Ensino & Informação
Prof: Altamir A. R. Araldi
Revista®

ANEL

EXEMPLOS IMPORTANTES DE ANÉIS

a)São exemplos clássicos de anéis:

- Anel do Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$, +, .);
- Anel do Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$, +, .);
- Anel do Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$, +, .);
- Anel do Conjunto dos Números Complexos ($\mathbb{C}$, +, .);

OBSERVAÇÃO:

I) Para estes três Anéis, **($\mathbb{Z}$, +)**, **($\mathbb{Q}$, +)**, **($\mathbb{R}$, +)** e **($\mathbb{C}$, +)** são, respectivamente, **Grupos Comutativos**.

II) Além do mais estes três **Anéis são Comutativos**, isto é a Operação de Multiplicação (**.**) obedece a Propriedade Comutativa **x.y = y.x** , para todo **x**,**y** $\in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Isto é, são todos **Grupos Comutativos** a saber: **($\mathbb{Z}$, .)**, **($\mathbb{Q}$, +.)**, **($\mathbb{R}$, .)** e **($\mathbb{C}$, .)**.

b)Os Conjuntos $n\mathbb{Z}$ = {n . q, tal que q $\in \mathbb{Z}$}, $\forall$ n $\in \mathbb{Z}$, são anéis em relação à adição e à multiplicação usuais de $\mathbb{Z}$ a eles restritos;

OBSERVAÇÃO: Este **Anel é Comutativos**, isto é a Operação de Multiplicação (**.**) obedece **n.m.q = m.n.q** , para todo **n**,**m** $\in \mathbb{Z}$. Isto é, ($n\mathbb{Z}$, +) é um **Grupo Comutativo**.

c)Os Conjuntos $\mathbb{Z}_m$ $=\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$, $\forall$ m $\in \mathbb{Z}$, m>1. As leis de Composição Internas neste caso são as seguintes:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y} \quad \text{e}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \bar{x}.\bar{y} = \overline{x.y}$$

Não é difícil mostrar que neste $\mathbb{Z}m$ assim definido estas duas operações são realmente Leis de Composição Internas em $\mathbb{Z}m$. Isto é, precisamos mostrar, ainda que $\overline{x+y} \in \mathbb{Z}_m$ e $\overline{x.y} \in \mathbb{Z}_m$. Além disso,

i)Para a primeira Lei (Adição), tem-se um **Grupo Comutativo** $(\mathbb{Z}_m, +)$**:**

- Vale a Propriedade Associativa $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{x}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \overline{x + y + z}$;
- Existe o (artigo definido "o", pois é único) Elemento Neutro $\bar{0}$, ou seja $\bar{0} + \bar{x} = \bar{x} + \bar{0} = \bar{0}, \forall\, x \in \mathbb{Z}$;
- Todos os elementos $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ possuem o (artigo definido "o", pois é único) seu correspondente Elemento Simétrico, isto é, existe e é único (ou é única a classe) $\bar{y} \in \mathbb{Z}_m$, tal que $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x} = \bar{0}$.
- Vale a Propriedade Comutativa $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x} = \overline{x + y} = \overline{y + x}$; isto é, repetindo, tem-se um **Grupo Comutativo** $(\mathbb{Z}_{\boldsymbol{m}}, +)$**.**

ii)Para a segunda Lei (Multiplicação):

- E que vale a Propriedade Associativa $\bar{x}.(\bar{y}\,.\bar{x}) = (\bar{x}\,.\bar{y}) + \bar{z} = \overline{x.y.z}$;
- Existe o (artigo definido "o", pois é único) Elemento Neutro $\bar{1}$ ou seja $\bar{1} + \bar{x} = \bar{x} + \bar{1} = \bar{x}, \forall\, x \in \mathbb{Z}$;

iii)Considerando ambas as leis (Adição) e (Multiplicação), tem-se:

- Vale a Lei Distributiva da Operação de Multiplicação em relação à Operação de Adição, isto é, $\bar{x}.(\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x}.\bar{y} + \bar{x}.\bar{z} = \overline{x.(y + z)}$.

OBSERVAÇÃO: Este **Anel é Comutativos**, isto é a Operação de Multiplicação (**.**) obedece a Propriedade Comutativa $\bar{x}.\bar{y} = \bar{y}.\bar{x} = \overline{x.y} = \overline{y.x}\,, \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$. Isto é, $(\mathbb{Z}_m, \,.)$ é um **Grupo Comutativo**.