resultado importante obtém-se da análise geométrica. Voltando à Figura 6.10, podemos dizer que a taxa de variação da área da Figura 6.10(b) com relação a t é igual ao lado direito da região.

Podemos, agora, estabelecer formalmente o Teorema Fundamental do Cálculo.

6.10.2 Teorema Se f é contínua sobre $[a, b]$ e se F é uma primitiva de f neste intervalo, então:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Prova: Como f é contínua sobre $[a, b]$, pela proposição 6.10.1, segue que:

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma primitiva de f nesse intervalo.

Seja $F(x)$ uma primitiva qualquer de f sobre $[a, b]$. Pela Proposição 6.1.5, temos que:

$$F(x) = G(x) + C, \forall x \in [a, b].$$

Como $G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ e $G(b) = \int_a^b f(t) dt$, calculando a diferença $F(b) - F(a)$, obtemos:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + c) - (G(a) + c) \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t) dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

Observamos que a diferença $F(b) - F(a)$ usualmente é denotada por $F(t) \Big|_a^b$. Também escrevemos:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

6.10.3 Exemplos Calcular as integrais definidas:

(i) $\int_1^3 x dx.$

Sabemos que $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ é uma primitiva de $f(x) = x$. Portanto,

$$\int_1^3 x dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_1^3 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \cos t dt.$

A função $F(t) = \sin t$ é uma primitiva de $f(t) = \cos t$. Logo,

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \left. \sin t \right|_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

$$(iii) \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 1) \, dx.$$

Usando as propriedades da integral definida e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 1) \, dx &= \int_0^1 x^3 \, dx - 4 \int_0^1 x^2 \, dx + \int_0^1 dx \\ &= \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 - 4 \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left. x \right|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{4} - 0 \right) - \left(\frac{4}{3} - 0 \right) + (1 - 0) \\ &= -1/12. \end{aligned}$$

$$(iv) \int_0^1 \frac{x \, dx}{x^2 + 1}.$$

Vamos, primeiro, encontrar a integral indefinida

$$I = \int \frac{x \, dx}{x^2 + 1}.$$

Para isso, fazemos a substituição $u = x^2 + 1$. Temos, então, $du = 2x \, dx$ ou $x \, dx = \frac{du}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du/2}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + c. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x \, dx}{x^2 + 1} &= \left. \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Observamos que, para resolver esta integral, também podemos fazer a mudança de variáveis na integral definida, desde que façamos a correspondente mudança nos limites de integração.

Ao efetuarmos a mudança de variável fazendo $u = x^2 + 1$, vemos que:

$$x = 0 \Rightarrow u = 1;$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2.$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 1} &= \int_1^2 \frac{du/2}{u} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2.\end{aligned}$$

$$(v) \int_{-1}^2 x e^{-x^2+1} dx.$$

Calculamos primeiro a integral indefinida $I = \int x e^{-x^2+1} dx$.

Fazendo $u = -x^2 + 1$, temos $du = -2x dx$ ou $x dx = -\frac{du}{2}$. Assim:

$$\begin{aligned}I &= \int e^u \cdot \frac{-du}{2} = \frac{-1}{2} \int e^u du = \frac{-1}{2} e^u + c \\ &= \frac{-1}{2} e^{-x^2+1} + c.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{-1}^2 x e^{-x^2+1} dx = \frac{-1}{2} e^{-x^2+1} \Big|_{-1}^2 = \frac{-1}{2} e^{-4+1} + \frac{1}{2} e^{-1+1} = \frac{-1}{2} e^{-3} + \frac{1}{2}.$$

6.11 Exercícios

1. Calculando as integrais $I_1 = \int_1^2 x^2 dx$, $I_2 = \int_1^2 x dx$ e $I_3 = \int_1^2 dx$, obtemos $I_1 = 7/3$, $I_2 = 3/2$ e $I_3 = 1$. Usando esses resultados, encontrar o valor de :

a) $\int_1^2 (6x - 1) dx$

b) $\int_1^2 2x(x + 1) dx$

c) $\int_1^2 (x - 1)(x - 2) dx$

d) $\int_1^2 (3x + 2)^2 dx$.

2. Sem calcular a integral, verificar as seguintes desigualdades:

a) $\int_1^3 (3x^2 + 4) dx \geq \int_1^3 (2x^2 + 5) dx$

b) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{dx} \leq \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{4} \right) dx$

c) $\int_0^\pi \sin x dx \geq 0$

d) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\cos x dx \geq 0$.

3. Se $\int_0^1 \sqrt[5]{x^2} dx = \frac{5}{7}$, calcular $\int_1^0 \sqrt[5]{t^2} dt$.

4. Se $\int_0^{\pi/2} 9 \cos^2 t dt = \frac{9\pi}{4}$, calcular $\int_0^{\pi/2} -\cos^2 \theta d\theta$.

5. Verificar se o resultado das seguintes integrais é positivo, negativo ou zero, sem calculá-las.

$$a) \int_0^{20} \frac{dx}{x+2}$$

$$b) \int_0^{2\pi} \sin t \, dt$$

$$c) \int_2^3 (2x+1) \, dx$$

$$d) \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) \, dx.$$

6. Determinar as seguintes derivadas:

$$a) \frac{d}{dx} \int_2^x \sqrt{t+4} \, dt$$

$$b) \frac{d}{dy} \int_3^y \frac{2x}{x^2+9} \, dx$$

$$c) \frac{d}{d\theta} \int_{-1}^{\theta} t \sin t \, dt.$$

7. Em cada um dos itens a seguir, calcular a integral da função no intervalo dado e esboçar seu gráfico.

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x+5, & -1 \leq x < 0 \\ 5, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}; \text{ em } [-1, 1]$$

$$b) f(x) = |\sin x|; \text{ em } [-\pi, \pi]$$

$$c) f(x) = 2|x|; \text{ em } [-1, 1]$$

$$d) f(x) = x - \frac{|x|}{2}; \text{ em } [-1, 1]$$

$$e) f(x) = \sin x + |\sin x|; \text{ em } [-\pi, \pi]$$

$$f) f(x) = \sin x + |\cos x|, \text{ em } [-\pi, \pi].$$

8. Mostrar que:

$$a) \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 5x \, dx = 0$$

$$b) \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 3x \, dx = 0$$

$$c) \int_{-\pi}^{\pi} \sin 5x \cos 2x \, dx = 0.$$

(Sugestão: Usar as fórmulas

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] \text{ e}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

onde m e n são dois números inteiros quaisquer.)

9. Se $f(x)$ é contínua e $f(x) \leq M$ para todo x em $[a, b]$, provar que:

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a). \text{ Ilustrar graficamente, supondo } f(x) \geq 0.$$

10. Se $f(x)$ é contínua e $m \leq f(x)$ para todo x em $[a, b]$, provar que:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx. \text{ Ilustrar graficamente, supondo } m > 0.$$

11. Aplicar os resultados dos exercícios 9 e 10 para encontrar o menor e o maior valor possível das integrais dadas a seguir:

$$a) \int_3^4 5x dx$$

$$b) \int_{-2}^4 2x^2 dx$$

$$c) \int_1^4 |x - 1| dx$$

$$d) \int_{-1}^4 (x^4 - 8x^2 + 16) dx.$$

Nos exercícios 12 a 34, calcular as integrais.

$$12. \int_{-1}^2 x(1 + x^3) dx$$

$$13. \int_{-3}^0 (x^2 - 4x + 7) dx$$

$$14. \int_1^2 \frac{dx}{x^6}$$

$$15. \int_4^9 2t\sqrt{t} dt$$

$$16. \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{3y + 1}}$$

$$17. \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen} x \cos x dx$$

$$18. \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 9}}$$

$$19. \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x| dx$$

$$20. \int_{-2}^5 |2t - 4| dt$$

$$21. \int_0^4 |x^2 - 3x + 2| dx$$

$$22. \int_0^4 \frac{4}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$$

$$23. \int_{-2}^0 \frac{v^2 dv}{(v^3 - 2)^2}$$

$$24. \int_1^5 \sqrt{2x - 1} dx$$

$$25. \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^3}$$

$$26. \int_0^3 x\sqrt{1 + x} dx$$

$$27. \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x dx$$

$$28. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^5} dx$$

$$29. \int_0^4 (2x + 1)^{-1/2} dx$$

$$30. \int_0^2 \sqrt{2x}(\sqrt{x} + \sqrt{5}) dx$$

$$31. \int_1^2 \frac{5x^3 + 7x^2 - 5x + 2}{x^2} dx$$

$$32. \int_1^2 x \ln x dx$$

$$33. \int_{-3}^{-2} \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 dt$$

$$34. \int_0^{-1} \frac{x^3 + 8}{x + 2} dx.$$

35. Seja f contínua em $[-a, a]$. Mostrar que:

$$a) \text{ Se } f \text{ é par, então } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

$$b) \text{ Se } f \text{ é ímpar, então } \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

36. Usar o resultado do Exercício 35 para calcular:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} 2 \operatorname{sen} x dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\pi} dx$

c) $\int_{-1}^1 (x^4 + x^2) dx.$

6.12 Cálculo de Áreas

O cálculo de área de figuras planas pode ser feito por integração. Vejamos as situações que comumente ocorrem.

6.12.1 **Caso I** Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f , pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x , onde f é contínua e $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ (ver Figura 6.11).

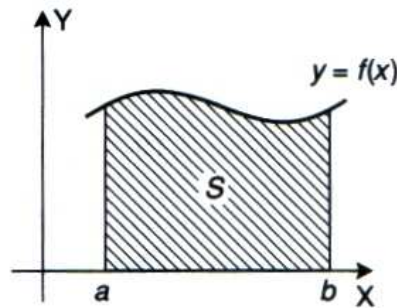


Figura 6.11

Neste caso, a área é dada por:

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

6.12.2 **Exemplo** Encontre a área limitada pela curva $y = 4 - x^2$ e o eixo dos x .

A curva $y = 4 - x^2$ intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissa -2 e 2 (ver Figura 6.12).

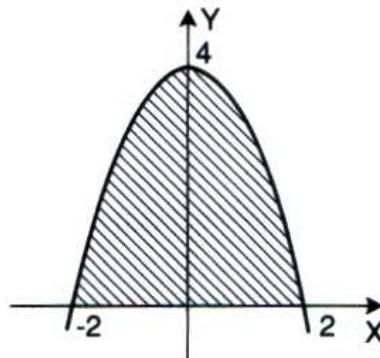


Figura 6.12

No intervalo $[-2, 2]$, $y = 4 - x^2 \geq 0$. Assim, a área procurada é a área sob o gráfico de $y = 4 - x^2$ de -2 até 2 .

Temos:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 \\
 &= \left[(8 - 8/3) - \left(-8 - \frac{(-2)^3}{3} \right) \right] = \frac{32}{3}.
 \end{aligned}$$

Portanto, $A = 32/3$ ($32/3$ unidades de área).

6.12.3 Caso II Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f , pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo x , onde f é contínua e $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$ (ver Figura 6.13).

É fácil constatar que neste caso basta tomar o módulo da integral

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ ou seja,}$$

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

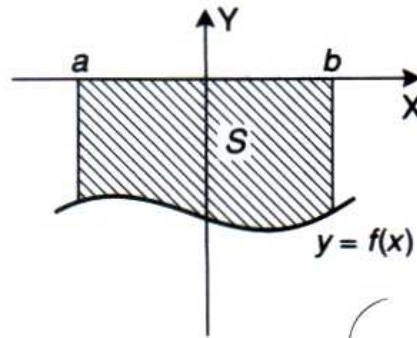


Figura 6.13

6.12.4 Exemplos

(i) Encontre a área limitada pela curva $y = -4 + x^2$ e o eixo dos x .

A curva $y = x^2 - 4$ intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissa -2 e 2 (ver Figura 6.14).

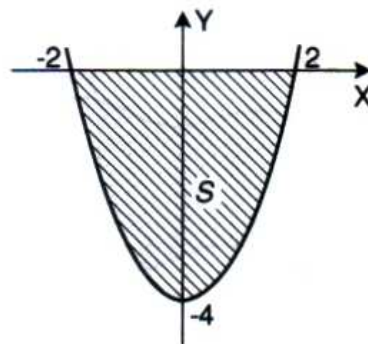


Figura 6.14

No intervalo $[-2, 2]$, $y = x^2 - 4 \leq 0$. Assim:

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx \right| \\
 &= \left| \frac{-32}{3} \right| = \frac{32}{3} \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

- (ii) Encontre a área da região S , limitada pela curva $y = \text{sen } x$ e pelo eixo dos x de 0 até 2π . Precisamos dividir a região S em duas sub-regiões S_1 e S_2 (ver Figura 6.15).

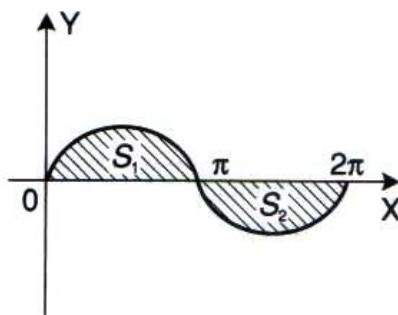


Figura 6.15

No intervalo $[0, \pi]$, $y = \text{sen } x \geq 0$ e no intervalo $[\pi, 2\pi]$, $y = \text{sen } x \leq 0$. Portanto, se A_1 é a área de S_1 e A_2 é a área de S_2 , temos:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x \, dx \right| \\ &= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| \\ &= -\cos \pi + \cos 0 + |-\cos 2\pi + \cos \pi| \\ &= -(-1) + 1 + |-1 + (-1)| \\ &= 4 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

6.12.5 Caso III Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de f e g , pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$.

Neste caso pode ocorrer uma situação particular onde f e g assumem valores não negativos para todo $x \in [a, b]$ (ver Figura 6.16).

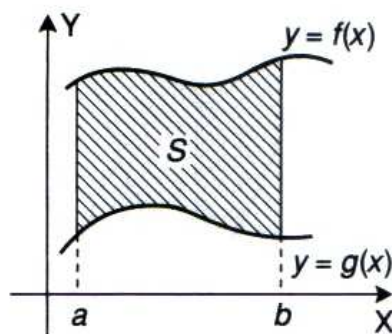


Figura 6.16

Então, a área é calculada pela diferença entre a área sob o gráfico de f e a área sob o gráfico de g , ou ainda,

$$A = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Para o caso geral, obtemos o mesmo resultado. Basta imaginar o eixo dos x deslocado de tal maneira que as funções se tornem não-negativas, $\forall x \in [a, b]$.

Observando a Figura 6.17, concluímos que:

$$\begin{aligned} A' &= A = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x)) dx \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \end{aligned}$$

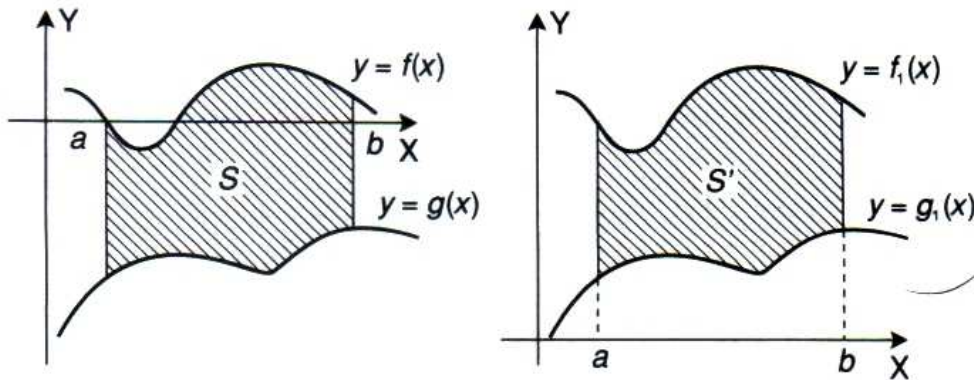


Figura 6.17

6.12.6 Exemplos

(i) Encontre a área limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$.

As curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1 e 2 (ver Figura 6.18).

No intervalo $[-1, 2]$ temos $x + 2 \geq x^2$. Então,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) \\ &= \frac{9}{2} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

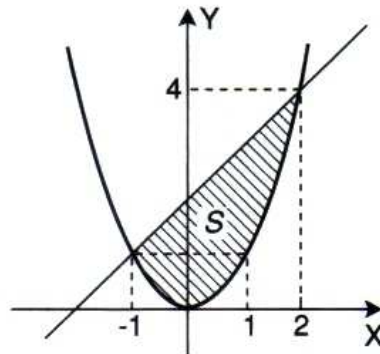


Figura 6.18

(ii) Encontre a área limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$.

As curvas $y = x^3$ e $y = x$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1 , 0 e 1 (ver Figura 6.19).

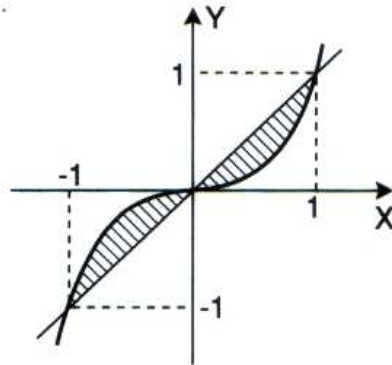


Figura 6.19

No intervalo $[-1, 0]$, $x < x^3$ e, no intervalo $[0, 1]$, $x > x^3$. Logo,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Observamos que poderíamos ter calculado a área da seguinte forma:

$$A = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{2} \text{ u.a.},$$

pois a área à esquerda do eixo dos y é igual a que se encontra à sua direita.

(iii) Encontre a área da região limitada pelas curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$.

As curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1 e 2 (ver Figura 6.20).

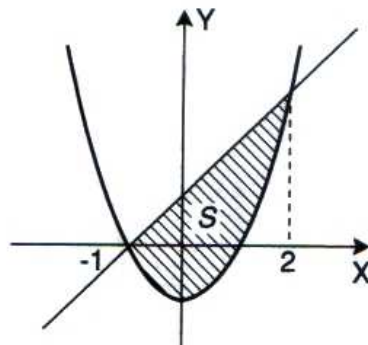


Figura 6.20

No intervalo $[-1, 2]$, $x + 1 \geq x^2 - 1$. Logo,

$$A = \int_{-1}^2 [(x + 1) - (x^2 - 1)] dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^2 (x - x^2 + 2) dx \\
 &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-1}^2 \\
 &= 9/2 \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

(iv) Encontre a área da região S limitada pelas curvas $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$. Devemos dividir a região em duas sub-regiões S_1 e S_2 (ver Figura 6.21).

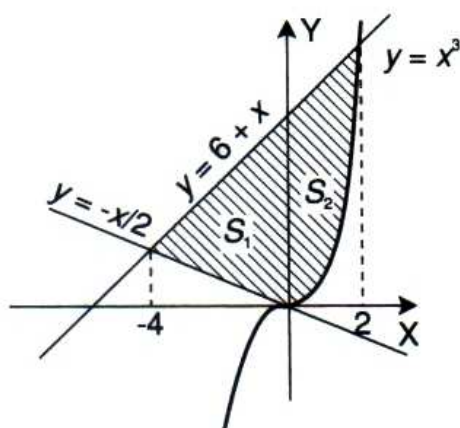


Figura 6.21

No intervalo $[-4, 0]$, a região está compreendida entre os gráficos de $y = \frac{-x}{2}$ e $y = 6 + x$ (região S_1).

No intervalo $[0, 2]$, está entre os gráficos de $y = x^3$ e $y = x + 6$ (região S_2).

Se A_1 é a área de S_1 e A_2 é a área de S_2 , então a área A procurada é dada por $A = A_1 + A_2$.

Cálculo de A_1 : No intervalo $[-4, 0]$, $6 + x \geq -\frac{x}{2}$. Assim:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_{-4}^0 [(6 + x) - (-x/2)] dx \\
 &= \int_{-4}^0 \left(6 + \frac{3x}{2} \right) dx \\
 &= \left(6x + \frac{3x^2}{4} \right) \Big|_{-4}^0 \\
 &= 12 \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

Cálculo de A_2 : No intervalo $[0, 2]$, $6 + x \geq x^3$. Então,

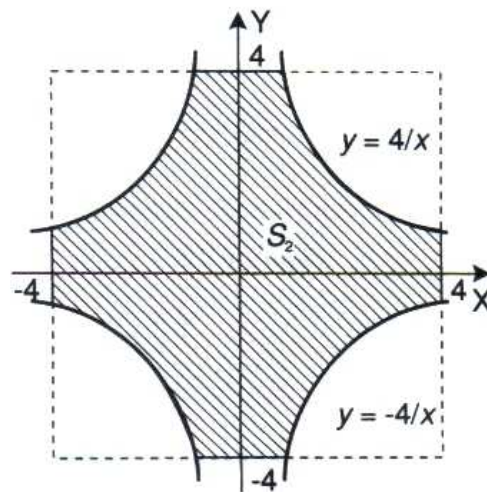
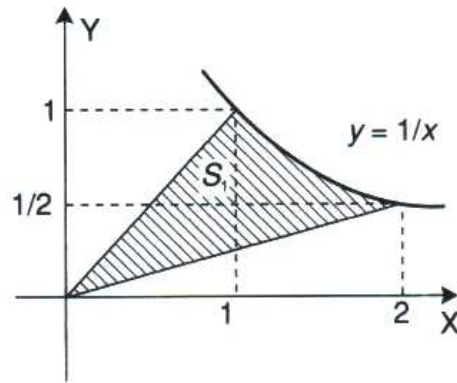
$$\begin{aligned}
 A_2 &= \int_0^2 [(6 + x) - x^3] dx \\
 &= \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 \\
 &= 10 \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

Portanto, $A = A_1 + A_2 = 12 + 10 = 22 \text{ u.a.}$

6.13 Exercícios

Nos exercícios de 1 a 29 encontrar a área da região limitada pelas curvas dadas.

1. $x = 1/2, x = \sqrt{y}$ e $y = -x + 2$
 2. $y^2 = 2x$ e $x^2 = 2y$
 3. $y = 5 - x^2$ e $y = x + 3$
 4. $y = \frac{1}{6}x^2$ e $y = 6$
 5. $y = 1 - x^2$ e $y = -3$
 6. $x + y = 3$ e $y + x^2 = 3$
 7. $x = y^2, y - x = 2, y = -2$ e $y = 3$
 8. $y = x^3 - x$ e $y = 0$
 9. $y = e^x, x = 0, x = 1$ e $y = 0$
 10. $x = y^3$ e $x = y$
 11. $y = \ln x, y = 0$ e $x = 4$
 12. $y = \ln x, x = 1$ e $y = 4$
 13. $y = \sin x$ e $y = -\sin x, x \in [0, 2\pi]$
 14. $y = \cos x$ e $y = -\cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
 15. $y = \cosh x, y = \sinh x, x = -1$ e $x = 1$
 16. $y = \operatorname{tg} x, x = 0$ e $y = 1$
 17. $y = e^{-x}, y = x + 1$ e $x = -1$
 18. $y = \sin 2x, y = x + 2, x = 0$ e $x = \pi/2$
 19. $y = -1 - x^2, y = -2x - 4$
 20. $y = \cos x, y = \frac{-3}{5\pi}x + \frac{3}{10}, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}\right]$
 21. $y = \frac{1}{|x-1|}, y = \frac{1}{x}, y = 2x + 1$ e $x = -3$
 22. $x = y^2$ e $y = -\frac{1}{2}x$
 23. $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 - 14$
 24. $x = y^2 + 1$ e $x + y = 7$
 25. $y = 2^x, y = 2^{-x}$ e $y = 4$
 26. $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x, y = \pi/2$ e $x = 0$
 26. $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x, y = \pi/2$ e $x = 0$
 27. $y = 2 \cosh \frac{x}{2}, x = -2, x = 2$ e $y = 0$
 28. $y = |x - 2|$ e $y = 2 - (x - 2)^2$
 29. $y = e^x - 1, y = -x$ e $x = 1$.
30. Encontrar a área das regiões S_1 e S_2 , vistas na figura a seguir:



6.14 Extensões do Conceito de Integral

Até o momento, calculamos integrais de funções contínuas definidas em intervalos fechados e limitados. Em diversas aplicações surge a necessidade de relaxar algumas dessas condições. Nas seções que seguem vamos estender o conceito de integral para as seguintes situações:

- integrais de funções contínuas por partes;
- integrais com limites de integração infinitos;
- integrais com integrandos infinitos.

Integrais de Funções Contínuas por Partes

6.14.1 Definição Dizemos que $f(x)$ é contínua por partes em $[a, b]$ se pudermos subdividir o intervalo $[a, b]$ em um número finito de subintervalos.

$$[a, b] = [a = x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n = b]$$

de tal forma que $f(x)$ é contínua em cada intervalo aberto (x_{i-1}, x_i) e para cada i existem os limites laterais correspondentes.

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x).$$

6.14.2 Exemplos

(i) A função $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

é uma função contínua por partes definida no intervalo $[0, 4]$. A Figura 6.22 mostra o seu gráfico.

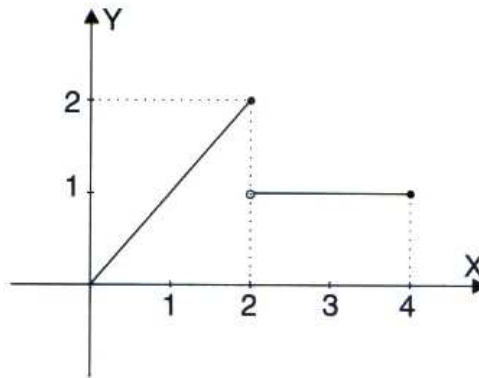


Figura 6.22

(ii) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x - [x]$$

sendo $[x]$ a parte inteira de x , isto é, o menor inteiro menor ou igual a x , é uma função contínua por partes. A Figura 6.23 mostra o gráfico dessa função.

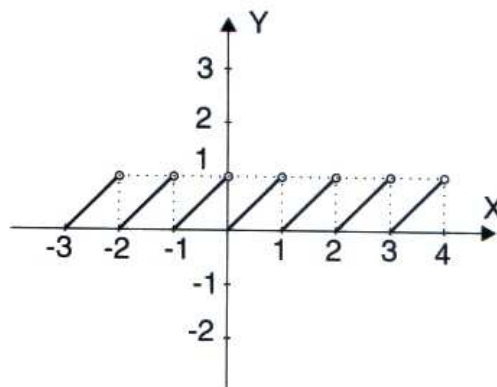


Figura 6.23

6.14.3 Cálculo da Integral de uma Função Contínua por Partes

Podemos calcular a integral definida de uma função contínua por partes como segue:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx.$$

6.14.4 Exemplos

(i) Calcular $I = \int_{-1}^3 f(x) dx$, sendo $f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 \leq x \leq 2 \\ |x - 2|, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$

$$\text{Temos } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 f(x) dx &= \int_{-1}^2 |x| dx + \int_2^3 |x-2| dx \\ &= \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^2 x dx + \int_2^3 (x-2) dx \\ &= -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^3 \\ &= \left(0 + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{4}{2} - 0 \right) + \left(\frac{9}{2} - 6 \right) - \left(\frac{4}{2} - 4 \right) \\ &= 3. \end{aligned}$$

A Figura 6.24 ilustra esse exemplo. É interessante observar que o resultado representa a área hachurada e também poderia ser obtido por geometria elementar.

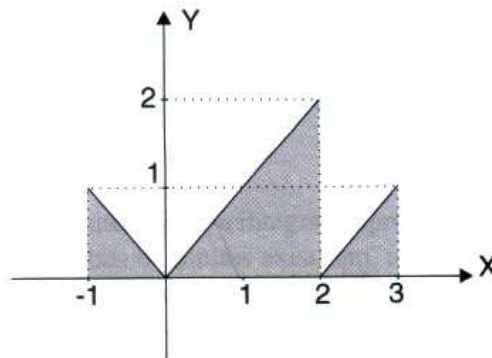


Figura 6.24

- (ii) Escreva uma expressão para $F(t) = \int_0^t f(x) dx$, sendo $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

A Figura 6.25 ilustra o gráfico de $f(x)$.

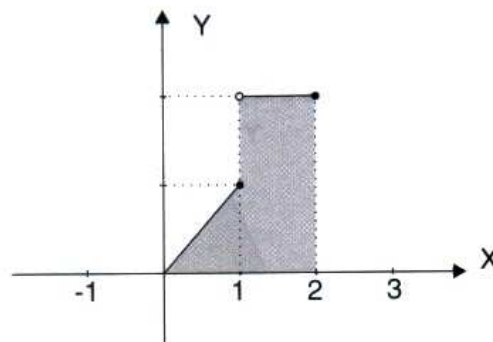


Figura 6.25

$$\text{Para } t \in [0, 1], \text{ temos: } F(t) = \int_0^t x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^t = \frac{t^2}{2}.$$

Para $t \in (1, 2]$; vem:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^t 2 dx \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + 2x \Big|_1^t \\ &= \frac{1}{2} + 2t - 2 \\ &= 2t - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Logo,

$$F(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2t - \frac{3}{2}, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

Na Figura 6.26 apresentamos o gráfico da função $F(t)$ obtida. É interessante observar que $F(t)$ é contínua, mas não é derivável no ponto $t = 1$, que é o ponto onde a função dada $f(t)$ não é contínua. Nos demais pontos ela é derivável e sua derivada é dada por $F'(t) = f(t)$.

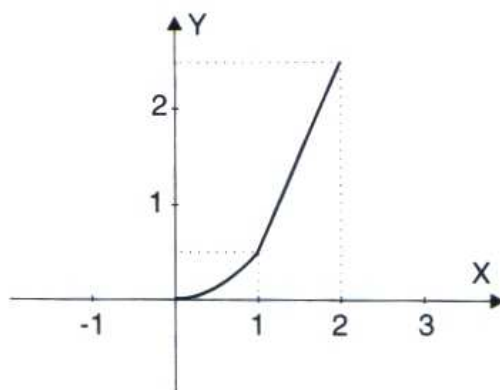


Figura 6.26

Integrais Impróprias com Limites de Integração Infinitos

Em diversas aplicações, especialmente em estatística, é necessário considerar a área de uma região que se estende indefinidamente para a direita ou para a esquerda ao longo do eixo dos x .

Na Figura 6.27 (a), (b) e (c) ilustramos as diversas situações. As áreas de tais regiões “infinitas” podem ser calculadas usando as integrais impróprias que serão definidas a seguir.

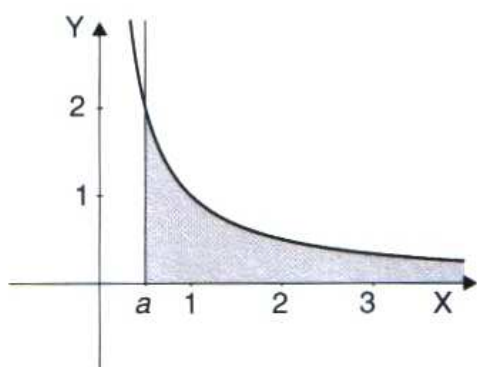


Figura 6.27(a)

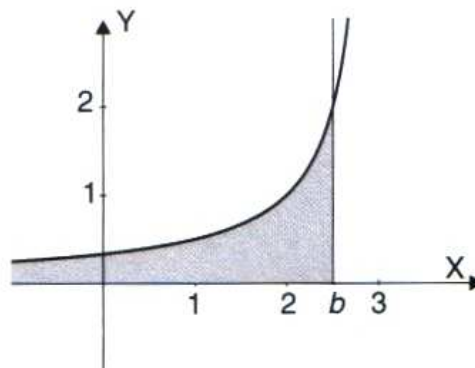


Figura 6.27(b)

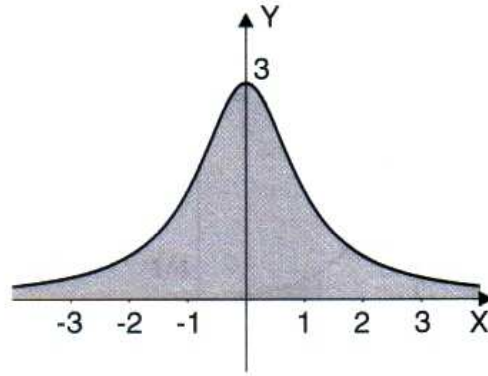


Figura 6.27(c)

6.14.5 Definição

- (a) Se f é contínua para todo $x \geq a$, definimos $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ se este limite existir.
- (b) Se f é contínua para todo $x \leq b$, definimos $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ se este limite existir.
- (c) Se f é contínua para todo x , definimos $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx$ se ambos os limites existirem.

Para os itens (a) e (b), temos que, se o limite existir, a integral imprópria é dita **convergente**. Em caso contrário, ela é dita **divergente**. No caso do item (c), se ambos os limites existirem, a integral imprópria é dita **convergente**. Se pelo menos um dos limites não existir, ela é dita **divergente**.

É importante notar que o cálculo das integrais impróprias reduz-se ao cálculo de integrais definidas e de limites. Por exemplo, no item (a), calculamos a integral definida no intervalo $[a, b]$, considerando que o limite inferior a é fixo e o limite superior b é variável. A seguir, fazemos b mover-se indefinidamente para a direita, isto é, $b \rightarrow +\infty$.

As figuras 6.28 a 6.30 ilustram as diversas situações:

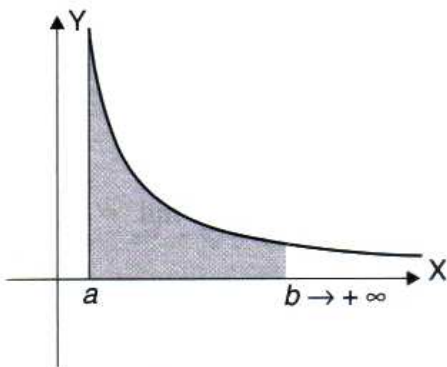


Figura 6.28

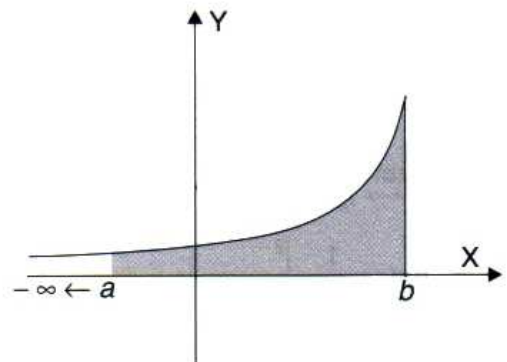


Figura 6.29

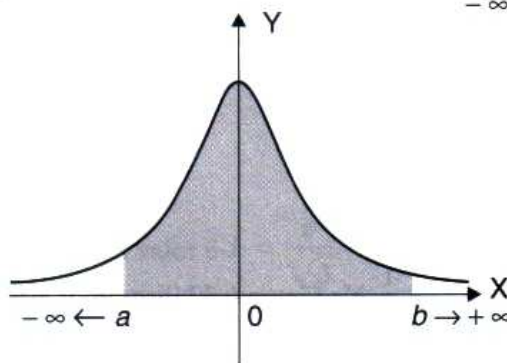


Figura 6.30

6.14.6 Exemplos

- (i) Calcular a área sob a curva $y = \frac{1}{x^2}$ à direita de $x = \frac{1}{2}$.

A Figura 6.31 mostra a área que desejamos calcular.

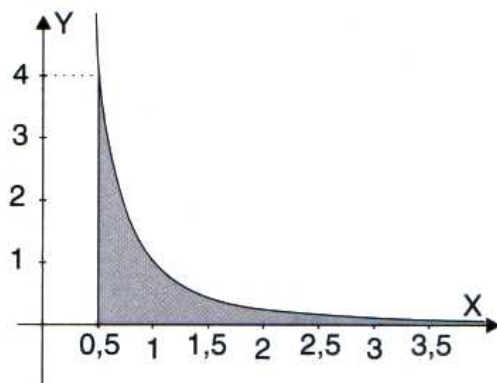


Figura 6.31

Temos:

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/2}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{1/2}^b \frac{dx}{x^2} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. -\frac{1}{x} \right|_{1/2}^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{1/2} \right] \\ &= 2. \end{aligned}$$

Portanto, a integral I converge e a área procurada é dada por $A = 2$ u.a.

- (ii) Calcular, se convergir, a integral $I = \int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2}$.

Temos:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^2 \frac{dx}{(4-x)^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left. \frac{1}{4-x} \right|_a^2 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4-a} \right] \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a integral I converge e seu valor é $I = \frac{1}{2}$. Na Figura 6.32 ilustramos este exemplo. É interessante observar que o resultado obtido representa a área da região ilimitada, situada abaixo da curva $y = \frac{1}{(4-x)^2}$, à esquerda de $x = 2$.

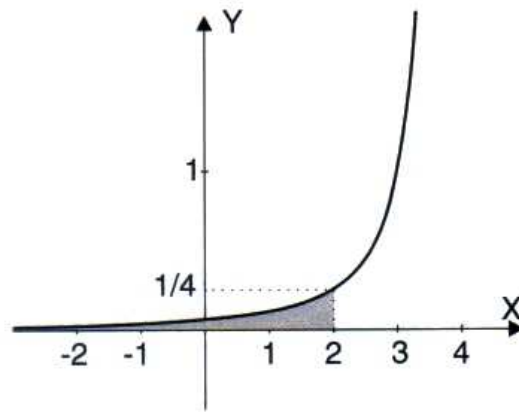


Figura 6.32

(iii) É possível encontrarmos em número finito que representa a área da região abaixo da curva $y = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$?

Devemos verificar se a integral imprópria $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ converge ou diverge.

Temos,

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln |x| \Big|_1^b$$

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln b - \ln 1]$$

$$= +\infty.$$

Logo, a integral imprópria diverge e, dessa forma, a resposta à pergunta formulada é não.

(iv) Calcular, se convergir, $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 3}$.

Temos:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2 + 3} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 3} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{3}} \Big|_{-a}^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{3}} \Big|_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(0 - \operatorname{arc\,tg} \frac{-a}{\sqrt{3}} \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} (\operatorname{arc\,tg} b - 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(- \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Logo, a integral imprópria converge e seu valor é $I = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

(v) Verificar se $I = \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x dx$ converge ou diverge.

Temos:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} -\cos x \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [-\cos b + 1]. \end{aligned}$$

Como $\lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b$ não existe, segue que a integral imprópria diverge.

(vi) Uma aplicação interessante das integrais impróprias é estimar a quantidade total de óleo ou gás natural que será produzida por um poço, dada sua taxa de produção.

Vamos supor que engenheiros de produção estimaram que um determinado poço produzirá gás natural a uma taxa de $f(t) = 700e^{-0,2t}$ milhares de metros cúbicos mensais, onde t é o tempo desde o início da produção.

Estimar a quantidade total de gás natural que poderá ser extraída desse poço.

Como queremos conhecer o potencial de produção do poço, assumimos que o mesmo será operado indefinidamente. Então, a quantidade total de gás natural que poderá ser extraída é dada por:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} 700e^{-0,2t} \, dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T 700 e^{-0,2t} \, dt \\ &= 700 \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-0,2t} \, dt \end{aligned}$$

Vamos resolver primeiro a integral indefinida

$$I_1 = \int e^{-0,2t} \, dt.$$

Fazendo a substituição $u = -0,2t$, $du = -0,2dt$, vem:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int e^u \cdot \frac{du}{-0,2} \\ &= -5 \int e^u \cdot du \\ &= -5e^u + c \\ &= -5e^{-0,2t} + c. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I = 700 \lim_{T \rightarrow +\infty} -5e^{-0,2t} \Big|_0^T$$

$$= 700 \left[\lim_{T \rightarrow +\infty} -5e^{-0,2T} + 5 \right]$$

$$= 3.500.$$

Logo, o potencial de produção desse poço é de 3.500 milhares de metros cúbicos de gás natural.

Integrais Impróprias com Integrandos Infinitos

Na seção anterior introduzimos as integrais impróprias com limites de integração infinitos, possibilitando calcular área de regiões ilimitadas, como exemplificamos nas Figuras 6.27.

Na Figura 6.33 ilustramos outras regiões ilimitadas cuja área, em alguns casos, pode ser calculada usando integrais impróprias.

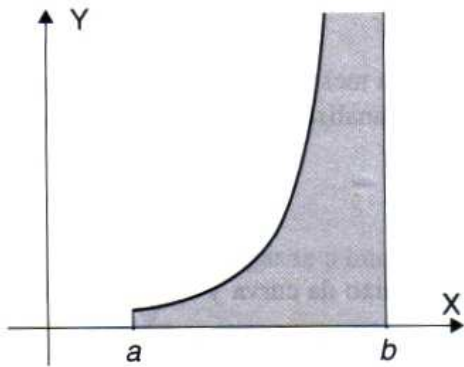


Figura 6.33(a)

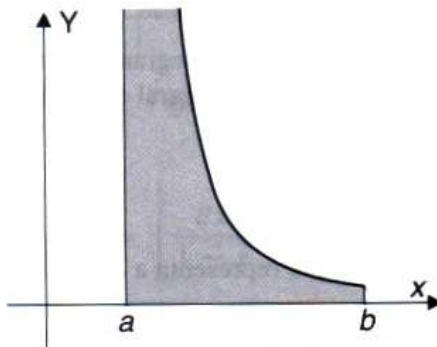


Figura 6.33(b)

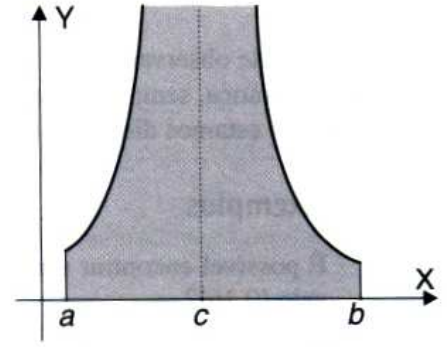


Figura 6.33(c)

Temos a seguinte definição.

6.14.7 Definição

(a) Se f é contínua em $[a, b)$ e $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm \infty$, definimos:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{s \rightarrow b^-} \int_a^s f(x) dx$$

se este limite existir.

(b) Se f é contínua em $(a, b]$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$ definimos:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^b f(x) dx$$

se este limite existir.

(c) Se f é contínua para todo $x \in [a, b]$, exceto para $x = c \in (a, b)$, e tem limites laterais infinitos em c , definimos:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{s \rightarrow c^-} \int_a^s f(x) dx + \lim_{r \rightarrow c^+} \int_r^b f(x) dx$$

se ambos os limites existirem.

Para os itens (a) e (b), temos que, se o limite existir, a integral imprópria é dita **convergente**. Em caso contrário, ela é dita **divergente**. No caso do item (c), se ambos os limites existirem, a integral imprópria é dita **convergente**. Se pelo menos um dos limites não existir, ela é dita **divergente**.

Nas figuras 6.34 a 6.36 ilustramos as três situações.

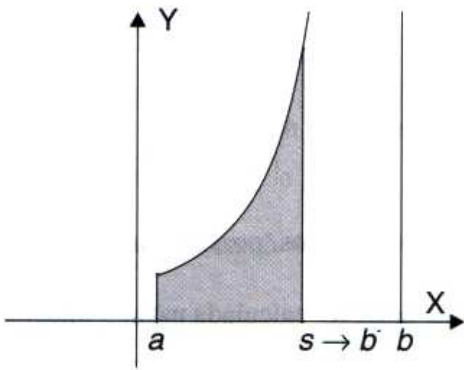


Figura 6.34

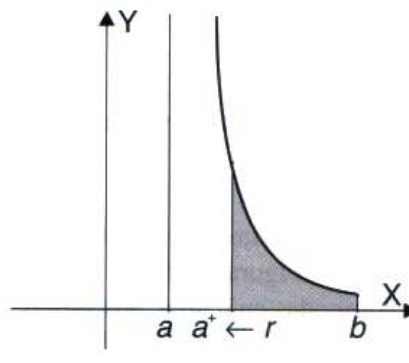


Figura 6.35

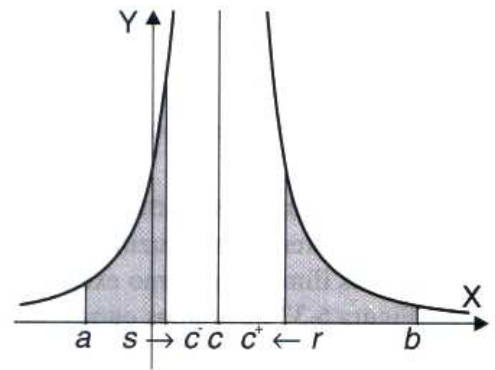


Figura 6.36

É importante observar que as integrais impróprias com integrandos infinitos têm a mesma notação que as integrais definidas. Na prática, sempre que nos depararmos com uma integral definida, devemos analisar a função integrando para verificar se não estamos diante de uma integral imprópria.

6.14.8 Exemplos

- (i) É possível encontrar um número finito que representa a área da região abaixo da curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, no intervalo $(0, 16]$?

Devemos verificar se a integral imprópria $I = \int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge ou diverge.

Temos:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_r^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_r^{16} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} (8 - 2\sqrt{r}) \\ &= 8. \end{aligned}$$

Logo, a integral imprópria converge e a área da região dada é $A = 8$ u.a. A Figura 6.37 ilustra este exemplo.

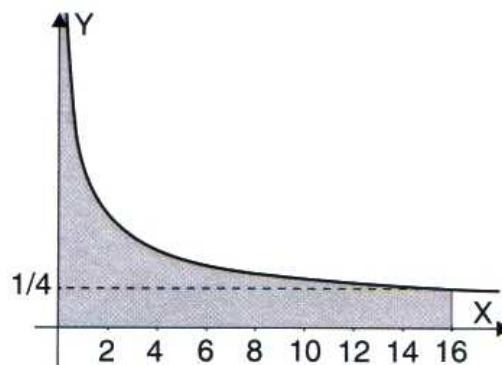


Figura 6.37

- (ii) É possível encontrar um número finito que representa a área da região abaixo da curva para $y = \frac{1}{1-x}$, no intervalo $[0, 1)$?

Na Figura 6.38 apresentamos a região dada.

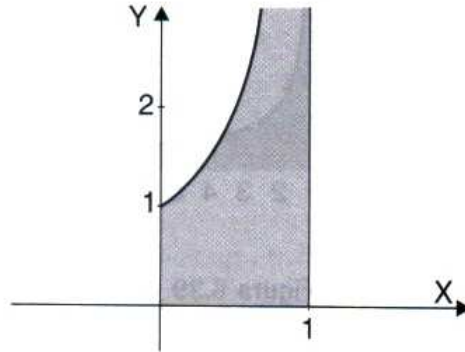


Figura 6.38

Devemos investigar se a integral imprópria $I = \int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ converge ou diverge.

Temos:

$$I = \lim_{s \rightarrow 1^-} \int_0^s \frac{dx}{1-x}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 1^-} -\ln(1-x) \Big|_0^s$$

$$= \lim_{s \rightarrow 1^-} [-\ln(1-s) + \ln 1]$$

$$= +\infty.$$

Portanto, a integral imprópria diverge, não sendo possível encontrar um número finito que representa a área da região dada.

(iii) Investigar a integral $I = \int_{-2}^7 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$.

Neste exemplo a função integrando é contínua, exceto no ponto $x = 1$. Além disso, ela tem limites laterais infinitos nesse ponto.

Temos, então,

$$I = \lim_{s \rightarrow 1^-} \int_{-2}^s \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{r \rightarrow 1^+} \int_r^7 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 1^-} 3(x-1)^{1/3} \Big|_{-2}^s + \lim_{r \rightarrow 1^+} 3(x-1)^{1/3} \Big|_r^7$$

$$= \lim_{s \rightarrow 1^-} [3(s-1)^{1/3} - 3(-3)^{1/3}] + \lim_{r \rightarrow 1^+} [3 \cdot 6^{1/3} - 3(r-1)^{1/3}]$$

$$= (0 + 3\sqrt[3]{3}) + (3\sqrt[3]{6} - 0)$$

$$= 3(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{6}).$$

Logo, a integral imprópria converge e seu valor é $3(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{6})$. A Figura 6.39 ilustra este exemplo.

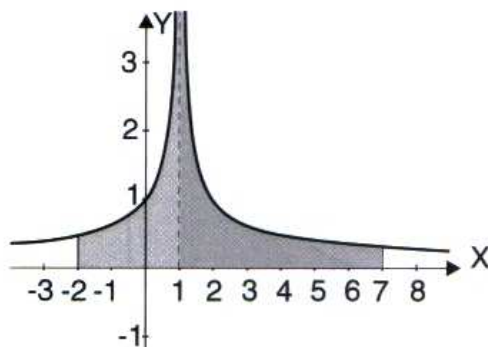


Figura 6.39

(iv) Investigar a integral $I = \int_{-2}^7 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Como no exemplo anterior a função integrando é contínua em todos os pontos do intervalo de integração, exceto no ponto $x = 1$, onde tem limites laterais infinitos. Temos:

$$I = \lim_{s \rightarrow 1^-} \int_{-2}^s \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{r \rightarrow 1^+} \int_r^7 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Vamos ilustrar, neste exemplo, como é interessante calcular separadamente os limites, pois basta um deles não existir para a integral imprópria ser divergente.

Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1^-} \int_{-2}^s \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{s \rightarrow 1^-} \left. \frac{-1}{x-1} \right|_{-2}^s \\ &= \lim_{s \rightarrow 1^-} \left(\frac{-1}{s-1} + \frac{1}{-2-1} \right) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Logo, a integral imprópria diverge.

6.15 Exercícios

1. Dar um exemplo de uma função contínua por partes definidas no intervalo $[-4, 4]$.
2. Calcular a integral das seguintes funções contínuas por partes definidas nos intervalos dados. Fazer o gráfico das funções dadas, verificando que os resultados encontrados são coerentes.

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2, & -2 \leq x \leq -1 \\ -x, & -1 < x \leq 1 \\ x^2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 2, & -3 \leq x \leq -1 \\ |x|, & -1 < x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

3. Calcular a integral das seguintes funções contínuas por partes.

$$a) f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 + \cos x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & 0 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^2, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \cos 3x, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

4. Encontrar a área sob a curva $y = e^{-x}$, $x \geq 0$.

5. Investigar a integral imprópria $\int_7^{+\infty} \frac{1}{(x-5)^2} dx$.

6. Mostrar que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ é divergente.

7. Verificar se a integral $\int_{-\infty}^0 e^{5x} dx$ converge. Em caso positivo, determinar seu valor.

8. Dar um exemplo de uma função f , tal que $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b f(x) dx$ existe, mas a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ é divergente.

9. Encontrar a área sob o gráfico da curva $y = (x+1)^{-3/2}$, $x \geq 15$.

10. Encontrar a área sob o gráfico de $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ para $x \geq 1$.

11. Engenheiros da Petrobras estimaram que um poço de petróleo pode produzir óleo a uma taxa de: $P(t) = 80e^{-0,04t} - 80e^{-0,1t}$ milhares de barris por mês, onde t representa o tempo, medido em meses, a partir do momento em que foi feita a estimativa. Determinar o potencial de produção de óleo desse poço a partir dessa data.

12. Investigar as integrais impróprias seguintes.

$$a) \int_{-\infty}^0 e^x dx$$

$$b) \int_{-\infty}^0 x.e^{-x^2} dx$$

$$c) \int_1^{+\infty} \ln x dx$$

$$d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{9+x^2}$$

$$e) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

$$f) \int_0^{+\infty} \frac{4dx}{x+1}$$

$$g) \int_0^{+\infty} r \cdot e^{-rx} dx, r > 0$$

$$h) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x^3}{(x^4+3)^2} dx$$

13. Determinar a área sob a curva $y = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$, no intervalo $[0, 4)$.

14. Investigar as integrais impróprias.

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$b) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$

$$c) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$d) \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$e) \int_{-2}^2 \frac{x dx}{1-x}$$

$$f) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$g) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^3}$$

15. Verificar que $\lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^r \frac{dx}{x} + \int_r^1 \frac{dx}{x} \right] = 0$, mas a integral imprópria $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ diverge.

16. Encontre os valores de n para os quais a integral $\int_0^4 x^n dx$ converge ($n \in \mathbb{Z}$).

7

Métodos de Integração

Neste capítulo, apresentaremos, inicialmente, alguns métodos utilizados para resolver integrais envolvendo funções trigonométricas.

A seguir, veremos a integração por substituição trigonométrica e a integração de funções racionais por frações parciais.

Finalmente, abordaremos as integrais racionais de seno e cosseno usando a substituição universal e as integrais envolvendo raízes quadradas de trinômios do segundo grau.

7.1 Integração de Funções Trigonométricas

7.1.1 As integrais $\int \sen u \, du$ e $\int \cos u \, du$

As integrais indefinidas da função seno e da função cosseno estão indicadas na tabela da Seção 6.1.9. Temos:

$$\int \sen u \, du = -\cos u + C \text{ e}$$

$$\int \cos u \, du = \sen u + C.$$

7.1.2 Exemplos Calcular as integrais:

(i) $\int (x + 1) \sen (x + 1)^2 \, dx.$

Usando o método da substituição (Seção 6.3), fazemos $u = (x + 1)^2$. Então, $du = 2(x + 1) \, dx$. Temos:

$$\begin{aligned} \int (x + 1) \sen (x + 1)^2 \, dx &= \int \frac{1}{2} \sen u \, du \\ &= -\frac{1}{2} \cos u + C \\ &= -\frac{1}{2} \cos (x + 1)^2 + C. \end{aligned}$$

(ii) $\int_0^1 e^{2x} \cos (e^{2x}) \, dx.$

Vamos, primeiro, encontrar a integral indefinida:

$$I = \int e^{2x} \cos (e^{2x}) \, dx.$$

Para isso, fazemos a substituição $u = e^{2x}$. Temos, então, $du = 2e^{2x}dx$. Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2} \cos u \, du \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} u + C \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} (e^{2x}) + C. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{2x} \cos (e^{2x}) \, dx &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} (e^{2x}) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{sen} e^2 - \operatorname{sen} 1). \end{aligned}$$

7.1.3 As integrais $\int \operatorname{tg} u \, du$ e $\int \operatorname{cotg} u \, du$

As integrais indefinidas da função tangente e da função cotangente são resolvidas usando o método da substituição, como foi visto no Exemplo 6.3.1 (iv). Temos:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} u \, du &= \int \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \, du \\ &= -\ln |\cos u| + C \\ &= \ln |(\cos u)^{-1}| + C \\ &= \ln |\sec u| + C; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cotg} u \, du &= \int \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} \, du \\ &= \ln |\operatorname{sen} u| + C. \end{aligned}$$

7.1.4 Exemplos Calcular as integrais:

(i) $\int \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx.$

Fazemos $u = \sqrt{x}$. Então, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$. Temos:

$$\int \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx = 2 \ln |\sec \sqrt{x}| + C.$$

(ii) $\int \frac{\operatorname{cotg} (\ln x)}{x} \, dx.$

Fazemos $u = \ln x$. Então, $du = 1/x \, dx$. Temos:

$$\int \frac{\operatorname{cotg} (\ln x)}{x} \, dx = \ln |\operatorname{sen} (\ln x)| + C.$$

7.1.5 As integrais $\int \sec u \, du$ e $\int \operatorname{cosec} u \, du$

Nestas integrais usamos um artifício de cálculo para podermos aplicar o método da substituição.

Na integral da secante, multiplicamos e dividimos o integrando por $\sec u + \operatorname{tg} u$. Temos:

$$\int \sec u \, du = \int \frac{\sec u (\sec u + \operatorname{tg} u)}{\sec u + \operatorname{tg} u} \, du.$$

Fazemos $v = \sec u + \operatorname{tg} u$. Então, $dv = (\sec u \cdot \operatorname{tg} u + \sec^2 u) \, du$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \sec u \, du &= \int \frac{dv}{v} \\ &= \ln |v| + C \\ &= \ln |\sec u + \operatorname{tg} u| + C. \end{aligned}$$

Na integral da cossecante, multiplicamos e dividimos o integrando por $\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u$. Temos:

$$\int \operatorname{cosec} u \, du = \int \frac{\operatorname{cosec} u (\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u)}{\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u} \, du.$$

Fazemos $v = \operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u$. Então,

$$\begin{aligned} dv &= [-\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u - (-\operatorname{cosec}^2 u)] \, du \\ &= (\operatorname{cosec}^2 u - \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u) \, du. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cosec} u \, du &= \int \frac{dv}{v} \\ &= \ln |v| + C \\ &= \ln |\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C. \end{aligned}$$

7.1.6 Exemplos Calcular as integrais:

(i) $\int \sec (5x - \pi) \, dx.$

Fazemos $u = 5x - \pi$. Então, $du = 5 \, dx$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \sec (5x - \pi) \, dx &= \int \frac{1}{5} \sec u \, du \\ &= \frac{1}{5} \ln |\sec (5x - \pi) + \operatorname{tg} (5x - \pi)| + C. \end{aligned}$$

(ii) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}.$

Vamos, primeiro, encontrar a integral indefinida

$$I = \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}.$$

Para isso, fazemos $u = 2\theta$. Então, $du = 2d\theta$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} &= \int \operatorname{cosec} 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec} u du \\ &= \frac{1}{2} \ln |\operatorname{cosec} 2\theta - \operatorname{cotg} 2\theta| + C. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} &= \frac{1}{2} \ln |\operatorname{cosec} 2\theta - \operatorname{cotg} 2\theta| \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{cotg} \frac{2\pi}{3} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} - \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

7.2 Integração de Algumas Funções Envolvendo Funções Trigonômicas

7.2.1 As integrais $\int \operatorname{sen}^n u du$ e $\int \cos^n u du$, onde n é um número inteiro positivo

Nestas integrais, podemos usar artifícios de cálculo com auxílio das identidades trigonométricas.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \tag{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \tag{3}$$

visando a aplicação do método da substituição. Os exemplos que seguem ilustram os dois possíveis casos: n é um número ímpar ou n é um número par.

Estas integrais também podem ser resolvidas com o auxílio das fórmulas de redução ou recorrência, conforme veremos na Seção 7.2.11.

7.2.2 Exemplos Calcular as integrais:

(i) $\int \cos^5 x dx.$

Vamos, inicialmente, preparar o integrando para a aplicação do método da substituição. Observamos que o artifício que usaremos é válido sempre que n for um número ímpar.

Fatorando convenientemente o integrando e aplicando a identidade (1), temos: