29. Homotopia

29.1. Definição. Sejam X e Y espaços topológicos, e sejam $f, g \in C(X;Y)$. Diremos que f e g são *homotópicas*, e escreveremos $f \simeq g$, se existir uma função contínua

$$H : X \times [0,1] \to Y$$

tal que

$$H(x,0) = f(x) \quad (x \in X),$$
$$H(x,1) = g(x) \quad (x \in X).$$

Diremos que H é uma *homotopia* entre f e g, e escreveremos $H : f \simeq g$.

Se definimos

$$f_t(x) = H(x,t) \quad (x \in X, 0 \leq t \leq 1).$$

vemos que H representa uma família de funções contínuas $f_t : X \to Y$ $(0 \leq t \leq 1)$ tais que $f_0 = f$ e $f_1 = g$.

29.2. Exemplo. Seja X um espaço topológico qualquer, e seja Y um subconjunto convexo de $\mathbf{R}^n$. Então qualquer par de funções $f, g \in C(X;Y)$ são homotópicas entre si. Basta definir

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x) \quad (x \in X, 0 \leq t \leq 1).$$

29.3. Proposição. *A relação $f \simeq g$ é uma relação de equivalência em $C(X;Y)$.*

Demonstração. Se $f \in C(X;Y)$, então $H : f \simeq f$, onde

$$H(x,t) = f(x) \quad (x \in X, 0 \leq t \leq 1).$$

Se $H_1 : f \simeq g$, então $H_2 : g \simeq f$, onde

$$H_2(x,t) = H_1(x, 1-t) \quad (x \in X, 0 \leq t \leq 1).$$

Se $H_1 : f \simeq g$ e $H_2 : g \simeq h$, então $H_3 : f \simeq h$, onde

$$H_3(x,t) = H_1(x, 2t) \qquad (x \in X, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}),$$

$$H_3(x,t) = H_2(x, 2t-1) \quad (x \in X, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1).$$

29.4. Proposição. *Sejam X, Y, Z espaços topológicos, e sejam $f_1, g_1 \in C(X;Y)$ e $f_2, g_2 \in C(Y;Z)$. Se $f_1 \simeq g_1$ e $f_2 \simeq g_2$, então $f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$.*

Demonstração. Sejam

$$H_1 : f_1 \simeq g_1, \qquad H_2 : f_2 \simeq g_2,$$

e seja $H_3 : X \times [0,1] \to Z$ definida por

$$H_3(x,t) = H_2(H_1(x,t), t) \quad (x \in X, 0 \leq t \leq 1).$$

Então

$$H_3(x,0) = H_2(H_1(x,0),0) = H_2(f_1(x),0) = f_2 \circ f_1(x) \qquad (x \in X),$$

$$H_3(x,1) = H_2(H_1(x,1),1) = H_2(g_1(x),1) = g_2 \circ g_1(x) \qquad (x \in X),$$

e portanto

$$H_3 : f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1.$$

29.5. Definição. Um espaço topológico X é dito *contrátil* se a função identidade $i_X(x) = x$ é homotópica a uma função constante $c(x) = x_0$.

29.6. Proposição. *Um espaço topológico X é contrátil se e só se, para cada espaço topológico Y, qualquer par de funções $f, g \in C(Y;X)$ são homotópicas entre si.*

Demonstração. Para provar a implicação não trivial, suponhamos que X seja contrátil, ou seja $i_X \simeq c$, e sejam $f, g \in C(Y;X)$. Então, usando a proposição anterior, segue que

$$f = i_X \circ f \simeq c \circ f = c \circ g \simeq i_X \circ g = g.$$

29.7. Exemplo. Segue do Exemplo 29.2 que cada subconjunto convexo de $\mathbf{R}^n$ é contrátil.

Sabemos que dois espaços topológicos X e Y são homeomorfos se e só se existem $f \in C(X;Y)$ e $g \in C(Y;X)$ tais que $g \circ f = i_X$ e $f \circ g = i_Y$.

29.8. Definição. Diremos que dois espaços topológicos X e Y são *homotopicamente equivalentes* se existem $f \in C(X;Y)$ e $g \in C(Y;X)$ tais que $g \circ f \simeq i_X$ e $f \circ g \simeq i_Y$.

Se X e Y são homeomorfos, é claro que X e Y são homotopicamente equivalentes, mas a recíproca é falsa em geral.

29.9. Proposição. *Um espaço topológico X é contrátil se e só se X é homotopicamente equivalente a um espaço unitário.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que a identidade em X seja homotópica a uma função constante $c(x) = x_0$. Seja $Y = \{x_0\}$, e seja $j : Y \hookrightarrow X$ a aplicação inclusão. Então $j \circ c = c \simeq i_X$ e $c \circ j = i_Y$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que X seja homotopicamente equivalente a $Y = \{y_0\}$. Sejam $f \in C(X;Y)$ e $g \in C(Y;X)$ tais que $g \circ f \simeq i_X$ e $f \circ g \simeq i_Y$. Como $g \circ f$ é uma função constante, vemos que X é contrátil.

Na próxima seção precisaremos de uma variante da noção de homotopia, conhecida como homotopia relativa.

29.10. Definição. (a) Diremos que (X, A) é um *par topológico* se X é um espaço topológico, e $A \subset X$.

(b) Diremos que $f : (X, A) \to (Y, B)$ é uma *função contínua* se $f : X \to Y$ é uma função contínua tal que $f(A) \subset B$.

(c) Diremos que (X, A) e (Y, B) são *homeomorfos* se existem funções contínuas $f : (X, A) \to (Y, B)$ e $g : (Y, B) \to (X, A)$ tais que $g \circ f = i_X$ e $f \circ g = i_Y$. Notemos que neste caso $f : X \to Y$ é um homeomorfismo e $f(A) = B$.

(d) Diremos que duas funções contínuas $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ são *homotópicas* se existir uma função contínua

$$H : X \times [0, 1] \to Y$$

tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) && (x \in X), \\ H(x, 1) &= g(x) && (x \in X), \\ H(x, t) &= f(x) = g(x) && (x \in A, 0 \leq t \leq 1). \end{aligned}$$

Neste caso diremos que H é uma *homotopia entre f e g relativa a A*, e escreveremos $H : f \simeq g[A]$.

(e) Diremos que (X, A) e (Y, B) são *homotopicamente equivalentes* se existem funções contínuas $f : (X, A) \to (Y, B)$ e $g : (Y, B) \to (X, A)$ tais que $g \circ f \simeq i_X[A]$ e $f \circ g \simeq i_Y[B]$.

Exercícios

29.A. Prove que cada espaço contrátil é conexo por caminhos.

29.B. Prove que a relação $f \simeq g[A]$ é uma relação de equivalência no conjunto de todas as funções contínuas $f : (X, A) \to (Y, B)$.

29.C. Prove que, se (X, A) e (Y, B) são homotopicamente equivalentes, então X e Y são homotopicamente equivalentes.

29.D. Prove que, se (X, A) e (Y, B) são homotopicamente equivalentes, então A e B são homeomorfos.

29.E. Seja X um espaço topológico, e sejam $a, b, c \in X$. Sejam f_1 e g_1 dois caminhos em X entre a e b, e sejam f_2 e g_2 dois caminhos em X entre b e c. Se

$$f_1 \simeq g_1[\{0, 1\}] \quad \text{e} \quad f_2 \simeq g_2[\{0, 1\}],$$

prove que

$$f_1 * f_2 \simeq g_1 * g_2[\{0, 1\}].$$