

Variáveis Complexas

March 17, 2005

1 Números Complexos

1.1 Motivação

Resolver a equação

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \quad (1.1)$$

vemos que não existe nenhum $x = r \in \mathbb{R}$ que satisfaça a equação. Portanto se faz necessário estender o conjunto dos reais a um conjunto maior na qual a equação anterior tenha solução. Assumindo que podemos aplicar raiz quadrada em (1.1) obtemos que $x = \pm\sqrt{-1}$ a qual não faz sentido no conjunto dos numeros reais, portanto extenderemos este conjunto a um conjunto maior a equação (1.1) tenha solução. Desta forma introduzimos um novo elemento, que denotaremos por i chamada de unidade imaginária satisfazendo $i^2 = -1$ (informalmente podemos considerar $i = \sqrt{-1}$). Assim a equação (1.1) tem soluções $x = \pm i$. O novo conjunto que contém os números reais e a unidade imaginária será denotado por \mathbb{C} a qual será chamado de o conjunto dos números complexos. É necessário que este conjunto preserve as propriedades aritméticas dos números reais, isto é produto e soma de dois elementos de \mathbb{C} também deverão pertencer a \mathbb{C} , assim a extensão natural dos numeros reais será

$$\mathbb{C} := \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}\} \quad \begin{cases} a = \operatorname{Re}(z) & : \text{parte real de } z \\ b = \operatorname{Im}(z) & : \text{parte imaginária de } z \end{cases}$$

Claramente os numeros reais r pertencem a \mathbb{C} pois $r = r + 0i$, também vemos que as potências da unidade imaginária pertencem a \mathbb{C} :

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \dots, i^{2n} = (-1)^n, \quad i^{2n+1} = (-1)^n i$$

1.2 Operações aritméticas

Podemos informalmente somar e multiplicar números complexos, vejamos quais seriam os resultados, se $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, então

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \in \mathbb{C} \\z_1 \cdot z_2 &= a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2 \\&= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

Portanto podemos estender essas operações definindo

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &:= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\z_1 \cdot z_2 &:= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)\end{aligned}$$

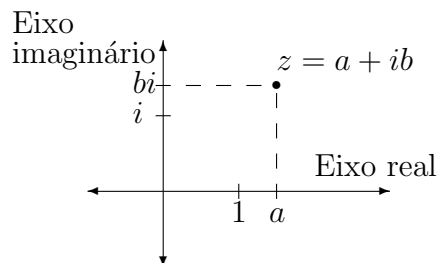
Pode-se verificar que estas operações possuem as propriedades associativa, comutativa e distributiva. Os elementos neutros aditivo e multiplicativo são 0 e 1 respectivamente, o inverso aditivo de $z = a + ib$ é $-z = -a - ib$ e o inverso multiplicativo (desde que $z \neq 0$) é um número complexo w tal que $zw = wz = 1$, assim w pode ser denotada por $w = z^{-1} = 1/z$. Se $w = c + id$ para que $zw = 1$ as constantes c e d devem satisfazer

$$\begin{aligned}ac - bd = 1 \\ad + bc = 0\end{aligned} \Rightarrow c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Também podemos chegar a este mesmo resultado procedendo informalmente, isto é,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{a + ib} \cdot \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \\&= \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2} \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

O plano Complexo: Como para determinar um número complexo é necessário de dois número reais podemos identificar números complexos com pares ordenados reais através do isomorfismo $z = a + ib \mapsto (a, b)$ entre \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 . Assim podemos considerar os números complexos como pontos do plano.



Para $z = a + ib$ definimos os seguintes operações

$$\begin{aligned}\bar{z} &:= a - ib && : \text{conjugado de } z \\ |z| &:= \sqrt{a^2 + b^2} && : \text{módulo de } z\end{aligned}$$

Algumas propriedades destas operações:

1. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
2. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z}w, \quad \overline{\bar{z}} = z$
3. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
4. $|zw| = |z||w|, \quad |z/w| = |z|/|w|, \quad |\bar{z}| = |z|$
5. $|z|^2 = z\bar{z}, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (desde que $z \neq 0$)
6. $|z + w| \leq |z| + |w|$: Desigualdade triangular

Prova da desigualdade triangular:

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2\end{aligned}$$

En que caso $|z + w| = |z| + |w|$ com $w \neq 0$?

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &= (|z| + |w|)^2 \\ \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) &= 2|z||w| \\ \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z\bar{w}}{|w|^2}\right) &= \frac{|z|}{|w|} \\ \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) &= \left|\frac{z}{w}\right| \\ \Leftrightarrow \frac{z}{w} &\geq 0\end{aligned}$$

1.3 Forma polar dos complexos

Seja $z \neq 0$, desde que $z = x + yi \sim (x, y)$ Podemos considerar:

r : distancia de z ao origem ($r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| > 0$)

θ : ângulo que z forma com o semieixo real positivo

Então temos as seguintes identidades

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\theta) \\y &= r \sin(\theta)\end{aligned}$$

Desta forma z pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}z &= x + yi \\&= r[\cos(\theta) + i \sin(\theta)] : \text{Forma polar}\end{aligned}$$

O ângulo θ é chamado argumento de z e denotado $\arg(z) := \theta$. Como coseno e seno são funções periódicas de periodo 2π , isto é

$$\begin{aligned}\cos(\theta + 2k\pi) &= \cos(\theta) \\ \sin(\theta + 2k\pi) &= \sin(\theta)\end{aligned} \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}$$

Assim podemos representar z com vários ângulos diferentes, isto é,

$$z = r[\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)]$$

De esta forma $\arg(z)$ é uma função multivaluada. Se restringimos o valor de $\arg(z)$ a um intervalo semiaberto de comprimento 2π evidentemente será univocamente determinado. Em particular os valor de $\arg(z)$ restrito ao intervalo $]-\pi, \pi]$ será chamado valor principal do argumento de z e denotado por $\arg_p(z)$, isto é

$$\begin{array}{ccc} \arg_p : \mathbb{C} - \{0\} & \rightarrow &]-\pi, \pi] \\ z & \rightarrow & \theta \end{array}$$

é uma função univocamente determinada.

Exemplo: Escreva $z = \sqrt{3} + i$ na sua forma polar. Fazendo os cálculos encontramos que $r = 2$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= 2 \cos(\theta) \\ 1 &= 2 \sin(\theta)\end{aligned}$$

dai segue que $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, isto é $\arg(z) = \{(\pi/6) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, portanto $\arg_p(z) = \pi/6$.

Assim

$$z = \cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)$$

Fórmula de Mouvre: Observe que se $z_1 = r_1[\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)]$ e $z_2 = r_2[\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)]$ então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

logo $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ e $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$. Indutivamente pode-se mostrar que

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n)]$$

em particular, se $z = r[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$ tem-se

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \quad \text{para } n \in \mathbb{N}$$

isto é

$$\left(r[\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \right)^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \quad \text{para } n \in \mathbb{N}$$

de onde obtemos a fórmula de Moivre:

$$\left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Denotemos por

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) := e^{i\theta}$$

vemos que a fórmula de Mouvre pode ser escrita da seguinte forma

$$[e^{i\theta}]^n = e^{in\theta}$$

Tambem pode ser mostrado que as propriedades da função exponencial se preservam

$$e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$$

De esta forma polar de um número complexo z pode ser escrito como

$$z = r e^{i\theta}$$

onde $r = |z|$ e $\theta = \arg(z)$.

Exemplo Encontre todas as soluções de $z^n + \alpha = 0$, onde $\alpha > 0$.

$$z = r e^{i\theta}$$

$$z^n = -\alpha \quad \Leftrightarrow \quad r^n e^{in\theta} = -\alpha \tag{1.2}$$

$$|r^n||e^{in\theta}| = |-\alpha| \Rightarrow r^n = \alpha \Rightarrow r = \alpha^{1/n}$$

substituindo em (1.2) obtemos

$$\alpha e^{in\theta} = -\alpha \Rightarrow e^{in\theta} = -1 \Rightarrow \begin{cases} \cos(n\theta) = -1 \\ \sin(n\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n\theta = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = \frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

por tanto as soluções são

$$z = \alpha^{1/n} e^{i\theta_k}, \quad \text{onde } \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}$$

para determinar unicamente o ângulo de z temos que determinar $k \in \mathbb{Z}$ tal que $-\pi < \theta_k \leq \pi$.

Exemplo Soluções de $z^2 + 2 = 0$

Exemplo Seja $w \in \mathbb{C}$, encontre as raízes n -ésimas $w^{1/n}$.

Para z ser uma raiz n -ésima de w deve se ter $z^n = w$. Se $z = r e^{i\theta}$ e $w = \rho e^{i\phi}$ então

$$z^n = w \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi} \tag{1.3}$$

$$|r^n||e^{in\theta}| = |\rho||e^{i\phi}| \Rightarrow r^n = \rho \Rightarrow r = \rho^{1/n}$$

substituindo em (1.3) obtemos

$$e^{in\theta} = e^{i\phi} \Rightarrow \begin{cases} \cos(n\theta) = \cos(\phi) \\ \sin(n\theta) = \sin(\phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow n\theta = \phi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

por tanto as raízes n -ésimas de w são

$$z = \rho^{1/n} e^{i\theta_k}, \quad \text{onde } \theta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}$$

para determinar unicamente o ângulo de z temos que determinar $k \in \mathbb{Z}$ tal que $-\pi < \theta_k \leq \pi$.

Exemplo Raízes n -ésimas da unidade.

1.3.1 Exemplos de conjuntos do plano complexo:

Exemplo Determine o conjunto de pontos $|z| < R$.

Exemplo Determine o conjunto de pontos $Re(z) \geq -3$ e $Im(z) > 1$.

Exemplo Determine o conjunto de pontos $Im(z^2) < 2$.

Exemplo Determine o conjunto de pontos $|Arg(z)| \geq \pi/4$.

Exercices:

1. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ e $\rho \in \mathbb{R}$. Encontre a parte real e imaginária dos seguintes números complexos

$$\frac{z}{w}, \quad \frac{z - \rho}{z + \rho}, \quad \frac{1}{z - i\rho}, \quad \frac{1}{z^2}, \quad \frac{z}{\bar{z}}, \quad \frac{z}{|z|}.$$

2. Mostre que

- (a) z é real se, e somente se, $z = \bar{z}$.
- (b) z é imaginário puro se, e somente se, $z = -\bar{z}$.
- (c) $Re(iz) = -Im(z)$ e $Im(iz) = Re(z)$.

3. Seja $z \in \mathbb{C}$ e n, m dois números inteiros, mostre que $\left| \frac{z^n}{z^m} \right| = |z|^{n-m}$. Em particular, calcule $\left| \frac{(2+3i)^{5002}}{(2-3i)^{5000}} \right|$.

4. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Prove que

$$\begin{aligned} |z \pm w|^2 &= |z|^2 \pm 2Re(z\bar{w}) + |w|^2 \\ |z + w|^2 + |z - w|^2 &= 2(|z|^2 + |w|^2) \end{aligned}$$

5. Prove que se $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ e $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, então z_1, z_2 e z_3 são os vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo unitário de centro na origem.

6. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ e $\rho \geq 0$. Prove que

$$\begin{aligned} |\rho z| &= \rho |z| \\ |zw| &= |z||w| \quad (\text{Dica: use a forma polar}) \end{aligned}$$

7. Mostre que

$$||z| - |w|| \leq |z - w|$$

Dê condições necessárias e suficientes para ter a igualdade

8. Determine o valor principal do argumento dos seguintes números complexos

$$-\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \quad 1 - \sqrt{3}i, \quad e^{13\pi i/4}, \quad 3e^{5\pi i/4}.$$

9. Usando a forma polar de um número complexo mostre que os valores de $\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ são:

$$\begin{aligned} & i/2 \quad \text{se } n = 2 \\ & -1/(2\sqrt{2}) + i/(2\sqrt{2}) \quad \text{se } n = 3 \\ & -1/4 \quad \text{se } n = 4. \end{aligned}$$

Também determine os valores para $n = 5, 6, 7, 8$.

10. Prove que a multiplicação de um número complexo por i corresponde a uma rotação no sentido antihorário de um ângulo de comprimento $\pi/2$ do vetor correspondente.

11. Determine as soluções de

(a) $z^4 = 1$ (raízes quartas da unidade)

(b) $z^3 = i$ (raízes cúbicas de i)

(c) $z^2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ (raízes quadradas de $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$)

12. Mostre que se $a, b \in \mathbb{C}$ as soluções de

$$z^2 + az + b = 0 \quad \text{são} \quad z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (\text{Dica: Complete quadrados})$$

13. encontre todas as soluções de

$$z^4 + az^2 + b = 0, \quad \text{onde } a = -1, \quad b = a^2/2$$

Dica: faça $z^2 = w$, encontre os valores de w e depois de z .

14. Faça um gráfico do conjunto de pontos $z \in \mathbb{C}$ tal que

(a) $r \leq |z - z_0| < R$, onde z_0 é uma número complexo fixo.

(b) $|1/(z - 1)| < 1$

(c) $\text{Re}(z + 1) > a$, ($a \in \mathbb{R}$)

(d) $\pi/2 < |\arg(z^2)| \leq \pi$

(e) $\text{Re}(1 - z) = |z|$

(f) $|z - a| + |z + a| = 2c$ onde $a \in \mathbb{R}$, $c > 0$

2 Funções de variável complexa

Uma função de variável complexa é uma função $f(z)$ definida num subconjunto dos complexos e assume valores complexos. O domínio da função são é o conjunto dos números complexos para o qual a função faz sentido. A imagem da função é o conjunto de números complexos que assume a função. Como $f(z) \in \mathbb{C}$ para cada $z \in \mathbb{C}$, temos que

$$f(z) = u(z) + v(z)i, \quad u(z), v(z) \in \mathbb{R},$$

Como $z = x + yi \sim (x, y)$ Podemos identificar $h(z) \sim h(x, y)$ assim podemos escrever

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y)i, \quad u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z)), v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z)),$$

Exemplos 1. $f(z) = \frac{1}{z}$, $\operatorname{Dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$, $\operatorname{Imagem}(f) = \{w \in \mathbb{C} : w \neq 0\}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\ f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

Então

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

2.1 Extensões de funções reais aos complexos

Nesta seção estenderemos algumas funções elementares reais ao conjunto dos complexos. Assim definimos as seguintes funções complexas:

1. Por causa do produto de números complexos, podemos definir Polinômios complexos

$$p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n, \quad \text{onde } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

Exercício: Supondo $p(z) = \underbrace{(\alpha_0 + i\beta_0)}_{a_0} \underbrace{(x + iy)}_z + \underbrace{(\alpha_1 + i\beta_1)}_{a_1} \underbrace{(x + iy)^2}_{z^2}$, determine $u(x, y) = \operatorname{Re}(p(z))$ e $v(x, y) = \operatorname{Im}(p(z))$

2. Definimos a função exponencial complexa da seguinte forma

$$e^z := \underbrace{e^x \cos(y)}_{\operatorname{Re}(e^z)} + i \underbrace{e^x \sin(y)}_{\operatorname{Im}(e^z)}, \quad \text{onde } z = x + iy$$

Que motivou esta definição? Justificativa: Propriedades de exponencial

$$\begin{aligned}e^z &= e^{x+iy} \\ &= e^x e^{iy} \\ &= e^x (\cos(y) + i \operatorname{sen}(y)) \\ &= e^x \cos(y) + i e^x \operatorname{sen}(y)\end{aligned}$$

Se z fosse real, esta definição coincide com a função exponencial real? SIM: $z = x + 0i$, da definição temos que $e^z := e^x$.

e^z conserva a propriedade $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ da exponencial real? SIM! Verifique!

3. Definimos funções trigonométricas complexas da seguinte forma

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen}(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{tg}(z) := \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}, \quad \dots$$

Que motivou esta definição? Justificativa: definição de $e^{i\theta}$ com $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta) \\ e^{-i\theta} &= \cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta)\end{aligned}$$

Somando

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Se z é real estas funções coincidem com as funções trigonométricas reais? SIM: Verifique

Estas funções complexas conservam as propriedades das funções reais? exemplo: $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$? SIM verifique!

$\cos(z)$ é limitada? NÃO, pois tomando $z = in$ com $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\cos(in) = \frac{e^{i(in)} + e^{-i(in)}}{2} = \frac{e^{-n} + e^n}{2} \quad \text{não é limitada}$$

Calcule $u(x, y) = \operatorname{Re}(\sin(z))$.

4. Definimos as funções hiperbólicas da seguinte forma

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh(z) := \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}, \quad \dots$$

Também, poderíamos definir estas funções em termos de funções trigonométricas, da forma

$$\cosh(z) := \cos(-iz), \quad \sinh(z) := -i \sin(-iz)$$

Assim, as funções hiperbólicas podem ter propriedades semelhantes as trigonométricas, por exemplo

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

5. Definimos o logaritmo da seguinte forma

$$\ln(z) := \underbrace{\ln(|z|)}_{\operatorname{Re}(\ln(z))} + i \underbrace{\arg(z)}_{\operatorname{Im}(\ln(z))},$$

Que motivou esta definição? Justificativa: Propriedades de Logaritmo. Se $z = re^{i\theta}$ temos

$$\begin{aligned} \ln(z) &= \ln(re^{i\theta}) \\ &= \ln(r) + \ln(e^{i\theta}) \\ &= \ln(r) + i\theta \ln(e) \\ &= \ln(r) + i\theta \end{aligned}$$

Como $\arg(z)$ é uma função multivaluada $\ln(z)$ também é. Se considerarmos $\arg_p(z)$ em lugar de $\arg(z)$, temos a função $\ln_p(z) := \ln(|z|) + i\arg_p(z)$ a qual é chamada de valor principal do logaritmo. Vejamos que $e^{\ln(z)} = z$ mas $\ln(e^z)$ não necessariamente da z . Da definição temos que

$$\begin{aligned} e^{\ln(z)} &= e^{\ln(|z|) + i\arg(z)} \\ &= e^{\ln(|z|)} e^{i\arg(z)} \\ &= |z| e^{i\arg(z)} = z \end{aligned}$$

Por outro lado para $z = x + iy$ temos que

$$\begin{aligned} \ln(e^z) &= \ln(|e^z|) + i\arg(e^z) \\ &= \ln(e^x) + i\arg(e^x e^{iy}) \\ &= x + i(y + 2k\pi) \\ &= z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

6. Seja $w \in \mathbb{C}$ fixo. definimos a função potencial

$$z^w := e^{w \ln(z)}$$

Que motivou esta definição? Justificativa: Propriedades de Exponencial e Logaritmo

$$\begin{aligned} z^w &= e^{\ln(z^w)} \\ &= e^{w \ln(z)} \end{aligned}$$

Observe que esta função também é multivaluada. Se considerarmos $\ln_p(z)$ em lugar $\ln_p(z)$ então $(z^w)_p := e^{w \ln_p(z)}$ é unívocamente determinado e é chamado valor principal de z^w . Observe que $(e^z)^w$ não necessariamente coincide com e^{zw} , pois usando a definição temos

$$(e^z)^w = e^{w \ln(e^z)} = e^{w(z+2k\pi i)} = e^{zw} e^{w2k\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercícios:

1. Resolva os seguintes itens

- (a) Mostre que $e^{z+w} = e^z e^w$.
- (b) Mostre que $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.
- (c) Mostre que e^z é real se e somente se $\text{Im}(z) = n\pi$ para algum $n \in \mathbb{Z}$.
- (d) Mostre que e^z é imaginário puro se e somente se $\text{Im}(z) = n\pi + \pi/2$ para algum $n \in \mathbb{Z}$.
- (e) Mostre que $e^z = e^w$ se e somente se $w = z + 2\pi ni$ para algum $n \in \mathbb{Z}$.
- (f) Mostre que $|e^z| = e^x$ onde $z = x + iy$.
- (g) Examine $\lim_{\text{Re}(z) \rightarrow \infty} e^{-z}$.
- (h) Mostre que todas as soluções de $e^{z^2} = 1$ são da forma $z = \pm(\sqrt{n\pi} + i\sqrt{n\pi})$ onde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

2. Mostre as seguintes identidades

- (a) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$
- (b) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
- (c) $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
- (d) $\sin(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$

- (e) $\cosh(z) = \cos(iz), \quad \sinh(z) = -i \sin(iz)$
- (f) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$
- (g) $\cosh(z + w) = \cosh(z) \cosh(w) + \sinh(z) \sinh(w)$
- (h) $\sinh(z + w) = \sinh(z) \cosh(w) + \cosh(z) \sinh(w)$
- (i) Prove que as funções $\cos(z)$ e $\sin(z)$ não são limitadas.
- (j) $\ln(zw) = \ln(z) + \ln(w), \quad \ln(z/w) = \ln(z) - \ln(w)$
- (k) $\ln(z^n) = n \ln(z)$ onde $n \in \mathbb{N}$

3 Noções topológicas no plano complexo

Definimos a distância entre dois números complexos z, w como sendo

$$d(z, w) := |z - w|$$

Propriedades:

1. $d(z_1, z_2) \geq 0$ (positividade) e $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
2. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ (Simetria)
3. $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$ (Desigualdade triangular)

notações:

$$B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \quad (\text{Bola aberta de raio } r \text{ e centro } z_0)$$

$$\bar{B}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \quad (\text{Bola fechada de raio } r \text{ e centro } z_0)$$

$$S_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\} \quad (\text{Circunferência de raio } r \text{ e centro } z_0)$$

Definition 3.1 Dizemos que z_0 é um ponto interior do conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(z_0) \subset \Omega$. Denotaremos

$$\text{int}(\Omega) := \{\text{pontos interiores de } \Omega\} \quad \text{Obs: } \text{int}(\Omega) \subset \Omega$$

Dizemos que Ω é aberto se $\Omega = \text{int}(\Omega)$

Exemplo $\Omega = B_r(z_0)$ é aberto

Seja $z_1 \in \Omega$ devemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(z_1) \subset \Omega$. O gráfico indica que devemos tomar como máximo $\epsilon = r - |z_1 - z_0|$. Assim

$$\begin{aligned} w \in B_\epsilon(z_1) &\Leftrightarrow |w - z_1| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow |w - z_1| < r - |z_1 - z_0| \\ &\Leftrightarrow |w - z_1| + |z_1 - z_0| < r \\ &\Rightarrow |w - z_0| < r \\ &\Rightarrow w \in \Omega \end{aligned}$$

Definição 3.2 Dizemos que z_0 é um ponto de aderência do conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se para todo $\epsilon > 0$ tem-se $B_\epsilon(z_0) \cap \Omega \neq \emptyset$. Denotaremos

$$\bar{\Omega} := \{\text{pontos de aderência de } \Omega\} \quad \text{Obs: } \Omega \subset \bar{\Omega}$$

Dizemos que Ω é fechado se $\Omega = \bar{\Omega}$

Exemplo $\Omega = \bar{B}_r(z_0)$ é fechado

Definição 3.3 Dizemos que z_0 é um ponto de fronteira do conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se para todo $\epsilon > 0$ tem-se $B_\epsilon(z_0) \cap \Omega \neq \emptyset$ e $B_\epsilon(z_0) \cap (\mathbb{C} - \Omega) \neq \emptyset$. Denotaremos

$$\partial\Omega := \{\text{pontos de fronteira de } \Omega\} \quad \text{Obs: } \begin{cases} \partial\Omega \subset \bar{\Omega} \\ \partial\Omega \subset \overline{\mathbb{C} - \Omega} \end{cases}$$

Exemplo Se $\Omega = B_r(z_0)$ então $\partial\Omega = S_r(z_0)$

Theorem 3.4 As seguintes afirmações são verdadeiras

1. Ω é fechado se e somente se $\partial\Omega \subset \Omega$
2. Ω é aberto se e somente se $\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$

Definição 3.5 Dizemos que z_0 é um ponto de acumulação do conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se para todo $\epsilon > 0$ tem-se $(B_\epsilon(z_0) - \{z_0\}) \cap \Omega \neq \emptyset$

Exemplo $z_0 = 0$ é um ponto de acumulação de $\Omega =]0, 1] \subset \mathbb{C}$.

Theorem 3.6 z_0 é um ponto de acumulação do conjunto Ω se e somente se $B_\epsilon(z_0) \cap \Omega$ tem infinitos pontos

Proof: Tomamos $\epsilon_1 = \epsilon$, como $(B_{\epsilon_1}(z_0) - \{z_0\}) \cap \Omega \neq \emptyset$ então existe $z_1 \neq z_0$ tal que $z_1 \in B_{\epsilon_1}(z_0) \cap \Omega = B_\epsilon(z_0) \cap \Omega$. Agora tomamos $\epsilon_2 = |z_1 - z_0|$, como $(B_{\epsilon_2}(z_0) - \{z_0\}) \cap \Omega \neq \emptyset$ então existe $z_2 \neq z_0$ tal que $z_2 \in B_{\epsilon_2}(z_0) \cap \Omega \subset B_\epsilon(z_0) \cap \Omega$. Assim podemos tomar indutivamente uma sequência de pontos $z_n \neq z_0$ tal que $z_n \in B_{\epsilon_n}(z_0) \cap \Omega \subset B_\epsilon(z_0) \cap \Omega$ ($\epsilon_n = |z_{n-1} - z_0|$). Assim $\{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$ é um conjunto infinito contido em $B_\epsilon(z_0) \cap \Omega$. \square

Definition 3.7 Dizemos que z_0 é um ponto isolado de Ω se existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(z_0) \cap \Omega = \{z_0\}$. Dizemos também que Ω é discreto se todos os seus pontos são isolados.

Exemplo $\Omega = \{n + in : n \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto discreto e $\Omega = \{1/n + i/n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ não é. Porque?

Definition 3.8 Dizemos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto limitado se existe $M > 0$ tal que $|z| \leq M$ para todo $z \in \Omega$. (Obs: $\Omega \subset B_M(0)$)

Definition 3.9 Dizemos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto compacto se for fechado é limitado.

Exemplo O retângulo $\Omega = \{z = x + iy : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ é compacto

Definition 3.10 Dizemos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto conexo se dados dos pontos $z_1, z_2 \in \Omega$ existe uma curva contínua contida em Ω que une esses dois pontos, isto é, existe $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ contínua tal que $\phi(a) = z_1$, $\phi(b) = z_2$ e $\phi(t) \in \Omega$ para todo $t \in [a, b]$.

Exemplo $\Omega = B_2(0) \cup B_1(4i)$ não é conexo.

Exercícios:

1. Mostre que o retângulo $\Omega = \{z = x + iy : x \in]0, a[, y \in]0, b[\}$ é aberto
2. Mostre que $\Omega = \{z : |z| \geq 1\}$ é fechado
3. Mostre que $\Omega = \{i/n : n \in \mathbb{N}\}$ é discreto
4. Mostre que $\Omega = \{z = re^{i\theta} : r \in [0, 1], \theta \in [0, \pi/4]\}$ é compacto
5. Mostre que $\Omega = B_1(-1) \cup \bar{B}_1(1)$ é conexo

3.1 Limites e continuidade

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ fixado e $f(z)$ uma função complexa definida pelo menos em $B_r(z_0) - \{z_0\}$ para algum $r > 0$.

Definição 3.11 Dizemos que o limite de $f(z)$, quando z se aproxima de z_0 , é $w_0 \in \mathbb{C}$ e denotamos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

se para $\epsilon > 0$ dado é possível determinar $\delta = \delta(\epsilon, z_0) > 0$ tal que se

$$\underbrace{0 < |z - z_0| < \delta}_{z \in (B_\delta(z_0) - \{z_0\})} \Rightarrow \underbrace{|f(z) - w_0| < \epsilon}_{f(z) \in B_\epsilon(w_0)}$$

Exemplo Consideremos a função $f(z) = z^2 + 1$, calculemos o limite desta função quando z tende para i :

$$\lim_{z \rightarrow i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z^2 + 1) = i^2 + 1 = 0.$$

Como a única forma de provar que 0 é o limite de $f(z)$ quando z tende para i , é através da definição, verifiquemos que o cálculo feito está certo

$$|z^2 + 1 - 0| = |z^2 + 1| = |z^2 - i^2| = |z + 1||z - i| \leq (|z| + 1)|z - i|$$

se $z \in B_1(i)$ então $|z| \leq |z - i| + |i| < 1 + 1 = 2$. Substituindo na desigualdade anterior temos

$$|z^2 + 1 - 0| < 3|z - i|$$

Logo para $\epsilon > 0$ fixado encontramos $\delta = \min\{\epsilon/3, 1\}$ tal que se

$$0 < |z - i| < \delta \Rightarrow |f(z) - 0| < \epsilon$$

Propriedades do limite:

1. O limite é único

$$2. \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$3. \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = \left[\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \right] \left[\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \right]$$

$$4. \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{[\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)]}{[\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)]}, \text{ desde que } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$$

Exemplo Determine se $f(z) = \bar{z}/|z|$ tem limite quando $z \rightarrow 0$. Tomemos complexos da forma $z = x + i0$ então $z \rightarrow 0$ se e somente se $x \rightarrow 0$, assim

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0i}{\sqrt{x^2 + 0^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$$

Daí obtemos valores diferentes quando x se aproxima de 0 por valores positivos e negativos, portanto o limite não existe pois o limite é único. Observe também que, se nos aproximarmos por complexos da forma $z = 0 + iy$, temos que

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - yi}{\sqrt{0^2 + y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{yi}{|y|}$$

e novamente encontramos valores diferentes dos anteriores para o limite quando y se aproxima de 0 por valores positivos e negativos.

Theorem 3.12 Se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$ e $g(z)$ é uma função limitada numa vizinhança de z_0 então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = 0$$

Exemplo temos que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^3}{|z|^2} = 0$, pois tem-se que

$$\frac{\bar{z}^3}{|z|^2} = \bar{z} \frac{\bar{z}^2}{|z|^2}$$

sendo que $\lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0$ e $g(z) = \frac{\bar{z}^2}{|z|^2}$ é limitada numa vizinhança de 0.

Theorem 3.13 Sejam $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e $w_0 = a + ib$ então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b \end{cases}$$

Proof: (\Rightarrow): obtem-se a partir das desigualdades

$$|u(x, y) - a| \leq |f(z) - w_0|$$

$$|v(x, y) - b| \leq |f(z) - w_0|$$

(\Leftarrow): Obtem-se a partir das desigualdade

$$|f(z) - w_0| \leq |u(x, y) - a| + |v(x, y) - b|$$

□

Definição 3.14 Dizemos que a função $f(z)$ é contínua em z_0 se $f(z)$ é definida também em z_0 e

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Exemplo A função $f(z) = z^{27} + 1$ se $z \neq i$ e $f(i) = i + 1$ não é contínua em i pois

$$\lim_{z \rightarrow i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z^{27} + 1) = i^{27} + 1 = (i^2)^{13}i + 1 = -i + 1 \neq f(i).$$

Agora a função $f(z) = z^3/(\bar{z}|z|)$ se $z \neq 0$ e $f(0) = 0$ é contínua em 0 , pois do teorema ?

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{z^2}{\bar{z}|z|} = 0 = f(0).$$

Propriedades análogas a de limites podem ser estabelecidas para a continuidade, isto é, se $f(z)$ e $g(z)$ são contínuas em z_0 então $f(z) \pm g(z)$ e $f(z)g(z)$ são contínuas em z_0 e $f(z)/g(z)$ também é contínua em z_0 desde que $g(z_0) \neq 0$. Além disso, decorre do teorema ? que $f(z)$ é contínua em z_0 se e somente se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas em (x_0, y_0) , onde $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Exemplo São funções contínuas em todo $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = z^2, \quad f(z) = e^{\bar{z}}, \quad f(z) = \text{Im}(z), \quad f(z) = \frac{1}{|z| - i},$$

pois as partes reais $u(x, y)$ e imaginárias $v(x, y)$ de cada uma de essas funções são contínuas para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo A função $\arg_p(z)$ definida em $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$ é descontínua nos pontos $z = -r$ com $r > 0$. De fato, seja $z_n = re^{i(-\pi+1/n)}$, pontos da semicircunferência inferior de raio r , claramente $z_n \rightarrow -r$ quando $n \rightarrow \infty$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg_p(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\pi + \frac{1}{n} = -\pi \neq \arg_p(-r) = \pi,$$

portanto a função não é contínua em $-r$. Mais ainda, observe que se consideramos $w_n = re^{i(\pi-1/n)}$, pontos da semicircunferência superior de raio r , claramente $w_n \rightarrow -r$ quando $n \rightarrow \infty$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg_p(w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi - \frac{1}{n} = \pi,$$

Isto é, não existe $\lim_{z \rightarrow -r} \arg_p(z)$ pois ao aproximarmos de $-r$ por caminhos diferentes obtivemos limites diferentes.

Exercícios:

1. Determine se existem os seguintes limites

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{\bar{z}}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{\bar{z}}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{[\operatorname{Im}(z)]^2}{z}$$

2. Determine se as seguintes funções são contínuas em $z_0 = 0$

(a) $f(z) = \bar{z}^2/|z|^2$ se $z \neq 0$ e $f(0) = 0$.

(b) $f(z) = [\sin(x)y]/x + i[1 - \cos(y)]/y$ se $z \neq 0$ e $f(0) = i$.

(c) $f(z) = (e^z - 1)/z$ se $z \neq 0$ e $f(0) = 1$.

3. Determine se a função $f(z) = \ln_p(z)$ é contínua em $z_0 = -r$ onde $r > 0$.

4. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z + w) = f(z)f(w)$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$. Mostre que

(a) $f(0) = 1$, $f(-z) = 1/f(z)$, $f(z - w) - 1 = (f(z) - f(w))/f(w)$

(b) se $f(z)$ é contínua em $z = 0$ então é contínua em qualquer ponto.

3.2 Funções Analíticas

Uma função complexa $f(z)$ cujo domínio contém pelo menos $B_r(z_0)$ para algum $r > 0$, é derivável em z_0 se existe o seguinte limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}.$$

Caso o limite exista será chamada derivada da função f no ponto z_0 e denotada por $f'(z_0)$, isto é

$$f'(z_0) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}.$$

Exemplo Vejamos que $f(z) = z^2$ é derivável em cada ponto do plano complexo. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = \frac{(z_0 + w)^2 - z_0^2}{w} = 2z_0 + w$$

Portanto existe

$$f'(z_0) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = 2z_0.$$

Como z_0 foi arbitrário temos que a derivada existe para todo $z \in \mathbb{C}$ e $f'(z) = 2z$.

Theorem 3.15 Se $f(z)$ é derivável em z_0 então é contínua em z_0 .

Prova

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0)$$

Exemplo $f(z) = \bar{z}$ não é derivável em nenhum ponto do plano complexo.

$$\frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = \frac{\overline{z_0 + w} - \bar{z}_0}{w} = \frac{\bar{w}}{w}$$

Portanto não existe

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\bar{w}}{w} \quad \text{qualquer que seja } z_0 \in \mathbb{C}$$

pois tem limites diferentes em caminhos da forma $w = \alpha + 0i$ e $w = 0 + i\beta$ sendo que o limite deveria ser único, logo não existe $f'(z_0)$ pra nenhum ponto $z_0 \in \mathbb{C}$. Observe que a função é contínua em todos os seus pontos.

Definition 3.16 Dizemos que a função $f(z)$ é analítica em z_0 se a for derivável em $B_r(z_0)$ para algum $r > 0$

Definition 3.17 Dizemos que a função $f(z)$ é analítica em Ω se for analítica em todos os pontos $z \in \Omega$.

Exemplo as seguintes funções são analíticas em $\Omega = \mathbb{C}$

$$p(z) = a_0 + \dots + a_n z^n, \quad e^z, \quad \cos(z), \quad \sinh(z), \quad \dots$$

Exemplo A função $f(z) = \frac{1}{z^4 + 16}$ é analítica em $\Omega = \mathbb{C} - \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ onde $z_1 = 2e^{i\pi/4}$, $z_2 = 2e^{i3\pi/4}$, $z_3 = 2e^{-i\pi/4}$, $z_4 = 2e^{-i3\pi/4}$ são os 4 pontos onde ela não está definida.

3.3 Equações de Cauchy-Riemann

Nesta seção mostraremos que a parte real $u(x, y)$ e imaginária $v(x, y)$ de uma função analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ satisfazem certas equações conhecidas como “Equações de Cauchy-Riemann”. Também veremos que tais equações são suficientes para determinar a analiticidade de uma função complexa.

Se $z_0 = x_0 + iy_0$, $w = \alpha + i\beta$ e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} &= \frac{u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0)}{\alpha + i\beta} \\ &\quad + i \frac{v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0)}{\alpha + i\beta} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Supondo que $f(z)$ é derivável em z_0 , vejamos que acontece com esse limite se nos aproximarmos de 0 pelo seguinte caminho $w = \alpha + i0$. Usando (3.4) temos que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0 + \alpha, y_0) - u(x_0, y_0)}{\alpha} + i \frac{v(x_0 + \alpha, y_0) - v(x_0, y_0)}{\alpha} \right] \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Agora se considerarmos o caminho $w = 0 + i\beta$ teremos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0)}{i\beta} + i \frac{v(x_0, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0)}{i\beta} \right] \\ &= \frac{1}{i} u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) \\ &= -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dado que o limite é único, segue de (3.5)-(3.6) que

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Portanto, se $f(z)$ é derivável em $z = x + iy$, então satisfaz as equações

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= v_y(x, y), \\ u_y(x, y) &= -v_x(x, y). \end{aligned}$$

que são conhecidas como, *Equações de Cauchy-Riemann*.

Theorem 3.18 Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em Ω então $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem as equações de Cauchy Riemann para todo $(x, y) \in \Omega$, além disso

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x(x, y) + iv_x(x, y) \\ &= v_y(x, y) - iu_y(x, y) \end{aligned}$$

O “recíproco” também é verdadeiro:

Theorem 3.19 *Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$, funções contínuas com derivadas parciais contínuas para todo $(x, y) \in \Omega$ onde Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{C} (ou de \mathbb{R}^2). Logo, se estas funções satisfazem as equações de Cauchy Riemann para todo $(x, y) \in \Omega$, então a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em Ω .*

Exemplo *Vejam que $f(z) = z^2$ é analítica em $\Omega = \mathbb{C}$ e que $f'(z) = 2z$. de fato,*

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{v(x,y)},$$

logo as funções $u(x, y)$, $v(x, y)$ são funções contínuas com derivadas também contínuas para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, além disso

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 2x = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) &= -2y = -v_x(x, y), \end{aligned}$$

isto é, satisfazem as Equações de Cauchy Riemann para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto $f(z)$ é analítica em \mathbb{C} . Além disso

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv(x, y) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z.$$

Exemplo *A função $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ não é analítica em nenhum ponto. De fato, se $z = x + iy$, então $f(z) = x$. Assim, $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = 0$ os quais são funções contínuas com derivadas contínuas, mas, não satisfazem as equações de Cauchy Riemann em nenhum ponto de \mathbb{C} .*

Exemplo *A função $f(z) = |z|^2$ não é analítica em nenhum ponto, pois sua parte real $u(x, y) = x^2 + y^2$ e imaginária $v(x, y) = 0$ embora sejam funções contínuas com derivadas contínuas, as equações de Cauchy Riemann somente são satisfeitas para $z = 0$, logo $f(z)$ no máximo poderia ser analítica em 0, mas seria necessário que função seja derivável numa vizinhança de 0 o que não é válido, pois as equações de Cauchy Riemann não são satisfeitas nessa vizinhança. portanto a função não é analítica em nenhum ponto de \mathbb{C} .*

3.4 Forma polar das equações de Cauchy-Riemann

Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função complexa, determinaremos as equações de Cauchy Riemann na forma polar. Escrevendo z na forma polar

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta),$$

temos que

$$x = \underbrace{r \cos(\theta)}_{=x(r,\theta)}, \quad y = \underbrace{r \sin(\theta)}_{=y(r,\theta)}.$$

Assim a parte real e imaginária de $f(z)$ pode ser escrita em função de (r, θ) , isto é

$$u(r, \theta) = u(x(r, \theta), y(r, \theta)), \quad v(r, \theta) = v(x(r, \theta), y(r, \theta))$$

e desta forma $f(z)$ pode ser escrita da forma $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$. Vejamos quais seriam as equações de Cauchy Riemann em relação as coordenadas (r, θ) . Usando a regra da cadeia temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\theta). \end{aligned}$$

Análogamente

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial x} r \sin(\theta) + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos(\theta).$$

Agora usando as equações de Cauchy Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial y} r \sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial x} r \cos(\theta) \\ &= r \left[\frac{\partial u}{\partial y} \sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\theta) \right] \\ &= r \frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned}$$

isto é

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Procedendo de de forma análoga, também podemos obter, que

$$r \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

As duas equações anteriores são as equações de Cauchy-Riemann na forma polar.

Exemplo Determinemos os pontos onde a função $f(z) = z^5$ é analítica. Determinemos as partes real e imaginária de função em termos de (r, θ) . Sendo que $z = re^{i\theta}$, temos que

$$f(z) = r^5 e^{5i\theta} = \underbrace{r^5 \cos(5\theta)}_{u(r,\theta)} + i \underbrace{r^5 \sin(5\theta)}_{v(r,\theta)}.$$

Claramente as funções $u(r, \theta)$ e $v(r, \theta)$ são funções contínuas com derivadas parciais contínuas, vejamos se tais funções satisfazem as equações de Cauchy Riemann:

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = 5r^5 \cos(5\theta) = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad r \frac{\partial v}{\partial r} = 5r^5 \sin(5\theta) = -\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Dai segue que $f(z)$ é analítica em todo o plano complexo.

3.5 Funções harmônicas

Dizemos que uma função de duas variáveis $h(x, y)$ contínua com derivadas parciais contínuas até de segunda ordem é harmônica num conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in \Omega.$$

Se denotarmos com $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ao operador laplaciano, temos que $h(x, y)$ é harmônica se

$$\Delta h(x, y) = 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in \Omega.$$

Theorem 3.20 se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em Ω então $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são funções harmônicas em Ω .

Proof: Como $f(z)$ é analítica em Ω , temos que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem as equações de Cauchy Riemann, isto é

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Derivando a primeira equação em relação a x e a segunda equação em relação a y temos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

assim, somando estas equações e em vista que $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ concluímos que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

□

Definition 3.21 Duas funções harmônicas $u(x, y)$, $v(x, y)$ em Ω são ditas harmônicas conjugadas se a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em Ω .

Pergunta: Dada uma função $u(x, y)$ harmônica é possível encontrar uma harmônica conjugada $v(x, y)$?

Theorem 3.22 Se $u(x, y)$ é harmônica em $\Omega = B_r(0)$ então é possível determinar uma harmônica conjugada.

Proof: Precisamos encontrar uma função $v(x, y)$ tal que junto com $u(x, y)$ satisfaçam as equações de Cauchy-Riemann, isto é $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. fixando x e integrando a primeira equação em relação a segunda componente temos que

$$\begin{aligned} \int_0^y u_x(x, s) ds &= \int_0^y v_y(x, s) ds \\ &= v(x, y) - v(x, 0). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \int_0^x v_x(s, 0) ds + v(0, 0) \\ &= - \int_0^x u_y(s, 0) ds + v(0, 0). \end{aligned}$$

Das equações anteriores, encontramos que

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_0^y u_x(x, s) ds + v(x, 0) \\ &= \int_0^y u_x(x, s) ds - \int_0^x u_y(s, 0) ds + v(0, 0). \end{aligned}$$

Portanto as funções candidatas a ser os harmônicos conjugados de $u(x, y)$ são da forma

$$v(x, y) := \int_0^y u_x(x, s) ds - \int_0^x u_y(s, 0) ds + C$$

onde C é uma constante real qualquer. Agora, basta verificar que esta função $v(x, y)$ juntamente com $u(x, y)$ satisfaçam as equações de Cauchy-Riemann em Ω para concluir que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em Ω . \square

Exemplo Determinemos um conjugado harmônico para a função harmônica $u(x, y) = x^2 - y^2$. Uma tal função $v(x, y)$ deverá satisfazer

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x.$$

Da primeira equação, temos que

$$v(x, y) = 2xy + f(x)$$

onde $f(x)$ será determinada posteriormente. Derivando esta expressão em relação a x , temos que

$$v_x = 2y + f'(x) = -u_y = 2y$$

de onde concluímos que $f'(x) = 0$, portanto $f(x) = C$, C constante. logo, os conjugados harmônicos de $u(x, y)$ são da forma

$$v(x, y) = 2xy + C.$$

Exercícios:

1. Usando a definição de derivada mostre que a derivada de $f(z) = 1/z$ é $f'(z) = -1/z^2$ para todo $z \neq 0$.
2. Determine os pontos do plano complexo onde as seguintes funções não são analíticas

$$\operatorname{Re}(z), \quad \operatorname{Im}(z), \quad e^{\bar{z}}, \quad |z|^2, \quad \ln_p(z)$$

3. Determine os pontos onde as seguintes funções são analíticas

$$\begin{aligned} f(z) &= |z|^2 + 2iz\operatorname{Im}(z) \\ f(z) &= \frac{\bar{z}}{z|z|^2 + \bar{z}} \\ f(z) &= 2z\operatorname{Re}(z) - |z|^2 \end{aligned}$$

4. seja $a \in \mathbb{C}$, mostre que $f(z) = e^{az}$ é analítica em $\Omega = \mathbb{C}$. Prove que $f'(z) = ae^{az}$ usando a fórmula $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$.

5. Prove que

$$\sin'(z) = \cos(z), \quad \cos'(z) = -\sin(z), \quad \sinh'(z) = \cosh(z), \quad \cosh'(z) = \sinh(z)$$

6. Seja $f(z)$ definido num conexo Ω tal que $f'(z) = 0, \forall z \in \Omega$. Mostre que $f(z) = C, \forall z \in \Omega$ para alguma constante $C \in \mathbb{C}$. A conexidade é necessária?

7. Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica para todo $z \in \Omega_1$ tal que $f(z) \in \Omega_2$. $\forall z \in \Omega_1$ e $g(w) = U(u, v) + iV(u, v)$ analítica para todo $w = u + iv \in \Omega_2$. Mostre que usando as equações de Cauchy-Riemann que $h(z) = g(f(z))$ é analítica em Ω_1
8. Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ funções com ate primeira derivada contínua em $\Omega \subset \mathbb{C}$. Prove que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em ω se e somente se $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\forall z = x + iy \sim (x, y) \in \Omega$
9. Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica em $z = re^{i\theta}$. Se $u(r, \theta) = u(x, y)$ e $v(r, \theta) = v(x, y)$ onde $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$ mostre que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial r} \sin \theta \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta.\end{aligned}$$

Usando estas equações mostre que $f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) e^{-i\theta}$.

10. Seja $n \in \mathbb{N}$, mostre que $f(z) = z^n$ é analítica em $\Omega = \mathbb{C}$. Usando a fórmula $f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) e^{-i\theta}$, mostre que $f'(z) = nz^{n-1}$.
11. Mostre que $\ln_p(z)$ é analítica em $\Omega = \mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$ onde $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$. (Dica: Use a forma polar das Equações de Cauchy Riemann). Além disso, use a fórmula $f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) e^{-i\theta}$, para mostrar que $\ln'_p(z) = 1/z$.
12. Encontre relações entre os coeficientes a, b, c, d de tal forma que as seguintes funções sejam harmônicas
- $$u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3, \quad u(x, y) = e^{ax} \sin(bx), \quad u(x, y) = e^{ax} \cosh(bx).$$
13. Se $v(x, y)$ é um conjugado harmônico de $u(x, y)$, mostre que $u(x, y)$ é um conjugado harmônico de $-v(x, y)$.
14. Seja $a \in \mathbb{R}$. Verifique que a função $u(x, y) = e^{ax} \cos(ay)$ é harmônica em $\Omega = \mathbb{R}^2$ e encontre um conjugado harmônico para esta função.

4 Integração Complexa

Definição 4.1 Dizemos que $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ é uma curva de extremos P e Q se existe uma função contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\mathcal{C} = \{\gamma(t) = x(t) + iy(t) : t \in [a, b], \quad \gamma(a) = P, \quad \gamma(b) = Q\}$$

Neste caso $\gamma(t)$ é dita uma parametrização de \mathcal{C} e a orientação da curva será aquela em que $\gamma(t)$ está sendo percorrida, isto é, de P até Q .

Por $-\mathcal{C}$ denotaremos à mesma curva anterior com a diferença que ser percorrida em sentido contrário, isto é, de Q a P , neste caso podemos parametrizar esta curva da seguinte forma

$$-\mathcal{C} = \{\gamma_1(t) = \gamma(-t) : t \in [-b, -a]\}$$

Obs: A parametrização de uma curva não é única, por exemplo, a curva de extremos $P = 0$ e $Q = 2 + 4i$ através da parábola $y = x^2$, pode ser parametrizada pelas funções

$$\mathcal{C} = \{\gamma(t) = t + it^2 : t \in [0, 2]\}$$

$$\mathcal{C} = \{\gamma_1(t) = t^2 + it^4 : t \in [0, \sqrt{2}]\}$$

$$\mathcal{C} = \{\gamma_2(t) = te^t + it^2e^{2t} : t \in [0, b], \text{ onde } b \text{ é tal que } be^b = 2\}$$

Definição 4.2 Dizemos que \mathcal{C} é uma curva simples se alguma parametrização $\gamma(t)$ é injetiva. A curva é dita fechada se seus extremos coincidem. A curva será dita fechada simples se for fechada e a parametrização $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ for injetiva em $[a, b[$.

Exemplo

1. A curva $\mathcal{C} = \{\gamma(t) = \cos(t)e^{it} : t \in [0, 4\pi + \pi/2]\}$ não é simples nem fechada
2. A curva $\mathcal{C} = \{\gamma(t) = e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ é fechada simples
3. A curva $\mathcal{C} = \{\gamma(t) = e^{it} : t \in [0, 4\pi]\}$ é fechada mas não é simples

De acordo com um teorema famoso devido a Jordan, toda curva fechada simples \mathcal{C} divide o plano complexo em duas regiões tendo \mathcal{C} como fronteira, uma região interior, Ω , limitada e outra exterior, $\mathbb{C} - \bar{\Omega}$, ilimitada. Além disso ambas regiões são conexas, mais ainda, a região interior é conexo simples (veja definição embaixo).

Definição 4.3 Dizemos que um conjunto conexo ω é conexo simples se o interior de toda curva fechada inscrita em ω esta contida em ω . Isto é, ω é um conexo que não tem buracos.

Definição 4.4 Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$, onde I é um intervalo da reta. Dizemos que $\gamma(t)$ é diferenciável por partes em I , se for contínua e $\gamma'(t)$ for contínua exeto num número finito de discontinuidades t_1, \dots, t_n , e em cada discontinuidade os limites

$$\gamma(t_i^+) := \lim_{t \rightarrow t_i^+} \gamma(t), \quad \gamma(t_i^-) := \lim_{t \rightarrow t_i^-} \gamma(t)$$

existem.

Exemplo A função $\gamma(t) = t + i|t|$ com $t \in [-1, 1]$ é diferenciável por partes, pois é contínua e

$$\gamma'(t) = \begin{cases} 1 - i & \text{se } t \in [-1, 0[\\ 1 + i & \text{se } t \in]0, 1] \end{cases}$$

sendo que é descontínua $t = 0$ (não está definido), mas os limites $\gamma'(0^+) = 1 + i$, $\gamma'(0^-) = 1 - i$ existem

Seja $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$ uma curva no plano complexo (na verdade é uma parametrização de curva, mais abusando da linguagem a chamaremos de curva). Definimos a integral de curva como sendo

$$\int_a^b \gamma(t) dt := \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt.$$

Então são válidas as seguintes propriedades: se $\gamma(t), \zeta(t)$ são duas curvas definidas no intervalo $[a, b]$ e c é uma constante complexa então

1. $\int_a^b \gamma(t) + \zeta(t) dt = \int_a^b \gamma(t) dt + \int_a^b \zeta(t) dt$
2. $\int_a^b c\gamma(t) dt = c \int_a^b \gamma(t) dt$
3. $\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt$

Prova do item 3:

$$\int_a^b \gamma(t) dt = re^{i\theta} \quad \text{com } r \geq 0$$

então

$$\begin{aligned} r &= e^{-i\theta} \int_a^b \gamma(t) dt \\ &= \int_a^b e^{-i\theta} \gamma(t) dt \end{aligned}$$

Tomando parte real em ambos membros temos

$$\begin{aligned} r &= \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta}\gamma(t)) dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta}\gamma(t)| dt \\ &\leq \int_a^b |\gamma(t)| dt \end{aligned}$$

isto é

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| = r \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt$$

4.1 Comprimento de uma curva

Seja \mathcal{C} e uma curva parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Consideremos $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ uma partição de $[a, b]$ e denotaremos com $\|P\| := \max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, \dots, m\}$. Consideremos a poligonal de vértices $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$, então o comprimento da poligonal é dado por

$$\ell(P) := \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

Obs: Se P e Q são duas partições de $[a, b]$ tal que $P \subset Q$ então

$$\ell(P) \leq \ell(Q)$$

Definition 4.5 Definimos o comprimento da curva \mathcal{C} como sendo

$$\ell(\mathcal{C}) := \sup\{\ell(P) : P \text{ é uma partição de } [a, b]\}$$

Theorem 4.6 Se \mathcal{C} e uma curva parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciável por partes, então

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Proof: Seja P uma partição arbitrária, consideremos $Q = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ uma partição tal que $P \subset Q$ e contém as descontinuidades de $\gamma'(t)$ então

$$\begin{aligned}
\ell(P) &\leq \ell(Q) \\
&= \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\
&= \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| dt \\
&= \int_a^b |\gamma'(t)| dt
\end{aligned}$$

então

$$\ell(P) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad (4.7)$$

Agora assumamos que $\gamma'(t)$ é contínua em $[a, b]$. Assim

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| dt$$

Tomando $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ tal que $|\gamma'(\tau_k)| = \max\{|\gamma'(t)| : t \in [t_{k-1}, t_k]\}$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\gamma'(t)| dt &\leq \sum_{k=1}^m |\gamma'(\tau_k)|(t_k - t_{k-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(\tau_k) dt \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)) dt \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^m \left| (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)) dt \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)| dt \\
&\leq \ell(P) + \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)| dt
\end{aligned}$$

Como $\gamma'(t)$ é contínua em $[a, b]$ então é uniformemente contínua, logo dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \epsilon$ para todo t, s tal que $|t - s| < \delta$. Assim escolhendo uma partição

tal que $\|P\| < \delta$ temos que $|\tau - t| < \delta$ para todo $t \in [t_{k-1}, t_k]$ então $|\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)| < \epsilon$. Voltando a nossa equação temos que

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &\leq \ell(P) + \sum_{k=1}^m \epsilon(t_k - t_{k-1}) \\ &\leq \ell(P) + \epsilon(b - a) \end{aligned} \quad (4.8)$$

De (4.7) e (4.8) concluímos que

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt = \sup\{\ell(P) : P \text{ é uma partição de } [a, b]\} \Rightarrow \ell(\mathcal{C}) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

□

Definição 4.7 Seja \mathcal{C} uma curva contida em $\Omega \subset \mathbb{C}$ de extremos P e Q parametrizada por $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, diferenciável por partes, com extremos $z(a) = P$ e com $z(b) = Q$. Então a integral complexa de uma função complexa contínua $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ao longo de \mathcal{C} no sentido de P a Q é

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_P^Q f(z) dz := \int_a^b f(z(t))z'(t) dt$$

Obs: Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ então

$$\begin{aligned} f(z)dz &= (u + iv)(dx + idy) \\ &= udx - vdy + i(udy + vdx), \end{aligned}$$

isto é

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} udx - \int_{\mathcal{C}} vdy + i \left\{ \int_{\mathcal{C}} udy + \int_{\mathcal{C}} vdx \right\}.$$

Lembre que a definição de integral de linha: $\int_{\mathcal{C}} udx = \int_a^b u(x(t), y(t))x'(t)dt$.

Exemplo Seja $\mathcal{C} = \{z(t) = e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ então

$$1. \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(t)} z'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = 2\pi i$$

$$2. \int_{\mathcal{C}} z^n dz = \int_0^{2\pi} z^n(t) z'(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{int} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \frac{e^{i(n+1)t}}{n+1} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

independencia da parametrizaçã: Seja $z_1(t)$, $t \in [a, b]$ e suponhamos que $t = h(s)$ onde $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ é crescente sobrejetora e com derivada contínua, denotemos com $z_2(s) = z_1(h(s))$ assim

$$\mathcal{C} = \{z_1(t) : t \in [a, b]\} = \{z_2(s) : s \in [c, d]\}$$

Mostraremos que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_a^b f(z_1(t))z_1'(t) dt = \int_c^d f(z_2(s))z_2'(s) ds$$

Prova: Fazendo a mudança de variáveis $t = h(s)$ temos

$$\int_a^b f(z_1(t))z_1'(t) dt = \int_c^d f(z_1(h(s)))z_1'(h(s))h'(s) ds = \int_c^d f(z_2(s))z_2'(s) ds$$

Propriedades: se $f(z)$, $g(z)$ são duas funções complexas então

1. $\int_{\mathcal{C}} f(z) + g(z) dz = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}} g(z) dz$
2. $k \int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} kf(z) dz$, para $k \in \mathbb{C}$
3. $\int_{-\mathcal{C}} f(z) dz = - \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$
4. $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz$, para $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

Seja $\mathcal{C} = \{z(t) = x(t) + iy(t) : t \in [a, b]\}$, denotaremos com

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) |dz| := \int_a^b f(z(t))|z'(t)| dt$$

Usando esta definição temos que

$$\int_{\mathcal{C}} |dz| = \int_a^b |z'(t)| dt = \ell(\mathcal{C}).$$

Theorem 4.8

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)| |dz|$$

Prova:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(z(t))z'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(z(t))z'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)| dt \\ &\leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)||dz| \end{aligned}$$

Obs: Note que se $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \Omega$ e \mathcal{C} é uma curva inscrita em Ω , então

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} |f(z)||dz| &\leq M \int_{\mathcal{C}} |dz| \\ &\leq M\ell(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

Theorem 4.9 Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua e possui uma primitiva $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, isto é $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$, então para toda curva contínua e C^1 por partes de extremos P e Q tem-se

$$\int_P^Q f(z) dz = F(Q) - F(P)$$

Proof: Seja $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uma parametrização contínua e C^1 por partes de uma curva de extremos $P = z(a)$ e $Q = z(b)$. Então

$$\frac{d}{dt}[F(z(t))] = F'(z(t))z'(t) = f(z(t))z'(t)$$

então

$$\begin{aligned} \int_P^Q f(z) dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}[F(z(t))] dt \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) \\ &= F(Q) - F(P) \end{aligned}$$

□

Exemplo A função $f(z) = 1/z$ não tem uma antiderivada em nenhum conjunto que

contenha uma vizinhança da origem exeto a origem. Para provar isto, suponhamos o contrario: Seja $F(z)$ uma antiderivada de $f(z) = 1/z$ no conjunto Ω que contém uma vizinhança da origem exeto a origem, consideremos a curva $\mathcal{C} = \{re^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ com $r > 0$ pequeno de tal forma que $\mathcal{C} \subset \Omega$. Então, pelo teorema anterior deveríamos ter

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = F(e^{i \cdot 2\pi}) - F(e^{i \cdot 0}) = F(1) - F(1) = 0$$

Mas, se usamos a definição de integral teremos

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} r i e^{it} dt = 2\pi i,$$

A qual contradiz o fato de $1/z$ ter uma antiderivada numa vizinhança da origem.

Obs: $\ln_p(z)$ é uma antiderivada de $1/z$ no conjunto $\mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

Exercícios

1. Determine uma parametrização de cada uma das seguintes curvas

- (a) Segmento de Reta de extremos $P = 0$ e $Q = 2 + i$.
- (b) Segmento de Reta de extremos $P = -1 + 2i$ e $Q = 1 + i$.
- (c) A circunferência de centro $1 - i$ e raio 2.
- (d) O pedaço de parábola $y = x^2 + 1$ de extremos $P = -1 + 2i$ e $Q = 2 + 5i$.
- (e) A elipse $2(x - 1)^2 + 3y^2 = 6$.
- (f) O pedaço de hipérbole $y = 2 + 1/x$ de extremos $P = 1 + 3i$ e $Q = 2 + (5/2)i$.

2. Determine que curvas $F(x, y) = 0$ representam cada uma das seguintes parametrizações

- (a) $z(t) = i + (2 - i)t, \quad 1 \leq t \leq 3$.
- (b) $z(t) = i + 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi$.
- (c) $z(t) = t^{20} + it^{40}, \quad -1 \leq t \leq 2$.

3. Calcule $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ onde

- (a) $f(z) = \sin(z)$, $\mathcal{C} =$ segmento de reta de $P = 0$ a $Q = i$.
- (b) $f(z) = e^z$, $\mathcal{C} =$ circunferência unitária no sentido antihorário.
- (c) $f(z) = z^2$, $\mathcal{C} =$ parábola $y = x^2$ de $P = 0$ a $Q = 1 + i$.
- (d) $f(z) = z$, $\mathcal{C} =$ os lados do triângulo de vértices $0, 1, i$ no sentido antihorário.

4. Seja $\mathcal{C} = S_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ orientado em sentido antihorário, mostre que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n \geq 2, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

5. Calcule $\int_{\mathcal{C}} \bar{z} dz$, de $P = 0$ a $Q = 1 + i$, através da curva

(a) Reta $y = x$

(b) Parábola $y = x^2$

As integrais coincidem?

6. Calcule $\int_{\mathcal{C}} |z|^2 dz$ onde \mathcal{C} é uma das seguintes curvas

(a) $\mathcal{C}_1 =$ Segmento de Reta de 0 a 2 e segmento de Reta de 2 a $2 + i$,

(b) $\mathcal{C}_2 =$ Segmento de Reta de 0 a i e segmento de Reta de i a $2 + i$.

As integrais coincidem?

7. Calcule as seguintes integrais

$$\int_0^{\pi i/2} z \cos(z) dz, \quad \int_{\sqrt{\pi}i}^{2\sqrt{\pi}} z \sin(z^2) dz, \quad \int_{1-\pi i}^{1+\pi i} \cosh(z) dz.$$

5 Os teoremas de Cauchy

Nesta seção abordaremos alguns dos resultados mais importantes da integração de funções analíticas formuladas por Cauchy¹, a qual tem aplicações surpreendentes no aspecto teórico e prático. Antes de enunciar tais resultados recordemos um dos teoremas mais importantes do cálculo de funções de várias variáveis conhecido como: o Teorema de Green ou teorema da divergência no plano:

Theorem 5.1 (Teorema de Green) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abeto e conexo simples e sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ funções com derivadas parciais contínuas até de primeira ordem em Ω . Então para qualquer curva fechada simples \mathcal{C} inscrita em Ω temos

$$\int \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\mathcal{C}} (P dx + Q dy)$$

sendo que R é a região interior a \mathcal{C} e a curva é percorrida no sentido antihorário.

¹matemático ...

Theorem 5.2 *Seja $f(z)$ analítica num conjunto Ω aberto e conexo simples. Então*

$$\int_C f(z) dz = 0$$

para qualquer curva fechada simples inscrita em Ω .

Proof: *Assumiremos que $f'(z)$ é contínua. O caso sem esa hipótese foi mostrado por Goursat cuja demonstração é mais complexa. Seja $z(t) = x(t) + iy(t)$ a parametrização de C . escrevemos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. desde que $f'(z)$ é contínua as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ possuem derivadas parciais contínuas de primeira ordem. Agora*

$$\begin{aligned} f(z)dz &= (u + iv)(dx + idy) \\ &= (udx - vdy) + i(vdx + udy) \end{aligned}$$

então pelo Teorema de Green temos que

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy) \\ &= \int_R \underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{=0} dx dy + i \int_R \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0} dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Exemplo *Consideremos as circunferências $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 1\}$, $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ percorridas no sentido antihorário. Então aplicando o teorema de Cauchy*

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z} = 0,$$

pois C_1 esta inscrita numa região conexa simples onde $1/z$ é analítica. Por outro lado, não podemos aplicar o teorema de Cauchy para calcular a integral na curva C_2 pois a curva não esta inscrita em nenhum conjunto conexo simples onde a função $1/z$ é analítica. Usando a definição de integral podemos encontrar que

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Corollary 5.3 *Se $f(z)$ é analítica num conjunto Ω aberto e conexo simples então a integral de $f(z)$ numa curva contida em Ω de extremos z_0 e z so depende desses pontos e não da curva.*

Proof: Sejam C_1 e C_2 duas curvas simples diferentes que coincidem nos extremos z_0, z então, se consideramos a curva fechada $C = C_1 \cup (-C_2)$, pelo teorema de Cauchy tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C f(z) dz \\ &= \int_{C_1} f(z) dz + \int_{-C_2} f(z) dz \\ &= \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz \end{aligned}$$

isto é

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

□

Exemplo Considere C_1 uma curva poligonal que inicia no ponto 1, passa pelo pontos $1 + 2i, -1 + 3i$ ate o ponto -1 . Calculemos $\int_{C_1} \frac{dz}{z}$. Consideremos a curva $C_2 = \{z(t) = e^{it} : 0 \leq t \leq \pi, \text{ então, as curvas } C_1 \text{ e } C_2 \text{ tem os mesmos extremos iniciais e finais e estão dentro de um mesmo conjunto conexo simples onde a função } 1/z \text{ é analítica, por tanto pelo corolário anterior tem-se}$

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z} = \int_{C_2} \frac{dz}{z} = \int_0^\pi \frac{ie^{it}}{e^{it}} = i\pi.$$

Observe que a curva $C_3 = \{z(t) = e^{-it} : 0 \leq t \leq \pi \text{ tem os mesmos extremos iniciais e finais que } C_1, \text{ mas neste caso não pode ser usado o Corolário anterior, pois ambas curvas não estão dentro de algum conjunto conexo simples onde } 1/z \text{ seja analítica.}$

Theorem 5.4 (Teorema de Cauchy em abertos multiplemente conexos) Seja Ω um conjunto aberto que contém as curvas fechadas simples C_0, C_1, \dots, C_n orientadas no mesmo sentido talque C_1, \dots, C_n estão no interior de C_0 e C_i e C_j são exteriores um ao outro para todo $i \neq j, i, j = 1, \dots, n$. Se $f(z)$ é analítica em Ω que contém o interior de C_0 exeto talvez em regiões Ω_i interiores a C_i para $i = 1, \dots, n$ então

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz$$

Exemplo Seja C uma curva fechada simples que envolve a origem então

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i,$$

sendo que a curva é percorrida no sentido antihorário. De fato, Considerando a curva $\mathcal{C}_1 = \{z(t) = re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$ com $r > 0$ de tal forma que \mathcal{C} e \mathcal{C}_1 não se intesetem, pelo teorema de Cauchy para conexos multiples temos que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz = \int_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(t)} z'(t) dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

Exemplo Seja \mathcal{C} uma curva fechada simples que envolve os pontos $\pm i$ então

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{2z}{z^2 + 1} dz = 4\pi i,$$

sendo que a curva é percorrida no sentido antihorário. De fato, Considerando a curva $\mathcal{C}_1 = \{z_1(t) = i + r_1 e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$, $\mathcal{C}_2 = \{z_2(t) = -i + r_2 e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$ com $r_1, r_2 > 0$ pequenos de tal forma que \mathcal{C} , \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 não se intesetem, pelo teorema de Cauchy para conexos multiples temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{2z}{z^2 + 1} dz &= \int_{\mathcal{C}_1} \frac{2z}{z^2 + 1} dz + \int_{\mathcal{C}_2} \frac{2z}{z^2 + 1} dz \\ &= \int_{\mathcal{C}_1} \left(\frac{1}{z - i} + \frac{1}{z + i} \right) dz + \int_{\mathcal{C}_2} \left(\frac{1}{z - i} + \frac{1}{z + i} \right) dz \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{C}_1} \frac{dz}{z - i}}_{=2\pi i} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_1} \frac{dz}{z + i}}_{=0} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_2} \frac{dz}{z - i}}_{=0} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_2} \frac{dz}{z + i}}_{=2\pi i} \end{aligned}$$

Theorem 5.5 Seja $f(z)$ analítica num conjunto Ω aberto e conexo simples, então qualquer primitiva desta função é dado por

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw + C, \quad \forall z \in \Omega \quad (5.9)$$

onde $z_0 \in \Omega$ é fixado e C é uma constante.

Proof: Primeiro vejamos que $F(z)$ dado por (5.9) é uma primitiva de $f(z)$. Seja $z \in \Omega$ então

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \int_{z_0}^{z+h} f(w) dw - \int_{z_0}^z f(w) dw \right\} \\ &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(w) dw \end{aligned}$$

Exercício: se $g(z)$ analítica num conjunto Ω aberto e conexo simples e $z_0 \in \Omega$ mostre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} g(w) dw = g(z_0)$$

Dai segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

Portanto $F'(z) = f(z) \forall z \in \Omega$. Seja agora $F(z)$ uma primitiva qualquer de $f(z)$ mostraremos que $F(z)$ é da forma (5.9). consideremos

$$G(z) = F(z) - \int_{z_0}^z f(w) dw$$

então

$$G'(z) = F'(z) - f(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$$

Então $G(z) = C, \forall z \in \Omega$ para alguma constante $C \in \mathbb{C}$. Portanto

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw + C, \quad \forall z \in \Omega$$

□

Exemplo Calcule uma primitiva de $f(z) = z$. Usando o teorema anterior qualquer primitiva dessa função é dada por

$$F(z) = \int_0^z w dw + C$$

usando a parametrização $w(t) = zt$ com $t \in [0, 1]$ da reta que une a origem com z temos que

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^1 w(t)w'(t) dt + C \\ &= z^2 \int_0^1 t^2 dt + C \\ &= \frac{z^2}{2} + C \end{aligned}$$

Exercícios:

1. Seja \mathcal{C} a circunferência unitária de centro na origem. Calcule a integral $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$, sendo que a curva é percorrida no sentido antihorário. Use o teorema de Cauchy nos casos que seja possível.

$$f(z) = \bar{z}, \quad f(z) = e^{z^2}, \quad f(z) = \frac{1-z}{z^2}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2+4}, \quad f(z) = \ln_p(z).$$

2. Seja \mathcal{C} a circunferência de raio $3/2$ e centro na origem. Calcule as seguintes integrais considerando que a curva é percorrida no sentido antihorário

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z+1}{z^2+2z} dz, \quad \int_{\mathcal{C}} \frac{z^2+z+4}{z^3+4z} dz.$$

Dica: Decomponha o integrando em frações parciais e calcule cada uma das integrais resultantes.

3. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo simples. Mostre que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$$

para toda curva \mathcal{C} fechada simples inscrita em Ω se e somente se

$$\int_P^Q f(z) dz := \text{integral em uma curva de extremos } P \text{ e } Q$$

depende somente de os extremos P e Q e não da curva.

4. (i) seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $t_0 \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} g(s) ds = g(t_0)$$

(ii) seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto conexo simples, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e $z_0 \in \Omega$. Mostre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} g(w) dw = g(z_0)$$

Theorem 5.6 (Fórmula integral de Cauchy) Seja $f(z)$ analítica em Ω aberto e conexo simples. Então, para qualquer curva fechada simples \mathcal{C} inscrita em Ω e z_0 um ponto interior a \mathcal{C} tem-se

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

sendo que a curva é percorrida em sentido antihorário.

Proof: Consideremos $\mathcal{C}_r = S_r(z_0)$ com $0 < r < r_0$ positivo tal que \mathcal{C}_{r_0} esteja no interior de \mathcal{C} . Então, pelo teorema de Cauchy para múltiplemente conexos, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0} dz &= \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \\ &= f(z_0) \int_{\mathcal{C}_r} \frac{1}{z-z_0} dz + \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \\ &= f(z_0) 2\pi i + \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \end{aligned}$$

para qualquer $0 < r < r_0$. Consideremos agora a função

$$F(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{se } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

então $F(z)$ é contínua em Ω , por tanto $|F(z)| \leq M$ para todo $z \in \bar{B}_{r_0}(z_0)$. Agora

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| &= \left| \int_{C_r} F(z) dz \right| \\ &\leq \int_{C_r} |F(z)| |dz| \\ &\leq 2M\pi r \end{aligned}$$

portanto

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

Tomando limite em ...quando $r \rightarrow 0$ obtemos o resultado desejado. \square

Exemplo Consideremos as curvas fechadas simples $C_1 = \{z(t) = \pi + 3\pi e^{it}/4, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$, $C_2 = \{z(t) = \pi + \pi e^{it}/3, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$, calculemos

$$\int_{C_1} \frac{\sin(z)}{z - \pi/2} dz, \quad \int_{C_2} \frac{\sin(z)}{z - \pi/2} dz, \quad \int_{C_1} \frac{\sin(z)}{z - 3\pi/4} dz, \quad \int_{C_2} \frac{\sin(z)}{z - 3\pi/4} dz.$$

Usando a fórmula integral de Cauchy, temos

$$\int_{C_1} \frac{\sin(z)}{z - \pi/2} dz = 2\pi i \sin(\pi/2) = 2\pi i.$$

Pelo teorema de Cauchy, tem-se que

$$\int_{C_2} \frac{\sin(z)}{z - \pi/2} dz = 0.$$

Usando a fórmula integral de Cauchy, temos

$$\int_{C_1} \frac{\sin(z)}{z - 3\pi/4} dz = 2\pi i \sin(3\pi/4) = 2\pi i \sin(\pi/4) = \sqrt{2}\pi i.$$

Usando a fórmula integral de Cauchy, temos

$$\int_{C_2} \frac{\sin(z)}{z - 3\pi/4} dz = 2\pi i \sin(3\pi/4) = \sqrt{2}\pi i.$$

Exemplo Vejamos como encontrar a integral de $F(z) = \frac{e^z}{z^2 + \pi^2}$ ao longo da circunferência \mathcal{C} , de centro $i\pi/2$ e raio π , no sentido antihorário. Usando a fórmula integral de Cauchy tem-se

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z/(z + i\pi)}{z - i\pi} dz = 2\pi i \frac{e^{i\pi}}{i\pi + i\pi} = -1.$$

obs: A fórmula integral de Cauchy fornece uma outra forma de escrever a função $f(z)$ da forma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

onde \mathcal{C} é uma curva fechada simples que envolve z .

Theorem 5.7² Se $f(z)$ é analítica num conjunto Ω aberto e conexo simples, então possui derivadas de todas as ordens as quais também são funções analíticas em Ω . Além disso

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

onde \mathcal{C} é uma curva fechada simples inscrita em Ω envolvendo z sendo percorrido no sentido antihorário.

Proof:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d^n}{dz^n} \left[\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} f(w) \frac{d^n}{dz^n} \left[\frac{1}{w - z} \right] dw \quad (\text{se a derivada conmuta com a integral}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} f(w) \frac{n!}{(w - z)^{n+1}} dw. \end{aligned}$$

□

Obs: Se z_0 é um ponto interior à curva fechada simples \mathcal{C} e $f(z)$ é uma função analítica num conjunto aberto e conexo que contém \mathcal{C} , então

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

²Este teorema pode ser generalizado para $f(z)$ e \mathcal{C} uma curva de comprimento finito não necessariamente fechada, no seguinte sentido: a função dada por $F(z) = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw$ possui derivadas de todas as ordens para todo $z \notin \mathcal{C}$. Além disso, $F^{(n)}(z) = n! \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$.

Exemplo Consideremos \mathcal{C} uma curva fechada simples que tem $z_0 = 0$ no seu interior, mostremos que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z^2)}{z^2} dz = 0.$$

para toda função $f(z)$ analítica num conjunto aberto e conexo simples que contem \mathcal{C} . Denotando com $F(z) = f(z^2)$, claramente está função é analítica nos pontos onde $f(z)$ é analítica, além disso $F'(z) = f'(z^2) \cdot 2z$. Aplicando o teorema anterior temos que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z^2)}{z^2} dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{F(z)}{(z-0)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} F'(0) = 0.$$

Exemplo Determinemos a integral da função $f(z) = 1/(4z^2 + 1)^2$ a longo da circunferência unitária \mathcal{C} de centro i , percorrida no sentido antihorário.

$$f(z) = \frac{1}{(2z-i)^2} \frac{1}{(2z+i)^2} = \frac{1/(2z+i)^2}{(2z-i)^2} = \frac{1/[4(2z+i)^2]}{(z-i/2)^2} = \frac{h(z)}{(z-i/2)^2}$$

Como a função $h(z) = 1/[4(2z+i)^2]$ é analítica num conjunto aberto e conexo que contem \mathcal{C} , pelo teorema anterior temos que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{(4z^2+1)^2} dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{h(z)}{(z-i/2)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} h'(i/2) = \frac{2\pi i}{1!} \left(-\frac{1}{(2[i/2]+i)^3} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Corollary 5.8 (Estimativa de Cauchy) Se $f(z)$ é analítica em $\bar{B}_R(z_0)$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \bar{B}_R(z_0)$ então

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{R^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proof:

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{S_R(z_0)} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} |dz| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} \int_{S_R(z_0)} |dz| \\ &\leq \frac{Mn!}{R^n} \end{aligned}$$

□

Definition 5.9 Dizemos que uma função $f(z)$ é inteira se for analítica em todo \mathbb{C}

Corollary 5.10 (Teorema de Liouville) Se $f(z)$ é uma função inteira limitada, então $f(z)$ é constante.

Proof: Seja $R > 0$ arbitrário, e seja $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$. Assim $f(z)$ é analítica em $\bar{B}_R(z)$ e limitada por M sendo que M não depende de R e z . Então pela estimativa de Cauchy temos que

$$|f'(z)| = \frac{M}{R}$$

Tomando limite quando $R \rightarrow \infty$ tem-se que $f'(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$ portanto $f(z)$ é constante.

□

Exemplo Teorema Fundamental da Álgebra: Todo polinômio de grau maior ou igual que 1 possui uma raiz.

De fato, seja $p(z)$ um polinômio de grau $n \geq 1$, isto é, $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ com $a_n \neq 0$. Suponhamos que $p(z)$ não se anula em nenhum ponto, então a função $f(z) = 1/p(z)$ é uma função inteira. Além disso,

$$f(z) = \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}}$$

de onde segue que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, logo $\epsilon = 1$ existe $R > 0$ tal que $|f(z)| < 1$ para todo $|z| > R$. Desde que $f(z)$ é analítica é contínua e portanto é limitada em $\bar{B}_R(0)$, isto é existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $|z| \leq R$, por tanto $f(z)$ é limitada. Pelo teorema de Liouville $f(z)$ é constante, isto é

$$\frac{1}{p(z)} = c \text{ (constante)}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad p(z) - \frac{1}{c} = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

logo todos os coeficientes de $p(z) - 1/c$ são nulos, em particular $a_n = 0$.

Theorem 5.11 (Módulo Máximo) Se $f(z)$ for analítica e não constante num aberto e conexo Ω então não existe $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|, \forall z \in \Omega$.

Proof: Suponhamos que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|, \forall z \in \Omega$. Seja $R > 0$ tal que $\bar{B}_R(z_0) \subset \Omega$ e seja $0 < r \leq R$ então

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z_0} dw \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{it} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \end{aligned}$$

logo

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})|}_{\geq 0} dt \leq 0$$

assim $|f(z)| = |f(z_0)|, \forall z \in \bar{B}_R(z_0)$. □

Exercícios:

1. Calcule a integral das funções $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ e $g(z) = \frac{1}{z^4 - 1}$ ao longo de cada uma das seguintes circunferências no sentido antihorário

(a) $|z - i| = 1$, (b) $|z + i| = 1/2$, (c) $|z| = 1/2$, (d) $|z + 1| = 1$, (e) $|z| = 2$.

2. Seja \mathcal{C} a circunferência unitária centrada na origem. Calcule a integral da função complexa $f(z)$ ao longo de \mathcal{C} no sentido antihorário onde $f(z)$ é uma das seguintes funções

(a) $\frac{1}{z^2 + 2z + 2}$; (b) $\frac{z - 1}{z^2 + z - 2}$; (c) $\frac{z^4 - 1}{z^2 + 1}$; (d) $\frac{e^{z^2}}{z}$; (e) $\frac{\cos(z)}{z^2 + 2z}$.

3. Usando o teorema de Cauchy para domínios múltiplemente conexos mostre que

(a) $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - 2 - i} = 2\pi i$; (b) $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z - 2 - i)^n} = 0$

onde \mathcal{C} é a fronteira do retângulo $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$. orientado no sentido antihorário.

4. Mostre que

(a) $\int_0^{\sqrt{i\pi}} ze^{z^2} dz = -1$; (b) $\int_2^i \cos(\pi z) dz = i \frac{\sinh(\pi)}{\pi}$

5. calcule a integral da função $f(z) = \frac{z - 1}{z^2 + 1}$ ao longo das circunferências no sentido antihorário

(a) $|z + 1| = 1$, (b) $|z - i/2| = 1$, (c) $|z + i| = 1/2004$.

6. Seja \mathcal{C} a fronteira do quadrado, cujos lados estão sobre as retas $x = \pm 2, y = \pm 2$, orientada no sentido antihorário. Dê o valor de cada uma das seguintes integrais

(a) $\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos(z)}{z^3 + 9z} dz$; (b) $\int_{\mathcal{C}} \frac{\cosh(z)}{z^4} dz$; (c) $\int_{\mathcal{C}} \frac{3z}{z^3 + az^2} dz, (|a| > \sqrt{8})$

7. Dê o valor da integral da função complexa $f(z)$ ao longo da curva fechada $|z - i| = 2$ no sentido antihorário.

$$(a) \frac{1}{z^2 + 4}; \quad (b) \frac{1}{(z^2 + 4)^2}; \quad (c) \frac{z + 4}{(z^2 - 16)^2}; \quad (d) \frac{z^3}{(3z + 1)^2}.$$

8. Seja \mathcal{C} o círculo unitário $z = e^{i\theta}$, orientado de $\theta = -\pi$ a $\theta = \pi$, e k uma constante real qualquer, mostre primeiro que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{kz}}{z} dz = 2\pi i;$$

e a seguir, escreva a integral em termos de θ para deduzir a fórmula

$$\int_0^\pi e^{k \cos(\theta)} \cos(k \sin(\theta)) d\theta = \pi$$

9. Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica num aberto conexo limitado Ω e contínua em $\bar{\Omega}$. Mostre que a função harmônica $u(x, y)$ assume seu valor máximo e mínimo na fronteira de Ω e nunca num ponto interior a menos que seja constante. Dica: Considere $F(z) = e^{f(z)}$.

10. Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função inteira. Mostre que a função harmônica $u(x, y)$ é necessariamente uma constante, se a mesma admite um majorante u_0 , isto é, $u(x, y) \leq u_0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

6 Séries de Potências

Uma série de potências centradas em z_0 é uma série de funções da forma

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

onde a_n é uma seqüência de números complexos. Estamos interessados em determinar os valores $z \in \mathbb{C}$ onde esta série converge. Por exemplo se tomamos $z = z_0$ a série toma o valor $S(z_0) = a_0$, isto é a série converge em z_0 .

Exemplo Se $z_0 = 0$ e $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{Z}_0^+$ defrontamos com a série geométrica $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, a qual foi visto anteriormente que é convergente para $|z| < 1$, mas ainda

$$S(z) = \frac{1}{1 - z}, \quad \forall |z| < 1.$$

Theorem 6.1 *Suponhamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$, então a série $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge absolutamente para todo z tal que $|z - z_0| < R$ e diverge para todo z tal que $|z - z_0| > R$. Além disso a série converge uniformemente em subconjuntos $B_r(z_0)$ qualquer que seja $0 < r < R$.*

Proof: *Usando o teste da raiz a série deve convergir absolutamente nos pontos z onde*

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} < 1 \\ \Leftrightarrow & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| < 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{R} \cdot |z - z_0| < 1 \\ \Leftrightarrow & |z - z_0| < R. \end{aligned}$$

Os pontos onde a série diverge, segundo o teste da raiz, são aqueles onde $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} > 1$, isto é, onde $|z - z_0| > R$. Para provar a convergência uniforme, usaremos o teste de Weierstrass. Sejam $r < r_0 < R$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ tem-se que $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r_0}$ a partir de $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, assim se $z \in B_r(z_0)$ temos que, para $n \geq n_0$,

$$|a_n(z - z_0)^n| = (\sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0|)^n = \left(\frac{r}{r_0}\right)^n.$$

dado que $(r/r_0) < 1$ a série numérica $\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ converge, portanto pelo teste de Weierstrass a série $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente em $B_r(z_0)$. \square

Obs: *O número positivo R do teorema anterior é chamado de raio de convergência da série, e o teorema anterior garante que o maior conjunto entre os conjuntos abertos onde a série converge é $B_R(z_0)$ (círculo de convergência da série). Nos pontos da circunferência $|z - z_0| = R$ não podemos garantir convergência ou divergência, pode acontecer que uma parte seja convergente e outra não. Uma outra forma de determinar o raio de convergência é através do limite*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Exemplo *A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{2^n n^n} (z+i)^n$ tem raio de convergência*

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n}} = 2,$$

portanto a série converge para todo $z \in B_2(-i)$.

Exemplo A série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} (z-3)^n$ tem raio de convergência

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n}} = \infty,$$

portanto a série converge para todo $z \in \mathbb{C}$.

Theorem 6.2 Toda série de potências

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

é uma função analítica no seu círculo de convergência $|z - z_0| < R$ e sua derivada é a série cujos termos são as derivadas dos termos de $S(z)$ tendo o mesmo raio de convergência.

Proof: A série

$$\hat{S}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n$$

tem raio de convergência \hat{R} dado por

$$\frac{1}{\hat{R}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = 1 \cdot \frac{1}{R}$$

então $\hat{R} = R$. Como as somas parciais da série $S(z)$ e as respectivas derivadas destas somas finitas (somas parciais de $\hat{S}(z)$) convergem uniformemente em $\bar{B}_r(z_0)$ para qualquer $r < R$ temos que $S'(z) = \hat{S}(z)$ para todo $z \in \bar{B}_r(z_0)$, dada a arbitrariedade de r então a igualdade anterior é válida para todo $z \in B_R(z_0)$. \square

Exemplo A série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ é analítica no seu círculo de convergência $B_1(0)$, além disso vimos que converge para $S(z) = 1/(1-z)$, logo

$$S'(z) = -\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}.$$

Este exemplo nos fornece uma forma de calcular o valor de uma série derivada.

Exercícios:

1. A partir da série geométrica $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ para $|z| < 1$ Mostre que

$$(a) \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \text{ para } |z-1| < 1$$

$$(b) \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \text{ para } |z| < 1$$

$$(c) \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \text{ para } |z| < 1$$

$$(d) \frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n \text{ para } |z+1| < 1$$

$$(e) \frac{1}{4z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}} \text{ para } 0 < |z| < 4$$

2. Determine o círculo de convergência das seguintes séries

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n; \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} (z+i)^n; \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} z^n; \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a^n} (iz)^n; \quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$

3. Seja $0 \neq a \in \mathbb{C}$ Verifique o raio de convergência R das seguintes séries de potências

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n^2}, \quad R = 1; \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \quad R = 1.$$

4. Mostre que o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$$

é 1 e estude a convergência nos pontos $z = 1, -1, i$.

5. Seja $r < 1$. Usando o M -teste de Weierstrass mostre que as seguintes séries convergem uniformemente em $|z| \leq r$

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos(3n)}{1+5n} z^n; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3 \sin(n)}{10n^2 + 7} z^{2n-1}$$

Theorem 6.3 (Série de Taylor) Se $f(z)$ é analítica em Ω e $\bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$ então $f(z)$ pode ser representada como uma série de potências no conjunto $B_r(z_0)$, isto é,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in B_r(z_0).$$

Mais ainda, os coeficientes da série são calculados pela fórmula

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

onde a circunferência $S_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ é percorrida no sentido antihorário.

Proof: Seja z um ponto do interior da circunferência $S_r(z_0)$, isto é, $z \in B_r(z_0)$. Da fórmula integral de Cauchy, tem-se que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (6.10)$$

Agora observe que para qualquer $w \in S_r(z_0)$ temos que

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n.$$

A série anterior é convergente para os valores $\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$ a qual é satisfeito pois $z \in B_r(z_0)$. Usando esta expressão em (6.10) encontramos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \right] f(w) dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(z_0)} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} f(w) dw \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right] (z - z_0)^n \end{aligned}$$

Justificativa para a permuta entre somatória e a integral. Raio de convergência:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(z_0)} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} f(w) dw \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{S_r(z_0)} \frac{|f(w)|}{|w - z_0|^{n+1}} |dw| |z - z_0|^n \\ &\leq \left[\sup_{w \in S_r(z_0)} |f(w)| \right] \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n \end{aligned}$$

assim, se $|z - z_0| < r$ pelo M -teste de Weierstrass, a série converge uniformemente \square

Obs: Observe que os coeficientes da série podem ser encontrados usando as derivadas de $f(z)$ avaliadas no ponto z_0 da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(z_0) &= a_0, \\ f'(z_0) &= a_1, \\ f''(z_0) &= 2a_2, \\ f'''(z_0) &= 3 \cdot 2a_2, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z_0) &= n(n-1) \cdots 3 \cdot 2a_n, \end{aligned}$$

isto é a_n pode ser determinada pelas fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Usando esta observação temos uma outra alternativa para mostrar o Teorema 5.7, isto é, a fórmula:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{S_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw.$$

Exemplo Representemos $\cosh(z)$ como uma série de potências centradas na origem.

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh^{(n)}(0)}{n!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh^{(2n)}(0)}{(2n)!} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Exercícios:

1. Desenvolva as seguintes funções na sua série de Taylor em torno de $z = 0$

$$(a) f(z) = e^z; \quad (b) f(z) = \sin(z); \quad (c) f(z) = \sinh(z); \quad (d) f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

2. Desenvolva as seguintes funções na sua série de Taylor em torno de z_0

$$(a) f(z) = \cos(z), \quad z_0 = \pi/2; \quad (b) f(z) = \sinh(z), \quad z_0 = \pi i.$$

3. Sejam $a, b \in \mathbb{C}$ tal que $a \neq b$. Mostre que

$$\frac{1}{a-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+1}}, \quad \text{para } |z-b| < |a-b|$$

7 Zeros de uma função analítica

Definition 7.1 Dizemos que uma $f(z)$ analítica em Ω tem um zero em $a \in \Omega$ se $f(a) = 0$. Neste caso dizemos que a é um ponto de zero de multiplicidade $m \in \mathbb{N}$ se existe $g(z)$ analítica em Ω tal que $f(z) = (z - a)^m g(z)$ onde $g(a) \neq 0$

Remark Quando não existe $m \in \mathbb{N}$ dizemos que a multiplicidade de a é infinita. Por exemplo uma função identicamente nula tem multiplicidade nula em qualquer ponto. Será mostrado posteriormente que a única função analítica que tem zeros com multiplicidade infinita é a função nula.

Theorem 7.2 (prolongação analítica) Seja $f(z)$ analítica num aberto e conexo Ω . As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $f(z) \equiv 0$;

(ii) Existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(z_0) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}_0^+$;

(iii) $Z = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ tem um ponto de acumulação em Ω .

Proof: É obvio que (a) \Rightarrow (b) e (a) \Rightarrow (c).

(c) \Rightarrow (b): Seja $z_0 \in \Omega$ um ponto de acumulação de Z , logo pela continuidade de $f(z)$ temos que $f(z_0) = 0$. Mostraremos que z_0 é o ponto que satisfaz (ii). Procedamos pelo absurdo; suponhamos que existe $n_0 \geq 1$ tal que $f^{(n)}(z_0) = 0$, para $n = 0, \dots, n_0$ e $f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$. como $f(z)$ pode ser expressada como uma série de potências em torno de z_0 temos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^{n_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n_0+n)}(z_0)}{(n_0 + n)!} (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^{n_0} g(z) \end{aligned}$$

para todo $z \in B_R(z_0)$ para algum $R > 0$. Note que a função $g(z)$ é analítica em $B_R(z_0)$ e satisfaz $g(z_0) = \frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} \neq 0$, logo por continuidade temos que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in B_r(z_0)$ para algum $0 < r < R$. Por z_0 ser ponto de acumulação de Z existe $z_r \in B_r(z_0) - \{z_0\}$ tal que $0 = f(z_r) = (z_r - z_0)^{n_0} g(z_r)$ dai segue que $g(z_r) = 0$. ($\Rightarrow \Leftarrow$).

(b) \Rightarrow (a): como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \forall z \in B_R(z_0)$$

então $f(z) \equiv 0$ em $B_R(z_0)$. seja $z \in \Omega$, como ω é conexo, z e z_0 podem ser unidos por uma poligonal de vértices $z_0, z_1, \dots, z_p = z$ cujas distâncias entre vértices são pequenas de tal forma que z_k está dentro da bola de convergência da série da função em torno de z_{k-1} . Como $z_1 \in B_R(z_0)$ então $f^{(n)}(z_1) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$, seguindo o mesmo raciocínio obtemos o mesmo para $z_2, \dots, z_p = z$, isto é $f(z) = 0$. Como $z \in \Omega$ foi tomado arbitrário temos que $f(z) \equiv 0$ em Ω . \square

Corollary 7.3 (Unicidade da prolongação analítica) Sejam $f(z), g(z)$ analíticas num aberto e conexo Ω . Se ambas funções coincidem em $\omega \subset \Omega$ e ω tem um ponto de acumulação em Ω então necessariamente as funções coincidem em Ω

Corollary 7.4 O conjunto de pontos de zero de uma função analítica $f(z)$ não identicamente nula definida num aberto e conexo Ω é discreto. Além disso, a multiplicidade do ponto de zero z_0 é finita, isto é, existe $m \in \mathbb{N}$ e uma função analítica $g(z)$ em Ω , tal que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ com $g(z_0) \neq 0$.

Proof: Seja $m \in \mathbb{N}$ o menor inteiro positivo tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, logo $f^{(n)}(z_0) = 0$ para $n = 0, 1, \dots, m - 1$. Definimos

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} & \text{se } z \neq z_0; \\ \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} & \text{se } z = z_0. \end{cases}$$

Evidentemente $g(z)$ é analítica em $\Omega - \{z_0\}$. Existe $g'(z_0)$? \square

exercício: Usando a representação em série de $f(z)$ em torno de z_0 mostre que

$$g'(z_0) = \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}$$

Exercícios:

1. Seja $f(z)$ analítica em z_0 . Mostre que z_0 é um ponto de zero de ordem n_0 da função $f(z)$ se e somente se

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n_0-1)}(z_0) = 0, \quad e \quad f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$$

2. Usando o teorema da prolongação analítica mostre as seguintes propriedades

$$e^{z+z_0} = e^z e^{z_0}, \quad \sin(z+z_0) = \sin(z)\cos(z_0) + \sin(z_0)\cos(z)$$

3. Seja Ω um aberto e conexo. $f(z)$ e $g(z)$ são funções analíticas em Ω tal que $f(z)g(z) = 0, \forall z \in \Omega$, mostre que $f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$.

4. Seja Ω um aberto e conexo. Mostre que que a função analítica $f(z)$ em Ω é um polinômio de ordem menor ou igual que m se e somente se existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(z_0) = 0$, para todo $n > m$.

5. Seja $f(z)$ uma função inteira tal que $|f(z)| \leq M|z|^m, \forall |z| > R$ para algum $M > 0$ e $R > 0$. Mostre que $f(z)$ é um polinômio de ordem menor ou igual a m .

8 Singularidades

Definição 8.1 Dizemos que uma função complexa $f(z)$ tem uma singularidade isolada em z_0 se ela não for analítica em z_0 (ou não está definida nesse ponto) sendo que é analítica em $B_r(z_0) - \{z_0\}$ para algum $r > 0$. Neste caso a singularidade será do seguinte tipo:

1. **Removível:** Se existe $g(z)$ analítica em $B_r(z_0)$ tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in B_r(z_0) - \{z_0\}$ para algum $r > 0$;
2. **Pólo:** se $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$;
3. **Singularidade essencial:** Se não for removível nem pólo.

Obs: Se z_0 é uma singularidade removível de $f(z)$ então existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

Exemplo

1. $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ definida para todo $z \neq 0$ tem uma singularidade removível em $z = 0$.
Vejaamos porquê: como $\sin(0) = 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ e uma função analítica em \mathbb{C} tal que $\sin(z) = z^m g(z)$, assim $f(z) = \frac{\sin(z)}{z} = z^{m-1} g(z), \forall z \neq 0$ sendo $z^{m-1} g(z)$ é analítica em todo \mathbb{C} .

2. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ tem um pólo em $z = i$, pois

$$\lim_{z \rightarrow i} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{|z - i||z + i|} = \infty$$

3. $f(z) = e^{1/z}$ tem uma singularidade essencial em $z = 0$. Para isto vejamos que não existe $L \in \mathbb{R}$ ou $L = \infty$ tal que $\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| = L$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{R}^+}} e^{1/z} = e^{+\infty} = +\infty, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{R}^-}} e^{1/z} = e^{-\infty} = 0$$

onde $\mathbb{R}^+ = \{z = x + iy : x > 0, y = 0\}$ e $\mathbb{R}^- = \{z = x + iy : x < 0, y = 0\}$

Theorem 8.2 $f(z)$ tem uma singularidade removível em $z = z_0$ se e somente se $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$

Proof: (\Rightarrow): como tem uma singularidade removível em $z = z_0$, tem-se $f(z) = g(z)$ para todo $z \in B_r(z_0) - \{z_0\}$ com $g(z)$ analítica em z_0 .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = 0 \cdot g(z_0) = 0$$

(\Leftarrow): Definimos $h(z) = (z - z_0)f(z)$ para $z \in B_r(z_0) - \{z_0\}$ e $h(z_0) = 0$. Se mostrarmos que $h(z)$ é analítica em z_0 pelo fato de se anular em z_0 teremos que $h(z) = (z - z_0)g(z)$ onde $g(z)$ é analítica em z_0 desta forma $f(z) = g(z)$ para todo $z \in B_r(z_0) - \{z_0\}$ o que mostraria que z_0 é uma singularidade removível de $f(z)$. Então mostremos que $h(z)$ é analítica em z_0 , para isso, faremos uso do teorema de Morera, isto é mostraremos que

$$\int_T h(z) dz = 0 \tag{8.11}$$

para toda curva triangular T inscrita em $B_r(z_0)$. Denotemos com Δ o interior do triângulo então, temos 4 possibilidades

1. $z_0 \notin \Delta \cup T$
2. z_0 é um vértice de T
3. $z_0 \in T$ e não é vértice de T
4. $z_0 \in \Delta$

Mostremos que (8.11) no segundo caso: Seja L o perímetro de T como $h(z_0) = 0$ para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|h(z)| < \epsilon/L$ para todo $z \in B_\delta(z_0)$ Sejam a, b pontos de cada um dos lados do triângulo T adjacentes ao vértice z_0 de tal forma que $a, b \in B_\delta(z_0)$ então

$$\left| \int_T h(z) dz \right| = \left| \int_{T_{ab}} h(z) dz \right| \leq \int_{T_{ab}} |h(z)| |dz| \leq \epsilon$$

onde T_{ab} é o triângulo de vértices z_0, a, b . Por ϵ ser arbitrário tem-se (8.11).

□

Theorem 8.3 *Seja $z_0 \in \Omega$ onde Ω é aberto e conexo e seja $f(z)$ analítica em $\Omega - \{z_0\}$. Então, $f(z)$ tem um pólo em $z = z_0 \in \Omega$ se e somente se existe $m \in \mathbb{N}$ e uma função analítica $g(z)$ em Ω tal que $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ para todo $z \in \Omega - \{z_0\}$ com $g(z_0) \neq 0$*

Proof: (\Rightarrow): Como $f(z)$ possui um polo em $z = z_0$ então $1/f(z)$ definida em $B_R(z_0)$ possui uma singularidade removível em z_0 logo existe uma função analítica em $B_R(z_0)$, $h_1(z)$, tal que $\frac{1}{f(z)} = h_1(z)$, $\forall z \in B_R(z_0) - \{z_0\}$. Verifica-se também que $h_1(z_0) = 0$ logo existe $m \in \mathbb{N}$ e uma função analítica $h_2(z)$ em $B_R(z_0)$ tal que $\frac{1}{f(z)} = h_1(z) = (z - z_0)^m h_2(z)$, $\forall z \in B_R(z_0) - \{z_0\}$ com $h_2(z_0) \neq 0$. Da continuidade de $h_2(z)$ tem-se que $h_2(z) \neq 0$ em $B_\epsilon(z_0)$ para algum $\epsilon > 0$ pequeno. Assim $f(z) = \frac{1/h_2(z)}{(z - z_0)^m}$, $\forall z \in B_\epsilon(z_0) - \{z_0\}$ com $1/h_2(z)$ analítica em $B_\epsilon(z_0)$. Agora definimos

$$g(z) = \begin{cases} 1/h_2(z) & \text{se } z \in B_\epsilon(z_0) \\ f(z)(z - z_0)^m & \text{se } z \neq z_0 \end{cases}$$

Claramente a função $g(z)$ é analítica em Ω .

(\Leftarrow): Obvio.

□

Definition 8.4 *O m satisfazendo o teorema anterior é chamada a ordem do pólo $z = z_0$*

Exercícios:

1. Determine os pontos de singularidade isolada das seguintes funções especificando a natureza de cada uma delas. Justifique sua resposta.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(z) &= \frac{z}{e^z - 1}; & \text{(b)} \quad f(z) &= \frac{\cos(z)}{z^2}; & \text{(c)} \quad f(z) &= z \sin(1/z); \\ \text{(d)} \quad f(z) &= \frac{z^2 - 1}{z + 1}; & \text{(d)} \quad f(z) &= \frac{z^2 + 1}{z^4 - 1}; & \text{(e)} \quad f(z) &= \cosh(1/z). \end{aligned}$$

2. Demonstre que z_0 é um polo de ordem m de $f(z)$ se e somente se z_0 é for um ponto de zero de ordem m de $1/f(z)$.

9 Séries de Laurent

Se $f(z)$ tem um pólo de ordem m em z_0 , então $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ para todo $z \in B_R(z_0) - \{z_0\}$ com $g(z)$ analítica em $B_R(z_0)$ com $g(z_0) \neq 0$. Como $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$, podemos escrever $f(z)$ da forma

$$f(z) = \frac{g(z_0)/0!}{(z - z_0)^m} + \frac{g'(z_0)/1!}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{g^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!}{(z - z_0)} \\ + \frac{g^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{g^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} (z - z_0) + \cdots$$

a qual pode ser escrito da forma

$$f(z) = \underbrace{a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{-1}}_{\text{Parte singular}} \\ + \underbrace{a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots}_{\text{Parte regular}} \\ = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Definition 9.1 Dizemos que a série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z) \tag{9.12}$$

converge em $A \subset \mathbb{C}$ se as séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n}(z) \tag{9.13}$$

convergem em $A \subset \mathbb{C}$. Dizemos que a serie (9.12) converge absolutamente (ou uniformemente) se as séries (9.13) convergem absolutamente (ou uniformemente).

Theorem 9.2 (Série de Laurent) Sejam $0 \leq r < R$. Se $f(z)$ é analítica em $A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$. Então

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} \\ + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots,$$

para todo $z \in A(z_0, r, R)$, onde a convergência é absoluta e uniforme em $A(z_0, \alpha, \beta)$ com $r < \alpha < \beta < R$. Além disso,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{r_0}(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

onde $r < r_0 < R$.

Obs1: A série de Laurent é uma extensão da série de Taylor ao conjunto de funções com singularidades isoladas. Para verificar isto assumamos que $f(z)$ é analítica em $B_R(0)$, neste logo $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$ com $n \leq -1$ também é analítica em $B_r(0)$, assim

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{r_0}(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = 0, \quad \forall n \leq -1$$

portanto

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Obs2: Observe que a fórmula para o cálculo dos coeficientes a_n pode ser complicado, mas já que a série de Laurent em torno de um ponto fixado é única, podemos determinar tais coeficientes usando séries já conhecidas, como veremos nos seguintes exemplos

Exemplo Sabemos que $\cos(z)$ é uma função analítica em $B_r(0)$, logo pode ser expressada pela sua série de Taylor a qual coincide com sua série de Laurent em torno de 0.

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

da qual concluímos que

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad \forall n \geq 0, \quad a_{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 0, \quad e \quad a_n = 0 \quad \forall n < 0.$$

Exemplo Sabemos que $\sin(z)/(z^2)$ não é uma função analítica em $z_0 = 0$, mas

$$\frac{\sin(z)}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

da qual concluímos que

$$a_{2n-1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad \forall n \geq 0, \quad a_{2n} = 0 \quad \forall n \geq 0, \quad e \quad a_n = 0 \quad \forall n < -1.$$

Exemplo Sabemos que $e^{1/z}$ não é uma função analítica em $z_0 = 0$, mas

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

da qual concluímos que

$$a_{-n} = \frac{1}{n!} \quad \forall n \geq 0, \quad a_n = 0 \quad \forall n > 0.$$

Corollary 9.3 Se $z = z_0$ é uma singularidade isolada de $f(z)$ e $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ é sua série de Laurent em $A(z_0, 0, R)$. Então

1. $z = z_0$ é uma singularidade removível de $f(z)$ se e somente se $a_n = 0, \forall n \leq -1$
2. $z = z_0$ é um pólo de ordem m de $f(z)$ se e somente se $a_{-m} \neq 0$ e $a_n = 0, \forall n \leq -(m+1)$
3. $z = z_0$ é uma singularidade essencial de $f(z)$ se e somente se $a_n \neq 0$, para infinitos enteros negativos

Proof:

1. *Obvio*

2. (\Rightarrow): Já foi mostrado

(\Leftarrow): Se $a_{-m} \neq 0$ e $a_n = 0, \forall n \leq -(m+1)$ então

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^{n-m} \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n}_{g(z)} \end{aligned}$$

como $g(z)$ é analítica em $B_R(z_0)$ concluímos que $f(z)$ tem um pólo de ordem m em z_0 .

3. (\Rightarrow): Seja z_0 é uma singularidade essencial e suponha que não existe infinitos $a_n \neq 0$ com índices negativos então z_0 é um polo ou uma singularidade removível ($\Rightarrow \Leftarrow$)

(\Leftarrow): Suponha que há um número infinito de termos $a_n \neq 0$ com índices negativos e sumamos que z_0 não é uma singularidade essencial, então deve ser removível ou polo, por tanto o número de termos $a_n \neq 0$ com índices negativos é finito ($\Rightarrow \Leftarrow$)

□

Exemplos:

1. A função $f(z) = \frac{\sin(z-1)}{z-1}$ tem uma singularidade removível em $z=1$, pois

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{(2n+1)!}$$

2. a função $f(z) = \frac{e^z}{(z+i)^2}$ tem um polo de ordem 2 em $z=-i$, pois

$$f(z) = \frac{e^{-i}}{(z+i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n!}$$

3. a função $f(z) = z^2 \cos(1/z)$ tem uma singularidade essencial em $z=0$, pois

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/(2n)!}{z^{2n-2}}$$

Exercícios

1. Determine a série de Laurent das seguintes funções em torno de cada uma de suas singularidades. Especifique qual o tipo de singularidade

$$(a) f(z) = \frac{\cos(z) - 1}{z}; \quad (b) f(z) = z^2 \sin(1/z), \quad (c) f(z) = \frac{1}{z^3 - z^2}.$$

10 Resíduos

Seja z_0 é uma singularidade isolada de $f(z)$ e consideremos a sua série de Laurent em torno de z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Definition 10.1 O coeficiente a_{-1} é chamado de resíduo de $f(z)$ em z_0 a qual será denotada por

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) := a_{-1}$$

observação: Da fórmula dos coeficientes na série da Laurent temos que

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{r_0}(z_0)} f(z) dz$$

Exemplo: A função $f(z) = z^2 \sin(1/z)$ tem uma singularidade isolada em 0. Determinemos o resíduo desta função em 0. Representando a função na sua série de Laurent, temos

$$f(z) = z^2 \sin(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n-1}},$$

de onde concluímos que $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{(-1)^1}{(2 \cdot 1 + 1)!}$.

Exemplo: A função $f(z) = \cos(1/(z-i))$ tem uma singularidade isolada em i . Determinemos o resíduo desta função em i . Representando a função na sua série de Laurent, temos

$$f(z) = \cos(1/(z-i)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{(z-i)^{2n}},$$

de onde concluímos que $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = 0$.

Theorem 10.2 (Resíduo de polo simples) Seja $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ onde $p(z)$ e $q(z)$ são analíticas em z_0 com $p(z_0) \neq 0$ e $q(z)$ tem um zero simples em z_0 , então

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Proof: Como z_0 é um zero simples de $q(z)$ então $q(z) = (z - z_0)g(z)$ com $g(z_0) = q'(z_0) \neq 0$, então

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z - z_0} \frac{p(z)}{g(z)} \\ &= \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

onde $h(z) = \frac{p(z)}{g(z)}$. *Dai segue que*

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = h(z_0) = \frac{p(z_0)}{g(z_0)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

□

exemplo A função $f(z) = \frac{z^5 + 1}{z^2 + 1}$ tem singularidades em $\pm i$ e se encaixa no teorema anterior, portanto

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{i^5 + 1}{2i} = \frac{1 - i}{2}, \quad \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) = \frac{(-i)^5 + 1}{2(-i)} = \frac{1 + i}{2}$$

exemplo A função $f(z) = \frac{e^z}{\sin(z)}$ tem singularidades em $\pm n\pi$ e se encaixa no teorema anterior, portanto

$$\operatorname{Res}_{z=n\pi} f(z) = \frac{e^{n\pi}}{\cos(n\pi)} = (-1)^n e^{n\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Theorem 10.3 (Resíduo de polo de qualquer ordem) *Seja $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ onde $g(z)$ é uma função analítica em z_0 com $g(z_0) \neq 0$, então*

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Proof: *Desde que $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ temos que*

$$f(z) = \frac{g(z_0)/0!}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{g^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!}{(z - z_0)} + \frac{g^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{g^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} (z - z_0) + \dots$$

Exemplo *Determinemos os resíduos da função $f(z) = \frac{1}{z^3 + 2iz^2 - z}$ nos seus pontos de singularidade. A função pode ser expresada da seguinte forma $f(z) = \frac{1}{z(z+i)^2}$, logo, podemos verificar que tem um polo de ordem 1 em $z = 0$ e um polo de ordem 2 em $z = -i$. Portanto,*

$$f(z) = \frac{1/(z+i)^2}{z-0} = \frac{g(z)}{z-0} \Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{0!} g(0) = 1/i^2 = -1$$

$$f(z) = \frac{1/z}{(z+i)^2} = \frac{h(z)}{(z+i)^2} \Rightarrow \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) = \frac{1}{1!} h'(-i) = -1/(-i)^2 = 1$$

Exercícios:

1. Determine a natureza dos pontos de singularidade das seguintes funções e calcule seus respectivos resíduos

$$\begin{aligned}
 (a) \frac{\sin(z)}{z}, & \quad (b) \tan(z), & (c) \frac{1 - e^{2z}}{z^4}, \\
 (d) z \cos(1/z), & (e) \frac{1}{e^z - 1} & (f) z^3 \sinh(1/z^2), \\
 (g) \frac{z}{(z^2 + 1)^2} & (h) \frac{\cos(z)}{z \sin(z)}, & (i) \frac{\csc(z)}{z^2}.
 \end{aligned}$$

Theorem 10.4 (Teorema dos Resíduos) *Seja $f(z)$ analítica num aberto e conexo Ω exceto nas singularidades isoladas $z_1, \dots, z_m \in \Omega$. Seja \mathcal{C} uma curva fechada simples contida em Ω que envolve essas singularidades, então*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

sendo que a curva \mathcal{C} é percorrida no sentido antihorário.

Proof: No caso que \mathcal{C} envolva somente uma singularidade z_1 de $f(z)$ temos da fórmula dos coeficientes na sua série de Laurent, que

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$$

de onde segue que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z)$$

Para o caso geral podemos usar o teorema de Cauchy para domínios multiplemente conexos, isto é, para cada $k = 1, \dots, m$, seja \mathcal{C}_k curva simple fechada que envolvem somente a singularidade z_k sendo que essa curvas estão no interior de \mathcal{C} . Então

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \sum_{k=1}^m \int_{\mathcal{C}_k} f(z) dz \\
 &= 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)
 \end{aligned}$$

□

Exemplo *Seja \mathcal{C} a circunferência de raio $3/2$ centrada na origem, determinemos a integral da função $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 2)}$ ao longo dessa curva no sentido antihorário.*

Esta função tem singularidades isoladas nos pontos $\pm i$ e 2 , porém somente os pontos $\pm i$ estão no interior de \mathcal{C} , portanto

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) \right).$$

Calculando os resíduos temos

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{(i+i)(i-2)} = \frac{-1+2i}{10}, \quad \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) = \frac{1}{(-i-i)(-i-2)} = \frac{-1-2i}{10},$$

portanto,

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = -\frac{2\pi i}{5}.$$

Exercícios:

1. Calcule as integrais

$$(a) \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{4z^2 + 1}, \quad (b) \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^3(z+4)}.$$

ao longo dos círculos (a) $|z| = 2$; (b) $|z+2| = 3$, percorridos no sentido antihorário.

2. Calcule as integrais de cada uma das seguintes funções ao longo do círculo unitário com centro na origem, percorrida no sentido antihorário.

$$(a) z^{-2}e^{-z}, \quad (b) ze^{1/z}, \quad (c) z^{-2} \sin(z)(e^z - 1).$$

3. Calcule a integral das seguintes funções ao longo dos lados do triângulo de vértices -2 , $-2i$, $1+i$ percorrida no sentido antihorário.

$$(a) \frac{3z^2}{(z^2-1)^2}, \quad (b) \frac{1}{z(z^2+1)}, \quad (c) \cosh(1/z), \quad (d) \frac{(\cos(z)-1)^2}{z^2}$$

4. Sejam $f(z)$ uma função analítica num aberto e conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ e z_0 o único ponto de zero de $f(z)$, sendo este de ordem m . Se \mathcal{C} é um curva simples fechada que envolve z_0 . Mostre que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m,$$

sendo que a curva é percorrida em sentido antihorário. O quociente f'/f é conhecido como derivada logarítmica de f ; ele é a derivada de $\ln(f)$.

11 Cálculo de Integrais reais

O teorema dos resíduos é uma ferramenta poderosa que nos ajudará a calcular integrais de algumas funções reais complicadas de uma forma muito simples.

11.1 Integrais definidas de funções trigonométricas

O teorema dos resíduos é útil no cálculo de integrais definidas do tipo

$$\int_0^{2\pi} F(\sin(\theta), \cos(\theta)) d\theta \quad (11.14)$$

onde F é uma função de $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$. Se consideramos θ como sendo o argumento de z sobre o círculo unitário $z = e^{i\theta}$, podemos escrever

$$\sin(\theta) = \frac{z - z^{-1}}{2i}; \quad \cos(\theta) = \frac{z + z^{-1}}{2}; \quad dz = izd\theta$$

Desta forma a integral (11.14) torna-se

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{iz} F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) dz$$

que é uma integral de uma função complexa ao longo do círculo unitário, o qual pode ser calculado pelo teorema do resíduo. Para ilustrar esta afirmação calculemos o valor da seguinte integral

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos(\theta) - a}, \quad a > 1.$$

Note o intervalo de integração é $[0, \pi]$, enquanto a nossa análise foi para o intervalo $[0, 2\pi]$. Como Coseno é uma função periódica talvez há alguma relação entre as integrais dessa função nesses intervalos. Vejamos: considerando a mudança de variáveis $\theta = 2\pi - \sigma$ temos

$$\int_\pi^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos(\theta) - a} = - \int_\pi^0 \frac{d\sigma}{\cos(2\pi - \sigma) - a} = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{\cos(\sigma) - a}$$

de onde concluímos

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos(\theta) - a} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos(\theta) - a}$$

Portanto basta calcular $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos(\theta) - a}$. Considerando $z = e^{i\theta}$ temos que

$$\cos(\theta) - a = \frac{z + z^{-1}}{2} - a = \frac{z^2 - 2az + 1}{2z}$$

Dai segue que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos(\theta) - a} = -2i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2az + 1}.$$

O polinômio $z^2 - 2az + 1$ tem como raízes $z_1 = a - \sqrt{a^2 - 1}$, $z_2 = a + \sqrt{a^2 - 1}$, e verifica-se que $|z_1| < 1$ e $|z_2| > 1$, portanto z_1 é o único ponto de singularidade no interior da circunferência da função

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2az + 1} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Pelo Teorema do Resíduo temos que

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = -\frac{\pi i}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Assim concluímos que

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos(\theta) - a} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

11.2 Integrais impróprias de funções racionais

Mostre que $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Dada que a função real $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$ é uma função par, isto é, verifica $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, separando a integral $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$ no semieixo positivo e negativo e fazendo uma mudança de variáveis temos que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = 2 \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1} dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$$

basta mostrar que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{2}$$

Consideremos a função $f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 1}$. Esta função tem como singularidades os pontos $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_4 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. Seja $R > 0$, consideremos a curva fechada simples $\mathcal{C} = I_R \cup \mathcal{C}_R$ percorrida em sentido antihorário, onde $I_R = [-R, R]$ e \mathcal{C}_R é a semicircunferência superior de raio R . Considerando R suficientemente grande de tal forma

que todas as singularidades de $f(z)$ situadas no plano superior estejam no interior de \mathcal{C} , neste caso somente as singularidades z_1 e z_2 , então pelo teorema do Resíduo temos que

$$\int_{I_R} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}f(z)_{z=z_1} + \operatorname{Res}f(z)_{z=z_2} \right)$$

istó é

$$\int_{-R}^R f(x) dx = - \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz + 2\pi i \left(\operatorname{Res}f(z)_{z=z_1} + \operatorname{Res}f(z)_{z=z_2} \right)$$

Agora tomaremos o limite quando $R \rightarrow \infty$. Evidentemente

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Agora calculemos $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz$. Parametrizando \mathcal{C}_R por $z(t) = Re^{it}$ onde $0 \leq t \leq \pi$ temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{R^2 e^{2t}}{R^4 e^{4t} + 1} \cdot i R e^{it} dt \right| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R^3}{|R^4 e^{4t} + 1|} dt \end{aligned}$$

Como

$$|R^4 e^{4t} - (-1)| \geq |R^4 e^{4t}| - |-1| = R^4 - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|R^4 e^{4t} + 1|} \leq \frac{1}{R^4 - 1}$$

temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz \right| &\leq \int_0^\pi \frac{R^3}{R^4 - 1} dt \\ &\leq \frac{\pi R^3}{R^4 - 1} \end{aligned}$$

Dai segue que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz = 0$$

Portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res}f(z)_{z=z_1} + \operatorname{Res}f(z)_{z=z_2} \right)$$

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 1} = \frac{p(z)}{q(z)},$$

Então

$$\operatorname{Res}f(z)_{z=z_1} = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{4}e^{-i\pi/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i)$$

analogamente

$$\operatorname{Res}f(z)_{z=z_2} = \frac{1}{4}e^{-i3\pi/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-i)$$

Logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Theorem 11.1 Seja $f(z)$ uma função analítica no semiplano superior fechado $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ exceto nas singularidades z_1, \dots, z_m do semiplano superior aberto $\operatorname{Im}(z) > 0$. Suponhamos que existe uma constante $K > 0$ tal que $|f(z)| \leq K/|z|^p$, $\forall z$ tal que $\operatorname{Im}(z) > 0$ e $|z| > R_0$ para algum $p > 1$ e algum R_0 grande tal que $z_1, \dots, z_m \in B_{R_0}(0)$. Então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}f(z)_{z=z_k}$$

Proof: Consideremos a curva fechada simples $\mathcal{C} = I_R \cup \mathcal{C}_R$ percorrida em sentido anti-horário, onde $I_R = [-R, R]$ e \mathcal{C}_R é a semicircunferência superior de raio R . Considerando R suficientemente grande de tal forma que todas as singularidades de $f(z)$ situadas no plano superior estejam no interior de \mathcal{C} , então pelo teorema do Resíduo temos que

$$\int_{I_R} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}f(z)_{z=z_k}$$

isto é

$$\int_{-R}^R f(x) dx = - \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz + 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}f(z)_{z=z_k}$$

Agora tomaremos o limite quando $R \rightarrow \infty$. Evidentemente

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Agora calculemos $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz$. Usando a hipótese sobre $f(z)$ temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| &= \int_{C_R} |f(z)| |dz| \\ &= \int_{C_R} \frac{K}{|z|^p} |dz| \\ &= \frac{K}{R^p} \int_{C_R} |dz| \\ &= \frac{K\pi}{R^{p-1}} \end{aligned}$$

Como $p - 1 > 0$, segue que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

Portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

□

Corollary 11.2 *Sejam $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios reais de ordem n e m respectivamente tal que $q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Se $n + 2 \leq m$ então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z=z_k} \left[\frac{p(z)}{q(z)} \right].$$

onde z_1, \dots, z_m são todos os pontos de singularidade de $p(z)/q(z)$ situadas no plano superior $\operatorname{Im}(z) > 0$.

11.3 Integrais impróprias envolvendo funções trigonométricas

Queremos encontrar o valor da integral imprópria

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} dx$$

Como o integrando é uma função par temos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} dx$$

Desafortunadamente \cos é uma função ilimitada nos complexos, pelo tanto não podemos usar o argumento anterior. Mas, $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$ assim temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} dx = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx \right)$$

Assim tentaremos encontrar o valor de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx$ usando o teorema dos Resíduos.

Consideremos a função $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$. Facilmente, encontramos que esta função tem como singularidades os pontos $z = i, -i$. Se $z = x + iy$ temos que se $\operatorname{Im}(z) > 0$ e $|z| > R_0$ com R_0 suficientemente grande, tem-se

$$|f(z)| = \frac{|e^{iz}|}{|z^2 + 1|} = \frac{e^{-y}}{|z^2 + 1|} \leq \frac{1}{|z|^2 - 1} \leq \frac{2}{|z|^2}.$$

Usando o teorema anterior temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{i \cdot i}}{2 \cdot i} = \frac{\pi}{e}$$

de onde concluímos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Mostremos que:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx &= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx \\ &= \frac{1}{2i} \left(\int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_0^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{iy}}{y} dy \right) \end{aligned}$$

Consideremos a função $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ então para $0 < r < R$ temos que

$$\int_{-R}^{-r} f(x) dx + \int_r^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz - \int_{C_r} f(z) dz = 0$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(Re^{it}) iRe^{it} dt \right| \\ &\leq \int_0^\pi |e^{Re^{it}}| dt \end{aligned}$$

Exercícios:

1. Seja $a > 1$. Calcule as seguintes integrais

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos(\theta) + a}, \quad (b) \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)d\theta}{\cos(2\theta) - a}, \quad (c) \int_0^\pi \frac{d\theta}{(\cos(\theta) - a)^2}.$$

2. Seja $a > 0$. Calcule as seguintes integrais

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)d\theta}{\sin(\theta) - a}, \quad (b) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)d\theta}{\sin(\theta) - a}, \quad (c) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\theta)d\theta}{\sin(\theta) - a}.$$

3. Mostre que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin^2(\theta) + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a(a+1)}}, \quad \text{onde } a > 0.$$

4. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Mostre que

$$(a) \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \beta^2} = \frac{\pi}{2\beta}, \quad (b) \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \beta^2)^2} = \frac{\pi}{4\beta^3}, \quad (c) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} = \frac{\pi}{\beta}.$$

5. Sejam $\alpha, \beta > 0$. Calcule

$$(a) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4 + \alpha^4}, \quad (b) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)(x^2 + \beta^2)}, \quad (c) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^2}.$$

6. Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)dx}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi}{4b^3}(1 + ab)e^{-ab}, \quad \text{onde } a, b > 0.$$