Teoria dos conjuntos difusos

Documento complementar à dissertação

José Iria – ee06210@fe.up.pt - 10-03-2011

.

A teoria dos conjuntos difusos foi proposta por Lotfi Zadeh num artigo publicado em 1965 na revista Information and Control, intitulado com simplicidade "Fuzzy Sets". O aspecto mais fácil de se compreender na teoria dos conjuntos difusos é que ela substitui a lógica binária (verdadeiro - falso) da teoria dos conjuntos clássica, traduzida na álgebra de Boole, por uma lógica em que o grau de verdade de uma afirmação pode assumir uma contínuo de valores entre 0 e 1 como, por exemplo, afirmar que 2.98 = 3, embora com um grau de verdade de apenas 0.9, afirmação que não é estranha a engenheiros habituados a trabalhar com estimativas e arredondamentos.

Um outro aspecto importante é o que se refere à capacidade de a teoria dos conjuntos difusos poder representar expressões linguísticas qualitativas como, por exemplo, afirmar que uma pessoa é alta, em vez de se exprimir esta grandeza por um número real como 1.90 m.

A teoria dos conjuntos difusos pode ser encarada como uma extensão lógica n-valente quando o número de valores lógicos admissíveis tende para o infinito. Este aspecto pode ser apreciado de forma mais efectiva recordando que na lógica de Boole são utilizados dois valores lógicos, passando a um número infinito quando se consideram conjuntos imprecisos. Deste modo, pode afirmar-se que dado um universo X e um subconjunto X1 de X, o grau de pertença de um elemento x1 ao conjunto X1 tomará valores:

- No conjunto {0,1} na lógica de Boole;
- No intervalo [0.0, 1.0] no caso dos conjuntos difusos.

O conceito fundamental associado à definição de um conjunto difuso é o conceito de "função de pertença". Na teoria clássica dos conjuntos, com a sua lógica booleana ou bivalente, dado um universo e um conjunto A nele definido, estabelece-se uma relação de pertença relativamente a cada elemento x nesse universo, tal que dois casos se dão: ou x pertence a A ou x não pertence a A.

Dito de outro modo, poderíamos definir uma função de pertença

$$P_A \rightarrow \{0,1\}\ tal\ que\ P_A(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow x \notin A \\ 1 & \Leftarrow x \in A \end{cases} \qquad (1.1)$$

ou seja, todos os elementos que pertençam a A têm valor de pertença 1 e todos os outros têm valor de pertença 0. Poderíamos também dizer que se aceita apenas um valor binário de verdade (verdadeiro ou falso) para uma afirmação do tipo "y pertence a A".

A teoria dos conjuntos difusos vem relaxar a restrição que condiciona P a assumir valores apenas no conjunto discreto {0, 1}; em vez disso, aceita-se que o valor de verdade ou de pertença possa ser representado por um número real qualquer no intervalo unitário [0, 1]. Desta forma, dados dois elementos, poderemos ter que um se identifique mais com o conceito subjacente à formação do conjunto A do que outro. Por exemplo, poderemos ter x com valor de pertença 0.8 e y com valor de pertença de apenas 0.3 mas alguma coisa neles ainda estabelece uma ligação, em graus diferentes, com o conjunto A.

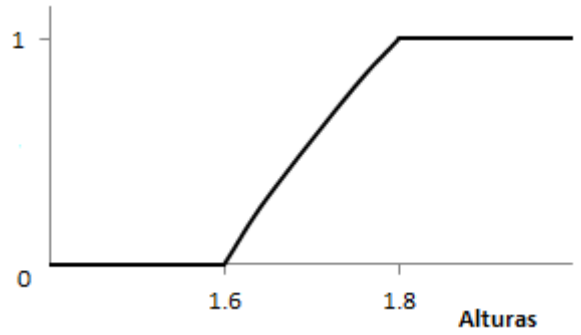

Figura 1.1 - Conjunto difuso "pessoas altas", representado pela sua função de pertença – adaptado de [Ferreira e Silva, 2004]

Dados quatro cidadãos e as respectivas alturas:

- António - 1,80 m
- João - 1,60 m
- Ana - 1,69 m
- Pedro - 1,73 m

Poderíamos pois relacioná-los com o conjunto das pessoas altas C mediante distintos valores de pertença a esse conjunto:

- António - 1,80 / 1.0
- João - 1,60 / 0.0
- Ana - 1,69 / 0.4
- Pedro - 1,73 / 0.85

Definitivamente, 1,60 m não é altura de pessoa alta e por isso o valor de pertença é zero. Por outro lado, 1,80 é inequivocamente a altura de uma pessoa alta e por isso o valor de pertença é 1. Os outros casos são intermédios. A figura 2.1 representa o conjunto difuso "pessoas altas" com o eixo das abcissas representando as alturas possíveis e o eixo das ordenadas representando o respectivo valor de pertença. Há quem represente um conjunto difuso só pela sua função de pertença, e há que o represente pelo conjunto dos pares ordenados {elemento/valor de pertença}, em particular para conjuntos discretos.

Também se pode apreciar como a noção de conjunto difuso introduz uma 'suavidade' na transição entre os elementos que não se identificam com um conjunto e os elementos que se identificam.

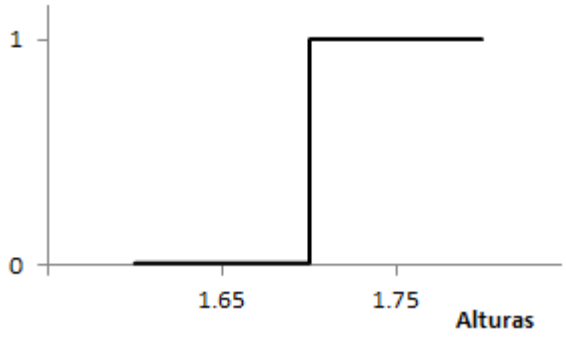

Figura 1.2 - Representação da separação clássica (rígida) entre os elementos do conjunto "pessoas altas" e os que não lhe pertencem

A forma clássica de representação, que seria definir um valor, por exemplo 1,70 m, para a fronteira entre uma pessoa não ser alta e sê-lo, é muito menos natural. Aprecie-se a figura 1.2 e compreenda-se porque é que a comunidade dos conjuntos difusos apelidou os conjuntos clássicos de 'conjuntos rígidos' (crisp sets).

Os conjuntos difusos revelam-se adequados para representar a incerteza associada ao carácter vago ou fluido de um conhecimento. O conjunto difuso apresentado na figura 1.1 possui um carácter vago ou fluido devido à existência de uma transição gradual e contínua entre os valores 0 e 1 da sua função de pertença. Deste modo, é assegurado que o conjunto de valores não possui fronteiras bem definidas e determinísticas.

As regras operacionais associadas aos conjuntos difusos podem ser consideradas como uma generalização dos conceitos associados à análise intervalar. Com efeito, um conjunto difuso pode ser encarado como um conjunto de intervalos encaixados possuindo, cada um deles, um valor de pertença. Por outro lado, o valor de pertença pode ser considerado como

uma medida da maior ou menor incerteza no conhecimento do valor exacto de uma grandeza. Por outro, cada um desses intervalos corresponderia, no âmbito da teoria dos conjuntos difusos um corte de nível α.

Interface linguística

O desenvolvimento e implementação de uma interface linguística tendo por objectivo facilitar e tornar mais eficiente o processo de comunicação entre o utilizador e as aplicações computacionais revela-se importante. Este objectivo é particularmente relevante em estudos no qual se pretende incorporar conhecimentos expressos de forma qualitativa através de proposições da linguagem natural.

A forma mais simples de especificar o valor de potências produzidas ou de carga consiste em construir números difusos, de forma directa, a partir de proposições da linguagem natural. Geralmente são utilizados números difusos triangulares, trapezoidais ou rectangulares. A capacidade dos números difusos para descrever matematicamente declarações qualitativas sobre carga e produção é ilustrada na Figura 1.3.

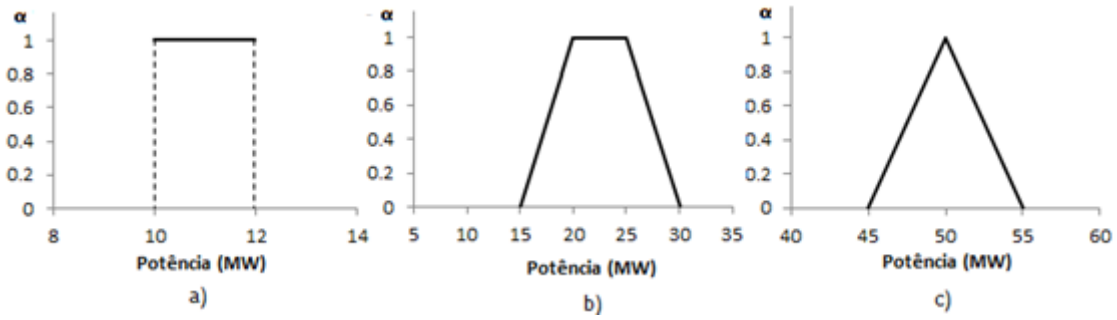

Figura 1.3 – Número difuso rectangular (a), trapezoidal (b) e triangular (c)

Na Figuras 1.3 acima estão presentes três situações: “carga entre 10 a 12 MW” (Figura 2.3a), “carga possivelmente entre 20 e 25 MW, mas poderá assumir valores entre 15 e 30 MW” (Figura 2.3b) e “produção de cerca de 50 MW” (Figura 2.3c).

Um número difuso trapezoidal é caracterizado por um quarteto (a1, a2, a3, a4) sendo a sua função de pertença definida por (1.2). Na Figura 1.4 está representada a distribuição de possibilidade de um número difuso trapezoidal.

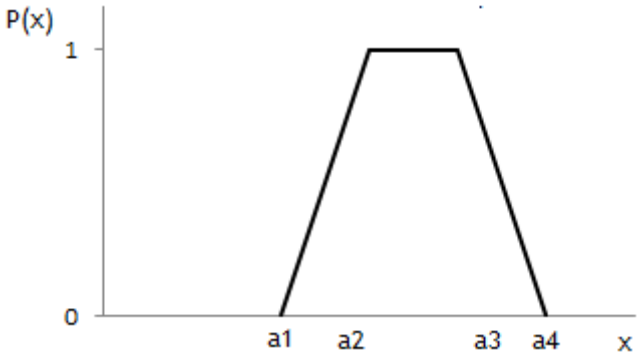

Figura 1.4 – Representação gráfica de uma distribuição de possibilidade de um número difuso trapezoidal

$$P(x) = \begin{cases} 0 & ,se\ x\ < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & se\ a_1 \leq x\ < a_2 \\ 1, & se\ a_2 \leq x\ \leq a_3 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, & se\ a_3 < x\ \leq a_4 \\ 0 & ,se\ x > a_4 \end{cases} \tag{1.2}$$

O corte de nível α, $A^{(\alpha)}$, para todo o α entre 0 e 1 e que caracteriza um número difuso trapezoidal é dado por (1.3).

$$A^{(\alpha)} = \left[a_1^{(\alpha)}, a_4^{(\alpha)}\right] = \left[(a_2 - a_1) \cdot\ \alpha\ + a_1, (a_3 - a_4) \cdot\ \alpha\ + a_4\ \right] \tag{1.3}$$

Podem ainda ser definidos os números difusos triangulares (Figura 1.5) e rectangulares (Figura 1.6).

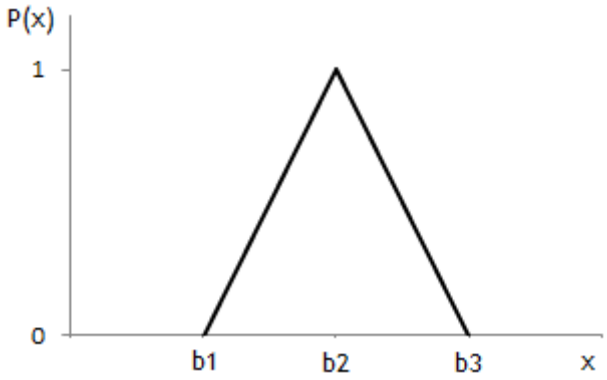

Figura 1.5 – Representação gráfica de uma distribuição de possibilidade de um número difuso triangular

Um número difuso triangular é caracterizado por um terceto (b1, b2, b3) sendo a sua função de pertença definida por (1.4). O corte de nível α, $B^{(\alpha)}$,para todo o α entre 0 e 1 e que caracteriza um número difuso triangular é dado por (1.5). No que se refere aos números rectangulares (Figura 1.6) a mesma informação é dada por (1.6) e (1.7).

$$P(x) = \begin{cases} 0 & ,se\ x\ < b_1 \\ \dfrac{x - b_1}{b_2 - b_1} & ,se\ b_1 \leq x\ < b_2 \\ 1 & ,se\ x = b_2 \\ \dfrac{b_3 - x}{b_3 - b_2} & ,se\ b_2 < x\ \leq b_3 \\ 0 & ,se\ x > b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

$$B^{(\alpha)} = \left[b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}\right] = \left[(b_2 - b_1) \cdot \alpha\ + b_1, (b_2 - b_3) \cdot \alpha\ + b_3\ \right] \tag{1.5}$$

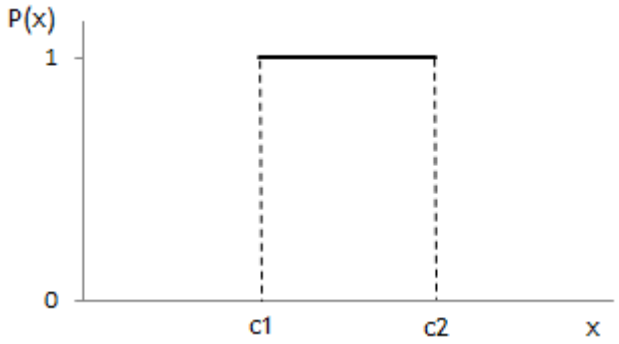

Figura 1.6 – Representação gráfica de uma distribuição de possibilidade de um número difuso rectangular

$$P(x) = \begin{cases} 0 & ,se\ x\ < c_1 \\ 1 & ,se\ c_1 \leq x\ \leq c_2 \\ 0 & ,se\ x > c_2 \end{cases} \tag{1.6}$$

$$C^{(\alpha)} = \left[c_1^{(\alpha)}, c_2^{(\alpha)}\right] = \left[c_1, c_2\ \right] \tag{1.7}$$

Os números rectangulares e triangulares constituem casos particulares dos números trapezoidais já que para os números rectangulares a1=a2 e a3=a4 e para os números triangulares a2=a3.