Universidade Eduardo Mondlane

ZEFANIAS GOMES CUMBE

E-mail: zefaniascumbe@gmail.com

TERMO GERAL DA SUCESSÃO OBTIDA ATRAVÉS DE UMA CONSTANTE ELEVADA A PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

2ª edição

Maputo, Moçambique

Sumário

Resumo

Determina-se neste artigo, o termo geral de uma sucessão gerada por meio de uma constante elevada a termos de uma progressão geométrica. Neste caso, verifica-se que quando se toma por base uma constante qualquer positiva, e por expoentes variáveis, termos de uma progressão geométrica, obtém-se uma sucessão em que o logaritmo entre dois termos consecutivos é constante.

Visto que se uma constante é elevada a termos de uma progressão aritmética obtém-se uma sucessão em que o quociente entre dois termos consecutivos é constante, por sua vez, se uma constante é elevada a termos de uma progressão geométrica, é gerada uma outra sucessão, de logaritmo constante entre dois termos consecutivos.

Tal como as progressões aritmética e geométrica (em que a diferença e o quociente respectivamente, entre dois termos consecutivos é constante), que possui cada uma delas a respectiva fórmula geral, o objetivo deste artigo consiste fundamentalmente em determinar o termo geral para sucessões de logaritmo constante entre dois termos consecutivos quaisquer.

Abstract

This article determines the general term of a succession given by a constant raised to terms of a geometric progression. In this case, it turns out that when any positive constant is taken as the basis, and exponents, variable terms of geometric progression, a succession is obtained in which the logarithm between two consecutive terms is constant.

Since if a constant is raised to terms of an arithmetic progression, a succession is obtained, in which the quotient between two consecutive terms is constant, in turn, if a constant is raised to the terms of a geometric progression, another one succession is generated, in which the logarithm between two consecutive terms is constant.

Like arithmetic and geometric progression (where the difference and quotient respectively, between two consecutive terms is constant), which each has the respective general formula, the purpose of this article is fundamentally to determine the general term for succession with constant logarithm between any two consecutive terms.

Palavras-chave: sucessão; termos; constante; progressão; logaritmo; consecutivos.

Keywords: succession; terms; constant; progression; logarithm; consecutive.

Introdução

Atualmente são conhecidas na matemática duas (2) progressões, cada uma com característica comum entre dois termos consecutivos. Por meio deste artigo, vem-se aumentar esse número para três (3), através de uma progressão igualmente com uma característica comum entre quaisquer dois termos consecutivos.

A fórmula geral estabelecida neste trabalho de pesquisa é muito importante visto que facilita a determinação de qualquer elemento duma sucessão com logaritmo constante entre dois termos consecutivos, desde que seja dado esse logaritmo constante e o primeiro termo da sucessão, da mesma forma que para determinar qualquer elemento de uma progressão aritmética assim como geométrica, quando conhecido o termo geral, basta que seja dado o primeiro termo, e a diferença ou o quociente entre dois termos consecutivos.

Apresentação do Método e Resultados da Pesquisa

Considerando as quatro (4) sucessões:

1 **Sucessão:** $\sqrt[32]{2}$; $\sqrt[16]{2}$; $\sqrt[8]{2}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{2}$; 2; 4; 16; 256; 65 536.

2 **Sucessão:** 6 561; 81; 9; 3; $\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[8]{3}$; $\sqrt[16]{3}$; $\sqrt[32]{3}$; $\sqrt[64]{3}$.

3 **Sucessão:** $\sqrt[64]{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[32]{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[16]{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[8]{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{6\,561}$.

4 **Sucessão:** $\sqrt[81]{3}$; $\sqrt[27]{3}$; $\sqrt[9]{3}$; $\sqrt[3]{3}$; 3; 27; 19 683.

Das demonstrações acima, são possíveis duas (2) observações muito importantes.

Observação 1

Os termos das sucessões **1**, **2**, **3**, e **4**, são obtidos através de uma constante elevada a termos de uma progressão geométrica:

a) sucessão 1

- $\sqrt[32]{2} = 2^{\frac{1}{32}}$
- $\sqrt[16]{2} = 2^{\frac{1}{16}}$
- $\sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{8}}$
- $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$
- $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$
- 2 = 2
- $4 = 2^2$
- $16 = 2^4$
- $256 = 2^8$
- $65\,536 = 2^{16}$

Sendo que:

- A constante é 2;
- Os termos da progressão geométrica são: $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8; 16, em que o primeiro é $\frac{1}{32}$ e o quociente entre dois consecutivos ($\frac{a_{n+1}}{a_n}$) é 2, donde os demais são obtidos através da aplicação do termo geral para uma progressão geométrica, conforme mostram os exemplos seguintes:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Segundo termo: $a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} = a_1 . \text{q} = \frac{1}{32} \cdot 2 = \frac{1}{16}$

Sexto termo: $a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = a_1 \cdot q^5 = \frac{1}{32} \cdot 2^5 = \frac{1}{32} \cdot 32 = 1$

b) sucessão 2

- ❖ 6 561 = 3^8
- ❖ 81 = 3^4
- ❖ 9 = 3^2
- ❖ 3 = 3
- ❖ $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$
- ❖ $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$
- ❖ $\sqrt[8]{3} = 3^{\frac{1}{8}}$
- ❖ $\sqrt[16]{3} = 3^{\frac{1}{16}}$
- ❖ $\sqrt[32]{3} = 3^{\frac{1}{32}}$
- ❖ $\sqrt[64]{3} = 3^{\frac{1}{64}}$

Sendo que:

- A constante é 3;
- Os termos da progressão geométrica são:
  8; 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$, em que o primeiro é 8 e o quociente entre dois seguidos ($\frac{a_{n+1}}{a_n}$) é $\frac{1}{2}$, donde os demais são obtidos através da aplicação do termo geral para uma progressão geométrica, conforme mostram os exemplos seguintes:

  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
  Terceiro termo: $a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = a_1 \cdot q^2 = 8 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$
  Sétimo termo: $a_7 = a_1 \cdot q^{7-1} = a_1 \cdot q^6 = 8 \cdot (\frac{1}{2})^6 = 8 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{8}$

c) sucessão 3

- ❖ $\sqrt[64]{\frac{1}{3}} = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{64}}$
- ❖ $\sqrt[32]{\frac{1}{3}} = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{32}}$
- ❖ $\sqrt[16]{\frac{1}{3}} = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{16}}$
- ❖ $\sqrt[8]{\frac{1}{3}} = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{8}}$
- ❖ $\sqrt[4]{\frac{1}{3}} = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{4}}$
- ❖ $\sqrt{\frac{1}{3}} = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}$
- ❖ $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

- ❖ $\frac{1}{9}$ = $(\frac{1}{3})^2$
- ❖ $\frac{1}{81}$ = $(\frac{1}{3})^4$
- ❖ $\frac{1}{6\,561}$ = $(\frac{1}{3})^8$

Sendo que:

- A constante é $\frac{1}{3}$;
- Os termos da progressão geométrica são:
  $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8, em que o primeiro é $\frac{1}{64}$ e o quociente entre dois consecutivos ($\frac{a_{n+1}}{a_n}$) é 2, donde os demais são obtidos através da aplicação do termo geral para uma progressão geométrica, conforme mostram os exemplos seguintes:

  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
  Quarto termo: $a_4 = a_1 \cdot q^{4-1} = a_1 \cdot q^3 = \frac{1}{64} \cdot 2^3 = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$
  Sexto termo: $a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = a_1 \cdot q^5 = \frac{1}{64} \cdot 2^5 = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$

d) sucessão 4

- ❖ $\sqrt[81]{3} = 3^{\frac{1}{81}}$
- ❖ $\sqrt[27]{3} = 3^{\frac{1}{27}}$
- ❖ $\sqrt[9]{3} = 3^{\frac{1}{9}}$
- ❖ $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$
- ❖ 3 = 3
- ❖ 27 = 3^3
- ❖ 19 683 = 3^9

Sendo que:

- A constante é 3
- Os termos da progressão geométrica são:

  $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$; 1; 3; 9, em que o primeiro é $\frac{1}{81}$ e o quociente entre dois consecutivos ($\frac{a_{n+1}}{a_n}$) é 3, donde os demais são obtidos através da aplicação do termo geral para uma progressão geométrica, conforme mostram os exemplos seguintes:

  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

  Segundo termo: $a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} = a_1 \cdot$ q = $\frac{1}{81} \cdot 3 = \frac{1}{27}$

  Sétimo termo: $a_7 = a_1 \cdot q^{7-1} = a_1 \cdot q^6 = \frac{1}{81} \cdot 3^6 = \frac{729}{81}$ = 9

Observação 2

O logaritmo entre dois termos consecutivos das sucessões **1**, **2**, **3**, e **4** é sempre constante:

a) Sucessão 1

- $\log_{\sqrt[32]{2}} \sqrt[16]{2} = \log_{\sqrt[16]{2}} \sqrt[8]{2} = \log_{\sqrt[8]{2}} \sqrt[4]{2} = \log_{\sqrt[4]{2}} \sqrt{2} = \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_2 4 = \log_4 16 = \log_{16} 256 = \log_{256} 65\,536 = 2$

b) Sucessão 2

- $\log_{6\,561} 81 = \log_{81} 9 = \log_9 3 = \log_3 \sqrt{3} = \log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{3} = \log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt[8]{3} = \log_{\sqrt[8]{3}} \sqrt[16]{3} = \log_{\sqrt[16]{3}} \sqrt[32]{3} = \log_{\sqrt[32]{3}} \sqrt[64]{3} = \frac{1}{2}$

c) Sucessão 3

- $\log_{\sqrt[64]{\frac{1}{3}}} \sqrt[32]{\frac{1}{3}} = \log_{\sqrt[32]{\frac{1}{3}}} \sqrt[16]{\frac{1}{3}} = \log_{\sqrt[16]{\frac{1}{3}}} \sqrt[8]{\frac{1}{3}} = \log_{\sqrt[8]{\frac{1}{3}}} \sqrt[4]{\frac{1}{3}} = \log_{\sqrt[4]{\frac{1}{3}}} \sqrt{\frac{1}{3}} = \log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{81} = \log_{\frac{1}{81}} \frac{1}{6\,561} = 2$

d) Sucessão 4

- $\log_{\sqrt[81]{3}} \sqrt[27]{3} = \log_{\sqrt[27]{3}} \sqrt[9]{3} = \log_{\sqrt[9]{3}} \sqrt[3]{3} = \log_{\sqrt[3]{3}} 3 = \log_3 27 = \log_{27} 19\,683 = 3$

Com base nas ilustrações anteriores, verifica-se em cada uma das sucessões a seguinte propriedade:

$$\log_{a_1} a_2 = \log_{a_2} a_3 = \log_{a_3} a_4 = \log_{a_4} a_5 = \log_{a_n} a_{n+1}.$$

A sequência com estas características chama-se **Progressão Logarítmica**.

Uma **Progressão Logarítmica** é uma sucessão em que o logaritmo “**e**” entre dois termos consecutivos é constante.

$$\log_{a_n} a_{n+1} = e$$

Ou

$$a_{n+1} = {a_n}^{e}$$

Com $n \in \mathbb{N}$; $a_n \in \mathbb{R}$; $a_n > 0$; $a_n \neq 1$; $a_{n+1} \in \mathbb{R}$; $a_{n+1} > 0$

*Onde “**e**” é o logaritmo constante*

Termo Geral da Progressão Logarítmica

Sendo a_1; a_2; a_3; a_4; a_5;...; a_{n-1}; a_n, termos de uma progressão logarítmica, existe entre eles a relação:

$a_1 = a_1$

$a_2 = {a_1}^e$

$a_3 = {a_2}^e = ({a_1}^e)^e = {a_1}^{e^2}$

$a_4 = {a_3}^e = ({a_1}^{e^2})^e = {a_1}^{e^3}$

$a_5 = {a_4}^e = ({a_1}^{e^3})^e = {a_1}^{e^4}$

$a_6 = {a_5}^e = ({a_1}^{e^4})^e = {a_1}^{e^5}$

Desta forma, é notável que:

$a_2 = {a_1}^e = {a_1}^{e^{2-1}}$

$a_3 = {a_1}^{e^2} = {a_1}^{e^{3-1}}$

$a_4 = {a_1}^{e^3} = {a_1}^{e^{4-1}}$

$a_5 = {a_1}^{e^4} = {a_1}^{e^{5-1}}$

$a_6 = {a_1}^{e^5} = {a_1}^{e^{6-1}}$

As demonstrações acima indicam que **o termo geral da Progressão Logarítmica é:**

$$\boldsymbol{a_n = {a_1}^{e^{n-1}}}$$

Com n ∈ ℵ ; $a_1 \in \mathbb{R}$; ($a_1 > 0$); $a_1 \neq 1$

Onde:

$\boldsymbol{a_n}$: é o termo geral da Progressão Logarítmica;

$\boldsymbol{a_1}$: é o primeiro termo da sucessão dada;

e: é o logaritmo constante entre dois termos consecutivos.

Exemplos

1 Pretende-se determinar o segundo, quarto, e o sétimo elemento da sucessão $\sqrt[32]{2}$; $\sqrt[16]{2}$; $\sqrt[8]{2}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{2}$; 2; 4; 16; 256; 65 536, através da aplicação do termo geral da progressão logarítmica.

Resolução

$a_n = {a_1}^{e^{n-1}}$;

$a_1 = \sqrt[32]{2}$;

e = $\log_{\sqrt[32]{2}} \sqrt[16]{2} = \log_{\sqrt[16]{2}} \sqrt[8]{2} = \log_{\sqrt[8]{2}} \sqrt[4]{2} = \log_{\sqrt[4]{2}} \sqrt{2} = \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_2 4 = \log_4 16 = \log_{16} 256$ = $\log_{256} 65\,536$ = 2

Segundo termo: $a_2 = {a_1}^{e^{2-1}} = {a_1}^{e} = (\sqrt[32]{2}\ )^2 =(\ 2^{\frac{1}{32}})^2 = 2^{\frac{1}{16}} = \sqrt[16]{2}$

Quarto termo: $a_4 = {a_1}^{e^{4-1}} = {a_1}^{e^3} = (\sqrt[32]{2})^{2^3} = (2^{\frac{1}{32}})^8 = 2^{\frac{8}{32}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$

Quinto termo: $a_5 = {a_1}^{e^{5-1}} = {a_1}^{e^4} = (\sqrt[32]{2})^{2^4} = (2^{\frac{1}{32}})^{16} =2^{\frac{16}{32}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Sétimo termo: $a_7 = {a_1}^{e^{7-1}} = {a_1}^{e^6} = (\sqrt[32]{2})^{2^6} = (2^{\frac{1}{32}})^{64} = 2^{\frac{64}{32}} = 2^2 = 4$

2 Sabendo que o primeiro termo de uma certa progressão logarítmica é $\sqrt[81]{3}$, e que o logaritmo entre dois termos seguidos é 3, determine o terceiro, quinto, e o sexto termo dessa sucessão.

Resolução

$a_n = {a_1}^{e^{n-1}}$;

$a_1 = \sqrt[81]{3}$;

e = 3

Terceiro termo: $a_3 = {a_1}^{e^{3-1}} = {a_1}^{e^2} = (\sqrt[81]{3})^{3^2} = (3^{\frac{1}{81}})^9 = 3^{\frac{9}{81}} = 3^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{3}$

Quinto termo: $a_5 = {a_1}^{e^{5-1}} = {a_1}^{e^4} = (\sqrt[81]{3})^{3^4} = (3^{\frac{1}{81}})^{81} = 3^{\frac{81}{81}} =3$

Sexto termo: $a_6 = {a_1}^{e^{6-1}} = {a_1}^{e^5} = (\sqrt[81]{3})^{3^5} = (3^{\frac{1}{81}})^{243} = 3^{\frac{243}{81}} = 3^3 = 27$

3 Determine o segundo, terceiro, quarto, e o sexto termo de uma progressão logarítmica com a_1 = 6 561 e o logaritmo entre dois termos consecutivos igual a $\frac{1}{2}$.

Resolução

$a_n = {a_1}^{e^{n-1}}$;

a_1 = 6 561;

e = $\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{a_2} = {a_1}^{e^{2-1}} = {a_1}^{e}$ = (6 561)$^{\frac{1}{2}}$ = $\sqrt{6\ 561}$ = 81

$\boldsymbol{a_3} = {a_1}^{e^{3-1}} = {a_1}^{e^2}$ = (6 561)$^{\frac{1}{2^2}}$ = $\sqrt[4]{6\ 561}$ = 9

$\boldsymbol{a_4} = {a_1}^{e^{4-1}} = {a_1}^{e^3}$ = (6 561)$^{\frac{1}{2^3}}$ = $\sqrt[8]{6\ 561}$ = 3

$\boldsymbol{a_6} = {a_1}^{e^{6-1}} = {a_1}^{e^5}$ = (6 561)$^{\frac{1}{2^5}}$ = (6 561)$^{\frac{1}{32}}$ = $\sqrt[32]{6\ 561}$ = $(\sqrt[8]{6\ 561})^{\frac{1}{4}}$ = $3^{\frac{1}{4}}$ = $\sqrt[4]{3}$

Discussão

Considerando:

1 **Sucessão:** 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128.
2 **Sucessão:** $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{729}$.
3 **Sucessão:** 3; 9; 27; 81; 243; 729.

Percebe-se que os termos das sucessões **1**, **2**, e **3** são obtidos através de uma constante elevada a termos de uma progressão aritmética:

a) **Sucessão 1**

- $2 = 2$;
- $4 = 2^2$;
- $8 = 2^3$;
- $16 = 2^4$;
- $32 = 2^5$;
- $64 = 2^6$;
- $128 = 2^7$

Para esta sucessão:

- A constante é 2;
- Os termos da progressão aritmética são 1; 2; 3; 4; 5; 6; e 7, em que o primeiro é 1 e a diferença entre dois consecutivos é 1.
- Ainda se nota que a sucessão 1 é progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 2.

b) **Sucessão 2**

- $\frac{1}{9} = (\frac{1}{3})^2$;
- $\frac{1}{81} = (\frac{1}{3})^4$;
- $\frac{1}{729} = (\frac{1}{3})^6$

Para esta sucessão:

- A constante é $\frac{1}{3}$;
- Os termos da progressão aritmética são 2; 4; e 6, em que o primeiro é 2 e a diferença entre dois consecutivos é 2.
- Ainda se nota que a sucessão 2 é progressão geométrica de razão $\frac{1}{9}$ e primeiro termo $\frac{1}{9}$.

c) **Sucessão 3**

- $3 = 3$;
- $9 = 3^2$;

- $27 = 3^3$;
- $81 = 3^4$;
- $243 = 3^5$;
- $729 = 3^6$

Para esta sucessão:

- A constante é 3;
- Os termos da progressão aritmética são 1; 2; 3; 4; 5; e 6, em que o primeiro é 1 e a diferença entre dois consecutivos é 1.
- Ainda se nota que a sucessão 3 é progressão geométrica de razão 3 e primeiro termo 3.

Portanto, cada uma das sucessões 1, 2, e 3, que é progressão geométrica, foi criada por meio de uma constante elevada a progressão aritmética, como se pode ver das demonstrações anteriores.

Em forma de conclusão:

- Uma constante quando elevada a termos de uma progressão aritmética gera uma progressão geométrica.
- Uma constante quando elevada a termos de uma progressão geométrica gera uma progressão logarítmica.

Bibliografia

VUMA, José. **Pré-universitário matemática 12**. Maputo: Longman, 2010.