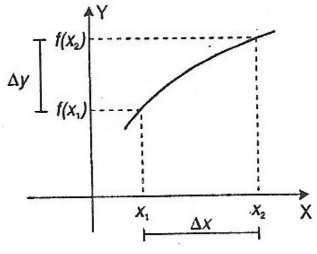
Capítulo 5: Aplicações da Derivada

5.1- Acréscimos e Diferenciais

1- Acréscimos



Seja $y = f(x)$ uma função.

Se x varia de x_1 a x_2, definimos o acréscimo de x, denotado por Δx, como $\Delta x = x_2 - x_1$.

A variação de x origina uma correspondente variação de y, denotada por Δy, dada por:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

2- Diferenciais

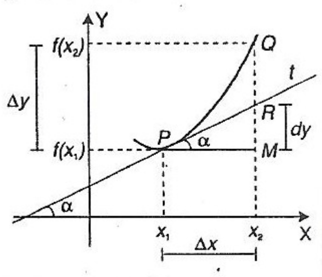
Sejam $y = f(x)$ uma função derivável e Δx um acréscimo de x.

Definimos:

a) A diferencial da variável independente x, denotada por dx, como $dx = \Delta x$.
b) A diferencial da variável dependente y, denotada por dy, como $dy = f'(x).\Delta x = f'(x).dx$.

Observação: De acordo com a definição anterior, podemos escrever $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. A notação $\frac{dy}{dx}$, já usada para $f'(x)$, pode agora ser considerada um quociente entre duas diferenciais.

3- Interpretação Geométrica



Consideremos a figura ao lado, que representa o gráfico de uma função $y = f(x)$ derivável.

O acréscimo Δx que define a diferencial dx está geometricamente representado pela medida do segmento PM.

O acréscimo Δy está representado pela medida do segmento MQ.

A reta t é tangente à curva no ponto P. Esta reta corta a reta $x = x_2$ no ponto R, formando o triângulo retângulo PMR.

A inclinação desta reta t é dada por $f'(x_1) = tg\alpha = \frac{\overline{MR}}{\overline{PM}}$. Usando o fato de que $f'(x_1) = \frac{dy}{dx}$, concluímos que $dy = \overline{MR}$, já que $\overline{PM} = dx$.

Observamos que, quando Δx torna-se muito pequeno, o mesmo ocorre com a diferença $\Delta y - dy$. Usamos esse fato em exemplos práticos, considerando $\Delta y \cong dy$, desde que o Δx considerado seja um valor pequeno.

4- Exemplos

1. Se $y = 2x^2 - 6x + 5$, calcule o acréscimo Δy para $x = 3$ e $\Delta x = 0{,}01$.

2. Se $y = 6x^2 - 4$, calcule Δy e dy para $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}001$.

3. Calcule um valor aproximado para $\sqrt[3]{65{,}5}$ usando diferenciais.

4- Obtenha o volume de uma fina coroa cilíndrica de altura 12 m, raio interior 7 m e espessura 0,05 m. Qual o erro decorrente se resolvermos usando diferenciais?

5.2- Exercícios

Página 178 do livro texto (números 26 ao 36).

5.3- Taxa de Variação – Taxas Relacionadas

1- Definições

Dada uma função $y = f(x)$, quando a variável independente varia de x a $x + \Delta x$, a correspondente variação de *y* será $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

O quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ representa a taxa (razão) média de variação de *y* em relação a *x*.

A derivada $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ é a taxa instantânea de variação de *y* em relação a *x* ou, simplesmente, taxa de variação de *y* em relação a *x*.

2- Exemplos

1. Quando um corpo se move em uma trajetória qualquer com a equação do movimento $s = s(t)$, a sua velocidade é dada por $v = s'(t)$, que é a taxa de variação da função $s(t)$ por unidade de variação do tempo *t*. A aceleração é dada por $a(t) = v'(t)$; assim $a(t)$ é a taxa de variação da função $v(t)$ por unidade de variação do tempo *t*.

2. Sejam *A* a área de um quadrado e *l* seu lado. Determine:

a) a taxa de variação média da área de um quadrado em relação ao lado quando este varia de 2,5 a 3 m;

b) a taxa de variação da área em relação ao lado quando este mede 4m.

3. Uma cidade X é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado por $f(t) = 64t - \dfrac{t^3}{3}$.

a) Qual a razão (taxa) da expansão da epidemia no tempo $t = 4$?

b) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo $t = 8$?

c) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no 5º dia?

4. Analistas de produção verificaram que em uma montadora, o número de peças produzidas nas primeiras t horas diárias de trabalho é dado por $f(t) = \begin{cases} 50(t^2 + t), & \text{para } 0 \leq t \leq 4 \\ 200(t + 1), & \text{para } 4 \leq t \leq 8 \end{cases}$.

a) Qual a razão de produção (em unidades por hora) após 3 horas de trabalho? E após 7 horas?

b) Quantas peças são produzidas na 8ª hora de trabalho?

5. Um reservatório de água está sendo esvaziado para limpeza. A quantidade de água no reservatório, em litros, t horas após o escoamento ter começado é dada por $V = 50(80 - t)^2$. Determine:

a) a taxa de variação média do volume de água no reservatório durante as 10 primeiras horas de escoamento;

b) a taxa de variação do volume de água no reservatório após 8 horas de escoamento;

c) a quantidade de água que sai do reservatório nas 5 primeiras horas de escoamento.

Taxas Relacionadas: Em muitas situações, a quantidade em estudo é dada por uma função composta. Nestes casos, para determinar a taxa de variação devemos usar a regra da cadeia.

6. Um quadrado de lado l está se expandindo segundo a equação $l = 2 + t^2$, onde a variável t representa o tempo. Determinar a taxa de variação da área desse quadrado no tempo $t = 2$.

7. O raio de uma circunferência cresce à razão de 21 cm/s. Qual a taxa de crescimento do comprimento da circunferência em relação ao tempo?

8. Um ponto $P(x, y)$ se move ao longo do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$. Se a abscissa varia à razão de 4 unidades por segundo, qual é a taxa de variação da ordenada quando a abscissa é $x = \frac{1}{10}$?

9. Acumula-se areia em um monte com a forma de um cone onde a altura é igual ao raio da base. Se o volume de areia cresce a uma taxa de 10 m^3/h, a que razão aumenta a área da base quando a altura do monte é de 4 m?

10. Uma escada de 5m está apoiada a uma parede vertical. Num dado instante, o pé da escada está a 3m da base da parede da qual se afasta à razão de 1m/s. Com que velocidade se move o topo da escada ao longo da parede neste instante?

5.4- Exercícios

Páginas 191 e 192 do livro texto (números 1 ao 16).

5.5- Análise do Comportamento de uma Função

Dada uma curva $y = f(x)$, usaremos a derivada para obter alguns dados acerca da curva. Por exemplo, discutiremos os pontos de máximos e mínimos, os intervalos onde a curva é crescente ou decrescente, etc. Esses dados nos levam a um método geral para construir esboços de gráficos de funções.

5.5.1- Máximos e Mínimos

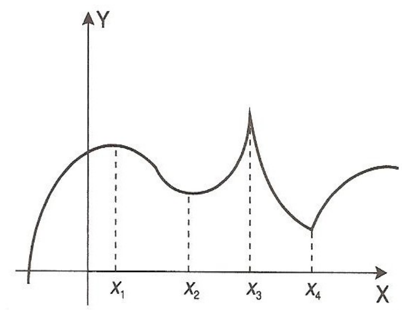
Definições:

Uma função f tem um máximo relativo (local) em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in I \cap D(f)$.

Uma função f tem um mínimo relativo (local) em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$, para todo $x \in I \cap D(f)$.

Se f tem um máximo relativo (ou mínimo relativo) em c, então o ponto $(c, f(c))$ é chamado ponto extremo da função e $f(c)$ é chamado máximo relativo (ou mínimo relativo).

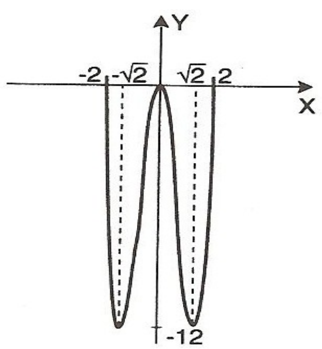
Exemplos:



Os pontos de abscissa x_1, x_2, x_3 e x_4 são pontos extremos da função f representada pelo gráfico ao lado.

$f(x_1)$ e $f(x_3)$ são máximos relativos.

$f(x_2)$ e $f(x_4)$ são mínimos relativos.



A função $f(x) = 3x^4 - 12x^2$ tem um máximo relativo em $c_1 = 0$, pois existe o intervalo $(-2,2)$ tal que $f(0) \geq f(x)$, para todo $x \in (-2,2)$.

Em $c_2 = -\sqrt{2}$ e $c_3 = \sqrt{2}$, a função tem mínimos relativos, pois $f(-\sqrt{2}) \leq f(x)$, para todo $x \in (-2,0)$, e $f(\sqrt{2}) \leq f(x)$, para todo $x \in (0,2)$.

Teorema

Seja f uma função definida no intervalo aberto (a,b). Se f tem um extremo relativo em c, onde $a < c < b$, e se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

Demonstração:

Suponhamos que f tenha um ponto de máximo relativo em c e que $f'(c)$ existe. Então,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Como f tem um ponto de máximo relativo em c, se x estiver suficientemente próximo de c, temos $f(c) \geq f(x)$, ou seja, $f(x) - f(c) \leq 0$.

Se $x \to c^+$, temos $x - c > 0$ e, assim, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$. Logo, $f'(c) = \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$. (I)

Se $x \to c^-$, temos $x - c < 0$ e, assim, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$. Logo, $f'(c) = \lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$. (II)

De (I) e (II) concluímos que $f'(c) = 0$.

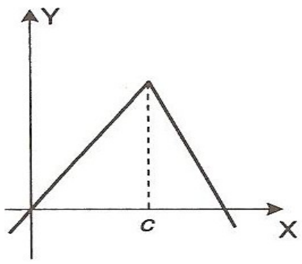
Se f tem um ponto de mínimo relativo em *c*, a demonstração é análoga.

Observações:

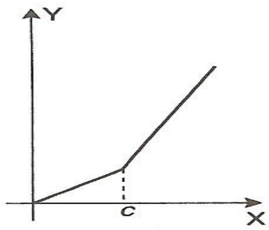
1- Geometricamente, se f tem um extremo relativo em $c \in$ (a, b) e se $f'(c)$ existe, então o gráfico de $y = f(x)$ tem uma reta tangente horizontal no ponto onde $x = c$.

2- Se $f'(c) = 0$, a função pode ter ou não um extremo relativo em *c*. Por exemplo, se $f(x) = x^3$ temos $f'(0) = 0$ e f não tem um extremo relativo em 0; se $g(x) = x^2$ temos $g'(0) = 0$ e g tem um extremo relativo em 0.

3- Se $f'(c)$ não existe, a função pode ter ou não um extremo relativo em *c*.



$f'(c)$ não existe e f tem extremo relativo em c



$f'(c)$ não existe e f não tem extremo relativo em c

4- O ponto $c \in D(f)$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe é chamado ponto crítico de *f*.

5- Dizemos que $f(c)$ é o máximo absoluto da função *f* se $f(c) \geq f(x)$ para todo *x* no domínio de f.
Dizemos que $f(c)$ é o mínimo absoluto da função *f* se $f(c) \leq f(x)$ para todo *x* no domínio de f.
Exemplos:

A função $f(x) = 3x$ definida em $[1,3)$ tem um mínimo absoluto igual a 3 e não admite máximo absoluto nesse intervalo.

A função $f(x) = -x^2 + 2$ possui máximo absoluto igual a 2 e mínimo absoluto igual a –7 quando definida em $[-3,2]$.

A função $f(x) = x^2 + 6x - 3$ tem mínimo absoluto igual a – 12 em *c* = – 3, pois $f(-3) = -12 \leq f(x)$, para todo $x \in R$.

A função $f(x) = -x^2 + 6x - 3$ tem máximo absoluto igual a 6 em *c* = 3, pois $f(3) = 6 \geq f(x)$, para todo $x \in R$.

Teorema (Weierstrass)
Seja $f : [a,b] \to R$ uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a,b]$. Então *f* assume máximo absoluto e mínimo absoluto em $[a,b]$.

Observação: Note que os candidatos a c_M (abscissa do ponto de máximo absoluto) e c_m (abscissa do ponto de mínimo absoluto) são os pontos críticos de *f* em (a,b) juntamente com os extremos *a* e *b* do intervalo $[a,b]$.

5.5.2- Teoremas sobre Derivadas

Teorema de Rolle
Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b).
Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração:
Se f é constante em $[a,b]$ então $f'(c) = 0$, para todo $c \in (a,b)$.
Seja f não constante. Como f é contínua em $[a,b]$, pelo teorema de Weierstrass, f atinge seu máximo M e seu mínimo m em $[a,b]$. Se ambos fossem atingidos nas extremidades e sendo $f(a) = f(b)$ teríamos $M = m$ e, assim, f seria constante. Logo, f atingirá seu máximo M ou seu mínimo m em $c \in (a,b)$. Como f é derivável em (a,b), concluímos que $f'(c) = 0$.

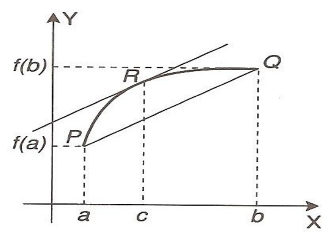
Teorema do Valor Médio
Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b).
Então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demonstração:
Sejam $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$.
A equação da reta que passa pelos pontos P e Q é dada por: $y - f(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.
Fazendo $y = h(x)$ temos: $h(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.
Como $h(x)$ é uma função polinomial, $h(x)$ é contínua e derivável em todos os pontos.
Consideremos a função $g(x) = f(x) - h(x)$. Esta função determina a distância vertical entre um ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f e o ponto correspondente na reta secante PQ.
Temos: $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$.
A função $g(x)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle em $[a,b]$, pois:

- $g(x)$ é contínua em $[a,b]$ já que $f(x)$ e $h(x)$ são contínuas em $[a,b]$;
- $g(x)$ é derivável em (a,b) já que $f(x)$ e $h(x)$ são deriváveis em (a,b);
- $g(a) = 0 = g(b)$.

Portanto, existe um ponto $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$. Como $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, temos $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Segue que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Observação: Geometricamente, o teorema do valor médio estabelece que se a função $y = f(x)$ é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe pelo menos um ponto $c \in (a,b)$ onde a tangente à curva é paralela à reta que passa pelos pontos $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$.



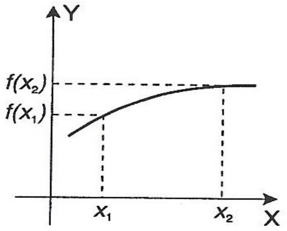
5.5.3- Funções Crescentes e Decrescentes

Definições:

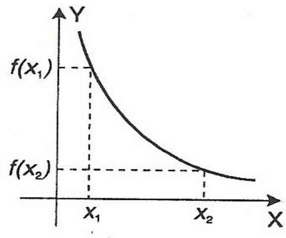
Dizemos que uma função *f*, definida em um intervalo *I*, é crescente neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.

Dizemos que uma função *f*, definida em um intervalo *I*, é decrescente neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

Se uma função é crescente ou decrescente num intervalo, dizemos que é monótona neste intervalo.



f crescente



f decrescente

Proposição
Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável no intervalo (a,b).

a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é crescente em $[a,b]$.
b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é decrescente em $[a,b]$.

Demonstração:
Sejam $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que $x_1 < x_2$. Então f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2). Pelo teorema do valor médio, segue que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

a) Por hipótese, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$. Assim $f'(c) > 0$ e, como $x_1 < x_2$, temos $x_2 - x_1 > 0$. Concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$. Logo, f é crescente em $[a,b]$.

b) Por hipótese, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$. Então $f'(c) < 0$ e, como $x_1 < x_2$, temos $x_2 - x_1 > 0$. Concluímos que $f(x_2) - f(x_1) < 0$, isto é, $f(x_2) < f(x_1)$. Logo, f é decrescente em $[a,b]$.

Observação: A hipótese da continuidade de f no intervalo fechado $[a,b]$ é muito importante.
Por exemplo, seja $f:[0,1] \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{para } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{para } x = 1 \end{cases}$. Temos que $f'(x) = 1 > 0$ para $x \in (0,1)$ e, no entanto, f não é crescente em $[0,1]$.
A proposição não pode ser aplicada, pois f não é contínua em 1.

Exemplos:
Determinar os intervalos nos quais as seguintes funções são crescentes ou decrescentes.

a) $f(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) = x^2 - x + 5$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4, & \text{se } x \le 1 \\ -x - 1, & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$

5.5.4- Critérios para determinar os extremos de uma função

Teorema 1 (Critério da derivada primeira para determinação de extremos de uma função)
Seja *f* uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), exceto possivelmente num ponto *c*.

a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então *f* tem um máximo relativo em *c*.
b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então *f* tem um mínimo relativo em *c*.

Demonstração:
a) Podemos concluir que *f* é crescente em $[a,c]$ e decrescente em $[c,b]$. Portanto, $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a,b) e, assim, *f* tem um máximo relativo em *c*.

b) Concluímos que *f* é decrescente em $[a,c]$ e crescente em $[c,b]$. Logo, $f(x) > f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a,b) e, portanto, *f* tem um mínimo relativo em *c*.

Teorema 2 (Critério da derivada segunda para determinação de extremos de uma função)
Sejam *f* uma função derivável num intervalo (a,b) e *c* um ponto crítico de *f* neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$.
Se *f* admite derivada segunda em (a,b), temos:

a) Se $f''(c) < 0$, *f* tem um máximo relativo em *c*.
b) Se $f''(c) > 0$, *f* tem um mínimo relativo em *c*.

Demonstração:
a) Temos que $f''(c) = \lim_{x \to c} \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$. Logo, existe um intervalo aberto $I = (e,f)$, contendo *c*, tal que $\dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$ para todo $x \in (e,f)$, $x \neq c$, isto é, $\dfrac{f'(x)}{x - c} < 0$ para todo $x \in (e,f)$, $x \neq c$, já que $f'(c) = 0$.
Sejam $A = (e,c)$ e $B = (c,f)$.
Se $x \in A$ temos $x - c < 0$ e resulta que $f'(x) > 0$.
Se $x \in B$ temos $x - c > 0$ e resulta que $f'(x) < 0$.
Pelo critério da derivada primeira, *f* tem máximo relativo em *c*.

b) A prova é análoga.

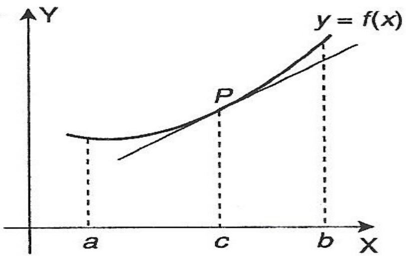
Exemplos:
1. Encontre os intervalos de crescimento, decrescimento e os máximos e mínimos relativos de *f* aplicando o critério da derivada primeira.
a) $f(x) = x^3 - 7x + 6$
b) $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 3, & \text{se } x \leq 5 \\ \dfrac{1}{2}(x+7), & \text{se } x > 5 \end{cases}$

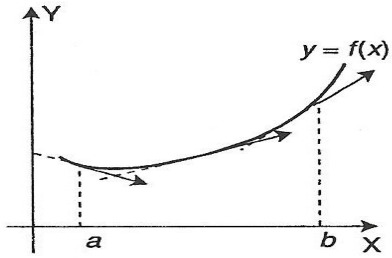
2. Encontre os máximos e os mínimos relativos de *f* aplicando o critério da derivada segunda.
a) $f(x) = x(x-1)^2$
b) $f(x) = 6x - 3x^2 + \dfrac{1}{2}x^3$

5.5.5- Concavidade e Pontos de Inflexão

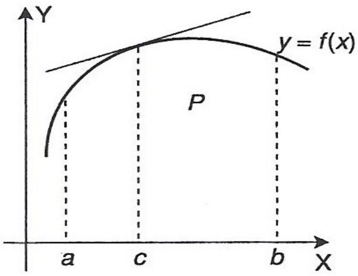
Definições:

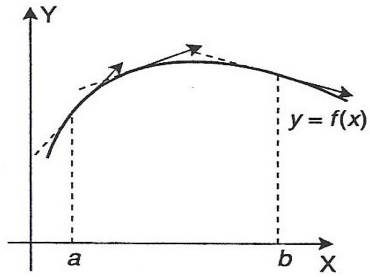
Uma função f é dita côncava para cima no intervalo (a,b), se $f'(x)$ é crescente neste intervalo. Geometricamente, o gráfico de f está acima da reta tangente à curva nos pontos de abscissa no intervalo (a,b) e a reta tangente à curva gira no sentido anti-horário à medida que avançamos sobre a curva da esquerda para a direita.





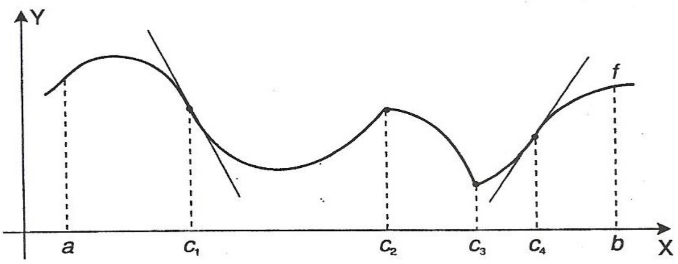
Uma função f é dita côncava para baixo no intervalo (a,b), se $f'(x)$ é decrescente neste intervalo. Geometricamente, o gráfico de f está abaixo da reta tangente à curva nos pontos de abscissa no intervalo (a,b) e a reta tangente à curva gira no sentido horário à medida que avançamos sobre a curva da esquerda para a direita.





Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é chamado ponto de inflexão, se existir um intervalo (a,b) contendo c tal que uma das seguintes situações ocorra:

a) f é côncava para cima em (a,c) e côncava para baixo em (c,b);
b) f é côncava para baixo em (a,c) e côncava para cima em (c,b).



Os pontos de abscissa c_1, c_2, c_3 e c_4 são pontos de inflexão. Observe que c_2 e c_3 são abscissas de pontos extremos de f e que f não é derivável nestes pontos. Nos pontos c_1 e c_4 existem as derivadas $f'(c_1)$ e $f'(c_4)$. Nos pontos $(c_1, f(c_1))$ e $(c_4, f(c_4))$ a reta tangente corta o gráfico de f.

Proposição

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável até 2ª ordem no intervalo (a,b).

a) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é côncava para cima em (a,b).
b) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é côncava para baixo em (a,b).

Demonstração:

a) Como $f''(x) = [f'(x)]'$, se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ temos que $f'(x)$ é crescente no intervalo (a,b). Logo, f é côncava para cima em (a,b).

b) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ temos que $f'(x)$ é decrescente em (a,b). Assim, f é côncava para baixo em (a,b).

Exemplos:

Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções têm concavidade voltada para cima ou para baixo.

a) $f(x) = (x-1)^3$

b) $f(x) = x^4 - x^2$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \le 1 \\ 1-(x-1)^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

5.5.6- Esboço de Gráficos

Utilizando todos os itens citados na análise do comportamento de uma função *f*, bem como, a existência ou não de assíntotas horizontais e verticais, podemos fazer um resumo de atividades que nos levarão ao esboço de gráficos.

ETAPAS	PROCEDIMENTO	DEFINIÇÕES E TEOREMAS UTILIZADOS
1ª	Encontrar D(*f*).	
2ª	Calcular os pontos de interseção com os eixos, quando não requer muito trabalho.	
3ª	Encontrar os pontos críticos de *f*.	O ponto $c \in D(f)$ tal que $f\,'(c) = 0$ ou $f\,'(c)$ não existe é chamado ponto crítico de *f*.
4ª	Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de *f*.	Seja *f* uma função contínua no intervalo [a, b] e derivável no intervalo (a, b). a) Se $f\,'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então *f* é crescente em [a, b]. b) Se $f\,'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então *f* é decrescente em [a, b].
5ª	Encontrar os máximos e mínimos relativos.	Critério da derivada primeira para determinação de extremos: Seja *f* uma função contínua no intervalo [a, b] e derivável no intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto c. a) Se $f\,'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f\,'(x) < 0$ para todo $x > c$, então *f* tem um máximo relativo em c. b) Se $f\,'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f\,'(x) > 0$ para todo $x > c$, então *f* tem um mínimo relativo em c. ou Critério da derivada segunda para determinação de extremos: Sejam *f* uma função derivável no intervalo (a, b) e c um ponto crítico de *f* neste intervalo, isto é, $f\,'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se *f* admite a derivada $f\,''$ em (a, b), temos: a) Se $f\,''(c) < 0$, *f* tem máximo relativo em c. b) Se $f\,''(c) > 0$, *f* tem mínimo relativo em c.
6ª	Determinar a concavidade e os pontos de inflexão de *f*.	O ponto do gráfico de *f* no qual a concavidade muda de sentido é chamado ponto de inflexão. Seja *f* uma função contínua no intervalo [a, b] e derivável até 2ª ordem no intervalo (a, b). a) Se $f\,''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então *f* é côncava para cima em (a, b). b) Se $f\,''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então *f* é côncava para baixo em (a, b).
7ª	Encontrar as assíntotas horizontais e verticais, se existirem.	A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de *f* se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira: a) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de *f* se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$
8ª	Esboçar o gráfico	

Exemplos:

Esboçar o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 3}$

c) $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$

5.6- Exercícios

Páginas 215, 216, 217 e 218 do livro texto (números 1 ao 15).

5.7- Problemas de Maximização e Minimização

O primeiro passo para solucionar estes problemas é escrever precisamente qual a função que deverá ser analisada. Esta função poderá ser escrita em função de uma ou mais variáveis. Quando a função é de mais de uma variável devemos procurar expressar uma das variáveis em função da outra.

Com a função bem definida, devemos identificar um intervalo apropriado e proceder a rotina matemática aplicando definições e teoremas.

Exemplos:

1. Um galpão deve ser construído tendo uma área retangular de 12100 m^2. A prefeitura exige que exista um espaço livre de 25 m na frente, 20 m atrás e 12 m em cada lado. Encontre as dimensões do lote que tenha área mínima na qual possa ser construído este galpão.

2. Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento situada à margem de um rio de 500 m de largura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2000 m abaixo da central. O custo da obra através do rio é de R$640,00 por metro, enquanto, em terra, custa R$312,00por metro. Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável?

3. Um fio de comprimento l é cortado em dois pedaços. Com um deles se fará um círculo e com o outro um quadrado.
a) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pelas figuras seja mínima?
b) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das áreas compreendidas seja máxima?

4. Uma caixa sem tampa, de base quadrada, deve ser construída de forma que o seu volume seja 2500 m^3. O material da base vai custar R$1200,00 por m^2 e o material dos lados R$980,00 por m^2. Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.

5.8- Exercícios

Páginas 224, 225 e 226 do livro texto.

5.9- Regras de L'Hospital

As Regras de L'Hospital apresentam um método geral para levantar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema (Regras de L'Hospital)
Sejam *f* e *g* funções deriváveis num intervalo aberto *I*, exceto possivelmente em um ponto $a \in I$.
Suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em *I*.

a) Se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ então $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

b) Se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ então $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Observações:

1- Se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, a Regra de L'Hospital continua valendo, isto é, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$.

2- A Regra de L'Hospital também é válida para os limites laterais e para limites no infinito $(x \to \pm \infty)$.

Exemplos:

Determinar os seguintes limites usando a Regra de L'Hospital.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^x - 1}$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{senx - x}{e^x + e^{-x} - 2}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^3 + 4x}$

e) $\lim_{x \to +\infty} (3x + 9)^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim_{x \to +\infty} x.sen\frac{1}{x}$

g) $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{\cos x - 1}\right)$

h) $\lim_{x \to 0^+} (2x^2 + x)^x$

i) $\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$

5.10- Exercícios

Páginas 232 e 233 do livro texto.

5.11- Fórmula de Taylor

A Fórmula de Taylor consiste num método de aproximação de uma função por um polinômio, com erro possível de ser estimado.

Definição

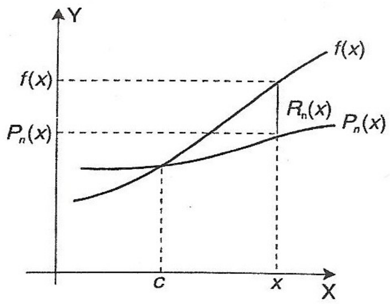
Seja $f: I \to R$ uma função que admite derivadas até ordem *n* num ponto c do intervalo *I*.
O polinômio de Taylor de ordem *n* de *f* no ponto c, que denotamos por $P_n(x)$, é dado por:

$$P_n(x) = f(c) + f'(c).(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}.(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.(x-c)^n.$$

Dado o polinômio de Taylor de grau *n* de uma função $f(x)$, denotamos por $R_n(x)$ a diferença entre $f(x)$ e $P_n(x)$, isto é, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Assim, $f(x) = P_n(x) + R_n(x) = f(c) + f'(c).(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}.(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.(x-c)^n + R_n(x)$.

Para os valores de *x* nos quais $R_n(x)$ é "pequeno", o polinômio $P_n(x)$ dá uma boa aproximação de $f(x)$. Por isso $R_n(x)$ chama-se resto.



Teorema (Fórmula de Taylor)
Seja $f: [a,b] \to R$ uma função definida no intervalo $[a,b]$.
Suponhamos que as derivadas $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ existam e sejam contínuas em $[a,b]$ e que $f^{(n+1)}$ exista em (a,b).
Seja *c* um ponto qualquer fixado em $[a,b]$. Então para cada $x \in [a,b]$, $x \neq c$, existe um ponto *z* entre *c* e *x* tal que $f(x) = f(c) + f'(c).(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}.(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$.

Observação:
Quando $c = 0$, a Fórmula de Taylor recebe o nome de Fórmula de Mac-Laurin e se expressa como

$$f(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2!}.x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Demonstração:
Faremos a demonstração supondo $x > c$. Para $x < c$, o procedimento é análogo.
Sejam $P_n(t)$ o polinômio de Taylor de grau *n* de *f* no ponto *c* e $R_n(t)$ o resto correspondente. Então, $f(t) = P_n(t) + R_n(t)$, para qualquer $t \in [a,b]$.
No ponto *x* temos:

$$f(x) = f(c) + f'(c).(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}.(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.(x-c)^n + R_n(x).$$

Devemos mostrar que $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$, onde *z* é um número entre *c* e *x*.

Seja $g:[c,x]\to R$ a função definida por

$$g(t)=f(x)-f(t)-f'(t).(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}.(x-t)^2-\ldots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}.(x-t)^n-R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}}.$$

Temos que g é contínua em $[c,x]$ e derivável em (c,x). Além disso, temos que $g(c)=0=g(x)$. Pelo Teorema de Rolle em $[c,x]$ existe $z\in(c,x)$ tal que $g'(z)=0$.

Derivando a função g obtemos $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$.

Observação:

Na Fórmula de Taylor apresentada, o resto $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$. Essa forma para o resto é chamada Forma de Lagrange do Resto e a Fórmula de Taylor é chamada Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange.

Exemplos:

1. Determinar os polinômios de Taylor de grau 2 e de grau 4 da função $f(x)=\cos x$ no ponto $c=0$. Esboçar o gráfico de f e dos polinômios encontrados.

Usando o polinômio $P_4(x)$ para determinar um valor aproximado para $\cos\dfrac{\pi}{6}$, o que se pode afirmar sobre o erro cometido?

2. Determinar o polinômio de Taylor de grau 6 da função $f(x) = sen 2x$ no ponto $c = \frac{\pi}{4}$. Usar este polinômio para determinar um valor aproximado para $sen\frac{\pi}{3}$. Fazer uma estimativa para o erro.

Usando a Fórmula de Taylor, pode-se demonstrar a seguinte proposição que nos dá mais um critério para determinação de máximos e mínimos de uma função.

Proposição

Seja $f:(a,b) \to R$ uma função derivável n vezes e cujas derivadas $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ são contínuas em (a,b).

Seja $c \in (a,b)$ um ponto crítico de *f* tal que $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$ e $f^{(n)}(c) \neq 0$.

Então,

a) se n é par e $f^{(n)}(c) < 0$, *f* tem máximo relativo em *c*;

b) se n é par e $f^{(n)}(c) > 0$, *f* tem mínimo relativo em *c*;

c) se n é ímpar, $(c, f(c))$ é ponto de inflexão.

Exemplos:

1. Determinar os extremos da função $f(x) = (x-2)^6$.

2. Pesquisar máximos e mínimos da função $f(x) = x^5 - x^3$.

5.12- Exercícios

Página 239 do livro texto.