Capítulo 2

Espaços de Banach

Faremos aqui uma introdução aos espaços de Banach e as diferentes topologías que se podem definir nelas.

2.1 Espaços métricos

O conceito de espaço métrico é um dos conceitos mais básicos do análise funcional. Para que um conjunto não vazio seja um espaço métrico apenas é suficiente ter definido sobre ele uma aplicação que será chamada de métrica. Mais precissamente

Definição 2.1.1 *Diremos que um conjunto não vazio X é um espaço métrico, se sobre ele está definida uma função*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

satisfazendo as seguintes propriedades

- $d(x, y) = 0$ *se e somente se* $x = y$.
- *A função d é simétrica, isto é* $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(desigualdade triangular)*

A função d é chamada de métrica.

Um espaço métrico esta definido desta forma pelo par ordenado (X, d). Note que não precissamos ter definida nenhuma operação sobre X. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.1.1 *Tomemos o conjunto de pontos $P = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Definimos sobre este conjunto a função*

$$d : P \times P \to \mathbb{R}$$

da seguinte forma

$$d(x_i, x_j) = 1 - \delta_{ij}$$

onde δ_{ij} *é o delta de Kronoeker, definida como*

$$\delta_{ij} = 0, \quad se \quad i \neq j, \qquad \delta_{ii} = 1.$$

Exemplo 2.1.2 *Denotemos por* $X = \{x \in \mathbb{R}^3;\ \|x\| \leq 1\}$. *Sobre este conjunto definimos a função*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

da seguinte forma

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

claramente esta função d *satisfaz as condições de métrica, portanto o par* (X, d) *é um espaço métrico.*

Exemplo 2.1.3 *Denotemos por* $X = C^1(a, b)$ *o conjunto de todas as funções contínuas definidas sobre o conjunto fechado* $[a, b]$ *com derivadas contínuas. Sobre este conjunto definimos a função*

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |f'(x) - g'(x)|$$

é simples verificar que este é um espaço métrico.

Exemplo 2.1.4 *Seja* $X = \{f \in C^1(a, b);\ |f(x)| \leq 1, \forall x \in [a, b]\}$ *Se definimos sobre este espaço a métrica*

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Concluimos que este (x, d) *é um espaço métrico.*

Definição 2.1.2 *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Diremos que* $(x_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ *é uma seqüência de Cauchy no espaço métrico* X *se* $x_\mu \in X$ *para todo* $\mu \in \mathbb{N}$ *e ainda verifica que para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N > 0$ *tal que*

$$\mu, \nu \geq N \quad \Rightarrow \quad d(x_\mu, x_\nu) < \epsilon$$

Quando toda seqüência de Cauchy é convergente, diremos que o espaço métrico é completo.

Exemplo 2.1.5 *O conjunto dos números reais com a métrica dada pelo valor absoluto é um espaço completo. Fato, suponhamos que* $(x_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}})$ *seja uma seqüência de Cauchy, então teremos que ela é limitada. Dado* $\epsilon > 0$ *existe* $N > 0$ *tal que*

$$\mu, \mu_0 > N \quad \Rightarrow \quad |x_\mu - x_{\mu_0}| < \epsilon.$$

Fixemos agora o ponto μ_0. *Da desigualdade triangular teremos que*

$$|x_\mu| < |x_\mu - x_{\mu_0}| + |x_{\mu_0}| < \epsilon + |x_{\mu_0}|.$$

Tomando como $C_0 = \epsilon + |x_{\mu_0}|$ *encontramos que*

$$|x_\mu| < C_0, \forall \mu \geq N.$$

Tomando C *como*

$$C = \max\{x_1, \cdots x_{\mu_0}, C_0\},$$

encontramos que

$$|x_\mu| < C, \forall \mu \in \mathbb{N}$$

Como a seqüência é limitada, do teorema de Heine Borel, segue que existe uma subseqüência de $(x_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ *que a denotaremos por* $(x_{\mu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *e um número real* x *tal que*

$$x_{\mu_k} \to x$$

Finalmente, mostraremos que toda a seqüência converge para x*. Tomemos* $\epsilon > 0$*, então existirá* $N > 0$ *tal que*

$$\mu, \mu_k > N \quad \Rightarrow \quad |x_\mu - x_{\mu_0}| < \frac{\epsilon}{2}$$

Portanto temos que

$$\mu > N \quad \Rightarrow \quad |x_\mu - x| < |x_\mu - x_{\mu_0}| + |x_{\mu_0} - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Exemplo 2.1.6 *O espaço métrico dado por* $X = C(a, b)$ *o conjunto das funções contínuas sobre o intervalo* $[a, b]$ *com a métrica*

$$d(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

é um espaço métrico completo. De fato. Seja f_μ *uma seqüência de Cauchy, então teremos que para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N > 0$ *tal que*

$$\mu, \nu \geq N \quad \Rightarrow \quad d(f_\mu, f_\nu) < \epsilon$$

isto é

$$\mu, \nu \geq N \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in[a,b]} |f_\mu(x) - f_\nu(x)| < \epsilon$$

Como em $\mathbb{R}$ *toda seqüência de Cauchy é convergente teremos que para cada* x*,* $(f_\mu(x))_{\mu\in\mathbb{N}}$ *é convergente. Isto é*

$$f_\mu(x) \to f(x)$$

Denotemos por $f(x)$ *este limite. Para mostrar que* $C(a, b)$ *é completo, bastará mostrar que* f *é uma função contínua. De fato, seja* $\epsilon > 0$ *pela convergência existem* N_1 *e* N_2 *tais que*

$$\mu \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad |f_\mu(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\mu \geq N_2 \quad \Rightarrow \quad |f_\mu(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Denotemos por $N = \max\{N_1, N_2\}$. *Por outro lado, pela continuidade de* f_μ *teremos que existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_\mu(x) - f_\mu(y)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Da desigualdade triangular obtemos que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_\mu(x)| + |f_\mu(x) - f_\mu(y)| + |f_\mu(y) - f(y)|$$

Tomando $\mu > N$ *e* $|x - y| < \delta$ *concluimos que*

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

De onde segue a continuidade da f. *Portanto* $f \in C(a, b)$. *Logo o espaço é completo.*

2.2 Espaços normados

A estrutura de espaço métrico é uma estrutura básica onde isolamos o conceito de métrica, para definir sobre ela uma convergência de seus elementos. Os espaços normados são estruturas mais ricas, isto é são conjuntos não vazios que possuem duas operações *fechadas* definidas sobre ele. Uma delas é a soma de vetores, e a outra o produto por um escalar, isto é um espaço normado é um espaço vetorial. Mais precissamente

Definição 2.2.1 *Diremos que um espaço vetorial é um espaco normado, se existe uma função* $N : E \to \mathbb{R}$ *satisfazendo as seguintes propriedades*

- $N(x) \geq 0$ *para todo* $x \in E$ *e se* $N(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$
- $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ *para todo* $x, y \in E$
- $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$

Note que a definição de espaço normado exige que E seja um espaço vetorial. Em particular todo espaço normado é um espaço métrico, para ver isto basta definir a métrica $d(x, y) = N(x - y)$. Um espaço Normado é chamado de espaço de Banach se ele é completo, isto é toda seqüência de Cauchy é convergente em E.

Exemplo 2.2.1 *Denotemos por* $L^1(a, b)$ *o espaço de todas as funções definidas sobre* $[a, b]$ *integráveis a Lebesgue. É simples verificar que este espaço munido da norma*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

é um espaço normado. Utilizando os resultados de teoría da medida mostra-se que toda seqüência de Cauchy é convergente.

Exemplo 2.2.2 *Denotemos por $C([a,b])$ o conjunto de todas as funções contínuas no intervalo $[a,b]$. Isto é*

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}; \quad f \text{ é contínua}\}$$

Este é um espaço vetorial, pois soma de funções contínuas é contínua, e o produto de uma constante por uma função contínua é também uma função contínua. Este espaço vetorial tem estrutura de espaço normado se sobre ele definimos a norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; \ \ x \in [a,b]\}$$

É simples verificar que $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma. De fato,

$$\|f\|_\infty = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

Por outro lado temos que

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

E Finalmente, que

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$$

Exemplo 2.2.3 *Consideremos o mesmos espaço do exemplo 2.2.2, $C([a,b])$ o conjunto de todas as funções contínuas Como vimos é um espaço vetorial. Podemos também dar a este espaço, estrutura de espaço normado, introduzindo a norma*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

É simples verificar que $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma. De fato,

$$\int_a^b |f(x)| \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

Por outro lado temos que

$$\int_a^b |f(x) + g(x)| \, dx \leq \int_a^b |f(x)| \, dx + \int_a^b |g(x)| \, dx$$

Apesar que algébricamente o espaço $C(a,b)$ é igual ao do exemplo 2.2.2, eles possuim caraterísticas muito diferentes. O espaco $C(a,b)$ munido da norma $\|\cdot\|_1$ não é um espaço completo. Para isto basta considerar a seqüência de funções

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n.$$

É simples verificar

$$f_n(x) \to f(x), \quad \text{onde} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Por outro lado temos que

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx = \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1} \to 0$$

De onde f_n converge para f na norma $\|\cdot\|_1$. Mais f não é uma função contínua. Logo $C([0,1])$ não é um espaço completo.

2.3 Minimização em dimensão finita

Como vimos na seção anterior, para encontrar uma solução de um problema de equilibrio é necessário mostrar que o funcional que define a energía potencial do sistema pode ser minimizado. Isto é que existe uma função u satisfazendo

$$J(u) \leq J(v), \qquad \forall v \in U_{ad}$$

Onde J é um funcional definido sobre um espaço normado E e $U_{ad} \subset E$ o conjunto das funções admissiveis.

Problemas semelhantes aparecem em problemas de análise real onde muitas vezes é necessário minimizar funcionais definidos sobre $\mathbb{R}^N$. Por exemplo uma função quadrática da forma

$$q(x) = xAx^t + a \cdot x$$

Onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $a \in \mathbb{R}^N$. Em geral existem restrições, da forma

$$F(x) \leq 0$$

Onde $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Portanto o problema se resume em encontrar um ponto x_0 de tal forma que $F(x_0) \leq 0$ e

$$q(x_0) \leq q(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) \leq 0$$

Mostrar que este ponto existe não é tarefa dificil quando se tem as hipóteses necessárias. Por exemplo que a matriz A seja definida positiva e F seja uma função convexa. A ideia da demostração é a seguinte. Denotemos por $U_{ad} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ F(x) \leq 0\}$. Queremos encontrar $x_0 \in U_{ad}$ tal que

$$q(x_0) \leq q(x), \qquad \forall x \in U_{ad}$$

Primeiro note que como A é definida positiva, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$xAx^t \geq \alpha\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Somando $a \cdot x$ a ambos termos da desigualdade anterior teremos que

$$q(x) = xAx^t + a \cdot x \geq \alpha\|x\|^2 + a \cdot x \geq \alpha\|x\|^2 - \frac{a^2}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2}\|x\|^2$$

De onde segue que

$$q(x) \geq \alpha \|x\|^2 - \frac{a^2}{2\alpha} \geq -\frac{a^2}{2\alpha} \tag{2.1}$$

Portanto $q(x)$ é limitado inferiormente em $\mathbb{R}^N$ e em particular sobre U_{ad}. Sabemos que toda função limitada possui um infimo. Da definição de infimo, existe uma seqüência em x_μ de elementos de U_{ad} tais que

$$q(x_\mu) \to \inf \{q(x);\ x \in U_{ad}\} := I$$

Note que aqui não podemos aplicar compacidade diretamente porque o conjunto sobre o qual minimizamos não é limitado. Usando a primeira desigualdade em (2.1) encontramos que

$$\|x_\mu\|^2 \leq \frac{1}{\alpha} \left\{ q(x_\mu) + \frac{a^2}{2\alpha} \right\}$$

Como o segundo membro da desigualdade acima é limitado concluimos que a seqüência $(x_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}^n}$ é limitada. Portanto pelo Teorema de Heine Borel, existe um ponto x_0 e uma subseqüência convergente tal que

$$x_{\mu_k} \to x_0$$

Como $x_{\mu_k} \in U_{ad}$ para todo k e o conjunto U_{ad} é fechado, teremos que $x_0 \in U_{ad}$. Da continuidade de q obtemos que

$$I = \lim_{k \to \infty} q(x_{\mu_k}) = q(x_0)$$

portanto x_0 é o ponto que minimiza o problema.

2.4 Minimização em dimensão infinita

O método de resolução do problema anterior é bastante geral e pode ser estendido a casos mais gerais. Infelizmente não pode ser estendido dessa forma para problemas de minimização em dimensão infinita. Isto porque em pontos cruciais da demonstração utilizamos o fato que toda seqüência limitada possui uma subseqüência convergente, isto é a compacidade. O problema deste resultado é que somente é válido em espaços de dimensão finita.

Teorema 2.4.1 *Uma seqüência limitada de elementos de um espaço de Banach E possui uma subseqüência convergente se e somente se E tem dimensão finita.*

Este teorema acaba com a posibilidade de aplicar o mesma ideia para minimização de funcionais em Espaços de Banach. Examinando mais de perto este problema, concluimos que o problema não radica no fato da dimensão ser finita ou não e sim na convergência. Pois observe que não é necessario que

$$\lim_{k \to \infty} q(x_{\mu_k}) = q(x_0)$$

basta apenas mostrar que

$$\lim_{k\to\infty} q(x_{\mu_k}) \geq q(x_0)$$

Esta desigualdade nos da a posibilidade de enfraquecer nosso conceito de convergência. Observe que até agora temos tratado de convergencia no sentido da norma. Isto é onde os conjuntos abertos estão definidos a partir de bolas abertas do tipo

$$B_r(x_0) = \{x \in E;\ \|x - x_0\|_E < r\}$$

Com estes conjuntos em espaços de dimensão infinita o conceito de compacidade é mais exigente. Veja por exemplo o teorema de Compacidade para conjuntos de L^p ou o teorema de Arsela Ascoli que carateriza conjuntos compactos no espaço das funções contínuas. A questão agora é saber que tipo de topología podemos definir de tal forma que conjuntos limitados sejam precompactos em espaços de dimensão infinita.

Lembremos que uma função é contínua se e somente se a preimagem de conjuntos abertos são também conjuntos abertos aberto. A ideia aqui é enfraquecer o conceito de convergência restringindo o conceito de continuidade. Assim a ideia é considerar o conjunto de todas as funções lineares e contínuas. Assim diremos que uma seqüência $(x_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ converge fraco para x se e somente se para toda função f linear e contínua se verifica que

$$f(x_\mu) \to f(x).$$

O conceito de convergência agora é mais amplo que aquele que conhecemos do cálculo diferencial e este novo conceito nos permitirá desenvolver uma nova teoria que é chamada de Análise funcional.

Vejamos como os espaços de dimensão finita difierem nos espaços de dimensão infinita.

Exemplo 2.4.1 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de vetores em $\mathbb{R}^m$. Suponhamos que ela seja limitada. Isto é que exista uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|x_n\| = \sqrt{|x_n^1|^2 + |x_n^2|^2 + \cdots + |x_n^m|^2} \leq C$$

Pelo Teorema de Heine-Borel existe uma subseqüência de x_n, denotada por x_{n_k} que é convergente em $\mathbb{R}^m$. Por outro lado. Esta propriedade não é válida para espaços de dimensão infinita. Por exemplo considere o espaço $E = C^1(0,1)$ com a norma $\|f\|_\infty$ dada por

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$$

Considere por exemplo a seqüencia:

$$y_n = \text{sen}\,(nx)$$

Claramente é uma seqüência limitada em E. Mas não possui nenhuma subseqüência convergente.

Para resolver problemas de minimização em espaços de dimensão infinita, devemos extender o conceito de convergência.

Lembremos o conceito de continuidade para funções de uma variável. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto x_0, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Esta definicão de continuidade é equivalente a seguinte: f é uma função contínua se e somente se a preimagem de conjuntos abertos de $\mathbb{R}$ é um aberto de $[a,b]$. Mais precissamente temos o seguinte teorema.

Teorema 2.4.2 *Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua se e somente se para todo aberto V de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(V)$ é um aberto de $[a,b]$*

Demonstração.- Se f é uma função contínua o resultado é simple de verificar. Mostraremos que quando a preimagem de abertos de $\mathbb{R}$ é um aberto de $[a,b]$ então f deve ser contínua. De fato, lembremos que para toda função f e para todo conjunto $V \subset \mathbb{R}$ é válido

$$f(f^{-1}(V)) \subset V \tag{2.2}$$

Tomemos agora uma vizinhança de $f(x_0)$, isto é

$$B_\epsilon(f(x_0)) = \{y \in \mathbb{R};\ |y - f(x_0)| < \epsilon\}$$

Como $f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$ é um conjunto aberto e

$$x_0 \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$$

então teremos que existe $\delta > 0$ talque

$$B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$$

Usando a propriedade (2.2) concluimos que

$$f(B_\delta(x_0)) \subset f(f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))) \subset B_\epsilon(f(x_0)))$$

que significa que se

$$x \in B_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0)))$$

Ou equivalentemente, teremos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

que mostra a continuidade de f.

O mesmo resultado é válido sobre os espacos de Banach. Isto é

Teorema 2.4.3 *Seja E um espaço de Banach e denotemos por F uma função da forma*

$$F : E \to \mathbb{R}$$

Então F é uma função contínua se e somente se para todo aberto V de $\mathbb{R}$, $F^{-1}(V)$ é um aberto de E.

A demonstração segue os mesmos passos que o correspondente teorema para funções reais.

Note que a norma de E é sempre uma função contínua, portanto as bolas

$$B_r(x_0) = \{x \in E;\ \|x - x_0\| < r\}$$

são sempre conjuntos abertos, pois

$$B_r(x_0) = F^{-1}(]0, r[)$$

onde $F(x) = \|x - x_0\|$.

Extensão do conceito de convergência

Extenderemos o conceito de convergência a partir da seguinte propriedade propriedade das funções contínuas. *Se a seqüência $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é convergente então para toda função contínua F teremos que $F(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é também convergente.* Definiremos uma condição mais *fraca* que a anterior se exigimos que a convergência seja válida apenas para as funções lineares e contínuas. Diremos então que uma seqüência x_n converge fracamente para x, se $f(x_n)$ converge para $f(x)$, para todas as funções lineares e contínuas. Para formalizar esta definição introduziremos o espaço dual.

Definição 2.4.1 *Denotemos por E^* o conjunto das funções $f : E \to \mathbb{R}$ lineares e contínuas, isto é*

$$E^* = \{f : E \to \mathbb{R};\ f \text{é linear e contínua}\}$$

O conjunto E^* é chamado de espaço dual de E

Da definição concluimos que E^* é um espaço vectorial. Mais ainda, E é um espaço normado com a norma dada por

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)|$$

O seguinte resultado nos diz que o espaço dual de um espaço normado qualquer é completo.

Teorema 2.4.4 *Seja E um espaço normado, e denotemos por E^* o espaço dual de E. Então E^* é um espaço completo.*

Demonstração.- Seja $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em E^*, então teremos que para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$m, n > N \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\|_{E^*} < \epsilon.$$

Em particular teremos que

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \|x\|_E \|f_m - f_n\|_{E^*}$$

Portanto, a seqüência $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Pela completitude dos números reais teremos que existe $f(x)$ tal que

$$f_m(x) \to f(x).$$

Mostraremos a seguir que $f \in E^*$. Note que

$$f_m(\alpha x + \beta y) = \alpha f_m(x) + \beta f_m(y) \to \alpha f(x) + \beta f(y).$$

De onde segue que a função é linear. Mostraremos agora que f é contínua, para isto bastará mostrar que é limitada.

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{E^*} \leq C$$

Pois toda seqüência de Cauchy é limitada. Portanto $f \in E^*$. Finalmente, mostraremos que $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ converge para f. Da definição de supremo, temos que para $\epsilon > 0$ existirá um elemento $x_0 \in E$ tal que

$$\|f_m - f\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |f_m(x) - f(x)| < |f_m(x_0) - f(x_0)| + \frac{\epsilon}{3}$$

Tomando m tal que

$$|f_m(x_0) - f(x_0)| < \frac{1}{3}\epsilon$$

Segue o resultado.

2.5 Teorema de Hanh-Banach

O Teorema de Hanh-Banach é a pedra fundamental do análise funcional. Uma das conseqüências deste Teorema é que podemos caraterizar a convergência fraca de uma forma relativamente simples. O Teorema nos diz que toda aplicação linear e contínua definido sobre um subespaço de E pode ser estendida continuamente a todo o espaço. Mais precissamente

Teorema 2.5.1 *Seja E um espaço vetorial e denotemos por p uma seminorma definida sobre E. Isto é*

- $p(\lambda x) = \lambda p(x), \qquad \forall x \in E, \quad \forall \lambda > 0$
- $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad \forall x, y \in E$

Denotemos por G um subespaço de E e $g : G \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear tal que

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G$$

Então existe uma forma linear $f : E \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in G$$

e ainda

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$$

Demonstração.- Seja E um espaço normado e G um subespaço de E. Se $G \neq E$, então existe um elemento $x_0 \in E$ e $x_0 \notin G$. Definimos assim o espaço $G_1 = G + \mathbb{R}x_0$. Mostraremos que f pode ser estendido a G_1 satisfazendo

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G_1 \tag{2.3}$$

Denotemos por f_1 a extensão de f dada por

$$f_1(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$$

Onde α será escolhida posteriormente de tal forma que verifique a desigualdade 2.3. Isto é que se verifique que

$$f_1(x + tx_0) \leq p(x + tx_0)$$

Ou equivalentemente, para $t > 0$

$$f_1(\frac{x}{t} + x_0) \leq p(\frac{x}{t} + x_0), \quad \text{ou} \quad f_1(\frac{x}{t} - x_0) \leq p(\frac{x}{t} - x_0)$$

Isto é equivalente a mostrar que

$$f_1(y + x_0) \leq p(y + x_0), \qquad f_1(y - x_0) \leq p(y - x_0) \quad \forall y \in G$$

De onde obtemos que

$$f(y) + \alpha \leq p(y + x_0), \qquad f(y) - \alpha \leq p(y - x_0) \quad \forall y \in G$$

Por outro lado, para $x, y \in G$ e da desigualdade triangular temos

$$f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0).$$

De onde segue que

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x)$$

Tomando supremo no primeiro membro da desigualdade acima e depois infimo no segundo membro obtemos que

$$\sup_{y\in G}\{f(y)-p(y-x_0)\}\leq \inf_{x\in G}\{p(x+x_0)-f(x)\}$$

Tomamos α tal que

$$\sup_{y\in G}\{f(y)-p(y-x_0)\}\leq \alpha \leq \inf_{x\in G}\{p(x+x_0)-f(x)\}$$

Encontramos que

$$f(y)+\alpha\leq p(y+x_0), \qquad f(y)-\alpha\leq p(y-x_0) \quad \forall y\in G$$

De onde segue que

$$f_1(x+tx_0)\leq p(x+tx_0)$$

Isto é,

$$f_1(x)\leq p(x), \quad \forall x\in G_1.$$

Continuando com este mesmo reaciocinio encontramos uma cadeia de subespaços de E verificando

$$G_1\subset G_2\subset\cdots\subset E.$$

e uma seqüências de funções f_1, f_2, $\cdots$, f_n, onde f_n está definido em G_n e f_n extende f_{n-1}. Podemos construir uma relação de ordem $\preceq$ da seguinte forma: Diremos que $(G_i,f_i)\preceq(G_j,f_j)$ se $G_i\subset G_j$ e f_j extende a f_i. Claramente este conjunto tem um maiorante, e portanto pelo Lema de Zorn possui um elemento maximal, que é (E,f), Logo existe f satisfazendo as condições do Teorema.

Observação 2.5.1 *Para o caso dos espaços de Dimensão finita o Teorema de Hanh Banach é bastante simple. Seja $E=\mathbb{R}^N$ e denotemos por $G\subset\mathbb{R}^N$ um subespaço de E. Denotemos por $g:G\to\mathbb{R}$ uma função linear satisfazendo*

$$g(x)=\|x\|, \qquad \forall x\in G$$

Então construiremos uma função f satisfazendo as condições do Teorema de Hanh Banach. De fato, denotemos por $\{e_1,\cdots,e_r\}$ a base ortonormal de G. Esta base pode ser estendida ortonormalmente a uma base do $\mathbb{R}^N$, denotemos por $B=\{e_1,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots e_n\}$ esta base. Tomemos $x=c_1e_1+\cdots+c_ne_n$ e f de tal forma que

$$f(e_{r+1})=0,\cdots,f(e_n)=0, \quad f(c_1e_1+\cdots+c_re_r)=g(x)$$

A função f assim definida satisfaz

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c_1e_1+\cdots+c_ne_n)\\ &= f(c_1e_1+\cdots c_re_r)+f(c_{r+1}e_{r+1}+\cdots+c_ne_n)\\ &= g(\bar{x})\leq\|\bar{x}\|\leq\|x\| \end{aligned}$$

Corolário 2.5.1 *Para todo $x \in E$ existe $f_0 \in E^*$ tal que*

$$\|f_0\| = \|x_0\|, \quad f(x_0) = \|x_0\|^2$$

Demonstração.- Seja $G = \mathbb{R}x_0$, e definamos por g ao funcional definido sobre G da seguinte forma

$$g(x) = g(tx_0) = t\|x_0\|^2 \quad \Rightarrow \quad \|g\| = \|x_0\|$$

Tomemos $p(x) = \|x_0\|\|x\|$. Do Teorema de Hanh-Banach existe uma função f_0 definida sobre todo E que verifica

$$f_0(x) = g(x), \quad \forall x \in G, \quad |f_0(x)| \leq p(x) = \|x_0\|\|x\|$$

Portanto f_0 verifica as condições to Corolário.

Corolário 2.5.2 *Para todo elemento $x \in E$ temos que*

$$\|x\|_E = \sup_{f \in E^*; \|f\|_* \leq 1} f(x)$$

Demonstração.- Do teorema de Hanh Banach, existe uma aplicação f_0 tal que

$$\|f_0\|_* = \|x\|, \qquad f_0(x) = \|x\|^2$$

Tomando $f_1 = \frac{f_0}{\|x\|}$ concluimos que

$$\|x\| = f_1(x) \leq \sup_{f \in E^*; \|f\|_* \leq 1} f(x)$$

Como

$$\sup_{f \in E^*; \|f\|_* \leq 1} f(x) \leq \sup_{f \in E^*; \|f\|_* \leq 1} \|f\|\|x\| \leq \|x\|$$

segue a nossa conclusão.

2.6 Convergência fraca

Na seção anterior vimos como pode ser estendido o conceito de convergência de números reais para espaços de Banach. Esta convergência é chamada de forte porque vem da norma. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência que converge forte, então para toda função contínua teremos que

$$f(x_n) \to f(x)$$

A seguir definiremos o conceito de convergência fraca.

Definição 2.6.1 *Diremos que uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de um espaço de Banach E, converge fraco para $x \in E$, se e somente se*

$$f(x_n) \to f(x), \qquad \forall f \in E^*$$

Da definição concluimos que se uma seqüência convergência forte, então ela converge fraco. De fato, se x_n converge forte, então para toda função contínua f teremos que $f(x_n) \to f(x)$, em particular para as funções $f \in E$. O recíproco não é verdade em geral. A exceção é quando E tem dimensão finita. Isto é, a convergência fraca e forte são equivalentes nos espaços de dimensão finita. De fato, considere por exemplo o caso unidimensional. Toda função linear e contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é da forma $f(x) = \alpha x$, para $\alpha \in \mathbb{R}$. Tomando f tal que $\alpha \neq 0$ encontramos que

$$f(x_n) \to f(x) \quad \Rightarrow \quad \alpha x_n \to \alpha x \quad \Rightarrow \quad x_n \to x$$

No caso do $\mathbb{R}^N$ a situação é semelhante. Note que todo funcional contínuo $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é da forma $f(x) = A \cdot x$ onde $A \in \mathbb{R}^n$. Tomando $A = (0, \cdots, 0, 1, 0 \cdots, 0)$ encontramos que

$$f(x) = x_i.$$

Portanto a condição de convergência fraca implica que

$$x_i^n \to x_i, \qquad \forall i = 1, \cdots n.$$

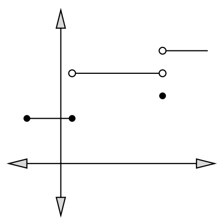
De onde temos que a seqüência x_n converge forte. Nos casos de dimensão infinita este resultado não é valido, pois por uma lado não podemos caraterizar todos os funcionais lineares e contínuos de uma forma tão simples. E por outro lado x não é necessariamente uma combinação linear finita de termos de uma base. A convergência fraca está estreitamente viculada a semicontinuidade inferior que definimos a seguir.

Definição 2.6.2 *Diremos que um funcional $J : E \to \mathbb{R}$ definido sobre um espaço normado E é semicontínua inferiormente (SCI) se para toda seqüência $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ convergindo para u temos que*

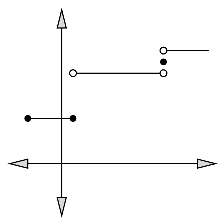
$$\liminf_{\nu \to \infty} J(u_\nu) \geq J(u).$$

Para funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, toda função contínua num ponto x será semicontínua inferiormente nesse ponto. Para funções f com discontinuidade de primeira especie isto é quando existem os limites laterais, porém são diferentes, a função deve verificar nos pontos de discontinuidade as seguintes relações

$$f(x^-) \geq f(x), \quad f(x^+) \geq f(x).$$



Função S.C.I.



Não é S.C.I.

Como uma conseqüência do Teorema de Hahn Banach, temos que a norma é sempre uma função semicontínua inferiormente com respeito à topología fraca.

Teorema 2.6.1 *Seja E um espaço normado, e seja x_ν uma seqüência de elementos em E convirgindo fraco para x, então temos que*

$$\liminf_{\nu\to\infty} \|x_\nu\| \geq \|x\|$$

Demonstração.- De fato como a x_ν converge fraco, então temos que

$$f(x_\nu) \to f(x), \quad \forall f \in E^*$$

Por outro lado

$$f(x_\nu) \leq \|f\|\|x_\nu\| \quad \Rightarrow \quad f(x) = \liminf_{\nu\to\infty} f(x_\nu) \leq \|f\| \liminf_{\nu\to\infty} \|x_\nu\|$$

Do Corolário 2.5.1, encontramos que existe um funcional f satisfazendo

$$\|f\| \leq 1, \quad f(x) = \|x\|.$$

Usando este funcional na desigualdade acima, segue o resultado.

2.7 Topología fraca estrela

Dado um espaço normado E, podemos construir seu espaço dual E^* como sendo o espaço formado por todos os funcionais lineares e contínuos definido sobre E. Este espaço dual é por sua vez um espaço normado. Portanto neste espaço podemos definir tanto a convergência forte como a convergência fraca. Um ponto importante dos espaços duais, é que sobre eles podemos definir uma terceira convergência, a chamada de convergência fraca estrela. Diremos que uma seqüência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *fraco estrela* em E^* se

$$f_n(x) \to f(x), \quad \forall x \in E.$$

Observação 2.7.1 Os conjuntos abertos em E^*

O dual de E, denotado por E^* é um espaço normado, com a norma dada por

$$\|f\|_* = \sup_{x\in B_1(0)} f(x).$$

Portanto podemos definir os conjuntos abertos de E^* a partir das bolas abertas. Isto é, a bola aberta centrada no zero e raio ϵ é dada por

$$\begin{aligned} V_\epsilon(0) &= \{f \in E^*;\ \|f\|_* < \epsilon\} \\ &= \left\{ f \in E^*;\ \sup_{x\in B_1(0)} f(x) < \epsilon \right\} \\ &= \{f \in E^*;\ |f(x)| < \epsilon,\ \forall x \in B_1(0)\} \end{aligned}$$

Em geral podemos afirmar que uma vizinhança qualquer de zero é dada por

$$V = \{f \in E^*;\ |f(x)| < \epsilon,\ x \in B\}$$

onde B é um conjunto limitado qualquer. Portanto se f_n converge forte para f, é porque

$$\|f_n - f\|_* \to 0 \iff \sup_{x \in B_1(0)} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

Por outro lado, Na convergência fraca estrela teremos que

$$f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f \iff f_n(x) \to f(x), \quad \forall x \in E.$$

Onde a convergência não é uniforme em x.

Em particular se Tomamos B apenas um conjunto finito, teremos assim uma classe de vizinhanças de zero, e esta topología é chamada de topología fraca estrela.

Definição 2.7.1 *Diremos que um espaço normado E é separável, se existe um subconjunto numerável e denso em E*

O conceito de separabilidade é importante, pois nos diz que todo elemento x de E pode ser escrito como limite de uma subseqüência do conjunto numerável e denso.

Teorema 2.7.1 *Toda seqüência limitada de funcionais lineares e contínuas definidos sobre um espaço normado separável, possui uma subseqüência que converge fraco estrela*

Demonstração.- Seja $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ um conjunto numerável e denso. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada, então a seqüência de números reais dados por

$$f_1(x_1),\ f_2(x_1),\ f_3(x_1),\ \cdots f_n(x_1),\ \cdots$$

é limitada, portanto podemos extraer um subseqüência convergente, denotemos ela por

$$f_1^{(1)}(x_1),\ f_2^{(1)}(x_1),\ f_3^{(1)}(x_1),\ \cdots f_n^{(1)}(x_1),\ \cdots$$

que por nossa escolha é convergente. Consideremos agora a subseqüência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $(f_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$. Repetindo o mesmo raciocinio anterior concluimos que a seqüência

$$f_1^{(1)}(x_2),\ f_2^{(1)}(x_2),\ f_3^{(1)}(x_2),\ \cdots f_n^{(1)}(x_2),\ \cdots$$

é limitada, portanto existe uma subseqüência convergente. De onde existe

$$f_1^{(2)}(x_2),\ f_2^{(2)}(x_2),\ f_3^{(2)}(x_2),\ \cdots f_n^{(2)}(x_2),\ \cdots$$

é também uma seqüência convergente. Assim temos encontrado um sistema de seqüências tais que

$$\begin{array}{lllll}
f_1^{(1)}, & f_2^{(1)} & \cdots & f_n^{(1)} & \cdots, \\
f_1^{(2)}, & f_2^{(2)} & \cdots & f_n^{(2)} & \cdots, \\
f_1^{(3)}, & f_2^{(3)} & \cdots & f_n^{(3)} & \cdots, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Onde cada seqüência é uma subseqüência da anterior. Tomando agora a seqüência diagonal $(f_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ teremos pela construção que a seqüência $(f_n^{(n)}(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $i \in \mathbb{N}$. Como o conjunto $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ é denso teremos que a seqüência $(f_n^{(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convirge para todo $x \in E$. Isto quer dizer que para cada $x \in E$ existe um número $f(x)$ De tal forma que

$$f_n^{(n)}(x) \to f(x)$$

Note que f é linear pois cada termo f_n é linear. Por outro lado

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(n)}(x) \le \lim_{n\to\infty} \|f_n^{(n)}(x)\| \le c\|x\|, \quad \forall \|x\| \le 1$$

pois a seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Portanto f também é limitado. O que completa a demonstração. Por outro lado, se E é um espaço separável, temos que a bola unitária em E^* é metrizável. Mais precissamente temos

Teorema 2.7.2 *Denotemos por E um espaço normado separável. A topología fraca estrela induzida na bola $B \subset E^*$*

$$E = \{f \in E^*;\ \|f\|_* \le 1\}$$

é metrizável e sua métrica é dada por

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |\langle f-g\ ,\ x_n\rangle|$$

onde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é o conjunto numerável e denso da bola B.

A demonstração é simple

2.8 Espaços reflexivos

Assim como construimos o espaço dual de um espaço vetorial, também podemos construir o espaço dual do dual. Isto é

$$E^{**} = \{f : E^* \to \mathbb{R};\ f \quad \text{é linear e contínua}\}$$

Este espaço E^{**} é também um espaço normado e completo. A norma do espaço bidual esta dada por

$$\|f\|_{**} = \sup_{g\in E^*, \|g\|_* \le 1} f(g)$$

Em geral dado um espaço vetorial E qualquer, podemos definir os espaços dual e bidual. Inclusive podemos relacionar o espaço E com o bidual E^{**} através da seguinte aplicação

$$J : E \to E^{**}, \qquad x \mapsto J(x) \in E^{**}$$

Onde

$$J(x) : E^* \to \mathbb{R}$$

Definindo de forma natural

$$\langle J(x)\ ,\ f\rangle = f(x)$$

Para todo $f \in E^*$. Note que J é uma isometría entre os espaços E e E^{**}. De fato,

$$\|J(x)\|_{**} = \sup_{f\in E^*, \|f\|_*\leq 1} \langle J(x); f\rangle = \sup_{f\in E^*, \|f\|_*\leq 1} \langle f, x\rangle = \|x\|$$

De onde obtemos uma aplicação injetora entre os espaços E e E^{**}. A aplicação J é chamada de projeção canónica. Não é verdade em geral que J definida acima, seja sobrejetóra. Os espaços nos quais J seja sobrejetora são chamados de Reflexivos.

Definição 2.8.1 *Seja E um espaço de Banach, diremos que E é um espaço reflexivo quando a aplicação J definida acima é sobrejetora.*

Observação 2.8.1 *Como uma conseqüência imediata, temos que $\mathbb{R}^N$ é um espaco reflexivo. Em geral podemos afirmar que todo espaço normado e completo de dimensão finita é reflexivo.*

Propriedades dos espaços duais

- E é um espaço reflexivo se e somente se E^* é reflexivo
- Se E^* é um espaço separável então E é separável.
- E é um espaço reflexivo e separável se e somente se E^* é um espaço reflexivo e separável.

Teorema 2.8.1 *Se E é um espaço reflexivo e separável, então a bola unitária e fechada de E é um conjunto compacto com respeito à topología fraca.*

Demonstração.- Seja x_n uma seqüência limitada em E. Por ser E reflexivo teremos que

$$J : E \to E''$$

é uma bijeção. Logo teremos que $J(x_n)$ é limitada em E'. Portanto existe uma subseqüência de x_n tal que

$$J(x_{n_k}) \rightharpoonup F \quad \text{fraco estrela em} \quad E''$$

Onde $F \in E''$. Pela reflexividade, existe $x \in E$ tal que $J(x) = F$. Da convergência fraca estrela temos

$$\langle J(x_{n_k}), f\rangle \to \langle J(x), f\rangle \quad \forall f \in E'.$$

De onde, pela definição de J temos

$$\langle f, x_{n_k}\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \forall f \in E'.$$

O que significa que x_{n_k} converge fraco em E.

Por ser E numerável então a topología inducida sobre a bola é metrizável. Logo a bola é um espaço métrico onde toda seqüência limitada possui uma subseqüência convergente. Portanto, concluimos que a bola é um conjunto relativamente compacto.

Em geral temos

Teorema 2.8.2 *E é um espaço reflexivo se e somente se toda seqüência limitada possui uma subseqüência convergindo fraco.*