Capítulo 1

Conjuntos e Relações

CONJUNTOS, ELEMENTOS

O conceito de *conjunto* aparece em todos os ramos da Matemática. Intuitivamente, um conjunto é qualquer coleção bem definida de objetos ou sêres e será aqui designado por letras latinas maiúsculas, A, B, ..., X, Y, ... Os objetos ou sêres que constituem um conjunto chamam-se *elementos* ou *membros* do conjunto e serão designados por letras latinas minúsculas, a, b, ..., x, y, ... A afirmação "p é elemento de A" ou, equivalentemente, "p pertence a A", escreve-se

$$p \in A.$$

A negação de $p \in A$ escreve-se $p \notin A$.

Há, essencialmente, duas maneiras de especificar um dado conjunto. Uma delas consiste em enumerar (quando possível) seus elementos. Por exemplo,

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

representa o conjunto A, cujos elementos são as letras a, e, i, o, u. Observe-se que os elementos vêm separados por vírgulas e incluídos entre chaves { }. A outra maneira de caracterizar um conjunto consiste em dar as propriedades que caracterizam seus elementos. Por exemplo,

$$B = \{x : x \text{ inteiro}, x > 0\}$$

(lê-se: "B é o conjunto dos elementos x tais que x é inteiro e x é maior do que zero) representa o conjunto dos inteiros positivos. Emprega-se uma letra minúscula — usualmente x — para representar um elemento arbitrário do conjunto; os dois pontos equivalem a "tal que", e a vírgula corresponde à conjunção "e".

Exemplo 1.1: O conjunto B acima pode também escrever-se $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Note-se que $-6 \notin B$, $3 \in B$, e $\pi \notin B$.

Exemplo 1.2: Aparecem com freqüência, em Matemática, os intervalos na reta, a seguir definidos. a e b são números reais, $a < b$.

Intervalo aberto de extremos a e $b = (a, b) = \{x : a < x < b\}$

Intervalo fechado de extremos a e $b = [a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$

Intervalo semi-aberto à esquerda, de extremos a e $b = (a, b] = \{x : a < x \leq b\}$

Intervalo semi-aberto à direita, de extremos a e $b = [a, b) = \{x : a \leq x < b\}$

Dois conjuntos A e B são *iguais*, o que se representa por $A = B$, quando constituídos dos mesmos elementos, i. e., quando cada membro de A pertence a B e cada membro de B pertence a A. A negação de $A = B$ escreve-se $A \neq B$.

Exemplo 1.3: Seja $E = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $F = \{2, 1\}$ e $G = \{1, 2, 2, 1\}$. Então, $E = F = G$. Note-se que um conjunto não depende da maneira como seus elementos nêle comparecem. Um conjunto permanece o mesmo se seus elementos se repetem ou se dispõem de maneira diferente.

Os conjuntos podem ser *finitos* ou *infinitos*. Um conjunto é finito se consiste em n elementos diferentes, sendo n inteiro positivo; caso contrário, é infinito. Em particular, um conjunto constituído exatamente de *um* elemento é chamado *conjunto unitário*.

SUBCONJUNTOS, SUPERCONJUNTOS

Um conjunto A é dito *subconjunto* de B (ou, equivalentemente, B é *superconjunto* de A), escrevendo-se

$$A \subset B \quad \text{ou} \quad B \supset A,$$

se e sòmente se cada elemento de A é também elemento de B; i. e., se $x \in A$ implica que $x \in B$. Diz-se também que A está contido em B, ou que B contém A. A negação de $A \subset B$ escreve-se $A \not\subset B$ ou $B \not\supset A$ e afirma que existe um $x \in A$ tal que $x \notin B$.

Exemplo 2.1: Considerem-se os conjuntos

$$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, \; B = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$$

$$C = \{x : x \text{ é primo}, x > 2\} = \{3, 5, 7, 11, \ldots\}$$

Então, $C \subset A$, pois todo número primo maior que 2 é ímpar. Por outro lado, $B \not\subset A$, pois $10 \in B$ mas $10 \notin A$.

Exemplo 2.2: Designemos por **N** o conjunto dos inteiros positivos, por **Z** o conjunto dos inteiros, por **Q** o conjunto dos números racionais, e por **R** o conjunto dos números reais. Tem-se:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Note-se que $A \subset B$ não exclui a possibilidade de ser $A = B$. Na realidade, podemos reformular como segue a definição de igualdade de conjuntos:

Definição: Dois conjuntos são iguais se e sòmente se $A \subset B$ e $B \subset A$.

Se é $A \subset B$, porém $A \neq B$, diz-se que A é *subconjunto próprio* de B, ou que B contém A pròpriamente. Observe o leitor que alguns autores empregam o símbolo $\subseteq$ para designar um subconjunto, e o símbolo $\subset$ apenas para designar um subconjunto próprio.

Das definições até aqui dadas decorre nosso primeiro teorema:

Teorema 1.1: Sejam A, B, C conjuntos quaisquer. Então: (i) $A \subset A$; (ii) se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$; (iii) se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

CONJUNTO UNIVERSAL E CONJUNTO VAZIO

Em qualquer aplicação da teoria dos conjuntos, todos os conjuntos em estudo são subconjuntos de um conjunto fixo. Êsse conjunto fixo chama-se *conjunto universal*, ou *universo*, e designá-lo-emos pela letra U. Convém, outrossim, introduzir o conceito de *conjunto vazio*, isto é, o conjunto desprovido de qualquer elemento. Êsse conjunto, designado por $\varnothing$, é considerado finito e é subconjunto de qualquer conjunto. Então, para qualquer conjunto A, tem-se $\varnothing \subset A \subset U$.

Exemplo 3.1: Na geometria plana, o universo é constituído por todos os pontos do plano.

Exemplo 3.2: Seja $A = \{x : x^2 = 4, x \text{ ímpar}\}$. Então, A é vazio, i. e., $A = \varnothing$.

Exemplo 3.3: Seja $B = \{\varnothing\}$. Então, $B \neq \varnothing$, porque B contém um elemento.

CLASSES, COLEÇÕES, FAMÍLIAS, ESPAÇOS

Freqüentemente, os elementos de um conjunto são êles próprios também conjuntos. Por exemplo, cada reta em um conjunto de retas é um conjunto de pontos. Para atender a situações como esta, empregaremos as palavras "*classe*", "*coleção*" e "*família*", como sinônimos de conjunto. Usualmente, *classe* designa um conjunto de conjuntos, e *coleção* ou *família* um conjunto de classes. As expressões *subclasse*, *subcoleção* e *subfamília* têm significados análogos ao de subconjunto.

Exemplo 4.1: Os elementos, ou membros, da classe $\{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$ são os conjuntos $\{2, 3\}$, $\{2\}$ e $\{5, 6\}$.

Exemplo 4.2: Considere-se um conjunto A. Chamemos $\mathscr{P}(A)$ ou 2^A, a classe de todos os subconjuntos de A. Em particular, se $A = \{a, b, c\}$, então

$$\mathscr{P}(A) = \{A, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing\}.$$

Em geral, se A é finito e possui n elementos, então $\mathscr{P}(A)$ terá 2^n elementos.

A palavra *espaço* significará para nós um conjunto não-vazio dotado de uma estrutura matemática, p. ex., espaço vetorial, espaço métrico, espaço topológico. Em tais circunstâncias, chamaremos *pontos* aos elementos de um espaço.

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

A *união* de dois conjuntos A e B, representada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou a B, i. e.,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Emprega-se aqui a conjunção "ou" no sentido de "e/ou".

A *intersecção* de dois conjuntos A e B, representada por $A \cap B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e a B, i. e.,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Se $A \cap B = \varnothing$, isto é, se A e B não têm nenhum elemento em comum, A e B dizem-se *disjuntos*. Uma classe $\mathscr{A}$ de conjuntos diz-se *classe disjunta* se cada par de conjuntos distintos em $\mathscr{A}$ é disjunto.

O *complemento relativo* de um conjunto B para um conjunto A, ou simplesmente a *diferença* de A e B, denotado por $A \setminus B$, é o conjunto de elementos que pertencem a A mas não pertencem a B. Em outras palavras,

$$A \setminus B = \{x : x \in A,\ x \notin B\}.$$

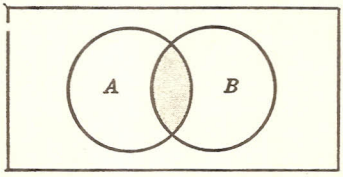
Note-se que $A \setminus B$ e B são disjuntos, i. e., $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$.

O *complemento absoluto*, ou simplesmente o *complemento*, de um conjunto A, representado por A^c, é o conjunto de elementos que não pertencem a A, a saber

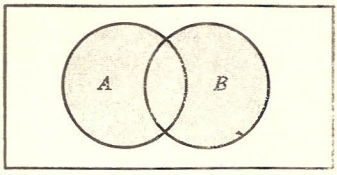
$$A^c = \{x : x \in U,\ x \notin A\}.$$

Em outras palavras, A^c é a diferença do universo U e A.

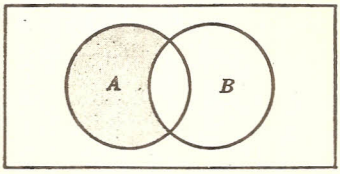
Exemplo 5.1: Os diagramas que seguem, chamados diagramas de Venn, ilustram as operações acima definidas. Os conjuntos são representados por simples áreas planas e o universo U pela área de todo o retângulo.



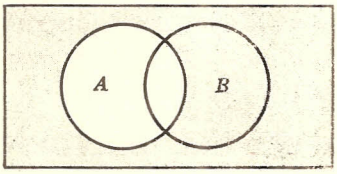
Área sombreada: $A \cap B$



Área sombreada: $A \cup B$



Área sombreada: $A \setminus B$



Área sombreada: A^c

As operações acima definidas satisfazem várias leis ou identidades, relacionadas na Tábua 1, a seguir. Tem-se, na realidade, o

Teorema 1.2: Os conjuntos satisfazem as leis da Tábua 1.

LEIS DA ÁLGEBRA DOS CONJUNTOS	
Leis de Idempotência	
1a. $A \cup A = A$	1b. $A \cap A = A$
Leis Associativas	
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leis Comutativas	
3a. $A \cup B = B \cup A$	3b. $A \cap B = B \cap A$
Leis Distributivas	
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leis de Identidade	
5a. $A \cup \varnothing = A$	5b. $A \cap U = A$
6a. $A \cup U = U$	6b. $A \cap \varnothing = \varnothing$
Leis de Complemento	
7a. $A \cup A^c = U$	7b. $A \cap A^c = \varnothing$
8a. $(A^c)^c = A$	8b. $U^c = \varnothing$, $\varnothing^c = U$
Leis de De Morgan	
9a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	9b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Tábua 1

Observação: Cada uma das leis acima decorre de uma lei análoga da lógica. Por exemplo,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} = \{x : x \in B \text{ e } x \in A\} = B \cap A.$$

Aqui, utilizamos o fato de que a afirmação composta "p e q", representada por $p \wedge q$, é lògicamente equivalente à afirmação composta "q e p", isto é, $q \wedge p$.

A relação entre a inclusão de conjuntos e as operações acima vem a seguir.

Teorema 1.3: Cada uma das seguintes afirmações equivale a $A \subset B$:

(i) $A \cap B = A$ (iii) $B^c \subset A^c$ (v) $B \cup A^c = U$

(ii) $A \cup B = B$ (iv) $A \cap B^c = \varnothing$

PRODUTO DE CONJUNTOS

Sejam dois conjuntos A e B. O produto (cartesiano) de A e B, denotado por $A \times B$, constitui-se de todos os pares ordenados $\langle a, b \rangle$ tais que $a \in A$ e $b \in B$, isto é:

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle : a \in A, b \in B\}$$

O produto de um conjunto por si próprio, isto é, $A \times A$, representa-se por A^2.

Exemplo 6.1: O leitor está familiarizado com o plano cartesiano $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (Fig. 1-1 abaixo). Ali, cada ponto P representa um par ordenado $\langle a, b \rangle$ de números reais e vice-versa.

Exemplo 6.2: Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$. Então,

$$A \times B = \{\langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle, \{3, b \rangle\}.$$

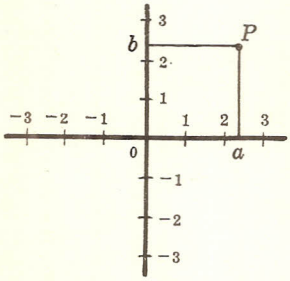


Fig. 1-1

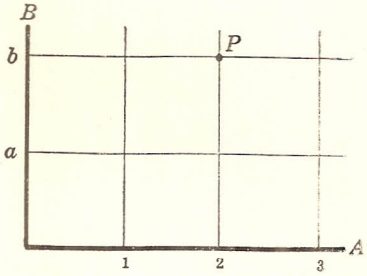


Fig. 1-2

Como A e B não contêm muitos elementos é possível representar $A \times B$ por um diagrama de coordenadas tal como na fig. 1-2 acima. As verticais pelos pontos de A e as horizontais pelos pontos de B encontram-se em 6 pontos que representam $A \times B$ de maneira óbvia. O ponto P é o par ordenado $\langle 2, b \rangle$. Em geral, se um conjunto A tem s elementos e um conjunto B tem t elementos, $A \times B$ tem st elementos.

Observação: Pode-se definir rigorosamente a noção de "par ordenado" (a, b) por $\langle a, b \rangle \equiv \{\{a\}, \{a, b\}\}$. A partir desta definição, pode-se provar a propriedade de "ordem":

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \text{ implica } a = c \text{ e } b = d.$$

O conceito de produto de conjuntos pode estender-se de maneira natural a um número qualquer, finito, de conjuntos. Assim, o conjunto produto dos conjuntos $A_1, \ldots, A_m$, representado por

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m \text{ ou } \Pi_{i=1}^{m} A_i$$

consiste de tôdas as m-uplas $\langle a_1, a_2, \ldots a_m \rangle$, ordenadas, onde $a_i \in A_i$ para cada i.

RELAÇÕES

Uma *relação* (ou *relação binária*) R de um conjunto A para um conjunto B associa a cada par $\langle a, b \rangle$ de $A \times B$ exatamente uma das seguintes afirmações:

(i) "a está em relação com b", que se escreve $a\,R\,b$

(ii) "a não está em relação com b", que se escreve $a \not R\, b$.

Uma relação do conjunto A para o próprio A é chamada *relação em* A.

Exemplo 7.1: A inclusão de conjuntos é uma relação em qualquer classe de conjuntos. Com efeito, dado um par qualquer de conjuntos A e B, tem-se $A \subset B$, ou $A \not\subset B$.

Note-se que qualquer relação R de um conjunto A para um conjunto B define de maneira única um subconjunto R^* de $A \times B$ como segue:

$$R^* = \{\langle a, b\rangle : a\, R\, b\}$$

Por outro lado, qualquer subconjunto R^* de $A \times B$ define uma relação R de A para B como segue:

$$a\ R\ b \text{ se e sòmente se } \langle a, b\rangle \in R^*$$

Em vista da correspondência entre relações de A para B e subconjuntos de $A \times B$, podemos reformular a definição de relação, a saber:

Definição: Uma relação R de A para B é um subconjunto de $A \times B$.

O *domínio* de uma relação R de A para B é o conjunto das primeiras coordenadas dos pares em R, e seu *contradomínio* é o conjunto das segundas coordenadas, isto é:

$$\text{domínio de } R = \{a : \langle a, b\rangle \in R\},$$
$$\text{contradomínio de } R = \{b : \langle a, b\rangle \in R\}.$$

A inversa de R, representada por R^{-1}, é a relação de B para A definida por

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle : \langle a, b\rangle \in R\}$$

Note-se que R^{-1} pode ser obtida invertendo-se a ordem dos pares em R.

Exemplo 7.2: Considere-se a relação

$$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$$

em $A = \{1, 2, 3\}$. O domínio de R é $\{1, 2\}$, o contradomínio de R é $\{2, 3\}$ e

$$R^{-1} = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle\}.$$

Note-se que R e R^{-1} são análogas, respectivamente, às relações $<$ e $>$ em A, isto é,

$$\langle a, b\rangle \in R \quad \text{se e sòmente se } a < b$$
$$\langle a, b\rangle \in R^{-1} \text{ se e sòmente se } a > b$$

A *relação identidade* em qualquer conjunto A, designada por $\triangle$ ou $\triangle_A$, é o conjunto de todos os pares de $A \times A$ com coordenadas iguais, isto é,

$$\triangle_A = \{\langle a, a\rangle : a \in A\}$$

A relação identidade é também chamada *diagonal*, em virtude de sua posição num diagrama coordenado de $A \times A$.

RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Uma relação R num conjunto A, isto é, um subconjunto R de $A \times A$, é chamada *relação de equivalência*, se e sòmente se satisfaz os seguintes axiomas:

[E_1] Para todo $a \in A$, $\langle a, a \rangle \in R$.

[E_2] Se $\langle a, b \rangle \in R$, então $\langle b, a \rangle \in R$.

[E_3] Se $\langle a, b \rangle \in R$ e $\langle b, c \rangle \in R$, então $\langle a, c \rangle \in R$.

Em geral, diz-se que uma relação é *reflexiva* se e só se satisfaz [E_1], *simétrica* se e só se satisfaz [E_2] e *transitiva* se e só se satisfaz [E_3]. Então, uma relação R será uma relação de equivalência se e sòmente se fôr reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 8.1: Considere-se a relação $\subset$, isto é, a inclusão de conjuntos. Recorde-se (Teorema 1.1) que $A \subset A$ para todo A, e que, se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$. Logo, $\subset$ é reflexiva e transitiva. Por outro lado, $A \subset B$ e $A \neq B$ implicam $B \not\subset A$. Logo, $\subset$ não é simétrica e, conseqüentemente, não é uma relação de equivalência.

Exemplo 8.2: Na geometria euclidiana, a semelhança de triângulos é uma relação de equivalência. Com efeito, se α, β e γ são triângulos quaisquer, então: (i) α é semelhante a si mesmo; (ii) se α é semelhante a β, então β é semelhante a α; (iii) se α é semelhante a β e β é semelhante a γ, então α é semelhante a γ.

Se R é uma relação de equivalência em A, então a classe de equivalência de qualquer elemento $a \in A$, representada por $[a]$, é o conjunto de elementos com os quais a está em relação:

$$[a] = \{x : \langle a, x \rangle \in R\}.$$

A coleção de classes de equivalência de A, representada por A/R, é chamada *quociente* de A por R:

$$A/R = \{[a] : a \in A\}.$$

O conjunto quociente A/R goza das seguintes propriedades:

Teorema 1.4: Seja R uma relação de equivalência em A e seja $[a]$ a classe de equivalência de $a \in A$. Então:

(i) $a \in [a]$ para todo $a \in A$.

(ii) $[a] = [b]$ se e sòmente se $\langle a, b \rangle \in R$.

(iii) Se $[a] \neq [b]$, então $[a]$ e $[b]$ são disjuntas.

Uma classe $\mathscr{A}$ de subconjuntos não-vazios de A é chamada uma *partição* de A se e sòmente se (1) cada $a \in A$ pertence a algum membro de $\mathscr{A}$ e (2) os membros de $\mathscr{A}$ são disjuntos dois a dois. Então, o teorema anterior implica o seguinte *teorema fundamental das relações de equivalência*:

Teorema 1.5: Seja R uma relação de equivalência em A. Então o conjunto quociente A/R é uma partição de A.

Exemplo 8.3: Seja R_5 a relação em $\mathbf{Z}$ (conjunto dos inteiros) definida por $x \equiv y \pmod 5$ que se lê "x é congruente com y módulo 5" e que significa que $x - y$ é divisível por 5. Então R_5 é uma relação de equivalência em $\mathbf{Z}$. Há exatamente cinco classes de equivalência distintas em $\mathbf{Z}/R_5$.

$$E_0 = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\} = \ldots = [-10] = [-5] = [0] = [5] = \ldots$$
$$E_1 = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\} = \ldots = [-9] = [-4] = [1] = [6] = \ldots$$
$$E_2 = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\} = \ldots = [-8] = [-3] = [2] = [7] = \ldots$$
$$E_3 = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\} = \ldots = [-7] = [-2] = [3] = [8] = \ldots$$
$$E_4 = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\} = \ldots = [-6] = [-1] = [4] = [9] = \ldots$$

Observa-se que cada inteiro que seja expressável de modo único na forma $x = 5q + r$, com $0 \leq r < 5$, é um membro da classe de equivalência E_r, sendo r o resto. As classes de equivalência são duas a duas disjuntas e $\mathbf{Z} = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$.

COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES

Seja U uma relação de A para B, e seja V uma relação de B para C, isto é, $U \subset A \times B$ e $V \subset B \times C$. Então, a relação de A para C constituída de todos os pares ordenados $\langle a, c\rangle \in A \times C$ tais que, para algum $b \in B$,

$$\langle a, b\rangle \in U \quad \text{e} \quad \langle b, c\rangle \in V,$$

chama-se *composição* de U e V, e designa-se por $V \circ U$. (Observe o leitor que alguns autores representam tal relação por $U \circ V$.)

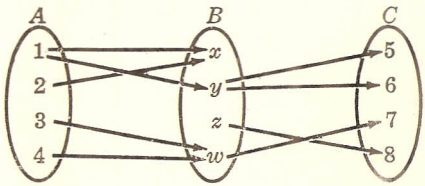
É conveniente introduzirmos, agora, mais alguns símbolos:

$\exists$, existe $\mid$, tal que $\forall$, para todo $\Longrightarrow$, acarreta ou implica

Podemos, então, escrever

$$V \circ U = \{\langle x, y\rangle : x \in A, y \in C;\ \exists\, b \in B : \langle x, b\rangle \in U, \langle b, y\rangle \in V\}$$

Exemplo 9.1: Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z, w\}$, e $C = \{5, 6, 7, 8\}$; e seja $U = \{\langle 1, x\rangle, \langle 1, y\rangle, \langle 2, x\rangle, \langle 3, w\rangle, \langle 4, w\rangle,\}$ e $V = \{\langle y, 5\rangle, \langle y, 6\rangle, \langle z, 8\rangle, \langle w, 7\rangle\}$. Isto é, U é uma relação de A para B e V é uma relação de B para C. Podemos ilustrar U e V como segue:



Então,

$\langle 1, 5\rangle \in V \circ U$ pois $y \in B$ e $\langle 1, y\rangle \in U$, $\langle y, 5\rangle \in V$
$\langle 1, 6\rangle \in V \circ U$ pois $y \in B$ e $\langle 1, y\rangle \in U$, $\langle y, 6\rangle \in V$
$\langle 3, 7\rangle \in V \circ U$ pois $w \in B$ e $\langle 3, w\rangle \in U$, $\langle w, 7\rangle \in V$
$\langle 4, 7\rangle \in V \circ U$ pois $w \in B$ e $\langle 4, w\rangle \in U$, $\langle w, 7\rangle \in V$

Nenhum outro par ordenado pertence a $V \circ U$, isto é,

$$V \circ U = \{\langle 1, 5\rangle, \langle 1, 6\rangle, \langle 3, 7\rangle, \langle 4, 7\rangle\}$$

Note-se que $V \circ U$ constitui-se precisamente dos pares $\langle x, y\rangle$, para os quais existe, no diagrama acima, uma "trajetória" de $x \in A$ para $y \in C$, composta de duas setas, uma em seguida à outra.

Exemplo 9.2: Sejam U e V as relações em $\mathbf{R}$ definidas por

$$U = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{e} \quad V = \{\langle y, z\rangle : 2y + 3z = 4\}$$

A relação $V \circ U$, composta de U e V, pode ser obtida eliminando-se y das duas equações $x^2 + y^2 = 1$ e $2y + 3z = 4$. Em outras palavras,

$$V \circ U = \{\langle x, z\rangle : 4x^2 + 9z^2 - 24z + 12 = 0\}$$

Exemplo 9.3: Seja $\mathbf{N}$ o conjunto dos inteiros positivos, e R a relação $<$ em $\mathbf{N}$, i. e. $\langle a, b\rangle \in R$ se e só se $a < b$. Donde $\langle a, b\rangle \in R^{-1}$ se e só se $a > b$. Então

$$\begin{aligned} R \circ R^{-1} &= \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbf{N};\ \exists\, b \in \mathbf{N} \mid \langle x, b\rangle \in R^{-1}, \langle b, y\rangle \in R\} = \\ &= \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbf{N};\ \exists\, b \in \mathbf{N} \mid b < x, b < y\} = \\ &= (\mathbf{N} \setminus \{1\} \,(\times)\, \mathbf{N} \setminus \{1\}) = \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbf{N};\ x, y \neq 1\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R^{-1} \circ R &= \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbf{N};\ \exists\, b \in \mathbf{N} \mid \langle x, b\rangle \in R,\ \langle b, y\rangle \in R^{-1}\} = \\ &= \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbf{N};\ \exists\, b \in \mathbf{N} \mid b > x,\ b > y\} = \mathbf{N} \times \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Note-se que $R \circ R^{-1} \neq R^{-1} \circ R$.

Problemas Resolvidos

CONJUNTOS, ELEMENTOS, SUBCONJUNTOS

1. Seja $A = \{x : 3x = 6\}$. É $A = 2$?

Solução: A é o conjunto que consiste do único elemento 2, isto é, $A = \{2\}$. O número 2 pertence a A; mas não é igual a A. Existe uma diferença fundamental entre um elemento p e o conjunto unitário $\{p\}$.

2. Indique quais dos conjuntos seguintes são iguais: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{\varnothing\}$.

Solução: São todos diferentes entre si. O conjunto $\{0\}$ contém um elemento, o número zero. O conjunto $\varnothing$ não contém nenhum elemento; é o conjunto vazio. O conjunto $\{\varnothing\}$ contém um elemento, o conjunto vazio.

3. Indique quais dos conjuntos seguintes é o conjunto vazio:

(i) $X = \{x : x^2 = 9,\ 2x = 4\}$, (ii) $Y = \{x : x \neq x\}$, (iii) $Z = \{x : x + 8 = 8\}$.

Solução: (i) Não há nenhum número que satisfaça simultâneamente $x^2 = 9$ e $2x = 4$. Logo, $X = \varnothing$.

(ii) Admitindo-se que qualquer objeto seja êle próprio; então, Y é vazio. Na realidade, alguns autores definem o conjunto vazio por $\varnothing = \{x : x \neq x\}$.

(iii) O número zero satisfaz $x + 8 = 8$; logo, $Z = \{0\}$. Então, $Z \neq \varnothing$.

4. Prove que $A = \{2, 3, 4, 5\}$ não é subconjunto de $B = \{x : x \text{ par}\}$.

Solução: Devemos exibir ao menos um elemento de A que não o seja de B. Ora, $3 \in A$ e $3 \notin B$; logo, A não é subconjunto de B.

5. Demonstre o teorema 1.1 (iii): Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Solução: Devemos mostrar que cada elemento de A também pertence a C. Seja $x \in A$. $A \subset B$ implica em $x \in B$. Mas $B \subset C$, logo $x \in C$. Mostramos, então, que $x \in A \Longrightarrow x \in C$, ou $A \subset C$.

6. Prove: Se A é subconjunto do conjunto vazio $\varnothing$, então é $A = \varnothing$.

Solução: O conjunto vazio $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto; em particular, $\varnothing \subset A$. Mas, pela hipótese do problema, $A \subset \varnothing$; logo, pela definição 1.1, $A = \varnothing$.

7. Determine $\mathscr{P}(S)$ para $S = \{1, 2, 3\}$.

Solução: O conjunto $\mathscr{P}(S)$ das partes de S é a classe de todos os subconjuntos de S. Os subconjuntos de S são $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ e $\varnothing$.

Logo, $\mathscr{P}(S) = \{S, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing\}$.

Observe-se que há $2^3 = 8$ subconjuntos de S.

8. Determine $\mathscr{P}(S)$ para $S = \{3, \{1, 4\}\}$.

Solução: Note-se, inicialmente, que S contém dois elementos: 3 e o conjunto $\{1, 4\}$. Portanto, $\mathscr{P}(S)$ contém $2^2 = 4$ elementos: o próprio S, o conjunto vazio $\varnothing$, o conjunto unitário $\{3\}$, contendo o elemento 3, e o conjunto unitário $\{\{1, 4\}\}$ contendo o conjunto $\{1, 4\}$. Em outras palavras,

$$\mathscr{P}(S) = \{S, \{3\}, \{\{1, 4\}\}, \varnothing\}.$$

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS:

9. Seja $U = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, e $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Determine: (i) A^c, (ii) $(A \cap C)^c$, (iii) $B \backslash C$, (iv) $(A \cup B)^c$.

Solução: (i) A^c constitui-se nos elementos de U que não estão em A; logo,

$$A^c = \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$

(ii) $A \cap C$ constitui-se dos elementos que pertencem a A e a C; logo,

$$A \cap C = \{3, 4\} \text{ e } (A \cap C)^c = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

(iii) $B \backslash C$ constitui-se dos elementos de B que não estão em C; logo $B \backslash C = \{2, 8\}$.

(iv) $A \cup B$ constitui-se dos elementos que estão em A ou em B (ou em ambos); logo,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \text{ e } (A \cup B)^c = \{5, 7, 9\}.$$

10. Demonstre que $(A \backslash B) \cap B = \varnothing$.

Solução: $(A \backslash B) \cap B = \{x : x \in B,\ x \in A \backslash B\} = \{x : x \in B,\ x \in A,\ x \notin B\} = \varnothing$, pois não existe elemento x que satisfaça simultâneamente $x \in B$ e $x \notin B$.

11. Prove a lei de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Solução: $(A \cup B)^c = \{x : x \notin A \cup B\} = \{x : x \notin A,\ x \notin B\} = \{x : x \in A^c,\ x \in B^c\} = A^c \cap B^c$.

12. Prove: $B \backslash A = B \cap A^c$.

Solução: $B \backslash A = \{x : x \in B,\ x \notin A\} = \{x : x \in B,\ x \in A^c\} = B \cap A^c$.

13. Prove a lei distributiva $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Solução: $A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A;\ x \in B \cup C\} = \{x : x \in A;\ x \in B$ ou $x \in C\} =$
$= \{x : x \in A,\ x \in B;$ ou $x \in A,\ x \in C\} = \{x : x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C\} =$
$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Note-se que, no terceiro estágio acima, usamos a lei de lógica

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$

onde $\wedge$ corresponde a "e", e $\vee$ corresponde a "ou".

14. Prove: para quaisquer conjuntos A e B, $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

Solução: Seja $x \in A \cap B$; então $x \in A$ e $x \in B$. Em particular, $x \in A$. Então, $A \cap B \subset A$. Se $x \in A$, então $x \in A$ ou $x \in B$, i. e., $x \in A \cup B$. Logo, $A \subset A \cup B$. Em outras palavras, $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

15. Prove o Teorema 1.3(i): $A \subset B$ se e sòmente se $A \cap B = A$.

Solução: Suponhamos $A \subset B$, e seja $x \in A$; então, por hipótese, $x \in B$. Logo, $x \in A$ e $x \in B$, i. e., $x \in A \cap B$. Então, $A \subset A \cap B$. Mas, pelo problema anterior, $A \cap B \subset A$. Logo, $A \cap B = A$.

Por outro lado, suponhamos $A \cap B = A$. Então, em particular, $A \subset A \cap B$. Mas, pelo problema anterior, $A \cap B \subset B$. Logo, pelo teorema 1.1, $A \subset B$.

PRODUTOS DE CONJUNTOS, RELAÇÕES, COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES

16. Seja $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{3, 4\}$. Determine:

(i) $A \times (B \cup C)$, (ii) $(A \times B) \cup (A \times C)$.

Solução: (i) $B \cup C = \{2, 3, 4\}$. Então,

$$A \times (B \cup C) = \{\langle a, 2\rangle,\ \langle a, 3\rangle,\ \langle a, 4\rangle,\ \langle b, 2\rangle,\ \langle b, 3\rangle,\ \langle b, 4\rangle\}$$

(ii) $A \times B = \{\langle a, 2\rangle,\ \langle a, 3\rangle,\ \langle b, 2\rangle,\ \langle b, 3\rangle\}$ e

$A \times C = \{\langle a, 3\rangle,\ \langle a, 4\rangle,\ \langle b, 3\rangle,\ \langle b, 4\rangle\}$;

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{\langle a, 2\rangle,\ \langle a, 3\rangle,\ \langle b, 2\rangle,\ \langle b, 3\rangle,\ \langle a, 4\rangle,\ \langle b, 4\rangle\}$.

Note-se, de (i) e (ii), que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

17. Prove que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Solução: $A \times (B \cap C) = \{\langle x, y\rangle : x \in A, y \in B \cap C\} =$

$= \{\langle x, y\rangle : x \in A,\ y \in B,\ y \in C\} = \{\langle x, y\rangle : \langle x, y\rangle \in A \times B,\ \langle x, y\rangle \in A \times C\} =$
$= (A \times B) \cap (A \times C)$

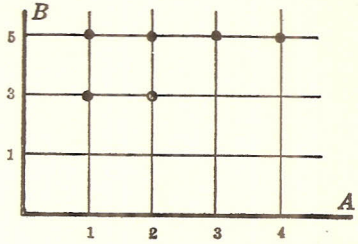
18. Seja R a relação $<$ de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ para $B = \{1, 3, 5\}$, i. e., $\langle a, b\rangle \in R$ se e só se $a < b$.

(i) Escreva R como conjunto de pares ordenados.

(ii) Faça o diagrama coordenado de $A \times B$.

(iii) Determine o domínio de R, o contradomínio de R e R^{-1}.

(iv) Determine $R \circ R^{-1}$.



Solução: (i) R consiste nos pares ordenados $\langle a, b\rangle \in A \times B$ tais que $a < b$; logo.

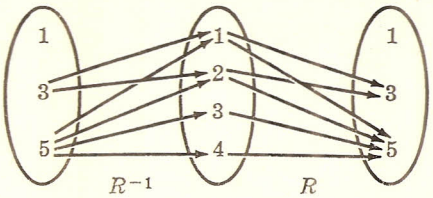
$$R = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 4, 5\rangle\}.$$

(ii) o diagrama de $A \times B$ é a figura acima.

(iii) O domínio de R é o conjunto das primeiras coordenadas dos pares de R, isto é, $\{1, 2, 3, 4\}$. O contradomínio de R é o conjunto das segundas coordenadas dos pares de R, isto é, $\{3, 5\}$. R^{-1} se obtém a partir de R, invertendo-se os pares de R:

$$R^{-1} = \{\langle 3, 1\rangle, \langle 5, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 5, 2\rangle, \langle 5, 3\rangle, \langle 5, 4\rangle\}.$$

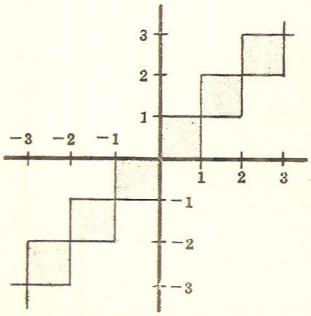
(iv) Para determinar $R \circ R^{-1}$, construam-se os diagramas de R^{-1} e R, conforme abaixo. Note-se que R^{-1} (segundo fator do produto) se constrói primeiro. Então,



$$R \circ R^{-1} = \{\langle 3, 3\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 5, 3\rangle, \langle 5, 5\rangle\}$$

19. Seja T a relação, no conjunto R de números reais, definida por $x\,T\,y$ se $x \in [n, n+1]$ e $y \in [n, n+1]$ para algum n. Faça o gráfico da relação.

Solução: T consiste dos quadrados sombreados abaixo:



20. Seja T a relação no conjunto $\mathbf{R}$ dos reais, definida por $x\,T\,y$ se e sòmente se $0 \leq x - y \leq 1$.

(i) Exprima T e T^{-1} como subconjuntos de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Faça o gráfico.

(ii) Mostre que $T \circ T^{-1} = \{\langle x, z\rangle : |x - z| \leq 1\}$.

Solução: (i) $T = \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbf{R},\ 0 \leq x - y \leq 1\}$

$$T^{-1} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in T\} = \{\langle x, y\rangle : \langle x, y\rangle \in \mathbf{R},\ 0 \leq y - x \leq 1\}$$

Seguem-se os gráficos de T e T^{-1}.

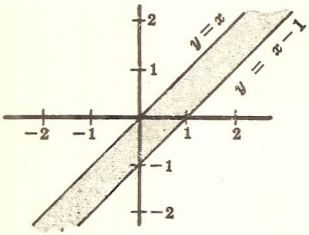


Gráfico de T

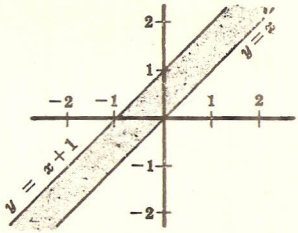


Gráfico de T^{-1}

(ii) Pela definição de composição de relações,

$$\begin{aligned} T \circ T^{-1} &= \{\langle x, z\rangle : \exists y \in \mathbf{R} \mid \langle x, y\rangle \in T^{-1}, \langle y, z\rangle \in T\} = \\ &= \{\langle x, z\rangle : \exists y \in \mathbf{R} \mid \langle y, x\rangle, \langle y, z\rangle \in T\} = \\ &= \{\langle x, z\rangle : \exists y \in \mathbf{R} \mid 0 \leq y - x \leq 1,\ 0 \leq y - z \leq 1\} \end{aligned}$$

Seja $S = \{\langle x, z\rangle : x - z \leq 1\}$. Devemos mostrar que $T \circ T^{-1} = S$.

Seja $\langle x, z\rangle$ pertencente a $T \circ T^{-1}$. Então, $\exists y \mid 0 \leq y - x,\ y - z \leq 1$. Mas $0 \leq y - x,\ y - z \leq 1 \implies y - z \leq 1 \implies y - z \leq 1 + y - x \implies x - z \leq 1$.

Também, $0 \leq y - x,\ y - z \leq 1 \implies y - x \leq 1 \implies y - x \leq 1 + y - z \implies -1 \leq x - z$.

Em outras palavras, $0 \leq y - x,\ y - z \leq 1 \implies -1 \leq x - z \leq 1$ se e sòmente se $|x - z| \leq 1$.

Então, $\langle x, z\rangle \in S$, isto é, $T \circ T^{-1} \subset S$.

Seja agora $\langle x, z\rangle$ pertencente a S; então, $|x - z| \leq 1$.

Seja $y = \max(x, z)$; então, $0 \leq y - x \leq 1$ e $0 \leq y - z \leq 1$.

Assim, $\langle x, z\rangle$ também pertence a $T \circ T^{-1}$, isto é, $S \subset T \circ T^{-1}$. Logo, $T \circ T^{-1} = S$.

21. Prove: Para duas relações quaisquer $R \subset X \times Y$ e $S \subset Y \times Z$, tem-se $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Solução: $(S \circ R)^{-1} = \{\langle z, x\rangle \mid \langle x, z\rangle \in S \circ R\} =$

$$\begin{aligned} &= \{\langle z, x\rangle : \exists y \in Y \mid \langle x, y\rangle \in R, \langle y, z\rangle \in S\} = \\ &= \{\langle z, x\rangle : \exists y \in Y \mid \langle z, y\rangle \in S^{-1}, \langle y, x\rangle \in R^{-1}\} = R^{-1} \circ S^{-1}. \end{aligned}$$

22. Prove: Para três relações quaisquer, $R \subset W \times X$, $S \subset X \times Y$ e $T \subset Y \times Z$, tem-se $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

Solução: $(T \circ S) \circ R = \{\langle w, z\rangle : \exists x \in X \mid \langle w, x\rangle \in R,\ \langle x, z\rangle \in T \circ S\} =$
$= \{\langle w, z\rangle : \exists x \in X,\ \exists y \in Y \mid \langle w, x\rangle \in R,\ \langle x, y\rangle \in S,\ \langle y, z\rangle \in T\} =$
$= \{\langle w, z\rangle : \exists y \in Y \mid \langle w, y\rangle \in S \circ R,\ \langle y, z\rangle \in T\} = T \circ (S \circ R)$.

RELAÇÕES REFLEXIVAS, SIMÉTRICAS, TRANSITIVAS E DE EQUIVALÊNCIA

23. Prove: Se R é uma relação em A, isto é, $R \subset A \times A$, então:

(i) R é reflexiva se, e sòmente se, $\Delta_A \subset R$;

(ii) R é simétrica se, e sòmente se, $R = R^{-1}$;

(iii) R é transitiva se, e sòmente se, $R \circ R \subset R$;

(iv) R reflexiva implica em $R \circ R \supset R$ e $R \circ R$ é reflexiva;

(v) R simétrica implica $R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R$;

(vi) R transitiva implica $R \circ R$ transitiva.

Solução: (i) Lembrar que a diagonal $\Delta_A = \langle a, a\rangle : a \in A$. R é reflexiva se, e sòmente se, para cada $a \in A$, tivermos

$$\langle a, a\rangle \in R \text{ se, e sòmente se, } \Delta_A \subset R.$$

(ii) Decorre diretamente das definições de inversa e simétrica.

(iii) Seja $\langle a, c\rangle \in R \circ R$; então $\exists b \in A$ tal que $\langle a, b\rangle \in R$ e $\langle b, c\rangle \in R$. Mas, por transitividade, $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle \in R$ implica $\langle a, c\rangle \in R$. Conseqüentemente, $R \circ R \subset R$. Por outro lado, suponhamos $R \circ R \subset R$. Se $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle \in R$, então $\langle a, c\rangle \in R \circ R \subset R$. Em outras palavras, R é transitiva.

(iv) Seja $\langle a, b\rangle \in R$. Ora, $R \circ R = \{\langle a, c\rangle : \exists b \in A \mid \langle a, b\rangle \in R,\ \langle b, c\rangle \in R\}$.

Mas $\langle a, b\rangle \in R$; e, como R é reflexiva, $\langle b, b\rangle \in R$. Assim, $\langle a, b\rangle \in R \circ R$, isto é, $R \subset R \circ R$. Além disso, $\Delta_A \subset R \subset R \circ R$ implica $R \circ R$ também reflexiva.

(v) $R \circ R^{-1} = \{\langle a, c\rangle : \exists b \in A \mid \langle a, b\rangle \in R^{-1},\ \langle b, c\rangle \in R\} =$
$= \{\langle a, c\rangle : \exists b \in A \mid \langle a, b\rangle \in R,\ \langle b, c\rangle \in R^{-1}\} = R^{-1} \circ R$.

(vi) Sejam $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle \in R \circ R$. Por (iii), $R \circ R \subset R$; logo, $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle \in R$. Portanto, $\langle a, c\rangle \in R \circ R$, isto é, $R \circ R$ é transitiva.

24. Seja a relação $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$ em $X = \{1, 2, 3\}$. Determine se R é (i) reflexiva, (ii) simétrica, (iii) transitiva.

Solução: (i) R não é reflexiva, pois $2 \in X$, mas $\langle 2, 2\rangle \notin R$.

(ii) R é simétrica, pois $R^{-1} = R$.

(iii) R não é transitiva, pois $\langle 3,2\rangle \in R$ e $\langle 2,3\rangle \in R$, mas $\langle 3, 3\rangle \notin R$.

25. Considere-se o conjunto $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, isto é, o conjunto dos pares ordenados de inteiros positivos. Seja R a relação $\simeq$ em $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, definida por

$$\langle a, b\rangle \simeq \langle c, d\rangle \text{ se e só se } ad = bc.$$

Prove que R é uma relação de equivalência.

Solução: Note que, para todo $\langle a, b\rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $\langle a, b\rangle \simeq \langle a, b\rangle$, pois $ab = ba$; logo, R é reflexiva.

Suponha-se $\langle a, b\rangle \simeq \langle c, d\rangle$. Então, $ad = bc$, o que implica em $cb = da$. Logo, $\langle c, d\rangle \simeq \langle a, b\rangle$ e, por conseguinte, R é simétrica.

Suponha-se, agora, $\langle a, b\rangle \simeq \langle c, d\rangle$ e $\langle c, d\rangle \simeq \langle e, f\rangle$. Então, $ad = bc$ e $cf = de$. Assim, $(ad)(cf) = (bc)(de)$ e, por cancelamento, $af = be$. Então, $\langle a, b\rangle \simeq \langle e, f\rangle$ e R é transitiva.

Ora, como R é simétrica, reflexiva e transitiva, R é uma relação de equivalência.

Note-se que, se escrevermos o par ordenado $\langle a, b\rangle$ como uma fração $\frac{a}{b}$, então a relação R acima é, de fato, a definição usual de igualdade de duas frações, isto é, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se e só se $ad = bc$.

26. Demonstre o Teorema 1.4: Seja R uma relação de equivalência em A e seja $[a]$ a classe de equivalência de $a \in A$. Então:

(i) Para todo $a \in A$, $a \in [a]$.

(ii) $[a] = [b]$ se, e sòmente se, $\langle a, b\rangle \in R$.

(iii) Se $[a] \neq [b]$, então $[a]$ e $[b]$ são disjuntas.

Solução: (i) Como R é reflexiva, $\langle a, a\rangle \in R$ para todo $a \in A$ e, pois, $a \in [a]$.

(ii) Suponha-se $\langle a, b\rangle \in R$. Devemos mostrar que $[a] = [b]$. Seja $x \in [b]$; então, $\langle b, x\rangle \in R$. Mas, por hipótese, $\langle a, b\rangle \in R$; logo, por transitividade, $\langle a, x\rangle \in R$. Portanto, $x \in [a]$, isto é, $[b] \subset [a]$. Para provar que $[a] \subset [b]$, notemos que o fato de $\langle a, b\rangle \in R$ acarreta, por simetria, $\langle b, a\rangle \in R$. Então, por um raciocínio análogo, obtemos $[a] \subset [b]$ e, portanto, $[a] = [b]$.

Por outro lado, se $[a] = [b]$, então, por reflexividade, $b \in [b] = [a]$, isto é, $\langle a, b\rangle \in R$.

(iii) Provaremos que, se $[a] \cap [b] \neq \varnothing$, então $[a] = [b]$. Ora, se $[a] \cap [b] \neq \varnothing$, existe um elemento $x \in A$ com $x \in [a] \cap [b]$. Logo, $\langle a, x\rangle \in R$ e $\langle b, x\rangle \in R$. Por simetria, $\langle x, b\rangle \in R$ e, por transitividade, $\langle a, b\rangle \in R$. Conseqüentemente, por (ii), $[a] = [b]$.

Problemas Propostos

CONJUNTOS, ELEMENTOS, SUBCONJUNTOS

27. Indique qual (ou quais) dos conjuntos abaixo é (são) o conjunto vazio:

(i) $\{x : 1 < x < 2,\ x \in \mathbf{R}\}$ (iii) $\{x : x \in \varnothing\}$

(ii) $\{x : 1 < x < 2,\ x \in \mathbf{N}\}$ (iv) $\{x : x^2 < x,\ x \in \mathbf{R}\}$.

28. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$, e $E = \{3, 5\}$. Qual dêsses conjuntos é igual ao conjunto X abaixo?

(i) X e B são disjuntos, (ii) $X \subset D$ e $X \not\subset B$,

(iii) $X \subset A$ e $X \not\subset C$, (iv) $X \subset C$ e $X \not\subset A$.

29. Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo:

(i) Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

(ii) Todo subconjunto de um conjunto infinito é infinito.

30. Discuta tôdas as relações de inclusão e pertinência entre os três conjuntos seguintes: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

31. Prove que o intervalo fechado $[a, b]$ não é subconjunto do intervalo aberto (a, b).

32. Determine o conjunto $\mathscr{P}(U)$ das partes de $U = \{0, 1, 2\}$ e o conjunto $\mathscr{P}(V)$ das partes de $V = \{0, \{1, 2\}\}$.

33. Indique o que é verdadeiro e o que é falso abaixo. (S é um conjunto qualquer não-vazio, e 2^S é o conjunto das partes de S):

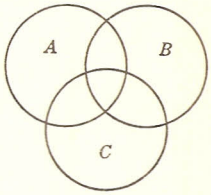
(i) $S \in 2^S$ (ii) $S \subset 2^S$ (iii) $\{S\} \in 2^S$ (iv) $\{S\} \subset 2^S$.

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

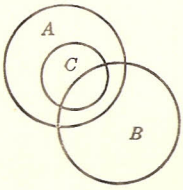
34. Considerem-se os conjuntos $A = \{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$, $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$. Determine: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

35. Em cada um dos diagramas de Venn abaixo, sombreie a área correspondente a:

(i) $A \cap (B \cup C)$, (ii) $C \setminus (A \cap B)$.



(a)



(b)

36. Prove e mostre pelos diagramas de Venn que $A^c \setminus B^c = B \setminus A$.

37. (i) Prove que $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

(ii) Dê um exemplo para mostrar que $A \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

38. Prove que $2^A \cap 2^B = 2^{A \cup B}$; $2^A \cup 2^B \subset 2^{A \cup B}$. Dê um exemplo para mostrar que $2^A \cup 2^B \neq 2^{A \cup B}$.

39. Prove o Teorema 1.3: Cada uma das condições seguintes é equivalente a $A \subset B$:

(i) $A \cap B = A$; (ii) $A \cup B = B$; (iii) $B^c \subset A^c$; (iv) $A \cap B^c = \varnothing$;

(v) $B \cup A^c = U$.

(Observação: No probl. 15, já se provou a equivalência de $A \cap B = A$ e $A \subset B$).

40. Prove que $A \subset B$ se e só se $(B \cap C) \cup A = B \cap (C \cup A)$ para qualquer C.

PRODUTO DE CONJUNTOS, RELAÇÕES, COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES

41. Prove: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

42. Usando a definição de par ordenado, i. e., $\langle a, b\rangle = \{\{a\} = \{a, b\}\}$, prove que $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ se e só se $a = c$ e $b = d$.

43. Determine o número de relações distintas de um conjunto com m elementos para um conjunto com n elementos (m, n inteiros positivos).

44. Seja R a relação definida no conjunto $\mathbf{N}$ dos inteiros positivos por

$$R = \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbf{N},\ x + 2y = 12\}.$$

(i) Escreva R como um conjunto de pares ordenados. (ii) Determine o domínio de R, o contradomínio de R e de R^{-1}. (iii) Determine $R \circ R$. (iv) Determine $R^{-1} \circ R$.

45. Dada a relação $R = \{\langle 4, 5\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 4, 6\rangle, \langle 7, 6\rangle, \langle 3, 7\rangle\}$ em $\mathbf{N}$.

(i) Determine o domínio de R, o contradomínio de R e R^{-1}.

(ii) Determine $R \circ R$. (iii) Determine $R^{-1} \circ R$.

46. Sejam as relações U e V definidas em $\mathbf{R}$ por $U = \{\langle x, y\rangle : x^2 + 2y = 5\}$ e $V = \{\langle x, y\rangle : 2x - y = 3\}$. (*i*) Determine $V \circ U$. (*ii*) Determine $U \circ V$.

47. Considere as relações $<$ e $\leq$ em $\mathbf{R}$. Mostre que $< \cup \Delta = \leq$, onde Δ é a diagonal.

RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

48. Indique o que é verdadeiro e o que é falso abaixo. (R e S são relações (não-vazias) em um conjunto A).

(1) Se R é simétrica, então R^{-1} é simétrica.

(2) Se R é reflexiva, então $R \cap R^{-1} \neq \varnothing$.

(3) Se R é simétrica, então $R \cap R^{-1} \neq \varnothing$.

(4) Se R e S são transitivas, então $R \cup S$ é transitiva.

(5) Se R e S são transitivas, então $R \cap S$ é transitiva.

(6) Se R e S são simétricas, então $R \cup S$ é simétrica.

(7) Se R e S são simétricas, então $R \cap S$ é simétrica,

(8) Se R e S são reflexivas, então $R \cap S$ é reflexiva.

49. Considere o conjunto $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, de pares ordenados de inteiros positivos. Seja $\simeq$ a relação em $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ definida por

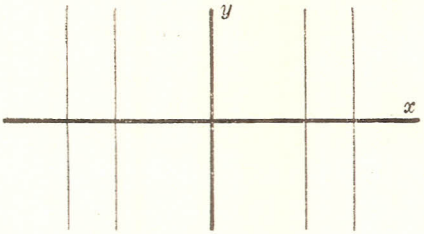
$$\langle a, b\rangle \simeq \langle c, d\rangle \text{ se e só se } a + d = b + c.$$

(i) Prove que $\simeq$ é uma relação de equivalência. (ii) Determine a classe de equivalência de $\langle 2, 5\rangle$, isto é, $[\langle 2, 5\rangle]$.

50. Seja $\sim$ a relação em $\mathbf{R}$ definida por $x \sim y$ se e só se $x - y$ é inteiro. Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência.

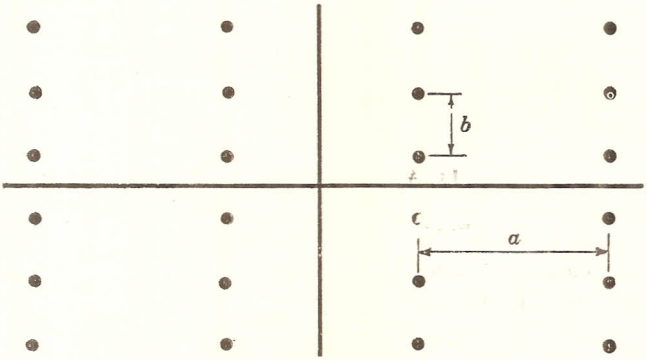
51. Seja $\sim$ a relação no plano Cartesiano $\mathbf{R}^2$ definida por $\langle x, y\rangle \sim \langle w, z\rangle$ se e só se $x = w$. Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência e faça o gráfico de várias classes de equivalência.

51.



As classes de equivalência são as linhas verticais.

52.



O gráfico acima ilustra uma classe de equivalência típica. A distância entre pontos horizontais adjacentes é a e a distância entre pontos adjacentes verticais é b.

Capítulo 2

Funções

FUNÇÕES

Suponhamos que a cada elemento de um conjunto A corresponda um único elemento de um conjunto B; a coleção f de tais correspondências é chamada uma *função de A em B*; escreve-se:

$$f : A \to B \quad \text{ou} \quad A \xrightarrow{f} B$$

O elemento (único) de B correspondente a $a \in A$ pela f é representado por $f(a)$ e é chamado o *valor* de f em a, ou a *imagem* de a pela f. O domínio de f é A, o co-domínio é B. A cada função $f : A \to B$ corresponde a relação em $A \times B$ dada por

$$\{\langle a, f(a)\rangle : a \in A\}$$

Chamamos a êste conjunto o *gráfico de f*. O contradomínio de f, representado por $f[A]$, é o conjunto de imagens, i. e.,

$$f[A] = \{f(a) : a \in A\}.$$

Duas funções $f : A \to B$ e $g : A \to B$ são iguais e escrevem-se $f = g$ se, e sòmente se, $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, i. e., se, e só se, f e g têm o mesmo gráfico. Portanto, não distinguimos entre uma função e seu gráfico. Um subconjunto f de $A \times B$, i. e., uma relação de A para B, é uma função se, e sòmente se, tem a propriedade seguinte:

[**F**] Cada $a \in A$ comparece como primeira coordenada em exatamente *um* par ordenado $\langle a, b\rangle$ de f.

A negação $f = g$ escreve-se $f \neq g$ e corresponde à afirmação:

$$\exists a \in A : f(a) \neq g(a).$$

Exemplo 1.1: Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a função que faz corresponder a cada número real o seu quadrado, i. e., para cada $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Aqui f é uma *função real*. Seu gráfico, $\{\langle x, x^2\rangle : x \in \mathbf{R}\}$, é apresentado na fig. 2-1. O contradomínio de f é o conjunto dos números reais não-negativos, i. e., $f[\mathbf{R}] = \{x : x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$.

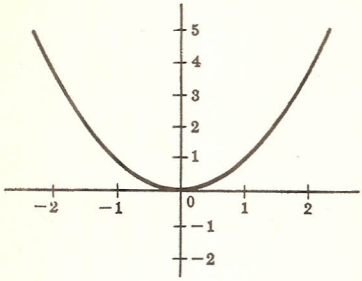


Fig. 2-1

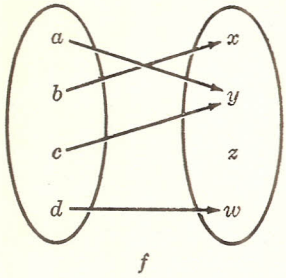


Fig. 2-2

Exemplo 1.2: Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{x, y, z, w\}$. Então, o diagrama da fig. 2-2 acima define uma função de A em B. Aqui $f[A] = \{x, y, w\}$. O gráfico de f é a relação

$$\{\langle a, y\rangle, \langle b, x\rangle, \langle c, y\rangle, \langle d, w\rangle\}.$$

Exemplo 1.3: Uma função $f : A \to B$ é chamada *função constante* se existe um $b_0 \in B$ tal que $f(a) = b_0$ para todo $a \in A$. O contradomínio de uma função constante é, pois, sempre um conjunto unitário, i. e., $f[A] = \{b_0\}$.

Consideremos, agora, as funções $f : A \to B$, $g : B \to C$ ilustradas abaixo:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

A função de A em C que faz corresponder ao elemento $a \in A$ o elemento $g\,(f(a))$ de C é chamada *função composta* de f e g, e representa-se por $g \circ f$. Então, por definição,

$$(g \circ f)\,(a) = g\,(f(a))$$

Note-se que, se considerarmos $f \subset A \times B$ e $g \subset B \times C$ como relações, já temos definido o produto $g \cdot f$ (cap. 1). Os produtos $g \cdot f$ e $g \circ f$ são os mesmos, no seguinte sentido: se f e g são funções, então $g \cdot f$ é uma função e $g \cdot f = g \circ f$.

Se $f : X \to Y$ e $A \subset X$, então a *restrição* de f a A, denotada por $f|A$, é a função de A em Y definida por

$$f|A(a) \equiv f(a) \text{ para todo } a \in A.$$

Equivalentemente, $f|A = f \cap (A \times Y)$. Por outro lado, se $f : X \to Y$ é a restrição de uma função $g : X^* \to Y$, onde $X \subset X^*$, então g é uma *extensão* de f.

FUNÇÕES BIUNÍVOCAS, SÔBRE, INVERSA E IDENTIDADE

Diz-se que uma função $f : A \to B$ é *um-a-um* (ou 1 – 1) ou *biunívoca* se a elementos distintos de A correspondem imagens distintas, i. e.,

$$f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'$$

Uma função $f : A \to B$ é *sôbre* (ou f é uma função de A *sôbre* B) se todo $b \in B$ é imagem de algum $a \in A$, i. e., se

$$b \in B \Longrightarrow \exists a \in A \mid f(a) = b$$

Então, se f é sôbre, $f[A] = B$, i. e., co-domínio e contradomínio coincidem.

Em geral, a relação inversa f^{-1} de uma função $f \subset A \times B$ não precisa ser uma função. Todavia, se f é *biunívoca* e *sôbre*, então f^{-1} é uma função de B sôbre A e se chama função *inversa*.

A diagonal $\Delta_A \subset A \times A$ é uma função chamada *função identidade* em A. Representa-se também por 1_A, ou 1. Aqui, é $1_A(a) = a$ para todo $a \in A$. Òbviamente, se $f : A \to B$, então

$$1_B \circ f = f = f \circ 1_A$$

Além disso, se f é biunívoca e sôbre e, portanto, tem uma inversa f^{-1}, então

$$f^{-1} \circ f = 1_A, \quad f \circ f^{-1} = 1_B$$

A recíproca é também verdadeira:

Proposição 2.1: Seja $f : A \to B$ e $g : B \to A$, satisfazendo

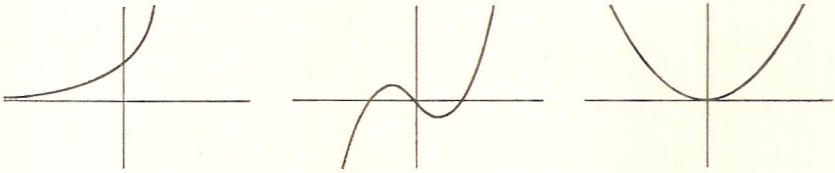
$$g \circ f = 1_A \text{ e } f \circ g = 1_B.$$

Então, $f^{-1} : B \to A$ existe e $g = f^{-1}$.

Exemplo 2.1: Consideremos as funções $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definidas por

$$f(x) = e^x, \qquad g(x) = x^3 - x, \qquad h(x) = x^2.$$

A função f (fig. 2-3(a)) é *1 – 1*; geomètricamente, isto significa que cada linha horizontal não contém mais de um ponto de f. A função g (fig. 2-3(b)) é *sôbre*; geomètricamente, cada horizontal contém ao menos um ponto de g. Finalmente, a função h (fig. 2-3(c) não é *1 – 1* nem *sôbre*, pois $h(2) = h(-2) = 4$, e $h[\mathbf{R}]$ é um subconjunto próprio de $\mathbf{R}$, p. ex.) $-16 \notin h[\mathbf{R}]$.



(a) $f(x) = e^x$ (b) $g(x) = x^3 - x$ (c) $h(x) = x^2$

Fig. 2-3

CONJUNTOS INDEXADOS, PRODUTOS CARTESIANOS

Uma classe indexada de conjuntos, representada por

$$\{A_i : i \in I\}, \ \{A_i\}_{i \in I} \text{ ou simplesmente } \{A_i\}$$

faz corresponder a cada $i \in I$ um conjunto A_i, i. e., é uma função de I em uma classe de conjuntos. O conjunto I é chamado o *conjunto-índice*, os conjuntos A_i chamam-se *conjuntos indexados*, e cada $i \in I$ é chamado um *índice*. Quando o conjunto-índice I é o conjunto de inteiros positivos, a classe indexada $\{A_1, A_2, \ldots\}$ chama-se uma *seqüência* (de conjuntos).

Exemplo 3.1: Para cada $n \in \mathbf{N}$, inteiros positivos, seja

$$D_n = \{x : x \in \mathbf{N},\ x \text{ múltiplo de } n\}.$$

Então, $D_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $D_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $D_3 = \{3, 6, 9, \ldots\}, \ldots$

O *produto cartesiano* de uma classe indexada de conjuntos, $\mathscr{A} = \{A_i : i \in I\}$, representado por

$$\Pi\{A_i : i \in I\} \text{ ou } \Pi_{i \in I} A_i \text{ ou simplesmente } \Pi_i A_i$$

é o conjunto de tôdas as funções $p : I \to A$ tais que $p(i) = a_i \in A_i$. Representamos um tal elemento do produto cartesiano por $p = \langle a_i : i \in I \rangle$.

Para cada $i_0 \in I$ existe uma função π_{i_0}, chamada i_0^a *função projeção*, do conjunto produto $\Pi_i A_i$ no i_0^0 conjunto coordenado A_{i_0} definido por

$$\pi_{i_0}(\langle a_i : i \in I \rangle) = a_{i_0}$$

Exemplo 3.2: Recorde-se que $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ é o conjunto de todos os têrmos ordenados $p = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ de números reais. Sejam, então, R_1, R_2 e R_3 cópias de $\mathbf{R}$. p pode ser encarado como uma função em $I = \{1, 2, 3\}$, onde $p(1) = a_1 \in R_1$, $p(2) = a_2 \in R_2$ e $p(3) = a_3 \in R_3$. Em outras palavras,

$$\mathbf{R}^3 = \Pi\{R_i : i \in I,\ R_i = \mathbf{R}\}.$$

OPERAÇÕES GENERALIZADAS

As noções de *união* e *intersecção*, originalmente definidas para 2 conjuntos, podem generalizar-se para uma classe qualquer $\mathscr{A}$ de subconjuntos de um conjunto universal U. A *união* dos conjuntos de $\mathscr{A}$, representada por $\bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\}$, é o conjunto dos elementos que pertencem a, ao menos, um conjunto de $\mathscr{A}$:

$$\bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\} = \{x : x \in U,\ \exists A \in \mathscr{A} \mid x \in A\}$$

A intersecção dos conjuntos de $\mathscr{A}$, representada por $\bigcap\{A : A \in \mathscr{A}\}$, é o conjunto dos elementos que pertencem a todo conjunto de $\mathscr{A}$:

$$\bigcap\{A : A \in \mathscr{A}\} = \{x : x \in U,\ x \in A \text{ para todo } A \in \mathscr{A}\}.$$

Para uma classe indexada de sobconjuntos de U, digamos, $\mathscr{A} = \{A_i : i \in I\}$, escrevemos

$$\bigcup\{A_i : i \in I\},\ \bigcup_{i \in I} A_i \text{ ou } \bigcup_i A_i$$

para a união dos conjuntos de $\mathscr{A}$, e

$$\bigcap\{A_i : i \in I\},\ \bigcap_{i \in I} A_i \text{ ou } \bigcap_i A_i$$

para a intersecção dos conjuntos de $\mathscr{A}$. Também escreveremos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$$

para a união e a intersecção, respectivamente, de uma seqüência $\{A_1, A_2, \ldots\}$ de subconjuntos de U.

Exemplo 4.1: Para cada $n \in \mathbf{N}$, inteiros positivos, seja $D_n = \{x : x \in \mathbf{N}, x$ múltiplo de $n\}$ (v. exemplo 3.1). Então,

$$\bigcup \{D_i \mid i \geq 10\} = \{10, 11, 12, \ldots\} \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i = \varnothing.$$

Exemplo 4.2: Seja $I = [0, 1]$ e, para cada $i \in I$, $A_i = [0, i]$. Então,

$$\bigcup_i A_i = [0, 1] \quad \text{e} \quad \bigcap_i A_i = \{0\}.$$

As leis distributivas e as leis de De Morgan também são válidas para essas operações generalizadas:

Teorema 2.2: Para qualquer classe de conjuntos $\mathscr{A} = \{A_i\}$ e qualquer conjunto B,

$$\text{(i)}\ B \cup (\bigcap_i A_i) = \bigcap_i (B \cup A_i) \qquad \text{(ii)}\ B \cap (\bigcup_i A_i) = \bigcup_i (B \cap A_i)$$

Teorema 2.3: Seja $\mathscr{A} = \{A_i\}$ uma classe de subconjuntos de U. Então,

$$\text{(i)}\ (\bigcup_i A_i)^c = \bigcap_i A_i^c \qquad \text{(ii)}\ (\bigcap_i A_i)^c = \bigcup_i A_i^c$$

É de aplicação freqüente o teorema seguinte:

Teorema 2.4: Seja A um conjunto qualquer e, para cada $p \in A$, seja G_p um subconjunto de A tal que $p \in G_p \subset A$. Então, $A = \bigcup \{G_p \mid p \in A\}$.

Observação: No caso de uma classe vazia $\varnothing$ de subconjuntos de um conjunto universal U, é conveniente definir

$$\bigcup \{A : A \in \varnothing\} = \varnothing \quad \text{e} \quad \bigcap \{A : A \in \varnothing\} = U$$

Donde

$$\bigcup \{A_i : i \in \varnothing\} = \varnothing \quad \text{e} \quad \bigcap \{A_i : i \in \varnothing\} = U$$

FUNÇÕES DE CONJUNTO ASSOCIADAS

Seja $f : X \to Y$. Então, a *imagem* $f[A]$ de qualquer subconjunto A de X é o conjunto de imagens de pontos de A, e a *imagem inversa* $f^{-1}[B]$ de qualquer subconjunto B de Y é o conjunto de pontos de X, cujas imagens estão em B. Isto é,

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\} \quad \text{e} \quad f^{-1}[B] = \{x : x \in X, f(x) \in B\}.$$

Exemplo 5.1: Seja a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Então,

$$f[\{1, 3, 4, 7\}] = \{1, 9, 16, 49\}, \quad f[(1, 2)] = (1, 4).$$

Também, $f^{-1}[\{4, 9\}] = \{-3, -2, 2, 3\}$, $f^{-1}[(1, 4)] = (1, 2) \cup (-2, -1)$.

Assim, uma função $f : X \to Y$ induz uma função, também representada por f, do conjunto $\mathscr{P}(X)$ de partes de X no conjunto $\mathscr{P}(Y)$ de partes de Y, e uma função f^{-1} de $\mathscr{P}(Y)$ em $\mathscr{P}(X)$. As funções induzidas f e f^{-1} chamam-se *funções de conjunto*, pois são correspondências de classes (de conjuntos) em classes.

Observemos que a função de conjunto associada f^{-1} não é, em geral, a inversa da função de conjunto associada f. P. ex., se f é a função do exemplo 5.1, então

$$f^{-1} \circ f\,[(1, 2)] = f^{-1}\,[1, 4] = (1, 2) \cup (-2, -1).$$

Note-se a diferença de notação para uma função e para suas funções de conjunto associadas, i. e., $f(a)$ denota o valor da função original, e $f[A]$ e $f^{-1}[B]$ denotam valôres das funções de conjunto associadas.

As funções de conjunto associadas gozam de várias propriedades. Mencionemos em particular:

Teorema 2.5: Seja $f : X \to Y$. Então, para quaisquer subconjuntos A e B de X,

(i) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$ (ii) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$

(iii) $f[A \setminus B] \supset f[A] \setminus f[B]$ (iv) $A \subset B \Longrightarrow f[A] \subset f[B]$

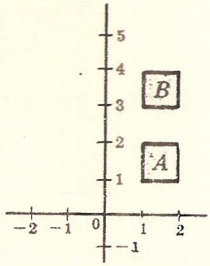
e, mais geralmente, para qualquer classe indexada $\{A_i\}$ de subconjuntos de X,

$$\text{(i')} \quad f[\cup_i A_i] = \cup_i f[A_i]$$

$$\text{(ii')} \quad f[\cap_i A_i] \subset \cap_i f[A_i].$$

O exemplo que segue mostra que, em geral, as inclusões em (ii) e (iii) não podem ser substituídas por igualdades.

Exemplo 5.2: Sejam os subconjuntos $A = [1, 2] \times [1, 2]$ e $B = [1, 2] \times [3, 4]$, do plano $\mathbf{R}^2$ e a projeção $\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ no primeiro conjunto coordenado, i. e., o eixo dos xx. Observe-se que $\pi[A] = [1, 2]$ e $\pi[B] = [1, 2]$ e que $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \pi[A \cap B] = \varnothing$.



Logo,

$$\pi[A] \cap \pi[B] = [1, 2] \neq \pi[A \cup B] = \varnothing.$$

Além disso, $A \setminus B = A$, de modo que

$$\pi[A \setminus B] = [1, 2] \neq \varnothing = \pi[A] \setminus \pi[B].$$

Por outro lado, a função de conjunto inversa é muito mais "bem comportada", no sentido de que a igualdade vale em ambos os casos. Isto é,

Teorema 2.6: Seja $f : X \to Y$. Então, para quaisquer subconjuntos A e B de Y,

$$\text{(i)} \quad f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$$
$$\text{(ii)} \quad f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$$
$$\text{(iii)} \quad f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$$
$$\text{(iv)} \quad A \subset B \Longrightarrow f^{-1}[A] \subset f^{-1}[B];$$

e, de modo mais geral, para qualquer classe indexada $\{A_i\}$ de subconjuntos de Y,

$$\text{(i')} \quad f^{-1}[\cup_i A_i] = \cup_i f^{-1}[A_i] \qquad \text{(ii')} \quad f^{-1}[\cap_i A_i] = \cup_i f^{-1}[A_i]$$

E como $f^{-1}[Y] = X$, temos, como caso especial de (iii),

Corolário 2.7: Seja $f : X \to Y$ e $A \subset Y$. Então

$$f^{-1}[A^c] = (f^{-1}[A])^c.$$

Segue-se uma importante relação entre as duas funções de conjunto:

Teorema 2.8: Seja $f : X \to Y$ e seja $A \subset X$ e $B \subset Y$. Então,

$$\text{(i)} \; A \subset f^{-1} \circ f[A], \quad \text{(ii)} \; B \supset f \circ f^{-1}[B].$$

Conforme demonstrado prèviamente, a inclusão em (i) não pode, em geral, ser substituída pela igualdade.

ÁLGEBRA DAS FUNÇÕES REAIS

Seja $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ a coleção de tôdas as funções reais definidas em um conjunto X. Muitas operações são "herdadas" por $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ das correspondentes operações em $\mathbf{R}$. Especìficamente, seja $f: X \to \mathbf{R}$, $g : X \to \mathbf{R}$ e $k \in \mathbf{R}$; define-se, então:

$$\begin{aligned}
(f + g) : X \to \mathbf{R} \quad &\text{por} \quad (f + g)(x) \equiv f(x) + g(x) \\
(k \cdot f) : X \to \mathbf{R} \quad &\text{por} \quad (k \cdot f)(x) \equiv k\,(f(x)) \\
(|f|) : X \to \mathbf{R} \quad &\text{por} \quad (|f|)(x) \equiv |f(x)| \\
(fg) : X \to \mathbf{R} \quad &\text{por} \quad (fg)(x) \equiv f(x)\,g(x)
\end{aligned}$$

É também conveniente identificar o número real $k \in \mathbf{R}$ com a função constante $f(x) = k$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Então, $(f + k) : X \to \mathbf{R}$ é a função

$$(f + k)(x) \equiv f(x) + k.$$

Note-se que $(fg) : X \to \mathbf{R}$ *não é* a composição de funções f e g anteriormente definida.

Exemplo 6.1: Considerem-se as funções

$$f = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 3\rangle\} \quad \text{e} \quad g = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, -1\rangle\},$$

de domínio $X = \{a, b\}$. Então,

$$\begin{aligned}
(3f - 2g)(a) &\equiv 3f(a) - 2g(a) = 3(1) - 2(2) = -1 \\
(3f - 2g)(b) &\equiv 3f(b) - 2g(b) = 3(3) - 2(-1) = 11,
\end{aligned}$$

isto é:

$$3f - 2g = \{\langle a, -1\rangle, \langle b, 11\rangle\}$$

Também, como

$$|g|(x) \equiv |g(x)| \quad \text{e} \quad (g+3)(x) \equiv g(x) + 3,$$
$$|g| = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle\} \quad \text{e} \quad g + 3 = \{\langle a, 5\rangle, \langle b, 2\rangle\}.$$

A coleção $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$, com as operações acima, goza de várias propriedades, algumas das quais constam do teorema abaixo.

Teorema 2.9: A coleção $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ de tôdas as funções reais definidas num conjunto X, não-vazio, juntamente com as operações acima, satisfaz os seguintes axiomas de *espaço vetorial linear real*:

[V$_1$]: A adição de funções $f + g$ verifica:

(1) $(f + g) + h = f + (g + h)$

(2) $f + g = g + f$

(3) $\exists 0 \in \mathscr{F}(X, \mathbf{R})$, i. e., $0 : X \to \mathbf{R} \mid f + 0 = f$

(4) Para tôda $f \in \mathscr{F}(X, \mathbf{R})$, $\exists -f \in \mathscr{F}(X, \mathbf{R})$, i. e., $-f : X \to \mathbf{R} \mid f + (-f) = 0$.

[V$_2$]: A multiplicação escalar $k \cdot f$ de uma função f por um real k satisfaz:

(1) $k \cdot (k' \cdot f) = (kk') \cdot f$

(2) $1 \cdot f = f$

[V$_3$]: As operações de adição e multiplicação escalar verificam:

(1) $k \cdot (f + g) = k \cdot f + k \cdot g$

(2) $(k + k')f = k \cdot f + k'f$

Exemplo 6.2: Seja $X = \{1, 2, \ldots, m\}$. Então, cada função $f \in \mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ pode escrever-se como uma m-upla ordenada $\langle f(1), \ldots, f(m)\rangle$. Além disso, se

$$f = \langle a_1, \ldots, a_m\rangle \quad \text{e} \quad g = \langle b_1, \ldots, b_m\rangle, \text{ então}$$
$$f + g = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m\rangle$$

e, para qualquer $k \in \mathbf{R}$, $\quad k \cdot f = \langle ka_1, \ldots, ka_m\rangle$

Neste caso, o espaço vetorial linear real $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ é chamado *espaço euclidiano m-dimensional.*

Exemplo 6.3: Diz-se que uma função $f \in \mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ é *limitada* se e sòmente se

$$\exists M \in \mathbf{R} \text{ tal que } |f(x)| \leq M \text{ para todo } x \in X.$$

Seja $\beta(X, \mathbf{R})$ a coleção de tôdas as funções limitadas em $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$. Então, $\beta(X, \mathbf{R})$ goza das seguintes propriedades:

(i) Se $f, g \in \beta(X, \mathbf{R})$, então $f + g \in \beta(X, \mathbf{R})$

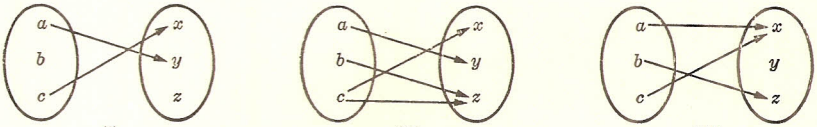
(ii) Se $f \in \beta(X, \mathbf{R})$ e $k \in \mathbf{R}$, então $k \cdot f \in \beta(X, \mathbf{R})$.

Qualquer subconjunto de $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ que satisfaça (i) e (ii) é chamado um *subespaço (linear)* de $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$.

Problemas Resolvidos

FUNÇÕES

1. Diga se cada um dos diagramas abaixo define ou não uma função de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{x, y, z\}$



(i) (ii) (iii)

Solução: (i) Não. Não há nenhum correspondente do elemento $b \in A$.

(ii) Não. A $c \in A$ correspondem dois elementos: x e z.

(iii) Sim.

2. Seja $X = (1, 2, 3, 4\}$. Diga se cada uma das relações seguintes é ou não uma função de X em X:

(i) $f = \{\langle 2, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

(ii) $g = \{\langle 3, 1\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$

(iii) $h = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

Solução: Tenha-se em mente que um subconjunto f de $X \times X$ é uma função $f : X \to X$ se, e sòmente se, cada $x \in X$ comparece como primeira coordenada em exatamente um par ordenado em f.

(i) Não. Os dois pares ordenados diferentes $\langle 2, 3\rangle$ e $\langle 2, 1\rangle$ de f têm a mesma primeira coordenada.

(ii) Não. O elemento 2 não comparece como primeira coordenada em nenhum dos pares ordenados.

(iii) Sim. Conquanto $2 \in X$ compareça como primeira coordenada em dois pares ordenados de h, êsses dois pares são iguais.

3. Sejam as funções

$$f = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 5, 2\rangle\}$$
$$g = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 5, 3\rangle\}$$

de $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ em X.

(i) Determine o contradomínio de f e o de g.

(ii) Determine as funções compostas $g \circ f$ e $f \circ g$.

Solução: (i) O contradomínio é o conjunto das imagens, isto é, o conjunto das segundas coordenadas. Então,

contradomínio de $f = \{3, 5, 1, 2\}$
" " $g = \{4, 1, 2, 3\}$.

(ii) Use a definição de função composta e calcule:

$$(g \circ f)(1) \equiv g(f(1)) = g(3) = 1 \qquad (f \circ g)(1) \equiv f(g(1)) = f(4) = 1$$
$$(g \circ f)(2) \equiv g(f(2)) = g(5) = 3 \qquad (f \circ g)(2) \equiv f(g(2)) = f(1) = 3$$
$$(g \circ f)(3) \equiv g(f(3)) = g(3) = 1 \qquad (f \circ g)(3) \equiv f(g(3)) = f(1) = 3$$
$$(g \circ f)(4) \equiv g(f(4)) = g(1) = 4 \qquad (f \circ g)(4) \equiv f(g(4)) = f(2) = 5$$
$$(g \circ f)(5) \equiv g(f(5)) = g(2) = 1 \qquad (f \circ g)(5) \equiv f(g(5)) = f(3) = 3$$

em outras palavras,

$$g \circ f = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 1\rangle\}$$
$$f \circ g = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 3\rangle\}$$

Observe que $g \circ f \neq f \circ g$.

4. Sejam as funções $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definidas por

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x^2 - 2.$$

Defina as funções compostas $g \circ f$ e $f \circ g$.

Solução: Calcule $g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ como segue:

$$(g \circ f)(x) \equiv g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$$

Note que se pode chegar ao mesmo resultado escrevendo

$$y = f(x) = 2x + 1, \qquad z = g(y) = y^2 - 2$$

e eliminando y entre as duas equações, i. e.,

$$z = y^2 - 2 = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1.$$

Calcule, agora, $f \circ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

$$(f \circ g)\, x \equiv f(g(x)) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3.$$

5. Prove a lei associativa para a composição de funções, i. e., se $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$, então $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Solução: Como já se provou a lei associativa para a composição de relações em geral, o resultado decorre imediatamente. Daremos também uma prova direta:

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a) = h(g(f(a))), \qquad \forall a \in A$$
$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))), \qquad \forall a \in A$$

Logo $\quad (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$

FUNÇÕES BIUNÍVOCA E SÔBRE

6. Sejam as funções $f : A \to B$, $g : B \to C$. Prove:

(i) Se f e g são "sôbre", então $g \circ f : A \to C$ também é "sôbre".

(ii) Se f e g são biunívocas, então $g \circ f : A \to C$ também é biunívoca.

Solução: (i) Seja $c \in C$. Como g é sôbre, $\exists b \in B \mid g(b) = c$. E, como f é sôbre, $\exists a \in A \mid f(a) = b$. Mas então $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$, i. e., $g \circ f$ também é sôbre.

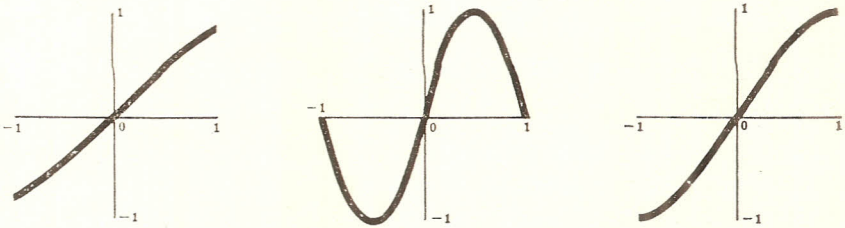
(ii) Suponhamos $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$, i. e., $g(f(a)) = g(f(a'))$. Então $f(a) = f(a')$, pois g é biunívoca; logo, $a = a'$, pois f é biunívoca. Então, $g \circ f$ é também biunívoca.

7. Seja $A = [-1, 1]$, e $f : A \to A$, $g : A \to A$ e $h : A \to A$ definidas por

$$f(x) = \text{sen } x, \qquad g(x) = \text{sen } \pi x, \qquad h(x) = \text{sen } \frac{\pi}{2} x.$$

Indique se cada uma das funções é (i) biunívoca; (ii) sôbre; (iii) bijetiva (i. e., biunívoca e sôbre).

Solução: Os gráficos das funções são os seguintes:



$f(x)$ $g(x)$ $h(x)$

A função f é biunívoca; cada horizontal não contém mais de um ponto de f. Não é "sôbre", pois, p. ex., sen $x \neq 1$ para qualquer $x \in A$. Por outro lado, g é "sôbre", pois cada horizontal contém, ao menos, um ponto de f; mas g não é biunívoca, porque, p. ex., $g(-1) = g(0) = 0$. Já a função h é biunívoca e "sôbre"; cada horizontal contém exatamente um ponto de h.

8. Prove que, se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são biunívocas e "sôbre", então $(g \circ f)^{-1} : C \to A$ existe e é igual a $f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$.

Solução: Empregando a proposição 2.1, mostra-se que

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_A \quad \text{e} \quad (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_B.$$

Utilizando a lei associativa para composição de funções,

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ (g \circ f)) =$$
$$= f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) = f^{-1} \circ (1 \circ f) = f^{-1} \circ f = 1_A,$$

pois $\quad g^{-1} \circ g = 1 \quad$ e $\quad 1 \circ f = f = f \circ 1$. Anàlogamente,

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) =$$
$$= g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) = g \circ (1 \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = 1_B.$$

9. Quando é que uma função projeção $\pi_{i_0} : \Pi \{A_i : i \in I\} \to A_{i_0}$, $A_{i_0} \neq \varnothing$, é "sôbre"?

Solução: Uma função projeção é sempre "sôbre", desde que o produto cartesiano $\Pi \{A_i : i \in I\}$ seja não-vazio, i. e., desde que nenhum A_i seja vazio.

CONJUNTOS INDEXADOS, OPERAÇÕES GENERALIZADAS

10. Seja $A_n = \{x : x$ múltiplo de $n\}$, $n \in \mathbf{N}$ inteiros positivos, e $B_i = [i, i + 1]$, $i \in \mathbf{Z}$, inteiros. Determine:

(i) $A_3 \cap A_5$; (ii) $\bigcup \{A_i : i \in P\}$, sendo P o conjunto dos números primos; (iii) $B_3 \cap B_4$; (iv) $\bigcup \{B_i : i \in \mathbf{Z}\}$; (v) $(\bigcup \{B_i : i \geq 7\}) \cap A_5$.

Solução: (i) Os números que são múltiplos de 3 e de 5 são múltiplos de 15; logo: $A_3 \cap A_5 = A_{15}$.

(ii) Todo inteiro positivo, exceto 1, é múltiplo de, ao menos, um número primo; logo, $\bigcup \{A_i : i \in P\} = \{2, 3, 4, \ldots\} = \mathbf{N} \setminus \{1\}$

(iii) $B_3 \cap B_4 = \{x : 3 \leq x \leq 4,\ \ 4 \leq x \leq 5\} = \{4\}$

(iv) Como todo número real pertence a, ao menos, um intervalo $[i, i+1]$, $\bigcup \{B_i : i \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{R}$, conjunto dos números reais.

(v) $(\bigcup \{B_i : i \geq 7\}) \cap A_5 = \{x : x$ é múltiplo de 5, $x \geq 7\} = A_5 \setminus \{5\} = \{10, 15, 20, \ldots\}$.

11. Sejam $D_n = (0, 1/n)$, $n \in \mathbf{N}$ inteiros positivos. Determine:

(i) $D_3 \cup D_7$; (iii) $D_s \cup D_t$; (v) $\bigcup \{D_i : i \in A \subset \mathbf{N}\}$;

(ii) $D_3 \cap D_{20}$; (iv) $D_s \cap D_t$; (vi) $\bigcap \{D_i : i \in \mathbf{N}\}$.

Solução: (i) Como $(0, 1/7) \subset (0, 1/3)$, $D_3 \cup D_7 = D_3$.

(ii) Como $(0, 1/20) \subset (0, 1/3)$, $D_3 \cap D_{20} = D_{20}$.

(iii) Seja $m = \min\{s, t\}$, i. e., o menor dos dois números s e t; então, $D_m = D_s$ ou D_t e contém o outro. Logo $D_s \cup D_t = D_m$.

(iv) Seja $M = \max\{s, t\}$, i. e., o maior dos dois números. Então $D_s \cap D_t = D_M$.

(v) Seja $a \in A$ o menor número em A. Então, $\bigcup \{D_i : i \in A \subset \mathbf{N}\} = D_a$.

(vi) Se $x \in \mathbf{R}$, então $\exists i \in \mathbf{N} \mid x \notin (0, 1/i)$. Logo, $\bigcap \{D_i : i \in \mathbf{N}\} = \varnothing$.

12. Prove o teorema 2.2 (ii) (Lei distributiva):

$$B \cap (\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} (B \cap A_i).$$

Solução:

$$\begin{aligned} B \cap (\cup_{i \in I} A_i) &= \{x : x \in B, x \in \cup_{i \in I} A_i\} = \\ &= \{x : x \in B, \exists i_0 \in I \mid x \in A_{i_0}\} = \\ &= \{x : \exists i_0 \in I \mid x \in B \cap A_{i_0}\} = \\ &= \cup_{i \in I} (B \cap A_i). \end{aligned}$$

13. Prove: Se $\{A_i : i \in I\}$ é uma classe indexada de conjuntos, e $i_0 \in I$, então

$$\cap_{i \in I} A_i \subset A_{i_0} \subset \cup_{i \in I} A_i.$$

Solução: Seja $x \in \cap_{i \in I} A_i$; então, $x \in A_i$ para todo $i \in I$. Em particular, $x \in A_{i_0}$. Logo, $\cap_{i \in I} A_i \subset A_{i_0}$.

Seja agora $y \in A_{i_0}$. Como $i_0 \in I$, $y \in \cup_{i \in I} A_i$. Logo, $A_{i_0} \subset \cup_{i \in I} A_i$.

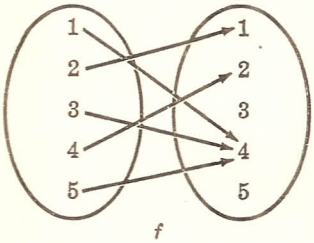
14. Prove o teorema 2.4: Seja A um conjunto e, para cada $p \in A$, seja G_p um subconjunto de A tal que $p \in G_p \subset A$. Então, $A = \bigcup \{G_p : p \in A\}$.

Solução: Seja $x \in \bigcup \{G_p : p \in A\}$. Então, $\exists p_0 \in A$ tal que $x \in G_{p_0} \subset A$; logo, $x \in A$, portanto, $\bigcup \{G_p : p \in A\} \subset A$. (Em outras palavras, se cada G_p é um subconjunto de A, então a união dos G_p é também subconjunto de A.)

Seja agora $y \in A$. Então, $y \in G_y$, portanto, $y \in \bigcup \{G_p : p \in A\}$. Assim, $A \subset \bigcup \{G_p : p \in A\}$ e os dois conjuntos são iguais.

FUNÇÕES DE CONJUNTO ASSOCIADAS

15. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $f : A \to A$ definida pelo diagrama



Calcule (i) $f[\{1, 3, 5\}]$, (ii) $f^{-1}[\{2, 3, 4\}]$, (iii) $f^{-1}[\{3, 5\}]$.

Solução:

(i) $f[\{1, 3, 5\}] = \{f(1), f(3), f(5)\} = \{4\}$.

(ii) $f^{-1}[\{2, 3, 4\}] = \{4, 1, 3, 5\}$.

(iii) $f^{-1}[\{3, 5\}] = \varnothing$, pois nenhum elemento de A tem 3 ou 5 como imagem.

16. Considere a função $f = \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Calcule: (i) $f^{-1}[\{25\}]$, (ii) $f^{-1}[\{-9\}]$, (iii) $f^{-1}[\{x \mid x \leq 0\}]$, (iv) $f^{-1}[\{x \mid 4 \leq x \leq \leq 25\}]$.

Solução:

(i) $f^{-1}[\{25\}] = \{5, -5\}$, pois $f(5) = 25 = f(-5)$ e nenhum outro número tem 25 por quadrado.

(ii) $f^{-1}[\{-9\}] = \varnothing$, pois nenhum número real tem -9 como quadrado.

(iii) $f^{-1}[\{x : x \leq 0\}] = \{0\}$ pois $f(0) = 0 \leq 0$ e o quadrado de qualquer outro número real é maior do que zero.

(iv) $f^{-1}[\{x : 4 \leq x \leq 25\}]$ consiste nos números x tais que $4 \leq x^2 \leq 25$. Então,

$$f^{-1}[\{x : 4 \leq x \leq 25\}] = [2,5] \cup [-5, -2].$$

17. Prove: Se $f : X \to Y$ é biunívoca, então a função de conjunto associada $f : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ também o é.

Solução: Se $X = \varnothing$, então $\mathscr{P}(X) = \{\varnothing\}$; logo, $f : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ é biunívoca, uma vez que dois elementos quaisquer diferentes de $\mathscr{P}(X)$ não podem ter a mesma imagem; e isso pela simples razão de que não há dois elementos diferentes em $\mathscr{P}(X)$. Se $X \neq \varnothing$, $\mathscr{P}(X)$ tem, ao menos, dois elementos. Sejam os elementos $A, B \in \mathscr{P}(X)$, mas $A \neq B$. Então, $\exists p \in X \mid p \in A$, $p \notin B$ (ou $p \in B$, $p \notin A$). Assim, $f(p) \in f[A]$ e, como f é biunívoca, $f(p) \notin f[B]$ (ou $f(p) \in f[B]$ e $f(p) \notin f[A]$). Logo, $f[A] \neq f[B]$, e, conseqüentemente, a função de conjunto induzida é também biunívoca.

18. Prove o teorema 2.5, (i) e (iii):

(a) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$, (b) $f[A] \backslash f[B] \subset f[A \backslash B]$.

Solução: (*a*) Mostremos, primeiro, que $f[A \cup B] \subset f[A] \cup f[B]$. Seja $y \in f[A \cup B]$, i. e., $\exists x \in A \cup B \mid f(x) = y$. Então, ou $x \in A$ ou $x \in B$; mas

$$x \in A \Longrightarrow f(x) = y \in f[A].$$

ou

$$x \in B \Longrightarrow f(x) = y = f[B].$$

Em qualquer dos casos, $y \in f[A] \cup f[B]$.

Provemos, agora, a inclusão inversa, isto é, $f[A] \cup f[B] \subset f[A \cup B]$. Seja $y \in f[A] \cup f[B]$. Então, $y \in f[A]$ ou $y \in f[B]$; mas

$$y \in f[A] \Longrightarrow \exists x \in A \mid f(x) = y$$
$$y \in f[B] \Longrightarrow \exists x \in B \mid f(x) = y$$

Em ambos os casos, $y = f(x)$, com $x \in A \cup B$, i. e., $y \in f[A \cup B]$.

(b) Seja $y \in f[A] \setminus f[B]$. Então, $\exists x \in A \mid f(x) = y$, mas $y \notin \{f(x) : x \in B\}$. Logo, $x \notin B$, ou $x \in B \setminus A$; por conseguinte, $y \in f[A \setminus B]$.

19. Prove o teorema 2.6, (ii) e (iii):

$$\text{(a) } f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]:$$
$$\text{(b) } f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B].$$

Solução: (a) Mostremos, primeiro, que $f^{-1}[A \cap B] \subset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$. Seja $x \in f^{-1}[A \cap B]$. Então, $f(x) \in A \cap B$, $f(x) \in A$ e $f(x) \in B$, ou $x \in f^{-1}[A]$ e $x \in f^{-1}[B]$. Logo, $x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.

Para a inclusão inversa, seja $x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$. Então, $f(x) \in A$ e $f(x) \in B$, i. e., $f(x) \in A \cap B$. Logo, $x \in f^{-1}[A \cap B]$.

(b) Para mostrar que $f^{-1}[A \setminus B] \subset f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$, suponhamos $x \in f^{-1}[A \setminus B]$. Então, $f(x) \in A \setminus B$, i. e., $f(x) \in A$ e $f(x) \notin B$. Assim, $x \in f^{-1}[A]$ mas $x \notin f^{-1}[B]$, i. e., $x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.

Para a inclusão inversa, seja $x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$. Então, $f(x) \in A$ mas $f(x) \notin B$, i. e., $f(x) \in A \setminus B$. Logo, $x \in f^{-1}[A \setminus B]$.

ÁLGEBRA DAS FUNÇÕES REAIS

20. Sejam $X = \{a, b, c\}$ e $f, g \in \mathscr{F}(X, \mathbf{R})$, definidas por

$$f = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, -2\rangle, \langle c, 3\rangle\}, \quad g = \{\langle a, -2\langle, \langle b, 0\rangle, \langle c, 1\rangle\}.$$

Calcule: (i) $f + 2g$, (ii) $fg - 2f$, (iii) $f + 4$, (iv) $|f|$, (v) f^2.

Solução:

(i) Calcule como segue: $(f + 2g)(a) \equiv f(a) + 2g(a) = 1 - 4 = -3.$
$(f + 2g)(b) \equiv f(b) + 2g(b) = -2 + 0 = -2.$
$(f + 2g)(c) \equiv f(c) + 2g(c) = 3 + 2 = 5.$

Em outras palavras, $f + 2g = \{\langle a, -3\rangle, \langle b, -2\rangle, \langle c, 5\rangle\}$.

(ii) Anàlogamente, $(fg - 2f)(a) \equiv f(a)\,g(a) - 2f(a) = (1)(-2) - 2(1) = -4.$
$(fg - 2f)(b) \equiv f(b)\,g(b) - 2f(b) = (-2)(0) - 2(-2) = 4.$
$(fg - 2f)(c) \equiv f(c)\,g(c) - 2f(c) = (3)(1) - 2(3) = -3.$

Isto é, $fg - 2f = \{\langle a, -4\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle c, -3\rangle\}$.

(iii) Como, por definição, $(f + 4)(x) \equiv f(x) + 4$, some-se 4 a cada valor imagem, i. e., à 2.ª coordenada de cada par:

$$f + 4 = \{\langle a, 5\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 7\rangle\}.$$

(iv) Como $|f|(x) \equiv |f(x)|$, substitua-se a 2.ª coordenada de cada par em f por seu valor absoluto:

$$|f| = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}.$$

(v) Como $f^2(x) = (ff)(x) = f(x) = f(x) = (f(x))^2$, substitua-se a 2.ª coordenada de cada par em f por seu quadrado:

$$f^2 = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle c, 9\rangle\}.$$

21. Seja $\widehat{0} \in \mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ definida por $\widehat{0}(x) = 0$ para todo $x \in X$. Prove: Para qualquer $f \in \mathscr{F}(X, \mathbf{R})$, (i) $f + \widehat{0} = f$, (ii) $f\widehat{0} = \widehat{0}$.

Solução: (i) $(f + \widehat{0})(x) = f(x) + \widehat{0}(x) = f(x) + 0 = f(x)$ para todo $x \in X$; logo, $f + \widehat{0} = f$. Note-se que $\widehat{0}$ satisfaz as condições do elemento 0 no axioma $[V_1]$ do teorema 2.9.

(ii) $(f\widehat{0})(x) \equiv f(x)\,\widehat{0}(x) = f(x) \,.\, (0) = 0 = \widehat{0}(x)$ para todo $x \in X$; logo $f\widehat{0} = \widehat{0}$.

22. Prove: $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ satisfaz o axioma $[V_3]$ do teorema 2.9, i. e, se $f, g \in \mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ e $k, k' \in \mathbf{R}$, então (i) $k \,.\, (f + g) = k \,.\, f + k \,.\, g$, (ii) $(k + k') \,.\, f = k \,.\, f + k' \,.\, f$.

Solução: (i) $[k \,.\, (f + g)](x) = k\,[(f + g)(x)] = k\,[f(x) + g(x)] = k\,(f(x)) + k\,(g(x))$ $(k \,.\, f + k \,.\, g)(x) = (k \,.\, f)(x) + (k \,.\, g)(x) = k\,(f(x)) + k\,(g(x))$ para todo $x \in X$, logo, $k \,.\, (f + g) = k \,.\, f + k \,.\, g$. Observe-se que utilizamos o fato de que k, $f(x)$ e $g(x)$ são números reais e verificam a lei distributiva.

(ii) $((k + k') \,.\, f)(x) = (k + k')f(x) = k\,(f(x)) + k'\,(f(x))$

$(k \,.\, f + k'f)(x) = (k \,.\, f)(x) + (k' \,.\, f)(x) = k\,(f(x)) + k'\,(f(x))$

para todo $x \in X$ logo, $(k + k') \,.\, f = k \,.\, f + k' \,.\, f$.

Problemas Propostos

FUNÇÕES

23. Sejam $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funções definidas por $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, \text{ se } x > 2 \\ x^2 - 2\,|x|, \text{ se } x \leq 2, \end{cases}$ $g(x) = 3x + 1$. Determine (i) $f(-2)$, (ii) $g(-3)$, (iii) $f(4)$, (iv) $(g \circ f)(1)$, (v) $(f \circ g)(2)$, (vi) $(f \circ f)(3)$.

24. Sejam $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funções definidas por $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $g(x) = 2x - 3$. Estabeleça fórmulas que definam as funções compostas (i) $f \circ g$, (ii) $g \circ f$, (iii) $f \circ f$.

25. Seja $k : X \to X$ uma função constante. Prove que, para qualquer função $f : X \to X$, $k \circ f = k$. Que se pode dizer de $f \circ k$?

26. Considere a função $f(x) = x$, com $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 0$. Diga se cada uma das funções seguintes é ou não uma extensão de f:

(i) $g_1(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbf{R}$, (ii) $g_2(x) = x$, $x \in [-1, 1]$,

(iii) $g_3(x) = (x + |x|)/2$ para todo $x \in \mathbf{R}$, (iv) $1_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

27. Seja $A \subset X$ e $f : X \to Y$. A *função inclusão* j de A em X, denotada $j : A \subset X$, é definida por $j(a) = a$ para todo $a \in A$. Mostre que $f|A$, restrição de f a A, é igual à função composta $f \circ j$, *i.* e, $f|A = f \circ j$.

FUNÇÕES BIUNÍVOCA, SÔBRE, INVERSA, IDENTIDADE

28. Prove que, para qualquer função $f : A \to B$, é $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.

29. Prove que, se $f : A \to B$ é biunívoca e sôbre, então $f^{-1} \circ f = 1_A$, $f \circ f^{-1} = 1_B$.

30. Prove que, se $f : A \to B$ e $g : B \to A$ satisfazem $g \circ f = 1_A$, então f é biunívoca e g é sôbre.

31. Demonstre a proposição 2.1: Se $f : A \to B$ e $g : B \to A$ satisfazem $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = 1_B$, então $f^{-1} : B \to A$ existe e $g = f^{-1}$.

32. Sob que condições a projeção $\pi_{i_0} : \prod \{A_i : i \in I\} \to A_{i_0}$ é biunívoca?

33. Seja $f : (-1, 1) \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x/(1 - |x|)$. Prove que f é biunívoca e sôbre.

34. Seja R uma relação de equivalência num conjunto não-vazio A. A função natural η de A no conjunto quociente A/R é definida por $\eta(a) = [a]$, a classe de equivalência de a. Prove que η é sôbre.

35. Seja $f : A \to B$. A relação R em A definida por $a\ R\ a'$ se, e só se, $f(a) = f(a')$, é uma relação de equivalência. Se $\hat{f}$ representa a correspondência do conjunto quociente A/R para o contradomínio $f[A]$ de f, $\hat{f} : [a] \to f[a]$, prove que:
(i) $\hat{f} : A/R \to f[A]$ é uma função biunívoca e sôbre.
(ii) $f = j \circ \hat{f} \circ \eta$, onde $\eta : A \to A/R$ é a função natural e $j : f[A] \subset B$ é a função inclusão.

$$A \xrightarrow{\eta} A/R \xrightarrow{\hat{f}} f[A] \xrightarrow{j} B$$

CONJUNTOS INDEXADOS E OPERAÇÕES GENERALIZADAS

36. Seja $A_n = \{x : x$ é múltiplo de $n\} = \{n, 2n, 3n, \ldots\}$, $n \in \mathbf{N}$, inteiros positivos. Determine: (i) $A_2 \cap A_7$, (ii) $A_6 \cap A_8$, (iii) $A_3 \cup A_{12}$, (iv) $A_3 \cap A_{12}$, (v) $A_s \cup A_{st}$, $s, t \in \mathbf{N}$; (vi) $A_s \cap A_{st}$, $s, t \in \mathbf{N}$; (vii) prove que se $J \subset \mathbf{N}$ é infinito, então $\bigcap \{A_i : i \in J\} = \varnothing$.

37. Seja $B_i = (i, i + 1]$ um intervalo semi-aberto, $i \in \mathbf{Z}$, inteiros. Determine:
(i) $B_4 \cup B_5$, (ii) $B_6 \cap B_7$, (iii) $\bigcup_{i=4}^{20} B_i$, (iv) $B_s \cup B_{s+1} \cup B_{s+2}$, $s \in \mathbf{Z}$,
(v) $\bigcup_{i=0}^{15} B_{s+i}$, (vi) $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} B_{s+i}$

38. Seja $D_n = [0, 1/n]$, $S_n = (0, 1/n]$, $T_n = [0, 1/n)$, $n \in \mathbf{N}$, inteiros positivos. Determine:
(i) $\bigcap \{D_n : n \in \mathbf{N}\}$, (ii) $\bigcap \{s_n \in \mathbf{N}\}$, (iii) $\bigcap \{T_n : n \in \mathbf{N}\}$.

39. Prove as leis de De Morgan: (i) $(\bigcup_i A_i)^c = \bigcap_i A_i^c$;
(ii) $(\bigcap_i A_i)^c = \bigcup_i A_i^c$.

40. Seja $\mathscr{A} = \{A_i : i \in I\}$ uma classe indexada de conjuntos, e $J \subset K \subset I$. Prove:
(i) $\bigcup \{A_i : i \in J\} \subset \bigcup \{A_i : i \in K\}$.
(ii) $\bigcap \{A_i : i \in J\} \supset \bigcap \{A_i : i \in K\}$.

FUNÇÕES DE CONJUNTO ASSOCIADAS

41. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$. Determine: (i) $f[\{-1, 0, 1\}]$, (ii) $f^{-1}[\{10, 17\}]$, (iii) $f[(-2, 2)]$.

42. Prove que uma função $f : X \to Y$ é biunívoca se, e sòmente se, $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$ para todos os subconjuntos A e B de X.

43. Seja $f : X \to Y$. Prove que, para quaisquer subconjuntos A e B de X,

(*a*) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$

(*b*) $A \subset B \Longrightarrow f[A] \subset f[B]$.

44. Seja $f : X \to Y$. Prove que, para quaisquer subconjuntos A e B de Y,

(*a*) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$,

(*b*) $A \subset B \Longrightarrow f^{-1}[A] \subset f^{-1}[B]$.

45. Prove o teorema 2.8: Se $f : X \to Y$, $A \subset X$ e $B \subset Y$, então

(i) $A \subset f^{-1} \circ f[A]$, (ii) $B = f \circ f^{-1}[B]$.

46. Se $f : X \to Y$ é sôbre, prove que a função de conjunto associada $f : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ também é sôbre.

47. Prove que uma função $f : X \to Y$ é biunívoca e sôbre se e sòmente se $f[A^c] = (f[A])^c$ para todo subconjunto A de X.

48. Prove que uma função $f : X \to Y$ é unívoca se, e sòmente se, $A = f^{-1} \circ f[A]$ para todo subconjunto A de X.

ÁLGEBRA DAS FUNÇÕES REAIS

49. Seja o conjunto $X = \{a, b, c\}$ e consideremos as seguintes funções reais f e g definidas em X:

$$f = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, -3\rangle, \langle c, -1\rangle\},$$
$$g = \{\langle a, -2\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, 1\rangle\}.$$

Determine: (i) $3f$, (ii) $2f - 5g$, (iii) fg, (iv) $|f|$, (v) f^3, (vi) $|3f - fg|$.

50. Seja A um subconjunto qualquer de um universo U.

Então, a função real $\chi_A : U \to \mathbf{R}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

é chamada a *função característica* de A. Prove que:

(i) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$, (ii) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$, (iii) $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_{A \cap B}$

51. Prove que $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ satisfaz o axioma $[\mathbf{V}_2]$ do teorema 2.9, i. e., se $f \in \mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ e $k, k' \in \mathbf{R}$, então (i) $k \,.\, (k' \,.\, f) = (kk') \,.\, f$, (ii) $1 \,.\, f = f$

52. Para cada $k \in \mathbf{R}$, seja $\widehat{k} \in \mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ a função constante $\widehat{k}(x) = k$ para todo $x \in X$.

(i) Mostre que a coleção C de funções constantes, i. e, $C = \{\widehat{k} : k \in \mathbf{R}\}$ é um subespaço linear de $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$.

(ii) Seja $\alpha : C \to \mathbf{R}$ definida por $\alpha(\widehat{k}) = k$. Mostre que α é unívoca e sôbre, e que, para quaisquer $k, k' \in \mathbf{R}$, é

$$\alpha(\widehat{k} + \widehat{k'}) = \alpha(\widehat{k}) + \alpha(\widehat{k'})$$

Respostas dos Problemas Propostos

23. (i) 0, (ii) -8, (iii) 3, (iv) -2, (v) 9, (vi) -1

24. (i) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 6x + 1$, (ii) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 6x - 1$, (iii) $(f \circ f)(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 5$

25. A função $f \circ k$ é uma função constante

26. (i) sim, (ii) não, (iii) sim, (iv) não

32. A_i é um conjunto unitário, digamos $A_i = \{a_i\}$, para $i \neq i_0$

36. (i) A_{14}, (ii) A_{24}, (iii) A_3, (iv) A_{12}, (v) A_s, (vi) A_{st}

37. (i) $(4, 6]$, (ii) $\varnothing$, (iii) $(4, 21]$, (iv) $(s, s + 3]$, (v) $(s, s + 16]$, (vi) R

38. (i) $\{0\}$, (ii) $\varnothing$, (iii) $\{0\}$

41. (i) $\{1, 2\}$, (ii) $\{3, -3, 4, -4\}$, (iii) $(1, 5)$, (iv) $(-3, -2), (2, 3)$, (v) $\{x : x \geq 1\}$, (vi) $\mathbf{R}$

49. (i) $3f = \{\langle a, 6\rangle, \langle b, -9\rangle, \langle c, -3\rangle\}$

(ii) $2f - 5g = \{\langle a, 14\rangle, \langle b, -6\rangle, \langle c, -7\rangle\}$

(iii) $fg = \{\langle a, -4\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, -1\rangle\}$

(iv) $|f| = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle\}$

(v) $f^3 = \{\langle a, 8\rangle, \langle b, -27\rangle, \langle c, -1\rangle\}$

(vi) $|3f - fg| = \{\langle a, 10\rangle, \langle b, 9\rangle, \langle c, 2\rangle\}$