

Da definição de multiplicação matricial, temos

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (21)$$

para qualquer matriz (quadrada) $\mathbf{A}$. Portanto, a comutatividade é válida para matrizes quadradas se uma delas é a identidade.

9. **Inversa.** A matriz $\mathbf{A}$ é dita **não singular** ou **invertível** se existe uma outra matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é a identidade. Se existe tal $\mathbf{B}$, pode-se mostrar que existe apenas uma. Ela é chamada de inversa multiplicativa, ou, simplesmente, inversa de $\mathbf{A}$, e escrevemos $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Então

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (22)$$

Matrizes que não têm inversas são ditas **singulares** ou **não invertíveis**.

Existem várias maneiras de se calcular $\mathbf{A}^{-1}$ a partir de $\mathbf{A}$, supondo que ela exista. Uma envolve o uso de determinantes. A cada elemento a_{ij} de uma matriz dada associa-se o menor M_{ij} , que é o determinante da matriz obtida excluindo-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna da matriz original – ou seja, a linha e a coluna que contêm o elemento a_{ij} . Além disso, associa-se a cada elemento a_{ij} o cofator C_{ij} definido pela equação

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (23)$$

Se $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, pode-se mostrar que o elemento geral b_{ij} é dado por

$$b_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det \mathbf{A}}. \quad (24)$$

Embora a Eq. (24) não seja um modo eficiente³ de calcular $\mathbf{A}^{-1}$, sugere uma condição que $\mathbf{A}$ precisa satisfazer para ter inversa. De fato, a condição é necessária e suficiente: $\mathbf{A}$ é invertível se, e somente se, $\det \mathbf{A} \neq 0$. Se $\det \mathbf{A} = 0$, então $\mathbf{A}$ é singular.

Outra maneira, geralmente melhor, de calcular $\mathbf{A}^{-1}$ é através de operações elementares sobre as linhas. Existem três dessas operações:

1. Permutar duas linhas.
2. Multiplicar uma linha por um escalar diferente de zero.
3. Somar qualquer múltiplo de uma linha a outra linha.

A transformação de uma matriz por uma sequência de operações elementares é chamada de **redução por linhas** ou **método de eliminação de Gauss**⁴. Qualquer matriz invertível $\mathbf{A}$ pode ser transformada na identidade $\mathbf{I}$ através de uma sequência sistemática dessas operações. É possível mostrar que se a mesma sequência de operações for efetuada em $\mathbf{I}$, então $\mathbf{I}$ é transformada em $\mathbf{A}^{-1}$. É mais eficiente executar a sequência de operações nas duas matrizes ao mesmo tempo, formando a matriz aumentada $\mathbf{A}|\mathbf{I}$. O exemplo a seguir ilustra o cálculo de uma matriz inversa desse modo.

EXEMPLO

2

Encontre a inversa da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Começamos formando a matriz aumentada $\mathbf{A}|\mathbf{I}$:

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

³Para valores grandes de n , o número de multiplicações necessárias para se calcular $\mathbf{A}^{-1}$ pela Eq. (24) é proporcional a $n!$. Com a utilização de métodos mais eficientes, como o procedimento de redução por linhas descrito mais tarde, o número de multiplicações fica proporcional a n^3 apenas. Mesmo para valores pequenos de n (como $n = 4$), determinantes não são ferramentas boas para o cálculo de inversas e métodos de redução por linhas são preferíveis.

⁴Carl Friedrich Gauss (1777-1855) passou a maior parte de sua vida em Göttingen e fez contribuições importantes em muitas áreas da matemática, incluindo teoria dos números, álgebra, geometria não euclidiana e diferencial, e análise, assim como em campos mais aplicados, como geodésica, estatística e mecânica celeste. Considera-se que esteja entre os seis melhores matemáticos de todos os tempos.

A matriz $\mathbf{A}$ pode ser transformada em $\mathbf{I}$ pela sequência de operações a seguir e, ao mesmo tempo, $\mathbf{I}$ é transformada em $\mathbf{A}^{-1}$. O resultado de cada passo parece abaixo do enunciado.

(a) Obtenha zeros na primeira coluna fora da diagonal somando (-3) vezes a primeira linha à segunda e somando (-2) vezes a primeira linha à terceira.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(b) Obtenha 1 na posição diagonal na segunda coluna multiplicando a segunda linha por $\frac{1}{2}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(c) Obtenha zeros na segunda coluna fora da diagonal somando a segunda linha à primeira e somando (-4) vezes a segunda linha à terceira.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

(d) Obtenha 1 na posição diagonal na terceira coluna multiplicando a terceira linha por $(-\frac{1}{5})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right)$$

(e) Obtenha zeros na terceira coluna fora da diagonal somando $(-\frac{3}{2})$ vezes a terceira linha à primeira e somando $(-\frac{5}{2})$ vezes a terceira linha à segunda.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right)$$

A última dessas matrizes é $\mathbf{I}\mathbf{A}^{-1}$, um resultado que pode ser verificado diretamente através da multiplicação pela matriz original $\mathbf{A}$.

Esse exemplo tornou-se ligeiramente mais simples pelo fato de que a matriz original $\mathbf{A}$ tinha o primeiro elemento igual a 1 ($a_{11} = 1$). Se não for esse o caso, então o primeiro passo é produzir 1 nessa posição multiplicando-se a primeira linha por $1/a_{11}$ se $a_{11} \neq 0$. Se $a_{11} = 0$, então a primeira linha tem que ser trocada por outra, de modo a trazer um elemento diferente de zero para o primeiro elemento da primeira linha antes de prosseguir.

Funções Matriciais. Vamos precisar, algumas vezes, considerar vetores ou matrizes cujos elementos são funções de uma variável real t . Escrevemos

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

respectivamente.

A matriz $\mathbf{A}(t)$ é dita contínua em $t = t_0$, ou em um intervalo $\alpha < t < \beta$, se todos os elementos de $\mathbf{A}$ são funções contínuas de t no ponto dado, ou no intervalo dado. Analogamente, $\mathbf{A}$ é dita diferenciável se todos os seus elementos são diferenciáveis e sua derivada $d\mathbf{A}/dt$ é definida por

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt} \right); \quad (26)$$

ou seja, cada elemento de $d\mathbf{A}/dt$ é a derivada do elemento correspondente de $\mathbf{A}$. Do mesmo modo, a integral de uma matriz de funções é definida por

$$\int_a^b \mathbf{A}(t) dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t) dt \right). \quad (27)$$

Por exemplo, se

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix},$$

então

$$\mathbf{A}'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}, \quad \int_0^\pi \mathbf{A}(t) dt = \begin{pmatrix} 2 & \pi^2/2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Muitas das propriedades do cálculo elementar podem ser facilmente estendidas para funções matriciais; em particular,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{CA}) = \mathbf{C} \frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad \text{onde } \mathbf{C} \text{ é uma matriz constante;} \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}; \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{B}. \quad (30)$$

É preciso tomar cuidado em cada termo das Eqs. (28) e (30) para evitar trocar a ordem de multiplicação. As definições expressas pelas Eqs. (26) e (27) também se aplicam ao caso particular de vetores.

PROBLEMAS

1. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, encontre

(a) $2\mathbf{A} + \mathbf{B}$

(b) $\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$

(c) $\mathbf{AB}$

(d) $\mathbf{BA}$

2. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+i & -1+2i \\ 3+2i & 2-i \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}$, encontre

(a) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$

(b) $3\mathbf{A} + \mathbf{B}$

(c) $\mathbf{AB}$

(d) $\mathbf{BA}$

3. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, encontre

(a) $\mathbf{A}^T$

(b) $\mathbf{B}^T$

(c) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(d) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$

4. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3-2i & 1+i \\ 2-i & -2+3i \end{pmatrix}$, encontre

(a) $\mathbf{A}^T$

(b) $\overline{\mathbf{A}}$

(c) $\mathbf{A}^*$

5. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

verifique que $2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$.

6. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

verifique que

(a) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

(b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

(c) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

7. Prove cada uma das propriedades a seguir da álgebra de matrizes:

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

(b) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

(c) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

(d) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

(e) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

(f) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

8. Se $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 1-i \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix}$, encontre

(a) $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$

(b) $\mathbf{y}^T \mathbf{y}$

(c) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

(d) $(\mathbf{y}, \mathbf{y})$

9. Se $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$, mostre que

(a) $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$

(b) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$

Em cada um dos Problemas de 10 a 19, calcule a inversa da matriz dada ou mostre que ela é singular.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

20. Prove que se existem duas matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$, então $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Isso mostra que a matriz $\mathbf{A}$ só pode ter uma inversa.

21. Se $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-t} & 3e^{2t} \\ -e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 3e^t & -e^{-t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$, encontre

(a) $\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$

(b) $\mathbf{AB}$

(c) $d\mathbf{A}/dt$

(d) $\int_0^1 \mathbf{A}(t) dt$

Em cada um dos Problemas de 22 a 24, verifique que o vetor dado satisfaz a equação diferencial dada.

22. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$

23. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t$

24. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

Em cada um dos Problemas 25 e 26, verifique que a matriz dada satisfaz a equação diferencial dada.

$$25. \Psi' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Psi, \quad \Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$26. \Psi' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Psi, \quad \Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} & e^{3t} \\ -4e^t & -e^{-2t} & 2e^{3t} \\ -e^t & -e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

7.3 Sistemas de Equações Lineares Algébricas; Independência Linear, Autovalores e Autovetores

Vamos rever, nesta seção, alguns resultados de álgebra linear que são importantes para a resolução de sistemas lineares de equações diferenciais. Alguns desses resultados são facilmente demonstráveis, outros não; como estamos interessados apenas em resumir uma informação útil de forma compacta, não daremos indicação da demonstração em nenhum dos casos. Todos os resultados nesta seção dependem de alguns fatos básicos sobre sistemas lineares de equações algébricas.

Sistemas Lineares de Equações Algébricas. Um conjunto de n equações algébricas lineares simultâneas em n variáveis

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (1)$$

pode ser escrito como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (2)$$

onde a matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ e o vetor $\mathbf{b}$ são dados, e as componentes de $\mathbf{x}$ têm que ser determinadas. Se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, o sistema é dito **homogêneo**; caso contrário, ele é **não homogêneo**.

Se a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ for invertível – ou seja, se $\det \mathbf{A}$ for diferente de zero – então o sistema (2) terá uma única solução. Como $\mathbf{A}$ é invertível, $\mathbf{A}^{-1}$ existe e a solução pode ser encontrada multiplicando-se cada lado da Eq. (2) à esquerda por $\mathbf{A}^{-1}$; assim,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \quad (3)$$

Em particular, o problema homogêneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, correspondente a $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ na Eq. (2), tem apenas a solução trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Por outro lado, se $\mathbf{A}$ for singular – ou seja, se $\det \mathbf{A}$ é zero – então ou não existe solução da Eq. (2), ou existe, mas não é única. Como $\mathbf{A}$ é singular, $\mathbf{A}^{-1}$ não existe, de modo que a Eq. (3) não é mais válida. O sistema homogêneo

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \quad (4)$$

tem (uma infinidade de) soluções não nulas, além da solução trivial. A situação para o sistema não homogêneo (2) é mais complicada. Esse sistema não tem solução, a menos que o vetor $\mathbf{b}$ satisfaça uma determinada condição. Essa condição é que

$$(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0, \quad (5)$$

para todos os vetores $\mathbf{y}$ tais que $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{A}^*$ é a adjunta de $\mathbf{A}$. Se a condição (5) for satisfeita, então o sistema (2) tem uma infinidade de soluções. Cada uma dessas soluções tem a forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \xi, \quad (6)$$

onde $\mathbf{x}^{(0)}$ é uma solução particular da Eq. (2) e ξ é qualquer solução do sistema homogêneo (4). Note a semelhança entre a Eq. (6) e a solução de uma equação diferencial linear não homogênea. As demonstrações de algumas das afirmações precedentes estão esboçadas nos Problemas de 25 a 30.

Os resultados do parágrafo anterior são importantes para classificar as soluções de sistemas lineares. No entanto, para resolver um sistema particular é melhor, em geral, usar redução por linhas para transformar o sistema em um muito mais simples, do qual a solução (ou as soluções), se existir(em), pode(m) ser escrita(s) facilmente. Para fazer isso de maneira eficiente, podemos formar a matriz aumentada

$$\mathbf{A} | \mathbf{b} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \quad (7)$$

juntando o vetor $\mathbf{b}$ à matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ como uma coluna adicional. A linha pontilhada fica no lugar dos sinais de igualdade e divide a matriz aumentada. Agora efetuamos as operações elementares na matriz aumentada de modo a transformar $\mathbf{A}$ em uma matriz triangular – ou seja, em uma matriz cujos elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos. Uma vez feito isso, é fácil ver se o sistema tem ou não solução e, se tiver, encontrá-las. Observe que as operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada (7) são operações legítimas sobre as equações do sistema (1). O exemplo a seguir ilustra o processo.

EXEMPLO**1**

Resolva o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4. \end{aligned} \quad (8)$$

A matriz aumentada para o sistema (8) é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{array} \right). \quad (9)$$

Vamos agora efetuar operações elementares sobre as linhas da matriz (9) com o objetivo de introduzir zeros na matriz em sua parte inferior à esquerda. Cada passo está descrito, e o resultado é mostrado em seguida.

(a) Some a primeira à segunda linha e some (-2) vezes a primeira linha à terceira.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{array} \right)$$

(b) Multiplique a segunda linha por -1 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{array} \right)$$

(c) Some (-3) vezes a segunda linha à terceira.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

(d) Divida a terceira linha por -4 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

A matriz obtida desse modo corresponde ao sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7, \\ x_2 - x_3 &= -2, \\ x_3 &= 1, \end{aligned} \quad (10)$$

que é equivalente ao sistema original (8). Note que os coeficientes na Eq. (10) formam uma matriz triangular. Da última das Eqs. (10), temos $x_3 = 1$; da segunda, $x_2 = -2 + x_3 = -1$; e, da primeira, $x_1 = 7 + 2x_2 - 3x_3 = 2$. Obtemos, assim,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que é a solução do sistema dado (8). Aliás, como a solução é única, concluímos que a matriz de coeficientes é invertível.

EXEMPLO

2

Discuta as soluções do sistema

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= b_1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= b_2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= b_3\end{aligned}\quad (11)$$

para diversos valores de b_1, b_2 e b_3 .

Observe que os coeficientes no sistema (11) são os mesmos do sistema (8), exceto pelo coeficiente de x_3 na terceira equação. A matriz aumentada do sistema (11) é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & b_1 \\ -1 & 1 & -2 & b_2 \\ 2 & -1 & 3 & b_3 \end{array} \right). \quad (12)$$

Efetuando as operações (a), (b) e (c) como no Exemplo 1, transformamos a matriz (12) em

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & -b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 + 3b_2 + b_3 \end{array} \right). \quad (13)$$

A equação correspondente à terceira linha da matriz (13) é

$$b_1 + 3b_2 + b_3 = 0; \quad (14)$$

logo, o sistema (11) não tem solução, a menos que a condição (14) seja satisfeita por b_1, b_2 e b_3 . É possível mostrar que essa condição é exatamente a Eq. (5) para o sistema (11).

Vamos supor que $b_1 = 2, b_2 = 1$ e $b_3 = -5$, caso em que a Eq. (14) é satisfeita. Então, as duas primeiras linhas da matriz (13) correspondem às equações

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ x_2 - x_3 &= -3.\end{aligned}\quad (15)$$

Para resolver o sistema (15), escolhemos uma das incógnitas arbitrariamente e resolvemos para as outras duas. Fazendo $x_3 = \alpha$, onde α é arbitrário, segue que

$$x_2 = \alpha - 3,$$

$$x_1 = 2(\alpha - 3) - 3\alpha + 2 = -\alpha - 4.$$

Escrevendo a solução em notação vetorial, temos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\alpha - 4 \\ \alpha - 3 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

É fácil verificar que a segunda parcela à direita do segundo sinal de igualdade na Eq. (16) é uma solução do sistema não homogêneo (11), enquanto a primeira parcela é a solução mais geral possível do sistema homogêneo correspondente a (11).

A redução por linhas é também útil na resolução de sistemas homogêneos e de sistemas nos quais o número de equações é diferente do número de incógnitas.

Independência Linear. Um conjunto de k vetores $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ é dito **linearmente dependente** se existe um conjunto de números (complexos) $c_1, \dots, c_k$, nem todos nulos, tais que

$$c_1 \mathbf{x}^{(1)} + \dots + c_k \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}. \quad (17)$$

Em outras palavras, $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ são linearmente dependentes se existe uma relação linear entre eles. Por outro lado, se o único conjunto $c_1, \dots, c_k$ para o qual a Eq. (17) é satisfeita é $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$, então $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ são ditos **linearmente independentes**.

Considere um conjunto de n vetores, cada um deles com n componentes. Seja $x_{ij} = x_i^{(j)}$ a i -ésima componente do vetor $\mathbf{x}^{(j)}$ e seja $\mathbf{X} = (x_{ij})$. Então, a Eq. (17) pode ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{(1)} c_1 + \dots + x_{1n}^{(n)} c_n \\ \vdots \\ x_{n1}^{(1)} c_1 + \dots + x_{nn}^{(n)} c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} c_1 + \dots + x_{1n} c_n \\ \vdots \\ x_{n1} c_1 + \dots + x_{nn} c_n \end{pmatrix} = \mathbf{Xc} = \mathbf{0}. \quad (18)$$

Se $\det \mathbf{X} \neq 0$, então a única solução da Eq. (18) é $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, mas se $\det \mathbf{X} = 0$, existem soluções não nulas. Logo, o conjunto de vetores $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ é linearmente independente se, e somente se, $\det \mathbf{X} \neq 0$.

EXEMPLO

3

Determine se os vetores

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \quad (19)$$

são linearmente independentes ou linearmente dependentes. Se forem linearmente dependentes, encontre uma relação linear entre eles.

Para determinar se $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$ são linearmente dependentes, procuramos constantes c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1 \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \mathbf{x}^{(2)} + c_3 \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}. \quad (20)$$

A Eq. (20) também pode ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

e resolvida através de operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -11 & 0 \end{array} \right). \quad (22)$$

Vamos proceder como nos Exemplos 1 e 2.

(a) Some (-2) vezes a primeira linha à segunda e some a primeira à terceira linha.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \end{array} \right)$$

(b) Divida a segunda linha por -3 ; depois some (-5) vezes a segunda linha à terceira.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Obtemos, assim, o sistema equivalente

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 - 4c_3 &= 0, \\ c_2 - 3c_3 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Da segunda das Eqs. (23) temos $c_2 = c_3$ e, da primeira, obtemos $c_1 = 4c_3 - 2c_2 = -2c_3$. Resolvemos, então para c_1 e c_2 em função de c_3 , com esse último arbitrário. Se escolhermos, por conveniência, $c_3 = -1$, teremos $c_1 = 2$ e $c_2 = -3$. Nesse caso a relação desejada (20) fica

$$2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0},$$

e os vetores dados são linearmente dependentes.

De maneira alternativa, podemos calcular $\det(x_{ij})$, cujas colunas são as componentes de $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$, respectivamente. Assim,

$$\det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix}$$

e cálculos diretos mostram que é zero. Portanto, $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$ são linearmente dependentes. No entanto, se os coeficientes c_1, c_2 e c_3 forem necessários, ainda podemos resolver a Eq. (20) para encontrá-los.

Muitas vezes é útil pensar nas colunas (ou linhas) de uma matriz $\mathbf{A}$ como vetores. Esses vetores colunas (ou linhas) são linearmente independentes se, e somente se, $\det \mathbf{A} \neq 0$. Além disso, se $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, pode-se mostrar que $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$. Portanto, se as colunas (ou linhas) de ambas, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, são linearmente independentes, então as colunas (ou linhas) de $\mathbf{C}$ também o são.

Vamos agora estender os conceitos de dependência e independência linear a um conjunto de funções vetoriais $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ definidas em um intervalo $\alpha < t < \beta$. Os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ são ditos linear-

mente dependentes em $\alpha < t < \beta$ se existir um conjunto de constantes $c_1, \dots, c_k$, não todas nulas, tais que $c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_k \mathbf{x}^{(k)}(t) = \mathbf{0}$ para todo t no intervalo. Caso contrário, $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ são ditos linearmente independentes. Note que se $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ forem linearmente dependentes em um intervalo, então eles serão linearmente dependentes em todos os pontos do intervalo. No entanto, se $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ forem linearmente independentes em um intervalo, eles podem ou não ser linearmente independentes em cada ponto; eles podem, de fato, ser linearmente dependentes em cada ponto mas com um conjunto diferente de constantes em pontos diferentes. Veja o Problema 15 para um exemplo.

Autovalores e Autovetores. A equação

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (24)$$

pode ser vista como uma transformação linear que leva (ou transforma) um vetor dado $\mathbf{x}$ em um novo vetor $\mathbf{y}$. Vetores que são transformados em múltiplos de si mesmo são importantes em muitas aplicações.⁵ Para encontrar tais vetores fazemos $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, onde λ é um fator escalar de proporcionalidade, e procuramos soluções das equações

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad (25)$$

ou

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (26)$$

A última equação tem soluções não nulas se, e somente se, λ for escolhido de modo que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (27)$$

Os valores de λ que satisfazem a Eq. (27) são chamados de **autovalores** da matriz $\mathbf{A}$, e as soluções não nulas correspondentes das Eqs. (25) ou (26), obtidas usando-se tal valor de λ , são chamadas de **autovetores** correspondentes, ou associados, àquele autovalor.

Se $\mathbf{A}$ é uma matriz 2×2 , então a Eq. (26) fica

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

e a Eq. (27) torna-se

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0. \quad (29)$$

O exemplo a seguir ilustra como encontrar autovalores e autovetores.

EXEMPLO

4

Encontre os autovalores e autovetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Os autovalores λ e os autovetores $\mathbf{x}$ satisfazem a equação $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ou

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Os autovalores são as raízes da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0. \quad (32)$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$.

Para encontrar os autovetores, voltamos à Eq. (31) e substituímos λ por um dos autovalores encontrados. Para $\lambda = 2$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

⁵Por exemplo, este problema é encontrado ao se procurar os eixos principais de tensão em um corpo elástico e ao se procurar os modos de vibração livre em um sistema conservativo com um número finito de graus de liberdade.

Logo, cada linha desta equação vetorial leva à condição $x_1 - x_2 = 0$, logo x_1 e x_2 são iguais, mas seus valores não estão determinados. Se $x_1 = c$, então $x_2 = c$ também e o autovetor $\mathbf{x}^{(1)}$ é

$$\mathbf{x}^{(1)} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0. \quad (34)$$

Logo, existe uma família infinita de autovetores, indexada pela constante arbitrária c , correspondendo ao autovalor λ_1 . Escolheremos um único membro dessa família como representante; neste exemplo, parece mais simples escolher $c = 1$. Assim, em vez da Eq. (34), escrevemos

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

e lembramos que qualquer múltiplo não nulo desse vetor também é um autovetor. Dizemos que $\mathbf{x}^{(1)}$ é o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

Fazendo, agora, $\lambda = -1$ na Eq. (31), obtemos

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Mais uma vez obtemos uma única condição sobre x_1 e x_2 , a saber, $4x_1 - x_2 = 0$. Logo, o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_2 = -1$ é

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (37)$$

ou qualquer múltiplo não nulo desse vetor.

Como ilustrado no Exemplo 4, os autovetores são determinados a menos de uma constante multiplicativa não nula; se essa constante é especificada de algum modo, então os autovetores são ditos **normalizados**. No Exemplo 4 escolhemos a constante c para que as componentes dos autovetores fossem inteiros pequenos. No entanto, qualquer outra escolha de c seria igualmente válida, embora talvez não tão conveniente. Algumas vezes é conveniente normalizar um autovetor $\mathbf{x}$ escolhendo a constante de modo que seu comprimento seja $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} = 1$.

A Eq. (27) é uma equação polinomial de grau n em λ , de modo que existem n autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alguns dos quais podem ser repetidos. Se um determinado autovalor aparece m vezes como raiz da Eq. (27), ele é dito de **multiplicidade algébrica** m . Cada autovalor tem pelo menos um autovetor associado, e um autovalor de multiplicidade algébrica m pode ter q autovetores linearmente independentes. O número q é chamado de **multiplicidade geométrica** do autovalor, e pode-se mostrar que

$$1 \leq q \leq m. \quad (38)$$

Além disso, exemplos mostram que q pode ser qualquer inteiro nesse intervalo. Se todos os autovalores de uma matriz $\mathbf{A}$ são **simples** (têm multiplicidade algébrica um), então cada autovalor também tem multiplicidade geométrica um.

É possível mostrar que, se λ_1 e λ_2 forem dois autovalores de $\mathbf{A}$, então seus autovetores correspondentes $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são linearmente independentes (Problema 34). Este resultado pode ser estendido para qualquer conjunto $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de autovalores distintos: seus autovetores $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ são linearmente independentes. Então, se todos os autovalores de uma matriz $n \times n$ forem simples, os n autovetores de $\mathbf{A}$, um para cada autovalor, serão linearmente independentes. Por outro lado, se $\mathbf{A}$ tiver um ou mais autovalores repetidos, então pode ter menos do que n autovetores linearmente independentes, já que um autovalor repetido pode ter $q < m$ autovetores. Como veremos na Seção 7.8, este fato pode levar a complicações mais tarde na resolução de sistemas de equações diferenciais.

EXEMPLO

5

Encontre os autovalores e autovetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Os autovalores λ e os autovetores $\mathbf{x}$ satisfazem a equação $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ou

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Os autovalores são as raízes da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0. \quad (41)$$

As raízes da Eq. (41) são $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -1$. Assim, 2 é um autovalor simples e -1 é um autovalor de multiplicidade algébrica 2, ou um autovalor duplo.

Para encontrar o autovetor $\mathbf{x}^{(1)}$ associado ao autovalor λ_1 , substituímos $\lambda = 2$ na Eq. (40); isso nos leva ao sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Podemos reduzi-lo ao sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

através de operações elementares sobre as linhas. Resolvendo esse sistema, obtemos o autovetor

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Para $\lambda = -1$, a Eq. (40) se reduz imediatamente à única equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \quad (45)$$

Assim, valores para duas das quantidades x_1, x_2 e x_3 podem ser escolhidos arbitrariamente, e o terceiro valor fica determinado pela Eq. (45). Por exemplo, se $x_1 = c_1$ e $x_2 = c_2$, então $x_3 = -c_1 - c_2$. Em notação vetorial, temos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Por exemplo, escolhendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, obtemos o autovetor

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Qualquer múltiplo não nulo de $\mathbf{x}^{(2)}$ também é um autovetor, mas um segundo autovetor independente pode ser encontrado para uma outra escolha de c_1 e c_2 – por exemplo, $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. Nesse caso, obtemos

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (48)$$

que é linearmente independente de $\mathbf{x}^{(2)}$. Portanto, neste exemplo existem dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor duplo.

Uma classe importante de matrizes, chamadas de **autoadjuntas** ou **hermitianas**, é aquela em que $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, ou seja, $\bar{a}_{ji} = a_{ij}$. A classe das matrizes autoadjuntas inclui, como subclasse, as matrizes simétricas reais – ou seja, matrizes com todos os elementos reais tais que $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Os autovalores e autovetores de matrizes autoadjuntas têm as seguintes propriedades úteis:

1. Todos os autovalores são reais.
2. Sempre existe um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes, independentemente das multiplicidades algébricas dos autovalores.
3. Se $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são autovetores correspondentes a autovalores distintos, então $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0$. Logo, se todos os autovalores são simples, os autovetores associados formam um conjunto ortogonal de vetores.
4. É possível escolher m autovetores ortogonais entre si associados a um autovalor de multiplicidade m . Assim, o conjunto completo de n autovetores sempre pode ser escolhido de modo que seja um conjunto ortogonal, além de linearmente independente.

As demonstrações das afirmações 1 e 3 estão esquematizadas nos Problemas 32 e 33. O Exemplo 5 envolve uma matriz simétrica real e ilustra as propriedades 1, 2 e 3, mas a escolha que fizemos para $\mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$ não ilustra a propriedade 4. No entanto, sempre é possível escolher $\mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$ de modo que $(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}) = 0$. Por exemplo, poderíamos ter escolhido, no Exemplo 5, $\mathbf{x}^{(2)}$ como antes e $\mathbf{x}^{(3)}$ usando $c_1 = 1$ e $c_2 = -2$ na Eq. (46). Dessa forma, obteríamos

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$. Esses autovetores são ortogonais entre si e são, também, ortogonais ao autovetor $\mathbf{x}^{(1)}$ associado ao autovalor $\lambda = 2$.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, resolva o conjunto de equações dado ou mostre que não tem solução.

1. $x_1 - x_3 = 0$
 $3x_1 + x_2 + x_3 = 1$
 $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$
2. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$
 $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$
 $x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$
3. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$
 $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$
 $x_1 - x_2 + 2x_3 = -1$
4. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$
 $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$
 $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
5. $x_1 - x_3 = 0$
 $3x_1 + x_2 + x_3 = 0$
 $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$
6. $x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$
 $-2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4$
 $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -4$

Em cada um dos Problemas de 7 a 11, determine se o conjunto de vetores dado é linearmente independente. Se for linearmente dependente, encontre uma relação linear entre os vetores. Os vetores estão escritos na forma de linhas para economizar espaço, mas podem ser considerados como vetores colunas, ou seja, podem ser usadas as transpostas dos vetores dados, em vez dos próprios vetores.

7. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (1, 0, 1)$
8. $\mathbf{x}^{(1)} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 2, 0)$
9. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, 2, 3)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (-1, 0, 3, 1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-2, -1, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (-3, 0, -1, 3)$
10. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (2, 3, 1, -1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 0, 2, 2)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (3, -1, 1, 3)$
11. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (3, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (4, 3, -2)$
12. Suponha que cada um dos vetores $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ tem n componentes, onde $n < m$. Mostre que $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ são linearmente dependentes.

Em cada um dos Problemas 13 e 14, determine se o conjunto de vetores dado é linearmente independente para $-\infty < t < \infty$. Se for linearmente dependente, encontre uma relação linear entre os vetores. Como nos Problemas de 7 a 10, os vetores estão escritos como linhas para economizar espaço.

13. $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (e^{-t}, 2e^{-t})$, $\mathbf{x}^{(2)}(t) = (e^{-t}, e^{-t})$, $\mathbf{x}^{(3)}(t) = (3e^{-t}, 0)$
14. $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (2 \sin t, \sin t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t) = (\sin t, 2 \sin t)$
15. Sejam

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Mostre que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ são linearmente dependentes em cada ponto do intervalo $0 \leq t \leq 1$. Apesar disso, mostre que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ são linearmente independentes em $0 \leq t \leq 1$.

Em cada um dos Problemas de 16 a 25, encontre todos os autovalores e autovetores da matriz dada.

16. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} -3 & 3/4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 11/9 & -2/9 & 8/9 \\ -2/9 & 2/9 & 10/9 \\ 8/9 & 10/9 & 5/9 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Os problemas de 26 a 30 tratam da resolução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ quando $\det \mathbf{A} = 0$.

26. (a) Suponha que $\mathbf{A}$ é uma matriz real $n \times n$. Mostre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^T \mathbf{y})$ quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
Sugestão: você pode achar mais simples considerar primeiro o caso $n = 2$; depois estenda o resultado para um valor arbitrário de n .
 (b) Se $\mathbf{A}$ não for necessariamente real, mostre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^* \mathbf{y})$ quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
 (c) Se $\mathbf{A}$ for hermitiana, mostre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ay})$ quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
27. Suponha que para uma matriz dada $\mathbf{A}$ existe um vetor não nulo $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Mostre que existe, também, um vetor não nulo $\mathbf{y}$ tal que $\mathbf{A}^* \mathbf{y} = \mathbf{0}$.
28. Suponha que $\det \mathbf{A} = 0$ e que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução. Mostre que $(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0$, onde $\mathbf{y}$ é qualquer solução de $\mathbf{A}^* \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Verifique que essa afirmação é verdadeira para o conjunto de equações no Exemplo 2.
Sugestão: use o resultado do Problema 26(b).
29. Suponha que $\det \mathbf{A} = 0$ e que $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$ é uma solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Mostre que se ξ é uma solução de $\mathbf{A}\xi = \mathbf{0}$ e α é qualquer constante, então $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha\xi$ também é solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
30. Suponha que $\det \mathbf{A} = 0$ e que $\mathbf{y}$ é uma solução de $\mathbf{A}^* \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Mostre que se $(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0$ para qualquer desses $\mathbf{y}$, então $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução. Note que isso é a recíproca do Problema 28; a forma da solução é dada pelo Problema 29.
Sugestão: o que a relação $\mathbf{A}^* \mathbf{y} = \mathbf{0}$ diz sobre as linhas de $\mathbf{A}$? Novamente, pode ajudar considerar o caso $n = 2$ primeiro.
31. Prove que $\lambda = 0$ é um autovalor de $\mathbf{A}$ se, e somente se, $\mathbf{A}$ é singular.
32. Vamos mostrar, neste problema, que os autovalores de uma matriz autoadjunta $\mathbf{A}$ são reais. Seja $\mathbf{x}$ um autovetor associado ao autovalor λ .
 (a) Mostre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$. *Sugestão:* veja o Problema 26(c).
 (b) Mostre que $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. *Sugestão:* lembre que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.
 (c) Mostre que $\lambda = \bar{\lambda}$, ou seja, o autovalor λ é real.
33. Mostre que, se λ_1 e λ_2 são autovalores de uma matriz $\mathbf{A}$ autoadjunta e se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então os autovetores correspondentes $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são ortogonais.
Sugestão: use os resultados dos Problemas 26(c) e 32 para mostrar que $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0$.
34. Mostre que, se λ_1 e λ_2 são autovalores de uma matriz $\mathbf{A}$ qualquer e se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então os autovetores correspondentes $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são linearmente independentes.
Sugestão: comece com $c_1 \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{0}$; multiplique por $\mathbf{A}$ para obter $c_1 \lambda_1 \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \lambda_2 \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{0}$. Depois mostre que $c_1 = c_2 = 0$.

7.4 Teoria Básica de Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem

A teoria geral para sistemas de n equações lineares de primeira ordem

$$x'_1 = p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t),$$

$$\vdots$$

$$x'_n = p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t)$$

(1)

é bastante semelhante à teoria para uma única equação linear de ordem n . A discussão nesta seção, portanto, segue as mesmas linhas gerais daquela feita nas Seções 3.2 e 4.1. Para discutir o sistema (1) de maneira mais eficiente, usaremos notação matricial. Ou seja, vamos considerar $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ como componentes de um vetor $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$; analogamente, $g_1(t), \dots, g_n(t)$ são componentes de um vetor $\mathbf{g}(t)$ e $p_{11}(t), \dots, p_{nn}(t)$ são elementos de uma matriz $n \times n$ $\mathbf{P}(t)$. A Eq. (1) fica, então, na forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (2)$$

A utilização de vetores e matrizes não só economiza muito espaço e facilita os cálculos, mas também enfatiza a semelhança entre sistemas de equações e uma única equação (escalar).

Dizemos que um vetor $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ é uma solução da Eq. (2) se suas componentes satisfazem o sistema de equações (1). Ao longo desta seção, vamos supor que $\mathbf{P}$ e $\mathbf{g}$ são contínuas em algum intervalo $\alpha < t < \beta$, ou seja, as funções escalares $p_{11}, \dots, p_{nn}, g_1, \dots, g_n$ são contínuas nesse intervalo. De acordo com o Teorema 7.1.2, isso é suficiente para garantir a existência de soluções da Eq. (2) no intervalo $\alpha < t < \beta$.

É conveniente considerar primeiro a equação homogênea

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \quad (3)$$

obtida da Eq. (2) fazendo-se $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$. Uma vez resolvida a equação homogênea, existem diversos métodos para se resolver a equação não homogênea (2); isso será feito na Seção 7.9. Usaremos a notação

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \quad \dots \quad (4)$$

para denotar soluções específicas do sistema (3). Note que $x_{ij}(t) = x_i^{(j)}(t)$ denota a i -ésima componente da j -ésima solução $\mathbf{x}^{(j)}(t)$. Os fatos principais sobre a estrutura das soluções do sistema (3) estão enunciados nos Teoremas de 7.4.1 a 7.4.4. Eles são bastante semelhantes aos teoremas correspondentes nas Seções 3.2 e 4.1; algumas das demonstrações ficam como exercício para o leitor.

Teorema 7.4.1 Se as funções vetoriais $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são soluções do sistema (3), então a combinação linear $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ também é solução quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2 .

Esse é o princípio da superposição; para prová-lo, basta derivar $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ e usar o fato de que $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ satisfazem a Eq. (3). Aplicando repetidamente o Teorema 7.4.1, chegamos à conclusão de que, se $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ são soluções da Eq. (3), então

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_k\mathbf{x}^{(k)}(t) \quad (5)$$

também é solução quaisquer que sejam as constantes $c_1, \dots, c_k$. Como exemplo, pode-se verificar que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (6)$$

satisfazem a equação

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (7)$$

De acordo com o Teorema 7.4.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \\ &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

também satisfaz a Eq. (7).

Como indicamos antes, aplicando repetidamente o Teorema 7.4.1 segue que toda combinação linear finita de soluções da Eq. (3) também é solução. A questão, agora, é saber se todas as soluções da Eq. (3) podem ser encontradas dessa maneira. Por analogia com casos anteriores é razoável esperar que para um sistema da forma (3) de ordem n seja suficiente formar combinações lineares de n soluções escolhidas apropriadamente. Sejam, então, $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ n soluções do sistema (3) de ordem n e considere a matriz $\mathbf{X}(t)$ cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Lembre-se, da Seção 7.3, de que as colunas de $\mathbf{X}(t)$ são linearmente independentes para um valor dado de t se, e somente se, $\det \mathbf{X} \neq 0$ para esse valor de t . Esse determinante é chamado de wronskiano das n soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ e denotado por $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$, ou seja,

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}](t) = \det \mathbf{X}(t). \quad (10)$$

Então, as soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ são linearmente independentes em um ponto se, e somente se, $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ não é zero nesse ponto.

Teorema 7.4.2 Se as funções vetoriais $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ são soluções linearmente independentes do sistema (3) em cada ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$, então cada solução $\mathbf{x} = \phi(t)$ do sistema (3) pode ser expressa como uma combinação linear de $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$,

$$\phi(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t) \quad (11)$$

de exatamente um modo.

Antes de provar o Teorema 7.4.2, note que de acordo com o Teorema 7.4.1 todas as expressões da forma (11) são soluções do sistema (3), enquanto que pelo Teorema 7.4.2 todas as soluções da Eq. (3) podem ser escritas na forma (11). Se pensarmos nas constantes $c_1, \dots, c_n$ como arbitrárias, então a Eq. (11) inclui todas as soluções do sistema (3), e é costume chamá-la de **solução geral**. Qualquer conjunto de soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ da Eq. (3) que seja linearmente independente em cada ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$ é chamado de **conjunto fundamental de soluções** para esse intervalo.

Para provar o Teorema 7.4.2 vamos mostrar que, dada qualquer solução ϕ da Eq. (3), $\phi(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}$ para valores apropriados de $c_1, \dots, c_n$. Seja $t = t_0$ algum ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$ e seja $\xi = \phi(t_0)$. Queremos determinar se existe alguma solução da forma $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}$ que também satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \xi$. Em outras palavras, queremos saber se existem valores $c_1, \dots, c_n$ para os quais

$$c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \xi, \quad (12)$$

ou, em forma escalar,

$$\begin{aligned} c_1 x_{11}(t_0) + \cdots + c_n x_{1n}(t_0) &= \xi_1, \\ &\vdots \\ c_1 x_{n1}(t_0) + \cdots + c_n x_{nn}(t_0) &= \xi_n. \end{aligned} \quad (13)$$

A condição necessária e suficiente para que as Eqs. (13) possuam uma única solução $c_1, \dots, c_n$ é exatamente que o determinante da matriz dos coeficientes, que é o wronskiano $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ no ponto t_0 , seja diferente de zero. A hipótese de que $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ são linearmente independentes em todo o intervalo $\alpha < t < \beta$ garante que $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ não se anula em $t = t_0$ e, portanto, existe uma (única) solução da Eq. (3) da forma $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}$ que também satisfaz a condição inicial (12). Pela unicidade no Teorema 7.1.2, essa solução é idêntica a $\phi(t)$, logo $\phi(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}$, como queríamos provar.

Teorema 7.4.3 Se $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ são soluções da Eq. (3) no intervalo $\alpha < t < \beta$, então $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ ou é identicamente nulo ou nunca se anula nesse intervalo.

A importância do Teorema 7.4.3 reside no fato de que nos livra da necessidade de examinar $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ em todos os pontos do intervalo de interesse e nos permite determinar se $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ forma um conjunto fundamental de soluções simplesmente calculando seu wronskiano em qualquer ponto conveniente do intervalo.

A demonstração do Teorema 7.4.3 é feita estabelecendo-se, primeiro, que o wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ satisfaz a equação diferencial (veja o Problema 2)

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{nn})W. \quad (14)$$

Logo,

$$W(t) = c \exp \left\{ \int [p_{11}(t) + \cdots + p_{nn}(t)] dt \right\}, \quad (15)$$

onde c é uma constante arbitrária e a conclusão do teorema segue imediatamente. A expressão para $W(t)$ na Eq. (15) é conhecida como a fórmula de Abel; observe a semelhança com a Eq. (27) da Seção 3.2.

De maneira alternativa, o Teorema 7.4.3 também pode ser demonstrado provando-se que se n soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ da Eq. (3) forem linearmente dependentes em um ponto $t = t_0$, então serão linearmente dependentes em todos os pontos em $\alpha < t < \beta$ (veja o Problema 8). Em consequência, se $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ forem linearmente independentes em um ponto, terão que ser linearmente independentes em todos os pontos do intervalo.

O próximo teorema diz que o sistema (3) tem pelo menos um conjunto fundamental de soluções.

Teorema 7.4.4 Sejam

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

além disso, suponha que $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ são soluções do sistema (3) satisfazendo as condições iniciais

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{e}^{(1)}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \mathbf{e}^{(n)}, \quad (16)$$

respectivamente, onde t_0 é um ponto qualquer no intervalo $\alpha < t < \beta$. Então $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema (3).

Para provar este teorema, note que a existência e a unicidade das soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ mencionadas no Teorema 7.4.4 são garantidas pelo Teorema 7.1.2. Não é difícil ver que o wronskiano dessas soluções é igual a 1 quando $t = t_0$; portanto, $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ é um conjunto fundamental de soluções.

Uma vez encontrado um conjunto fundamental de soluções, podem ser gerados outros conjuntos através de combinações lineares (independentes) do primeiro conjunto. Para fins teóricos o conjunto dado pelo Teorema 7.4.4 é, em geral, o mais simples possível.

Resumindo:

1. Qualquer conjunto de n soluções linearmente independentes do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ constitui um conjunto fundamental de soluções.
2. Sob as condições dadas nesta seção, tais conjuntos fundamentais sempre existem.
3. Toda solução do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ pode ser representada como uma combinação linear de qualquer conjunto fundamental de soluções.

PROBLEMAS

1. Prove a afirmação feita logo após o Teorema 7.4.1 para um valor arbitrário do inteiro k .
2. Neste problema vamos esquematizar a demonstração do Teorema 7.4.3 no caso $n = 2$. Sejam $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ soluções da Eq. (3) para $\alpha < t < \beta$ e seja W o wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$.

(a) Mostre que

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} & \frac{dx_1^{(2)}}{dt} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \frac{dx_2^{(1)}}{dt} & \frac{dx_2^{(2)}}{dt} \end{vmatrix}.$$

(b) Usando a Eq. (3), mostre que

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22})W.$$

- (c) Encontre $W(t)$ resolvendo a equação diferencial obtida no item (b). Use esta expressão para obter a conclusão enunciada no Teorema 7.4.3.
- (d) Demonstre o Teorema 7.4.3 para um valor arbitrário de n generalizando os procedimentos dos itens (a), (b) e (c).
3. Mostre que os wronskianos de dois conjuntos fundamentais de soluções do sistema (3) podem diferir, no máximo, por uma constante multiplicativa.

Sugestão: use a Eq. (15).

- (4) Se $x_1 = y$ e $x_2 = y'$, então a equação de segunda ordem

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (i)$$

corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -q(t)x_1 - p(t)x_2. \end{aligned} \quad (ii)$$

Mostre que, se $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formarem um conjunto fundamental de soluções para as Eqs. (ii) e se $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ formarem um conjunto fundamental de soluções para a Eq. (i), então $W[y^{(1)}, y^{(2)}] = cW[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}]$, onde c é uma constante não nula.

Sugestão: $y^{(1)}(t)$ e $y^{(2)}(t)$ têm que ser combinações lineares de $x_{11}(t)$ e $x_{12}(t)$.

- (5) Mostre que a solução geral de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ é a soma de qualquer solução particular $\mathbf{x}^{(p)}$ dessa equação com a solução geral $\mathbf{x}^{(c)}$ da equação homogênea associada.

6. Considere os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$.

- (a) Calcule o wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$.
- (b) Em que intervalos $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são linearmente independentes?
- (c) Que conclusão pode-se tirar sobre os coeficientes no sistema homogêneo de equações diferenciais satisfeito por $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$?
- (d) Encontre esse sistema de equações e verifique as conclusões do item (c).

- (7) Considere os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, e responda às mesmas perguntas existentes no Problema 6.

Os dois problemas a seguir indicam uma outra demonstração para o Teorema 7.4.2.

8. Sejam $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ soluções de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ no intervalo $\alpha < t < \beta$. Suponha que $\mathbf{P}$ é contínua e seja t_0 um ponto arbitrário no intervalo dado. Mostre que $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ são linearmente dependentes para $\alpha < t < \beta$ se (e somente se) $\mathbf{x}^{(1)}(t_0), \dots, \mathbf{x}^{(m)}(t_0)$ são linearmente dependentes. Em outras palavras, $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ são linearmente dependentes no intervalo (α, β) se forem linearmente dependentes em qualquer ponto nele.

Sugestão: existem constantes $c_1, \dots, c_m$ tais que $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \dots + c_m\mathbf{x}^{(m)}(t_0) = \mathbf{0}$. Seja $\mathbf{z}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_m\mathbf{x}^{(m)}(t)$ e use o teorema de unicidade para mostrar que $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$ para todo t em $\alpha < t < \beta$.

9. Sejam $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ soluções linearmente independentes de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, onde $\mathbf{P}$ é contínua em $\alpha < t < \beta$.

- (a) Mostre que qualquer solução $\mathbf{x} = \mathbf{z}(t)$ pode ser escrita na forma

$$\mathbf{z}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$$

para constantes apropriadas $c_1, \dots, c_n$.

Sugestão: use o resultado do Problema 12 da Seção 7.3 e o Problema 8.

- (b) Mostre que a expressão para a solução $\mathbf{z}(t)$ no item (a) é única, ou seja, se $\mathbf{z}(t) = k_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + k_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$, então $k_1 = c_1, \dots, k_n = c_n$.

Sugestão: mostre que $(k_1 - c_1)\mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + (k_n - c_n)\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{0}$ para todo t em $\alpha < t < \beta$ e use a independência linear de $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$.

7.5 Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Vamos concentrar a maior parte da nossa atenção em sistemas de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, ou seja, sistemas da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1)$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante $n \times n$. A menos que se diga o contrário, suporemos que todos os elementos de $\mathbf{A}$ são números reais (e não complexos).

Se $n = 1$, o sistema se reduz a uma única equação de primeira ordem

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad (2)$$

cujas soluções são $x = ce^{at}$. Observamos, na Seção 2.5, que $x = 0$ é a única solução de equilíbrio se $a \neq 0$. Outras soluções tendem a $x = 0$ se $a < 0$ e, nesse caso, dizemos que $x = 0$ é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável. Por outro lado, se $a > 0$, então $x = 0$ é instável, já que as outras soluções se distanciam dela. Para sistemas de n equações a situação é análoga, de certa forma, embora mais complicada. Soluções de equilíbrio são encontradas resolvendo-se $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Em geral, vamos supor que $\det \mathbf{A} \neq 0$, de modo que a única solução de equilíbrio é $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Uma pergunta importante é se outras soluções se aproximam ou se afastam dessa quando t aumenta; em outras palavras, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável ou instável? Existem outras possibilidades?

O caso $n = 2$ é particularmente importante e permite visualização no plano x_1x_2 , chamado o **plano de fase**. Calculando $\mathbf{Ax}$ em um grande número de pontos e fazendo o gráfico dos vetores resultantes, obtemos um **campo de direções** de vetores tangentes a soluções do sistema de equações diferenciais. Pode-se obter, em geral, uma compreensão qualitativa do comportamento de soluções através de um campo de direções. Incluindo-se no gráfico algumas curvas-soluções, ou trajetórias, pode-se obter informação mais precisa. Um gráfico contendo uma amostra representativa de trajetórias para um sistema dado é chamado um **retrato de fase**. Veremos mais tarde, nesta seção, exemplos de campos de direções e retratos de fase.

Para construir soluções do sistema (1) tentaremos generalizar o tratamento de equações lineares de segunda ordem da Seção 3.1. Vamos supor, então, que uma solução vai envolver uma função exponencial e^{rt} . Além disso, soluções da Eq. (1) são vetores, logo vamos multiplicar e^{rt} por um vetor constante ξ . Assim, procuramos soluções da Eq. (1) da forma

$$\mathbf{x} = \xi e^{rt}, \quad (3)$$

onde o expoente r e o vetor ξ devem ser determinados. Substituindo $\mathbf{x}$ dado pela Eq. (3) no sistema (1), obtemos

$$r\xi e^{rt} = \mathbf{A}\xi e^{rt}.$$

Cancelando o fator escalar não nulo e^{rt} , obtemos $\mathbf{A}\xi = r\xi$, ou

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}, \quad (4)$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade $n \times n$. Então, para resolver o sistema de equações diferenciais (1) precisamos resolver o sistema de equações algébricas (4). Esse último problema é precisamente o que determina os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$. Portanto, o vetor $\mathbf{x}$ dado pela Eq. (3) é uma solução da Eq. (1), desde que r seja um autovalor e ξ seja um autovetor associado da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

Os dois exemplos a seguir ilustram o procedimento para se encontrar a solução no caso de matrizes de coeficientes 2×2 . Vamos mostrar, também, como construir os retratos de fase correspondentes. Mais adiante, nesta seção, vamos discutir mais o sistema geral $n \times n$.

EXEMPLO

1

Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (5)$$

Faça um gráfico do campo de direções e determine o comportamento qualitativo das soluções. Depois encontre a solução geral e desenhe diversas trajetórias.

A Figura 7.5.1 mostra um campo de direções para esse sistema. Dessa figura é fácil ver que uma solução típica se afasta da vizinhança da origem e acaba tendo retas tangentes com coeficientes angulares de aproximadamente 2 no primeiro ou no terceiro quadrante.

Para encontrar explicitamente soluções, vamos supor que $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$ e substituir na Eq. (5). Somos levados ao sistema de equações algébricas

$$\begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

As Eqs. (6) têm uma solução não trivial se, e somente se, o determinante da matriz de coeficientes é zero. Logo, os valores permitidos para r são encontrados pela equação

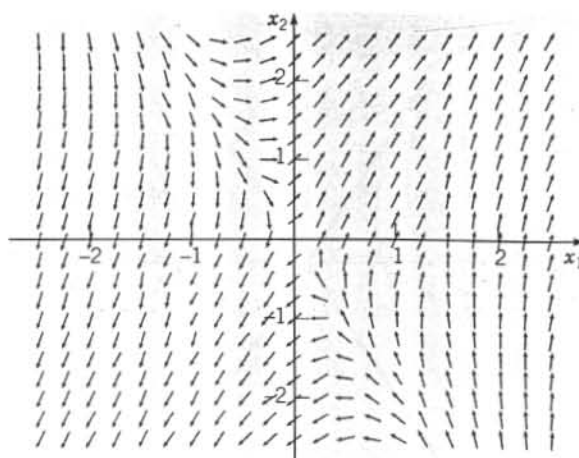


FIGURA 7.5.1 Campo de direções para o sistema (5).

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4 \\ = r^2 - 2r - 3 = 0. \quad (7)$$

A Eq. (7) tem raízes $r_1 = 3$ e $r_2 = -1$; esses são os autovalores da matriz de coeficientes na Eq. (5). Se $r = 3$, o sistema (6) se reduz a uma única equação

$$-2\xi_1 + \xi_2 = 0. \quad (8)$$

Logo, $\xi_2 = 2\xi_1$ e o autovetor correspondente a $r_1 = 3$ pode ser escolhido como

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Analogamente, correspondendo a $r_2 = -1$ encontramos que $\xi_2 = -2\xi_1$, de modo que o autovetor é

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

As soluções correspondentes da equação diferencial são

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (11)$$

O wronskiano dessas soluções é

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -4e^{2t}, \quad (12)$$

que nunca se anula. Portanto, as soluções $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções, e a solução geral do sistema (5) é

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}, \end{aligned} \quad (13)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Para visualizar a solução (13), ajuda considerarmos seu gráfico no plano x_1, x_2 para diversos valores das constantes c_1 e c_2 . Começamos com $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t)$ ou, em forma escalar,

$$x_1 = c_1 e^{3t}, \quad x_2 = 2c_1 e^{3t}.$$

Eliminando t nessas duas equações, vemos que essa solução pertence à reta $x_2 = 2x_1$; veja a Figura 7.5.2a. Esta é a reta que contém a origem e tem a direção do autovetor $\xi^{(1)}$. Se olharmos a solução como a trajetória de uma partícula em movimento, então a partícula está no primeiro quadrante quando $c_1 > 0$ e no terceiro quando $c_1 < 0$. Em qualquer desses casos, a partícula se afasta da origem quando t aumenta. Considere agora $\mathbf{x} = c_2 \mathbf{x}^{(2)}$, ou

$$x_1 = c_2 e^{-t}, \quad x_2 = -2c_2 e^{-t}.$$

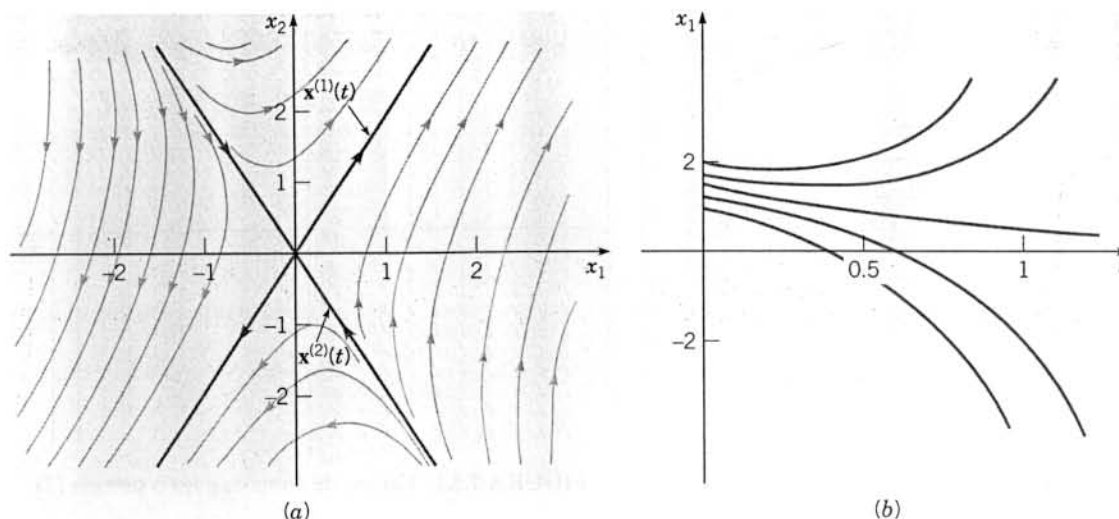


FIGURA 7.5.2 (a) Trajetórias do sistema (5); a origem é um ponto de sela. (b) Gráficos de x_1 em função de t para o sistema (5).

Essa solução pertence à reta $x_2 = -2x_1$, cuja direção é determinada pelo autovetor $\xi^{(2)}$. A solução está no quarto quadrante quando $c_2 > 0$ e no segundo quando $c_2 < 0$, como mostra a Figura 7.5.2a. Em ambos os casos a partícula se aproxima da origem quando t aumenta. A solução (13) é uma combinação de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$. Para valores grandes de t , a parcela $c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t)$ é dominante e a parcela $c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t)$ torna-se desprezível. Logo, todas as soluções para as quais $c_1 \neq 0$ são assintóticas à reta $x_2 = 2x_1$ quando $t \rightarrow \infty$. Analogamente, todas as soluções para as quais $c_2 \neq 0$ são assintóticas à reta $x_2 = -2x_1$ quando $t \rightarrow -\infty$. A Figura 7.5.2a mostra o gráfico de diversas soluções. O padrão de trajetórias nessa figura é típico de sistemas 2×2 $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ para os quais os autovalores são reais e têm sinais opostos. A origem é chamada de **ponto de sela** neste caso. Pontos de sela são sempre instáveis, porque quase todas as trajetórias se afastam dele quando t aumenta.

No parágrafo precedente descrevemos como desenhar, manualmente, um esboço qualitativamente correto das trajetórias de um sistema como na Eq. (5), uma vez determinados os autovalores e autovetores. No entanto, para produzir um desenho detalhado e preciso como na Figura 7.5.2a e em outras figuras que aparecem mais adiante neste capítulo um computador é extremamente útil, se não indispensável.

Como alternativa à Figura 7.5.2a você pode fazer, também, o gráfico de x_1 , ou de x_2 , como função de t ; alguns gráficos típicos de x_1 em função de t aparecem na Figura 7.5.2b, e os de x_2 em função de t são semelhantes. Para determinadas condições iniciais $c_1 = 0$ na Eq. (13), de modo que $x_1 = c_2 e^{-t}$ e $x_1 \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. A Figura 7.5.2b mostra um desses gráficos, correspondente à trajetória que se aproxima da origem na Figura 7.5.2a. Para a maioria das condições iniciais, no entanto, $c_1 \neq 0$ e x_1 é dado por $c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$. A presença da parcela contendo uma exponencial positiva faz com que x_1 cresça exponencialmente em módulo quando t aumenta. A Figura 7.5.2b mostra diversos gráficos desse tipo, correspondendo a trajetórias que se afastam da origem na Figura 7.5.2a. É importante compreender a relação entre as partes (a) e (b) da Figura 7.5.2 e de outras figuras semelhantes que aparecerão mais tarde, já que você pode querer visualizar soluções no plano x_1, x_2 ou como funções da variável independente t .

EXEMPLO

2

Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (14)$$

Desenhe um campo de direções para este sistema; depois encontre a solução geral e faça o gráfico de diversas trajetórias no plano de fase.

O campo de direções para o sistema (14) na Figura 7.5.3 mostra claramente que todas as soluções se aproximam da origem. Para encontrar soluções, suponha que $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$; obtemos, então, o sistema algébrico

$$\begin{pmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Os autovalores satisfazem

$$\begin{aligned} (-3-r)(-2-r) - 2 &= r^2 + 5r + 4 \\ &= (r+1)(r+4) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

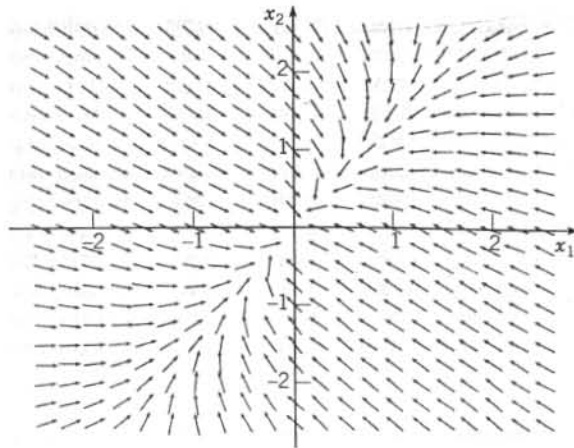


FIGURA 7.5.3 Campo de direções para o sistema (14).

de modo que $r_1 = -1$ e $r_2 = -4$. Para $r = -1$, a Eq. (15) fica

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Logo, $\xi_2 = \sqrt{2}\xi_1$, e o autovetor $\xi^{(1)}$ associado ao autovalor $r_1 = -1$ pode ser escolhido como

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Analogamente, correspondendo ao autovalor $r_2 = -4$, temos $\xi_1 = -\sqrt{2}\xi_2$, de modo que o autovetor é

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

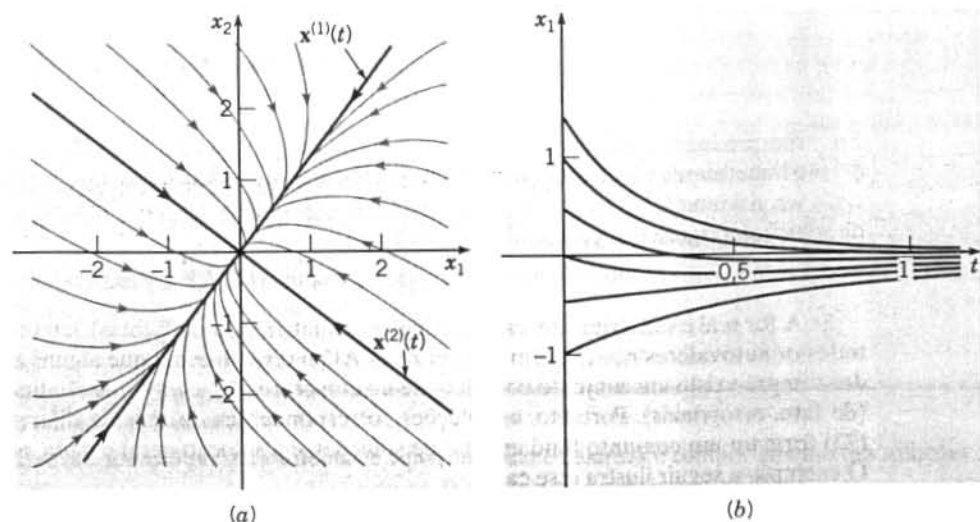
Portanto, um conjunto fundamental de soluções para o sistema (14) é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}, \quad (20)$$

e a solução geral é

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}. \quad (21)$$

A Figura 7.5.4a mostra gráficos da solução (21) para diversos valores de c_1 e c_2 . A solução $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ se aproxima da origem ao longo da reta $x_2 = \sqrt{2}x_1$, enquanto a solução $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ se aproxima da origem ao longo da reta

FIGURA 7.5.4 (a) Trajetórias do sistema (14); a origem é um nó. (b) Gráfico de x_1 em função de t para o sistema (14).

$x_1 = -\sqrt{2}x_2$. As direções dessas retas são determinadas pelos autovetores $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$, respectivamente. Temos, em geral, uma combinação dessas duas soluções fundamentais. Quando $t \rightarrow \infty$, $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ é desprezível em comparação com $\mathbf{x}^{(1)}(t)$. Então, a menos que $c_1 = 0$, a solução (21) se aproxima da origem tangente à reta $x_2 = \sqrt{2}x_1$. O padrão de trajetórias ilustrado na Figura 7.5.4a é típico de todos os sistemas $2 \times 2 \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ para os quais os autovalores são reais, distintos e de mesmo sinal. A origem é chamada de **nó** para tais sistemas. Se os autovalores fossem positivos, em vez de negativos, as trajetórias seriam semelhantes, mas o sentido de percurso seria no sentido oposto. Os nós serão assintoticamente estáveis se os autovalores forem negativos, e instáveis se forem positivos.

Embora a Figura 7.5.4a tenha sido gerada por computador, um esboço qualitativamente correto das trajetórias pode ser feito rapidamente à mão, baseado no conhecimento dos autovalores e autovetores.

A Figura 7.5.4b mostra gráficos típicos de x_1 em função de t . Note que cada um dos gráficos se aproxima assintoticamente do eixo dos t quando t aumenta, correspondendo a uma trajetória que se aproxima da origem na Figura 7.5.4a. O comportamento de x_2 como função de t é análogo.

Os dois exemplos precedentes ilustram os dois casos principais para um sistema 2×2 com autovalores reais distintos: os autovalores têm sinais opostos (Exemplo 1) ou o mesmo sinal (Exemplo 2). Outra possibilidade é zero ser autovalor, mas nesse caso $\det \mathbf{A} = 0$, o que contradiz a hipótese feita no início desta seção. No entanto, veja os Problemas 7 e 8.

Voltando ao sistema geral (1), procedemos como nos exemplos. Para encontrar soluções da equação diferencial (1) precisamos encontrar os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$ a partir do sistema algébrico (4). Os autovalores $r_1, \dots, r_n$ (que não precisam ser distintos) são raízes da equação polinomial de grau n

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \quad (22)$$

A natureza dos autovalores e dos autovetores associados determina a natureza da solução geral do sistema (1). Se supusermos que $\mathbf{A}$ é uma matriz real, existem três possibilidades para os autovalores de $\mathbf{A}$:

1. Todos os autovalores são reais e distintos entre si.
2. Alguns autovalores ocorrem em pares complexos conjugados.
3. Alguns autovalores são repetidos.

Se os autovalores forem reais e distintos, como nos dois exemplos precedentes, então existe um autovetor real $\xi^{(i)}$ associado a cada autovalor r_i e o conjunto de n autovetores $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ é linearmente independente. As soluções correspondentes do sistema diferencial (1) são

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{r_1 t}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(t) = \xi^{(n)} e^{r_n t}. \quad (23)$$

Para mostrar que essas soluções formam um conjunto fundamental, calculamos seu wronskiano:

$$\begin{aligned} W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}](t) &= \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{vmatrix} \\ &= e^{(r_1 + \dots + r_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

Em primeiro lugar, note que a função exponencial nunca se anula. Segundo, como os autovetores $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ são linearmente independentes, o último determinante na Eq. (24) é diferente de zero. Em consequência, o wronskiano $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}](t)$ nunca se anula; portanto, $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções. Logo, a solução geral da Eq. (1) é

$$\mathbf{x} = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t}. \quad (25)$$

Se $\mathbf{A}$ for real e simétrica (um caso particular de matrizes autoadjuntas), lembre-se, da Seção 7.3, de que todos os autovalores $r_1, \dots, r_n$ têm que ser reais. Além disso, mesmo que alguns autovalores sejam repetidos sempre existe um conjunto completo de n autovetores $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ que são linearmente independentes (de fato, ortogonais). Portanto, as soluções correspondentes do sistema diferencial (1) dadas pela Eq. (23) formam um conjunto fundamental de soluções, e a solução geral é dada, novamente, pela Eq. (25). O exemplo a seguir ilustra esse caso.

EXEMPLO

3

Encontre a solução geral de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (26)$$

Note que a matriz de coeficientes é real e simétrica. Os autovalores e autovetores dessa matriz foram encontrados no Exemplo 5 da Seção 7.3:

$$r_1 = 2, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (27)$$

$$r_2 = -1, \quad r_3 = -1; \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Portanto, um conjunto fundamental de soluções da Eq. (26) é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad (29)$$

e a solução geral é

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (30)$$

Este exemplo ilustra o fato de que embora um autovalor ($r = -1$) tenha multiplicidade algébrica 2, pode ainda ser possível encontrar dois autovetores linearmente independentes $\xi^{(2)}$ e $\xi^{(3)}$ e, então, construir a solução geral (30).

O comportamento da solução (30) depende, de modo crítico, das condições iniciais. Para valores grandes de t a primeira parcela na Eq. (30) é a dominante; logo, se $c_1 \neq 0$, todas as componentes de $\mathbf{x}$ tornam-se ilimitadas quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, para determinadas condições iniciais c_1 pode ser zero. Nesse caso, a solução só tem termos exponenciais com potências negativas e $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ quando $t \rightarrow \infty$. Os pontos iniciais que fazem com que c_1 seja nulo são exatamente aqueles que pertencem ao plano determinado pelos autovetores $\xi^{(2)}$ e $\xi^{(3)}$ associados aos dois autovalores negativos. Assim, soluções que começam nesse plano se aproximam da origem quando $t \rightarrow \infty$, enquanto as outras soluções tornam-se ilimitadas.

Se alguns dos autovalores ocorrem em pares complexos conjugados, então ainda existem n soluções linearmente independentes da forma (23), desde que todos os autovalores sejam distintos. É claro que soluções vindas de autovalores complexos tomam valores complexos. No entanto, como na Seção 3.3, é possível obter um conjunto completo de soluções reais. Isso será discutido na Seção 7.6.

Dificuldades mais sérias podem ocorrer se um autovalor for repetido. Nessa eventualidade, o número de autovetores linearmente independentes pode ser menor do que a multiplicidade algébrica do autovalor. Se for esse o caso, o número de soluções linearmente independentes da forma ξe^{rt} será menor do que n . Para construir um conjunto fundamental de soluções é necessário, então, procurar soluções adicionais de outra forma. A situação é parecida com o caso de uma equação linear de ordem n com coeficientes constantes; uma raiz repetida da equação diferencial fornecia soluções da forma e^{rt} , te^{rt} , t^2e^{rt} , etc. O caso de autovalores repetidos será tratado na Seção 7.8.

Finalmente, se $\mathbf{A}$ for complexa, então os autovalores complexos não precisam aparecer em pares conjugados e os autovetores são, em geral, complexos, mesmo que o autovalor associado seja real. As soluções da equação diferencial (1) ainda são da forma (23), desde que os autovalores sejam distintos, mas em geral todas as soluções são complexas.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6:

- Encontre a solução geral do sistema de equações dado e descreva o comportamento das soluções quando $t \rightarrow \infty$.
- Desenhe um campo de direções e faça o gráfico de algumas trajetórias do sistema.

$$1. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$2. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$3. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$4. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$5. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$6. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos Problemas 7 e 8:

- Encontre a solução geral do sistema de equações dado.
- Desenhe um campo de direções e algumas das trajetórias. Em cada um desses problemas a matriz de coeficientes tem um autovalor nulo. Como resultado, o padrão das trajetórias é diferente dos padrões nos exemplos no texto.

$$7. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$8. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos Problemas de 9 a 14, encontre a solução geral do sistema de equações dado.

$$9. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$10. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ -1 & -1-i \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$11. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$12. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$13. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$14. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos Problemas de 15 a 18, resolva o problema de valor inicial dado. Descreva o comportamento da solução quando $t \rightarrow \infty$.

$$15. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$16. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$17. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$18. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

19. O sistema $t\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é análogo à equação de Euler de segunda ordem (Seção 5.4). Suponha que $\mathbf{x} = \xi t^r$, onde ξ é um vetor constante, e mostre que ξ e r têm que satisfazer $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$ para se obter soluções não triviais da equação diferencial dada.

Referindo-se ao Problema 19, resolva o sistema de equações dado em cada um dos Problemas de 20 a 23. Suponha que $t > 0$.

$$20. t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$21. t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$22. t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$23. t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos Problemas de 24 a 27 são dados os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A}$. Considere o sistema correspondente $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

- Esboce um retrato de fase do sistema.
- Esboce a trajetória que passa pelo ponto inicial (2, 3).
- Para a trajetória no item (b), esboce os gráficos de x_1 e de x_2 em função de t no mesmo conjunto de eixos.

$$24. r_1 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad r_2 = -2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$25. r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad r_2 = -2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$26. r_1 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad r_2 = 2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$27. r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad r_2 = 2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

28. Considere um sistema $2 \times 2 \mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$. Se supusermos que $r_1 \neq r_2$, a solução geral é $\mathbf{x} = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}$, desde que $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ sejam linearmente independentes. Neste problema vamos estabelecer a independência linear de $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ supondo que são linearmente dependentes e, depois, mostrando que isso nos leva a uma contradição.

(a) Note que $\xi^{(1)}$ satisfaz a equação matricial $(\mathbf{A} - r_1 \mathbf{I})\xi^{(1)} = \mathbf{0}$; analogamente, $(\mathbf{A} - r_2 \mathbf{I})\xi^{(2)} = \mathbf{0}$.

(b) Mostre que $(\mathbf{A} - r_2 \mathbf{I})\xi^{(1)} = (r_1 - r_2)\xi^{(1)}$.

(c) Suponha que $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ são linearmente dependentes. Então $c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)} = \mathbf{0}$ e pelo menos um entre c_1 e c_2 é diferente de zero; suponha que $c_1 \neq 0$. Mostre que $(\mathbf{A} - r_2 \mathbf{I})(c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}) = \mathbf{0}$ e que $(\mathbf{A} - r_2 \mathbf{I})(c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}) = c_1(r_1 - r_2)\xi^{(1)}$. Logo, $c_1 = 0$, uma contradição. Portanto, $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ são linearmente independentes.

(d) Modifique o argumento no item (c) para o caso em que $c_2 \neq 0$.

(e) Faça um argumento semelhante para o caso em que a ordem n é igual a 3; note que o procedimento pode ser estendido para um valor arbitrário de n .

29. Considere a equação

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (\text{i})$$

onde a, b e c são constantes. Foi mostrado, no Capítulo 3, que a solução geral depende das raízes da equação característica

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (\text{ii})$$

(a) Transforme a Eq. (i) em um sistema de equações de primeira ordem fazendo $x_1 = y$, $x_2 = y'$. Encontre o sistema de equações $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ satisfeito por $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(b) Encontre a equação que determina os autovalores da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ no item (a). Note que essa equação é simplesmente a equação característica (ii) da Eq. (i).

30. O sistema de dois tanques do Problema 21 na Seção 7.1 nos leva ao problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -17 \\ -21 \end{pmatrix},$$

onde x_1 e x_2 são os desvios dos níveis de sal Q_1 e Q_2 dos seus respectivos pontos de equilíbrio.

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado.

(b) Faça os gráficos de x_1 e x_2 em função de t no mesmo conjunto de eixos.

(c) Encontre o menor instante T tal que $|x_1(t)| \leq 0.5$ e $|x_2(t)| \leq 0.5$ para todo $t \geq T$.

31. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(a) Resolva o sistema para $\alpha = 0.5$. Quais são os autovalores da matriz de coeficientes? Classifique o ponto de equilíbrio na origem em relação ao tipo.

(b) Resolva o sistema para $\alpha = 2$. Quais são os autovalores da matriz de coeficientes? Classifique o ponto de equilíbrio na origem em relação ao tipo.

(c) As soluções encontradas em (a) e (b) exibem dois tipos de comportamento bem diferentes. Encontre os autovalores da matriz de coeficientes em função de α e determine o valor de α entre 0.5 e 2 onde ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro.

Circuitos Elétricos. Os Problemas 32 e 33 tratam do circuito elétrico descrito pelo sistema de equações diferenciais dado no Problema 21 da Seção 7.1:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}. \quad (\text{i})$$

32. (a) Encontre a solução geral da Eq. (i) se $R_1 = 1 \, \Omega$, $R_2 = \frac{3}{5} \, \Omega$, $L = 2 \, \text{H}$ e $C = \frac{2}{3} \, \text{F}$.
 (b) Mostre que $I(t) \rightarrow 0$ e $V(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente dos valores iniciais $I(0)$ e $V(0)$.
33. Considere o sistema precedente de equações diferenciais (i).
 (a) Encontre condições que R_1 , R_2 , C e L têm que satisfazer para que os autovalores da matriz de coeficientes sejam reais e distintos.
 (b) Se as condições encontradas no item (a) são satisfeitas, mostre que ambos os autovalores são negativos. Depois, mostre que $I(t) \rightarrow 0$ e $V(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente das condições iniciais.
 (c) Se as condições encontradas no item (a) não forem satisfeitas, então os autovalores são complexos ou repetidos. Você acredita que $I(t) \rightarrow 0$ e $V(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ também nesses casos?
- Sugestão:* uma abordagem possível para o item (c) é transformar o sistema (i) em uma única equação de segunda ordem. Vamos, também, discutir autovalores complexos e repetidos nas Seções 7.6 e 7.8.

7.6 Autovalores Complexos

Nesta seção vamos considerar, novamente, um sistema de n equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1)$$

onde a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ é real. Se procurarmos soluções da forma $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$, então, como na Seção 7.5, segue que r tem que ser um autovalor e ξ um autovetor associado da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$. Lembre que os autovalores $r_1, \dots, r_n$ de $\mathbf{A}$ são as raízes da equação

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0, \quad (2)$$

e que os autovetores associados satisfazem

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Se $\mathbf{A}$ for real, os coeficientes na equação polinomial (2) para r serão reais e os autovalores complexos terão que aparecer em pares conjugados. Por exemplo, se $r_1 = \lambda + i\mu$ for um autovalor de $\mathbf{A}$, onde λ e μ são reais, então $r_2 = \lambda - i\mu$ também o será. Para explorar o efeito de autovalores complexos, vamos começar com um exemplo.

EXEMPLO 1

Encontre um conjunto fundamental de soluções reais do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (4)$$

e mostre-o graficamente.

A Figura 7.6.1 mostra um campo de direções para o sistema (4). Esse gráfico sugere que as trajetórias no plano de fase são espirais aproximando-se na origem no sentido horário.

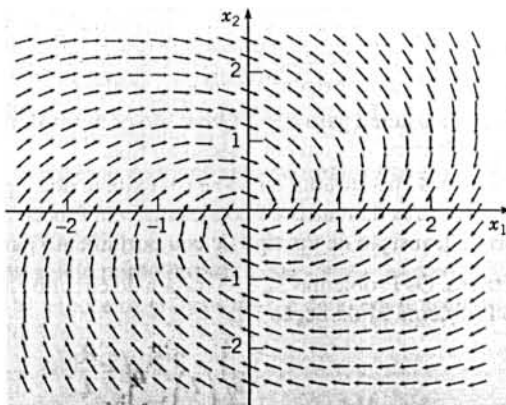


FIGURA 7.6.1 Um campo de direções para o Problema (4).

Para encontrar um conjunto fundamental de soluções, supomos que

$$\mathbf{x} = \xi e^{rt} \quad (5)$$

e obtemos o conjunto de equações lineares algébricas

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

para os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$. A equação característica é

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - r \end{vmatrix} = r^2 + r + \frac{5}{4} = 0; \quad (7)$$

portanto, os autovalores são $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ e $r_2 = -\frac{1}{2} - i$. Um cálculo direto a partir da Eq. (6) mostra que os autovetores associados são

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Observe que os autovetores $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ também são complexos conjugados. Logo, um conjunto fundamental de soluções para o sistema (4) é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1/2+i)t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1/2-i)t}. \quad (9)$$

Para obter um conjunto de soluções reais, precisamos encontrar as partes real e imaginária de $\mathbf{x}^{(1)}$ ou de $\mathbf{x}^{(2)}$. De fato,

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-t/2} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2} \cos t \\ -e^{-t/2} \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t/2} \sin t \\ e^{-t/2} \cos t \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Portanto,

$$\mathbf{u}(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (11)$$

é um conjunto de soluções reais. Para verificar que $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são linearmente independentes, vamos calcular seu wronskiano:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{u}, \mathbf{v})(t) &= \begin{vmatrix} e^{-t/2} \cos t & e^{-t/2} \sin t \\ -e^{-t/2} \sin t & e^{-t/2} \cos t \end{vmatrix} \\ &= e^{-t} (\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{-t}. \end{aligned}$$

Como o wronskiano nunca se anula, segue que $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções (reais) do sistema (4).

Os gráficos das soluções $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ aparecem na Figura 7.6.2a. Como

$$\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

os gráficos de $\mathbf{u}(t)$ e de $\mathbf{v}(t)$ contêm os pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente. Outras soluções do sistema (4) são combinações lineares de $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$, e a Figura 7.6.2a mostra, também, algumas dessas soluções. Todas as trajetórias se aproximam da origem ao longo de uma espiral quando $t \rightarrow \infty$, formando uma infinidade de caminhos em torno da origem; isso é devido ao fato de que as soluções (11) são produtos de uma exponencial decrescente com fatores seno ou cosseno. Alguns gráficos típicos de x_i em função de t estão ilustrados na Figura 7.6.2b; cada uma representa uma oscilação decrescente no tempo.

A Figura 7.6.2a é típica de sistemas de segunda ordem $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ cujos autovalores são complexos com parte real negativa. A origem é chamada de **ponto espiral** e é assintoticamente estável, já que todas as trajetórias se aproximam dela quando t aumenta. Para um sistema cujos autovalores têm parte real positiva as trajetórias são semelhantes às da Figura 7.6.2a, exceto que o sentido do movimento é oposto, se afastando da origem, e as trajetórias são ilimitadas. Nesse caso, a origem é instável. Se a parte real dos autovalores é nula, então as trajetórias nem se aproximam da origem nem se tornam ilimitadas, mas, em vez disso, percorrem repetidamente uma curva fechada em torno da origem. Nesse caso, a origem é chamada de **centro** e é também dita estável, mas não assintoticamente estável. Nos três casos o sentido do movimento pode ser horário, como neste exemplo, ou trigonométrico, dependendo dos elementos na matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

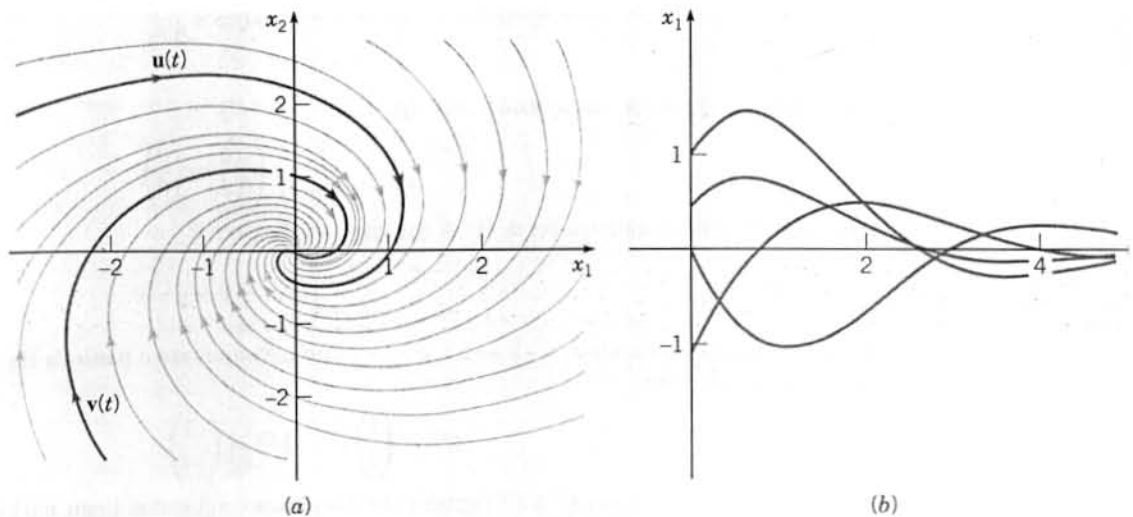


FIGURA 7.6.2 (a) Trajetórias do sistema (4); a origem é um ponto espiral. (b) Gráficos de x_1 em função de t para o sistema (4).

Voltando à equação geral (1)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

Podemos proceder como no exemplo. Suponha que existe um par de autovalores complexos conjugados $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$. Então os autovetores associados $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ também são complexos conjugados. Para ver isso, suponha que r_1 e $\xi^{(1)}$ satisfazem

$$(\mathbf{A} - r_1 \mathbf{I})\xi^{(1)} = \mathbf{0}. \quad (12)$$

Calculando a equação complexa conjugada dessa equação e observando que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{I}$ são reais, obtemos

$$(\mathbf{A} - \bar{r}_1 \mathbf{I})\bar{\xi}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad (13)$$

onde $\bar{r}_1$ e $\bar{\xi}^{(1)}$ são os complexos conjugados de r_1 e de $\xi^{(1)}$, respectivamente. Em outras palavras, $r_2 = \bar{r}_1$ também é um autovalor e $\xi^{(2)} = \bar{\xi}^{(1)}$ é um autovetor associado. As soluções correspondentes

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{r_1 t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \bar{\xi}^{(1)} e^{\bar{r}_1 t} \quad (14)$$

da equação diferencial (1) são, então, complexas conjugadas uma da outra. Portanto, como no Exemplo 1, podemos encontrar duas soluções reais da Eq. (1) correspondentes aos autovalores r_1 e r_2 tomando as partes real e imaginária de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ ou de $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ dadas pela Eq. (14).

Vamos escrever $\xi^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são reais; então,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{(\lambda + i\mu)t} \\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \sin \mu t). \end{aligned} \quad (15)$$

Separando $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ em suas partes real e imaginária, obtemos

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t) + ie^{\lambda t}(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t). \quad (16)$$

Se escrevermos $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$, então os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t), \\ \mathbf{v}(t) &= e^{\lambda t}(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t) \end{aligned} \quad (17)$$

são soluções reais da Eq. (1). É possível mostrar que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são soluções linearmente independentes (veja o Problema 27).

Por exemplo, suponha que a matriz $\mathbf{A}$ tem dois autovalores complexos $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$, e que $r_3, \dots, r_n$ são reais e distintos. Sejam $\xi^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, $\xi^{(2)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$, $\xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}$ os autovetores associados. Então, a solução geral da Eq. (1) é

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t) + c_3 \xi^{(3)} e^{r_3 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t}, \quad (18)$$

onde $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são dados pelas Eqs. (17). Enfatizamos que essa análise se aplica apenas quando a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ na Eq. (1) for real, pois só nesse caso os autovalores e autovetores complexos têm que aparecer em pares complexos conjugados.

Para sistemas 2×2 com coeficientes reais, completamos nossa descrição dos três casos principais que podem ocorrer.

1. Autovalores reais com sinais opostos; $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um ponto de sela.
2. Autovalores reais diferentes, mas com o mesmo sinal; $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um nó.
3. Autovalores complexos com parte real diferente de zero; $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um ponto espiral.

Outras possibilidades são menos importantes e ocorrem como transição entre dois dos casos que acabamos de listar. Por exemplo, um autovalor zero ocorre durante a transição entre um ponto de sela e um nó. Autovalores imaginários puros ocorrem durante a transição entre pontos espirais assintoticamente estáveis e instáveis. Finalmente, autovalores reais e iguais aparecem durante a transição entre nós e pontos espirais.

EXEMPLO

2

O sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (19)$$

contém um parâmetro α . Descreva como as soluções dependem qualitativamente de α ; em particular, encontre os valores críticos de α nos quais o comportamento qualitativo das trajetórias no plano de fase muda drasticamente.

O comportamento das trajetórias é controlado pelos autovalores da matriz de coeficientes. A equação característica é

$$r^2 - \alpha r + 4 = 0, \quad (20)$$

de modo que os autovalores são

$$r = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}. \quad (21)$$

Da Eq. (21) segue que os autovalores são complexos conjugados para $-4 < \alpha < 4$ e reais nos outros casos. Assim, dois valores críticos são $\alpha = -4$ e $\alpha = 4$, onde os autovalores mudam de reais para complexos ou vice-versa. Para $\alpha < -4$ ambos os autovalores são negativos, de modo que todas as trajetórias se aproximam da origem, que é um nó assintoticamente estável. Para $\alpha > 4$ ambos os autovalores são positivos, de modo que a origem é, novamente, um nó, só que dessa vez instável; todas as trajetórias (exceto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) se tornam ilimitadas. No intervalo intermediário $-4 < \alpha < 4$ os autovalores são complexos e as trajetórias são espirais. No entanto, para $-4 < \alpha < 0$ a parte real dos autovalores é negativa, as espirais estão orientadas para dentro e a origem é assintoticamente estável, enquanto para $0 < \alpha < 4$ a parte real dos autovalores é positiva e a origem é instável. Assim, $\alpha = 0$ também é um valor crítico, onde o sentido do movimento espiral muda de dentro para fora. Para esse valor de α a origem é um centro e as trajetórias são curvas fechadas em torno da origem, correspondendo a soluções periódicas no tempo. Os outros valores críticos, $\alpha = \pm 4$, geram autovalores reais e iguais. Nesse caso a origem é, novamente, um nó, mas o retrato de fase é um pouco diferente daqueles da Seção 7.5. Vamos analisar esse caso na Seção 7.8.

Um Sistema Mola-Massa Múltiplo. Considere o sistema com duas massas e três molas ilustrado na Figura 7.1.1, cujas equações de movimento são dadas pelas Eqs. (1) na Seção 7.1. Se supusermos que não há forças externas, então $F_1(t) = 0$, $F_2(t) = 0$ e as equações resultantes são

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2, \quad (22)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2.$$

Essas equações podem ser resolvidas como um sistema de duas equações de segunda ordem (veja o Problema 29), mas consistente com nossa abordagem neste capítulo vamos transformá-las em um sistema de quatro equações de primeira ordem. Sejam $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1'$ e $y_4 = x_2'$. Então

$$y_1' = y_3, \quad y_2' = y_4, \quad (23)$$

e, das Eqs. (22),

$$m_1 y_3' = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2, \quad m_2 y_4' = k_2 y_1 - (k_2 + k_3)y_2. \quad (24)$$

O exemplo a seguir trata um caso particular desse sistema com duas massas e três molas.

EXEMPLO

3

Suponha que $m_1 = 2$, $m_2 = 9/4$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ e $k_3 = 15/4$ nas Eqs. (23) e (24), de modo que essas equações ficam

$$y_1' = y_3, \quad y_2' = y_4, \quad y_3' = -2y_1 + \frac{3}{2}y_2, \quad y_4' = \frac{4}{3}y_1 - 3y_2. \quad (25)$$

Analisar os movimentos possíveis descritos pelas Eqs. (25) e desenhe gráficos mostrando comportamentos típicos. Podemos escrever o sistema (25) em forma matricial como

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 4/3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}. \quad (26)$$

Tenha em mente que y_1 e y_2 são as posições das duas massas em relação às suas posições de equilíbrio e que y_3 e y_4 são suas velocidades. Supomos, como de hábito, que $\mathbf{y} = \xi e^{rt}$, onde r tem que ser um autovalor da matriz $\mathbf{A}$ e ξ um autovetor associado. É possível, embora trabalhoso, encontrar os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$ manualmente, mas é mais fácil com um programa de computador apropriado. O polinômio característico de $\mathbf{A}$ é

$$r^4 + 5r^2 + 4 = (r^2 + 1)(r^2 + 4) \quad (27)$$

de modo que os autovalores são $r_1 = i$, $r_2 = -i$, $r_3 = 2i$ e $r_4 = -2i$. Os autovetores associados são

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3i \\ -2i \end{pmatrix}, \quad \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6i \\ -8i \end{pmatrix}, \quad \xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6i \\ 8i \end{pmatrix}. \quad (28)$$

As soluções complexas $\xi^{(1)}e^{it}$ e $\xi^{(2)}e^{-it}$ são complexas conjugadas, logo podemos encontrar duas soluções reais usando as partes real e imaginária de uma das soluções complexas. Por exemplo, temos

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}e^{it} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \cos t \\ -3 \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{(1)}(t) + i\mathbf{v}^{(1)}(t). \end{aligned} \quad (29)$$

De maneira semelhante, obtemos

$$\begin{aligned} \xi^{(3)}e^{2it} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6i \\ -8i \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cos 2t \\ -4 \cos 2t \\ -6 \sin 2t \\ 8 \sin 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3 \sin 2t \\ -4 \sin 2t \\ 6 \cos 2t \\ -8 \cos 2t \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{(2)}(t) + i\mathbf{v}^{(2)}(t). \end{aligned} \quad (30)$$

Deixamos a seu cargo a verificação de que $\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(2)}$ e $\mathbf{v}^{(2)}$ são linearmente independentes e formam, portanto, um conjunto fundamental de soluções. Assim, a solução geral da Eq. (26) é

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \cos t \\ -3 \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \cos 2t \\ -4 \cos 2t \\ -6 \sin 2t \\ 8 \sin 2t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \sin 2t \\ -4 \sin 2t \\ 6 \cos 2t \\ -8 \cos 2t \end{pmatrix}, \quad (31)$$

onde c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são constantes arbitrárias.

O espaço de fase para esse sistema tem dimensão quatro e cada solução, obtida por um conjunto particular de valores para $c_1, \dots, c_3$ na Eq. (31), corresponde a uma trajetória nesse espaço. Como cada solução, dada pela Eq. (31), é periódica com período 2π , cada trajetória é uma curva fechada. Não importa onde a trajetória começa em $t = 0$, ela retorna a esse ponto em $t = 2\pi, t = 4\pi$, e assim por diante, percorrendo a mesma curva repetidamente em intervalos de tempo de comprimento 2π . Não tentaremos mostrar nenhuma dessas trajetórias de dimensão quatro aqui. Em vez disso, mostramos projeções de algumas trajetórias nos planos y_1y_3 ou y_2y_4 nas figuras mais adiante, mostrando, assim, o movimento de cada massa separadamente.

As duas primeiras parcelas à direita do sinal de igualdade na Eq. (31) descrevem movimentos com frequência 1 e período 2π . Note que $y_3 = (2/3)y_1$ nessas parcelas e que $y_4 = (2/3)y_3$. Isso significa que as duas massas se movem para a frente e para trás juntas, sempre no mesmo sentido, mas com a segunda massa percorrendo dois terços da distância percorrida pela primeira. Se focalizarmos na solução $\mathbf{u}^{(1)}(t)$ e fizermos o gráfico de y_1 e y_2 em função de t nos mesmos eixos, obteremos os gráficos de cossenos com amplitudes 3 e 2, respectivamente, ilustrados na Figura 7.6.3a. A trajetória da primeira massa no plano y_1y_3 permanece no círculo de raio 3 na Figura 7.6.3b, percorrido no sentido horário começando no ponto (3, 0) e completando uma volta em um tempo 2π . Esta figura também mostra a trajetória da segunda massa no plano y_2y_4 , que permanece no círculo de raio 2, também percorrido no sentido horário começando em (2, 0) e também completando uma volta em um tempo 2π . A origem é um centro nos planos respectivos y_1y_3 e y_2y_4 . Gráficos semelhantes (com um deslocamento apropriado no tempo) são obtidos de $\mathbf{v}^{(1)}$ ou de uma combinação linear de $\mathbf{u}^{(1)}$ e $\mathbf{v}^{(1)}$.

As parcelas remanescentes à direita do sinal de igualdade na Eq. (31) descrevem movimentos com frequência 2 e período π . Observe que nesse caso $y_2 = -(4/3)y_1$ e $y_4 = -(4/3)y_3$. Isso significa que as duas massas estão sempre se movendo em sentidos opostos e que a segunda massa percorre quatro terços da distância percorrida pela primeira. Considerando apenas $\mathbf{u}^{(2)}(t)$ e fazendo os gráficos de y_1 e y_2 em função de t nos mesmos eixos, obtemos a Figura 7.6.4a. Existe uma diferença de fase de π e a amplitude de y_2 é de quatro terços da amplitu-

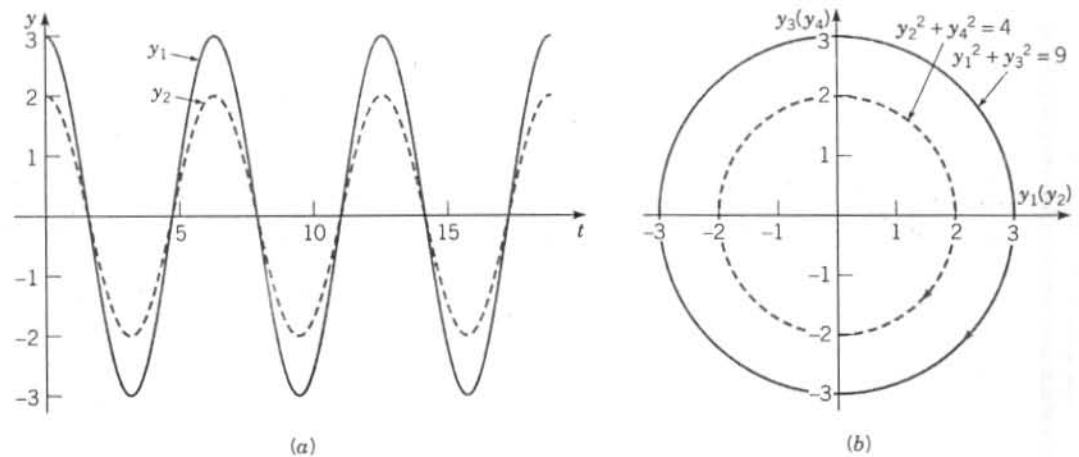


FIGURA 7.6.3 (a) Um gráfico de y_1 em função de t e de y_2 em função de t para a solução $\mathbf{u}^{(1)}(t)$. (b) Superposição de projeções de trajetórias nos planos y_1y_3 e y_2y_4 para a solução $\mathbf{u}^{(1)}(t)$.

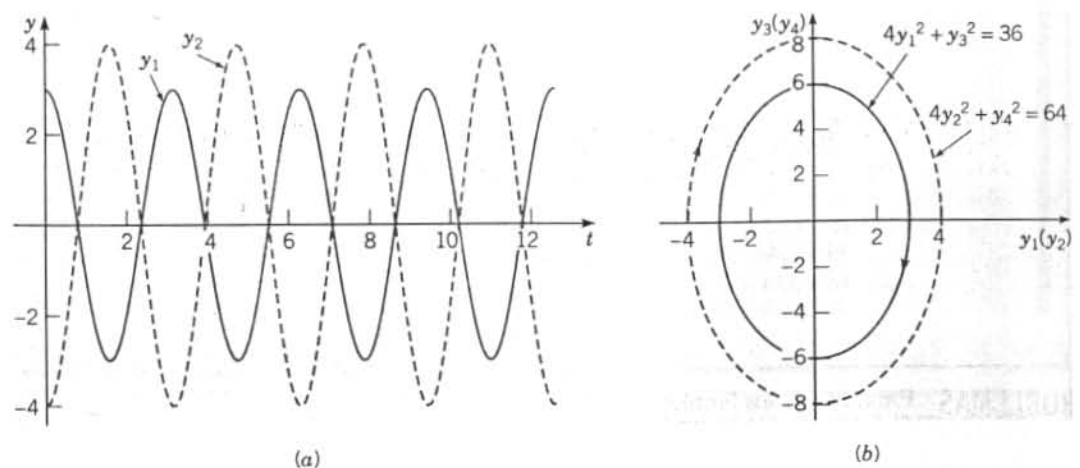


FIGURA 7.6.4 (a) Um gráfico de y_1 em função de t e de y_2 em função de t para a solução $\mathbf{u}^{(2)}(t)$. (b) Superposição de projeções de trajetórias nos planos y_1y_3 e y_2y_4 para a solução $\mathbf{u}^{(2)}(t)$.

de de y_1 , confirmando as afirmações precedentes sobre o movimento das massas. A Figura 7.6.4b mostra uma superposição das trajetórias das duas massas em seus respectivos planos de fase. Ambas são elipses, a interna correspondendo à primeira massa e a externa à segunda. A trajetória da elipse interna começa em $(3, 0)$ e a da elipse externa em $(-4, 0)$. Ambas são percorridas no sentido horário e a volta é completada em um tempo π . A origem é um centro nos planos respectivos y_1y_3 e y_2y_4 . Mais uma vez, gráficos semelhantes são obtidos de $\mathbf{v}^{(2)}$ ou de uma combinação linear de $\mathbf{u}^{(2)}$ e $\mathbf{v}^{(2)}$.

Os tipos de movimento descritos nos dois parágrafos precedentes são chamados de **modos fundamentais** de vibração para o sistema com duas massas. Cada um deles resulta de condições iniciais bem especiais. Por exemplo, para obter o modo fundamental de frequência 1 ambas as constantes, c_3 e c_4 , na Eq. (31) têm que ser nulas. Isso só ocorre para condições iniciais nas quais $3y_2(0) = 2y_1(0)$ e $3y_4(0) = 2y_3(0)$. Analogamente, o modo fundamental de frequência 2 só é obtido quando ambas as constantes, c_1 e c_2 , na Eq. (31) são nulas – ou seja, quando as condições iniciais são tais que $3y_2(0) = -4y_1(0)$ e $3y_4(0) = -4y_3(0)$.

Para condições iniciais mais gerais, a solução é uma combinação dos dois modos fundamentais. A Figura 7.6.5a mostra um gráfico de y_1 em função de t para um caso típico, e a projeção da trajetória correspondente no plano y_1y_3 está na Figura 7.6.5b. Esta última figura pode dar uma ideia errada, já que mostra a projeção da trajetória cruzando a si mesma. Isso não pode ocorrer na trajetória real em quatro dimensões, pois violaria o teorema geral de existência e unicidade: não podem existir duas soluções diferentes saindo do mesmo ponto inicial.

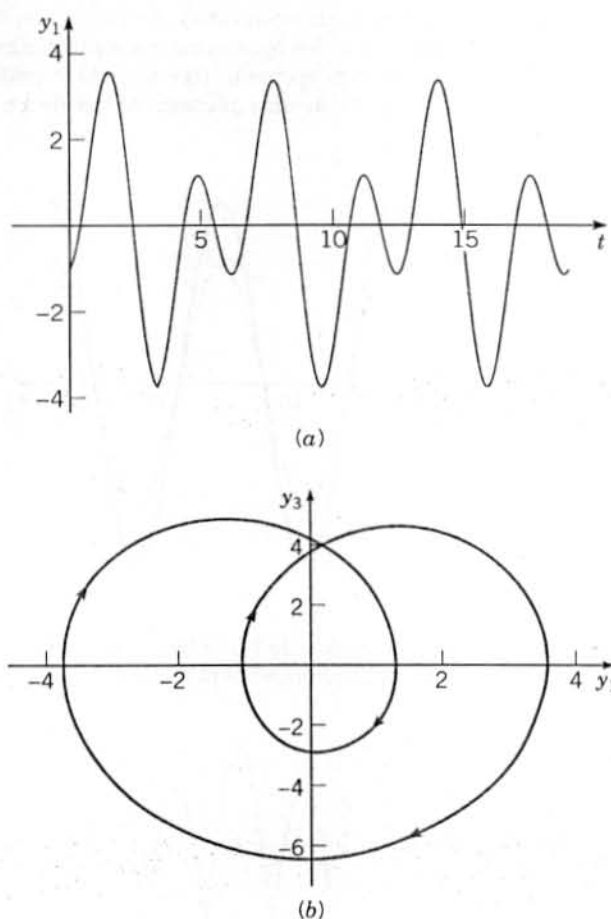


FIGURA 7.6.5 Uma solução do sistema (22) satisfazendo as condições iniciais $\mathbf{y}(0) = (-1, 4, 1, 1)$. (a) Um gráfico de y_1 em função de t . (b) a projeção da trajetória no plano y_1y_3 . Como dito no texto, a trajetória real em quatro dimensões não se intersecta.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6:

- Expresse a solução geral do sistema de equações dado como combinação de funções reais.
- Desenhe, também, um campo de direções, esboce algumas trajetórias e descreva o comportamento das soluções quando $t \rightarrow \infty$.

$$1. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$2. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$3. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$4. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$5. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$6. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos Problemas 7 e 8, expresse a solução geral do sistema de equações dado em termos de funções reais.

$$7. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$8. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos Problemas 9 e 10, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Descreva o comportamento da solução quando $t \rightarrow \infty$.

$$9. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$10. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Em cada um dos Problemas 11 e 12:

- Encontre os autovalores do sistema dado.
- Escolha um ponto inicial (diferente da origem) e desenhe a trajetória correspondente no plano x_1x_2 .
- Para a sua trajetória encontrada em (b), desenhe os gráficos de x_1 e x_2 em função de t .
- Para a sua trajetória encontrada em (b), desenhe o gráfico correspondente no espaço tridimensional tx_1x_2 .

$$11. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -2 \\ 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$12. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 2 \\ -1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos Problemas de 13 a 20, a matriz de coeficientes contém um parâmetro α . Em cada um desses problemas:

- Determine os autovalores em função de α .
- Encontre o valor ou valores críticos de α onde a natureza qualitativa do retrato de fase para o sistema muda.
- Desenhe retratos de fase para um valor de α ligeiramente menor e para outro valor ligeiramente maior do que cada valor crítico.

$$13. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$14. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$15. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$16. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \alpha & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$17. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$18. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$19. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$20. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos Problemas 21 e 22, resolva o sistema de equações dado pelo método do Problema 19 da Seção 7.5. Suponha que $t > 0$.

$$21. t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$22. t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos Problemas 23 e 24:

- Encontre os autovalores do sistema dado.
- Escolha um ponto inicial (diferente da origem) e desenhe as trajetórias correspondentes no plano x_1x_2 . Desenhe, também, as trajetórias nos planos x_1x_3 e x_2x_3 .
- Para o ponto inicial do item (b), desenhe a trajetória correspondente no espaço $x_1x_2x_3$.

$$23. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad 24. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

25. Considere o circuito elétrico ilustrado na Figura 7.6.6. Suponha que $R_1 = R_2 = 4 \, \Omega$, $C = \frac{1}{2} \, \text{F}$ e $L = 8 \, \text{H}$.

(a) Mostre que esse circuito é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}, \quad (i)$$

onde I é a corrente passando no indutor e V é a queda de voltagem através do capacitor. *Sugestão:* veja o Problema 19 da Seção 7.1.

(b) Encontre a solução geral das Eqs. (i) como combinação de funções reais.

(c) Encontre $I(t)$ e $V(t)$ se $I(0) = 2 \, \text{A}$ e $V(0) = 3 \, \text{V}$.

(d) Determine os valores limites de $I(t)$ e $V(t)$ quando $t \rightarrow \infty$. Esses valores limites dependem das condições iniciais?

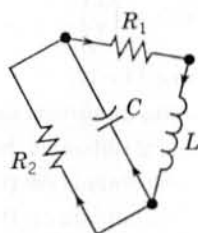


FIGURA 7.6.6 O circuito no Problema 25.

26. O circuito elétrico ilustrado na Figura 7.6.7 é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}, \quad (i)$$

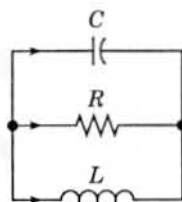


FIGURA 7.6.7 O circuito no Problema 26.

onde I é a corrente passando no indutor e V é a queda de voltagem através do capacitor. Essas equações diferenciais foram deduzidas no Problema 19 da Seção 7.1.

(a) Mostre que os autovalores da matriz de coeficientes são reais e distintos se $L > 4R^2C$; mostre que são complexos conjugados se $L < 4R^2C$.

(b) Suponha que $R = 1 \, \Omega$, $C = \frac{1}{2} \, \text{F}$ e $L = 1 \, \text{H}$. Encontre a solução geral do sistema (i) neste caso.

(c) Encontre $I(t)$ e $V(t)$ se $I(0) = 2 \, \text{A}$ e $V(0) = 1 \, \text{V}$.

(d) Para o circuito no item (b), determine os valores limites de $I(t)$ e $V(t)$ quando $t \rightarrow \infty$. Esses valores limites dependem das condições iniciais?

27. Vamos indicar, neste problema, como mostrar que $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$, dados pelas Eqs. (17), são linearmente independentes. Sejam $r_1 = \lambda + i\mu$ e $\bar{r}_1 = \lambda - i\mu$ um par de autovalores conjugados da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ da Eq. (1); sejam $\xi^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ e $\bar{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ os autovetores associados. Lembre-se de que foi dito na Seção 7.3 que se $r_1 \neq \bar{r}_1$, então $\xi^{(1)}$ e $\bar{\xi}^{(1)}$ são linearmente independentes.

(a) Vamos mostrar, primeiro, que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são linearmente independentes. Considere a equação $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Expresse $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em função de $\xi^{(1)}$ e de $\bar{\xi}^{(1)}$, e depois mostre que $(c_1 - ic_2)\xi^{(1)} + (c_1 + ic_2)\bar{\xi}^{(1)} = \mathbf{0}$.

- (b) Mostre que $c_1 - ic_2 = 0$ e $c_1 + ic_2 = 0$ e que, portanto, $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$. Em consequência, **a** e **b** são linearmente independentes.
- (c) Para mostrar que **u**(*t*) e **v**(*t*) são linearmente independentes, considere a equação $c_1 \mathbf{u}(t_0) + c_2 \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{0}$, onde t_0 é um ponto arbitrário. Reescreva essa equação em termos de **a** e **b** e depois prossiga como no item (b) para mostrar que $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$. Logo, **u**(*t*) e **v**(*t*) são linearmente independentes no ponto arbitrário t_0 . Portanto, são linearmente independentes em qualquer ponto e em qualquer intervalo.

28. Uma massa *m* em uma mola com constante *k* satisfaz a equação diferencial (veja a Seção 3.7)

$$mv'' + kv = 0,$$

onde *v*(*t*) é o deslocamento da massa no instante *t* a partir de sua posição de equilíbrio.

- (a) Sejam $x_1 = v$ e $x_2 = v'$; mostre que o sistema resultante é

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

- (b) Encontre os autovalores da matriz para o sistema no item (a).
- (c) Esboce diversas trajetórias do sistema. Escolha uma de suas trajetórias e esboce os gráficos correspondentes de x_1 e de x_2 em função de *t*. Esboce ambos os gráficos no mesmo conjunto de eixos.
- (d) Qual a relação entre os autovalores da matriz de coeficientes e a frequência natural do sistema mola-massa?
29. Considere o sistema com duas massas e três molas do Exemplo 3 no texto. Em vez de converter o problema em um sistema de quatro equações de primeira ordem, vamos indicar aqui como proceder diretamente das Eqs. (22).

- (a) Mostre que as Eqs. (22) podem ser escritas na forma

$$\mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 4/3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (i)$$

- (b) Suponha que $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$ e mostre que

$$(\mathbf{A} - r^2 \mathbf{I})\xi = \mathbf{0}.$$

Note que r^2 (em vez de *r*) é um autovalor de **A** associado ao autovetor ξ .

- (c) Encontre os autovalores e autovetores de **A**.
- (d) Escreva expressões para x_1 e x_2 . Deve haver quatro constantes arbitrárias nessas expressões.
- (e) Diferenciando os resultados do item (d), escreva expressões para x_1' e x_2' . Seus resultados nos itens (d) e (e) devem estar de acordo com a Eq. (31) no texto.
30. Considere o sistema com duas massas e três molas cujas equações de movimento são as Eqs. (22) no texto. Suponha que $m_1 = 1$, $m_2 = 4/3$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ e $k_3 = 4/3$.
- (a) Como no texto, transforme o sistema em quatro equações de primeira ordem da forma $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Determine a matriz de coeficientes **A**.
- (b) Encontre os autovalores e autovetores de **A**.
- (c) Escreva a solução geral do sistema.
- (d) Descreva os modos fundamentais de vibração. Para cada modo fundamental, desenhe gráficos de y_1 e de y_2 em função de *t*. Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4 .
- (e) Considere as condições iniciais $\mathbf{y}(0) = (2, 1, 0, 0)^T$. Calcule as constantes arbitrárias na solução geral do item (c). Qual o período do movimento nesse caso? Desenhe gráficos de y_1 e de y_2 em função de *t*. Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4 . Certifique-se de que você compreende como as trajetórias são percorridas durante um período completo.
- (f) Considere outras condições iniciais de sua escolha e desenhe gráficos semelhantes aos pedidos no item (e).

31. Considere o sistema com duas massas e três molas cujas equações de movimento são as Eqs. (22) no texto. Suponha que $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.
- (a) Como no texto, transforme o sistema em quatro equações de primeira ordem da forma $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Determine a matriz de coeficientes **A**.
- (b) Encontre os autovalores e autovetores de **A**.
- (c) Escreva a solução geral do sistema.
- (d) Descreva os modos fundamentais de vibração. Para cada modo fundamental, desenhe gráficos de y_1 e de y_2 em função de *t*. Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4 .

- (e) Considere as condições iniciais $\mathbf{y}(0) = (-1, 3, 0, 0)^T$. Calcule as constantes arbitrárias na solução geral do item (c). Desenhe gráficos de y_1 e de y_2 em função de t . Você acha que a solução é periódica? Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4 .
- (f) Considere outras condições iniciais de sua escolha e desenhe gráficos semelhantes aos pedidos no item (e).

7.7 Matrizes Fundamentais

A estrutura de soluções de sistemas de equações diferenciais lineares pode ficar mais clara pela introdução da ideia de matriz fundamental. Suponha que $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \quad (1)$$

em algum intervalo $\alpha < t < \beta$. Então, a matriz

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$, é dita uma **matriz fundamental** para o sistema (1). Note que uma matriz fundamental é invertível, já que suas colunas são vetores linearmente independentes.

EXEMPLO

1

Encontre uma matriz fundamental para o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (3)$$

No Exemplo 1 da Seção 7.5 vimos que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

são soluções linearmente independentes da Eq. (3). Assim, uma matriz fundamental para o sistema (3) é

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

A solução de um problema de valor inicial pode ser escrita de maneira bem compacta em termos de uma matriz fundamental. A solução geral da Eq. (1) é

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t) \quad (5)$$

ou, em termos de $\Psi(t)$,

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c}, \quad (6)$$

onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante com componentes arbitrárias $c_1, \dots, c_n$. Para um problema de valor inicial consistindo na equação diferencial (1) e na condição inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (7)$$

onde t_0 é um ponto dado em $\alpha < t < \beta$ e $\mathbf{x}^0$ é um vetor inicial dado, basta escolher o vetor $\mathbf{c}$ na Eq. (6) que satisfaça a condição inicial (7). Portanto, $\mathbf{c}$ tem que satisfazer

$$\Psi(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}^0. \quad (8)$$

Logo, como $\Psi(t_0)$ é invertível,

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 \quad (9)$$

e

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 \quad (10)$$

é a solução do problema de valor inicial (1), (7). Enfatizamos, no entanto, que para resolver um problema de valor inicial dado normalmente resolvemos a Eq. (8) por redução de linhas e, depois, substituímos a solução $\mathbf{c}$ na Eq. (6), em vez de calcular $\Psi^{-1}(t_0)$ e usar a Eq. (10).

Lembre-se de que cada coluna da matriz fundamental Ψ é uma solução da Eq. (1). Segue que Ψ satisfaz a equação diferencial matricial

$$\Psi' = \mathbf{P}(t)\Psi. \quad (11)$$

Essa relação é confirmada imediatamente comparando-se os dois lados da Eq. (11) coluna a coluna.

Algumas vezes é conveniente usar a matriz fundamental especial, denotada por $\Phi(t)$, cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ dados no Teorema 7.4.4. Além da equação diferencial (1), esses vetores satisfazem as condições iniciais

$$\mathbf{x}^{(j)}(t_0) = \mathbf{e}^{(j)}, \quad (12)$$

onde $\mathbf{e}^{(j)}$ é o vetor unitário, definido no Teorema 7.4.4, com um na j -ésima posição e zeros em todas as outras componentes. Assim, $\Phi(t)$ tem a propriedade

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}. \quad (13)$$

Vamos sempre reservar o símbolo Φ para denotar a matriz fundamental que satisfaz a condição inicial (13) e usar Ψ quando se desejar uma matriz fundamental arbitrária. Em termos de $\Phi(t)$, a solução do problema de valor inicial (1), (7) parece até mais simples; como $\Phi^{-1}(t_0) = \mathbf{I}$, segue da Eq. (10) que

$$\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}^0. \quad (14)$$

Embora a matriz fundamental $\Phi(t)$ seja, muitas vezes, mais complicada do que $\Psi(t)$, ela será particularmente útil se o mesmo sistema de equações diferenciais for resolvido repetidamente sujeito a condições iniciais diferentes. Isso corresponde a um sistema físico dado que pode começar em muitos estados iniciais diferentes. Se a matriz fundamental $\Phi(t)$ tiver sido determinada, então a solução para cada conjunto de condições iniciais poderá ser encontrada simplesmente através da multiplicação de matrizes, como indicado na Eq. (14). A matriz $\Phi(t)$ representa, assim, uma transformação das condições iniciais $\mathbf{x}^0$ na solução $\mathbf{x}(t)$ em um instante arbitrário t . Comparando as Eqs. (10) e (14), é claro que $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$.

EXEMPLO

2

Para o sistema (3),

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

no Exemplo 1, encontre a matriz fundamental Φ tal que $\Phi(0) = \mathbf{I}$.

As colunas de Φ são as soluções da Eq. (3) que satisfazem as condições iniciais

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Como a solução geral da Eq. (3) é

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t},$$

podemos encontrar a solução que satisfaz o primeiro conjunto de condições iniciais escolhendo $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$; analogamente, obtemos a solução que satisfaz o segundo conjunto de condições iniciais escolhendo $c_1 = \frac{1}{4}$ e $c_2 = -\frac{1}{4}$. Logo,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Note que os elementos de $\Phi(t)$ são mais complicados que os da matriz fundamental $\Psi(t)$ dada pela Eq. (4); no entanto, agora é fácil determinar a solução correspondente a qualquer conjunto de condições iniciais.

A **Matriz $\exp(\mathbf{A}t)$** . Lembre que a solução do problema de valor inicial escalar

$$x' = ax, \quad x(0) = x_0, \quad (17)$$

onde a é constante, é

$$x = x_0 \exp(at). \quad (18)$$

Considere, agora, o problema de valor inicial correspondente para um sistema $n \times n$, a saber,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad (19)$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante. Aplicando os resultados desta seção ao problema (19), podemos escrever sua solução como

$$\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}^0, \quad (20)$$

onde $\Phi(0) = \mathbf{I}$. A comparação entre os problemas (17) e (19) e suas soluções sugere que a matriz $\Phi(t)$ pode ter um caráter exponencial. Vamos explorar essa possibilidade.

A função exponencial escalar $\exp(at)$ pode ser representada pela série de potências

$$\exp(at) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!}, \quad (21)$$

que converge para todo t . Vamos, agora, substituir o escalar a pela matriz $n \times n$ constante $\mathbf{A}$ e considerar a série correspondente

$$\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \cdots. \quad (22)$$

Cada termo na série (22) é uma matriz $n \times n$. É possível mostrar que cada elemento dessa soma de matrizes converge para todo t quando $n \rightarrow \infty$. Logo, a série (22) define uma nova matriz como sua soma, que denotamos por $\exp(\mathbf{A}t)$, ou seja,

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}, \quad (23)$$

análoga à expansão (21) da função escalar $\exp(at)$.

Diferenciando a série (23) termo a termo, obtemos

$$\frac{d}{dt}[\exp(\mathbf{A}t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^{n-1}}{(n-1)!} = \mathbf{A} \left[\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} \right] = \mathbf{A} \exp(\mathbf{A}t). \quad (24)$$

Assim, $\exp(\mathbf{A}t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dt} \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{A} \exp(\mathbf{A}t). \quad (25)$$

Além disso, quando $t = 0$ $\exp(\mathbf{A}t)$ satisfaz a condição inicial

$$\exp(\mathbf{A}t) \Big|_{t=0} = \mathbf{I}. \quad (26)$$

A matriz fundamental Φ satisfaz o mesmo problema de valor inicial que $\exp(\mathbf{A}t)$, a saber,

$$\Phi' = \mathbf{A}\Phi, \quad \Phi(0) = \mathbf{I}. \quad (27)$$

Então, pela parte referente à unicidade no Teorema 7.1.2 (estendido para equações diferenciais matriciais) concluímos que $\exp(\mathbf{A}t)$ e a matriz fundamental $\Phi(t)$ são iguais. Assim, podemos escrever a solução do problema de valor inicial (19) na forma

$$\mathbf{x} = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^0, \quad (28)$$

que é análoga à solução (18) do problema de valor inicial (17).

Para justificar, definitivamente, a utilização de $\exp(\mathbf{A}t)$ para a soma da série (22) deveríamos demonstrar que essa função matricial tem as propriedades que associamos à função exponencial usual. Um modo de fazer isso está esquematizado no Problema 15.

Matrizes Diagonalizáveis. A razão básica pela qual um sistema linear de equações (algébricas ou diferenciais) apresenta alguma dificuldade é que as equações estão, em geral, *acopladas*. Em outras palavras, algumas das equações, ou todas elas, envolvem mais de uma das incógnitas – tipicamente, todas elas. Portanto, as equações em um sistema têm que ser resolvidas *simultaneamente*. Por outro lado, se cada equação dependesse de uma única variável então cada equação poderia ser resolvida independentemente de todas as outras, o que é uma tarefa muito mais simples. Essa observação sugere que uma possível maneira de resolver um sistema de equações pode ser transformando-o em um sistema equivalente *desacoplado*, no qual cada equação contém uma única incógnita. Isso corresponde a transformar a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ em uma matriz *diagonal*.

Autovetores servem para se obter uma tal transformação. Suponha que a matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ tem um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes. Lembre-se de que esse é certamente o caso quando os autovalores de $\mathbf{A}$ forem todos distintos ou quando $\mathbf{A}$ for autoadjunta. Denotando esses autovetores por $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ e por $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores associados, formamos a matriz $\mathbf{T}$, cujas colunas são os autovetores, ou seja,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Como as colunas de $\mathbf{T}$ são vetores linearmente independentes, $\det \mathbf{T} \neq 0$; logo, $\mathbf{T}$ é invertível e $\mathbf{T}^{-1}$ existe. Um cálculo direto mostra que as colunas da matriz $\mathbf{AT}$ são simplesmente os vetores $\mathbf{A}\xi^{(1)}, \dots, \mathbf{A}\xi^{(n)}$. Como $\mathbf{A}\xi^{(k)} = \lambda_k \xi^{(k)}$, segue que

$$\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \xi_1^{(1)} & \dots & \lambda_n \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 \xi_n^{(1)} & \dots & \lambda_n \xi_n^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{TD}, \quad (30)$$

onde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (31)$$

é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são os autovalores de $\mathbf{A}$. Da Eq. (30), segue que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D}. \quad (32)$$

Assim, se os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$ são conhecidos, $\mathbf{A}$ pode ser transformada em uma matriz diagonal pela Eq. (32). Esse processo é conhecido como uma **transformação de semelhança** e a Eq. (32) é descrita, em palavras, dizendo-se que $\mathbf{A}$ é **semelhante** à matriz diagonal $\mathbf{D}$. Outra maneira é dizer que $\mathbf{A}$ é **diagonalizável**. Observe que uma semelhança não muda os autovalores de $\mathbf{A}$ e transforma seus autovetores nos vetores coordenados $\mathbf{e}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}^{(n)}$.

Se $\mathbf{A}$ for autoadjunta, o determinante de $\mathbf{T}^{-1}$ é muito simples. Sabemos que os autovetores $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ de $\mathbf{A}$ são ortogonais entre si, logo podemos escolhê-los de modo que estejam normalizados por $(\xi^{(i)}, \xi^{(i)}) = 1$. Então, é fácil verificar que $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^*$; em outras palavras, a inversa de $\mathbf{T}$ é igual à sua adjunta (sua transposta conjugada).

Finalmente, observamos que se $\mathbf{A}$ tiver menos do que n autovetores linearmente independentes, então não existe matriz $\mathbf{T}$ tal que $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D}$. Nesse caso, $\mathbf{A}$ não é semelhante a nenhuma matriz diagonal e não é diagonalizável.

EXEMPLO

3

Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Encontre uma matriz $\mathbf{T}$ que defina uma semelhança e mostre que $\mathbf{A}$ é diagonalizável.

No Exemplo 1 da Seção 7.5 vimos que os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$ são

$$r_1 = 3, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad r_2 = -1, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Logo, a matriz de semelhança $\mathbf{T}$ e sua inversa $\mathbf{T}^{-1}$ são dadas por

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Portanto, você pode verificar que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{D}. \quad (36)$$

Vamos, agora, voltar para o sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (37)$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante. Nas Seções 7.5 e 7.6 descrevemos como resolver tal sistema partindo da hipótese de que $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$. Vamos fornecer, agora, outro ponto de vista, baseado na diagonalização da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

De acordo com os resultados que acabamos de enunciar, é possível diagonalizar $\mathbf{A}$ sempre que $\mathbf{A}$ tiver um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes. Sejam $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ os autovetores de $\mathbf{A}$ associados aos autovalores $r_1, \dots, r_n$ e formem a matriz de semelhança $\mathbf{T}$ cujas colunas são $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$. Então, definindo uma nova variável dependente $\mathbf{y}$ pela relação

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}, \quad (38)$$

temos, da Eq. (37),

$$\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y}. \quad (39)$$

Multiplicando por $\mathbf{T}^{-1}$, obtemos

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y}, \quad (40)$$

ou, usando a Eq. (32),

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y}. \quad (41)$$

Lembre que $\mathbf{D}$ é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são os autovalores $r_1, \dots, r_n$ de $\mathbf{A}$. Uma matriz fundamental para o sistema (41) é a matriz diagonal (veja o Problema 16)

$$\mathbf{Q}(t) = \exp(\mathbf{D}t) = \begin{pmatrix} e^{r_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{r_n t} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Uma matriz fundamental Ψ para o sistema (37) é formada, então, de $\mathbf{Q}$ através da transformação (38)

$$\Psi = \mathbf{T}\mathbf{Q}; \quad (43)$$

ou seja,

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{pmatrix}. \quad (44)$$

A Eq. (44) confirma o resultado obtido na Seção 7.5. Esse processo de diagonalização não tem nenhuma vantagem computacional em relação ao método da Seção 7.5, já que, em qualquer caso, é preciso calcular os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes no sistema de equações diferenciais.

EXEMPLO

4

Considere, mais uma vez, o sistema de equações diferenciais

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (45)$$

onde $\mathbf{A}$ é dada pela Eq. (33). Usando a transformação $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$, onde $\mathbf{T}$ é dada pela Eq. (35), você pode reduzir o sistema (45) ao sistema diagonal

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{y}. \quad (46)$$

Obtenha uma matriz fundamental para o sistema (46) e depois a transforme para obter uma matriz fundamental para o sistema original (45).

Multiplicando, repetidamente, $\mathbf{D}$ por si mesma, vemos que

$$\mathbf{D}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^3 = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad (47)$$

Portanto, segue da Eq. (23) que $\exp(\mathbf{D}t)$ é uma matriz diagonal com elementos diagonais e^{3t} e e^{-t} , ou seja,

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Finalmente, obtemos a matriz fundamental desejada $\Psi(t)$ multiplicando $\mathbf{T}$ por $\exp(\mathbf{D}t)$:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Note que essa matriz fundamental é a encontrada no Exemplo 1.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 10:

- Encontre uma matriz fundamental para o sistema de equações dado.
- Encontre, também, a matriz fundamental $\Phi(t)$ que satisfaz $\Phi(0) = \mathbf{I}$.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

11. Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

usando a matriz fundamental $\Phi(t)$ encontrada no Problema 3.

12. Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

usando a matriz fundamental $\Phi(t)$ encontrada no Problema 6.

- Mostre que $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$, onde $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$ são como definidas nesta seção.
- A matriz fundamental $\Phi(t)$ para o sistema (3) foi encontrada no Exemplo 2. Mostre que $\Phi(t)\Phi(s) = \Phi(t+s)$ multiplicando $\Phi(t)$ e $\Phi(s)$.
- Seja $\Phi(t)$ a matriz fundamental satisfazendo $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$, $\Phi(0) = \mathbf{I}$. No texto, denotamos essa matriz também por $\exp(\mathbf{A}t)$. Neste problema vamos mostrar que Φ tem, de fato, as propriedades algébricas principais associadas à função exponencial.
 - Mostre que $\Phi(t)\Phi(s) = \Phi(t+s)$, ou seja, $\exp(\mathbf{A}t)\exp(\mathbf{A}s) = \exp[\mathbf{A}(t+s)]$.
Sugestão: mostre que se s é fixo e t variável, então $\Phi(t)\Phi(s)$ e $\Phi(t+s)$ satisfazem o problema de valor inicial $\mathbf{Z}' = \mathbf{A}\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}(0) = \Phi(s)$.

- (b) Mostre que $\Phi(t)\Phi(-t) = \mathbf{I}$, ou seja, $\exp(\mathbf{A}t)\exp[\mathbf{A}(-t)] = \mathbf{I}$. Depois, mostre que $\Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$.
 (c) Mostre que $\Phi(t-s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$.
 16. Mostre que se $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonal com elementos diagonais $a_1, a_2, \dots, a_n$, então $\exp(\mathbf{A}t)$ é também uma matriz diagonal com elementos diagonais $\exp(a_1t), \exp(a_2t), \dots, \exp(a_nt)$.
 17. Considere um oscilador satisfazendo o problema de valor inicial

$$u'' + \omega^2 u = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0. \quad (i)$$

- (a) Sejam $x_1 = u, x_2 = u'$ e coloque as Eqs.(i) na forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0. \quad (ii)$$

- (b) Usando a série (23), mostre que

$$\exp \mathbf{A}t = \mathbf{I} \cos \omega t + \mathbf{A} \frac{\sin \omega t}{\omega}. \quad (iii)$$

- (c) Encontre a solução do problema de valor inicial (ii).

18. O método de aproximações sucessivas (veja a Seção 2.8) também pode ser aplicado a sistemas de equações. Por exemplo, considere o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad (i)$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante e $\mathbf{x}^0$ um vetor dado.

- (a) Suponha que existe uma solução $\mathbf{x} = \Phi(t)$ e mostre que ela tem que satisfazer a equação integral

$$\Phi(t) = \mathbf{x}^0 + \int_0^t \mathbf{A}\Phi(s) ds. \quad (ii)$$

- (b) Comece com a aproximação inicial $\Phi^{(0)}(t) = \mathbf{x}^0$. Substitua $\Phi(s)$ no lado direito da Eq. (ii) por essa expressão e obtenha uma nova aproximação $\Phi^{(1)}(t)$. Mostre que

$$\Phi^{(1)}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t)\mathbf{x}^0. \quad (iii)$$

- (c) Repita esse processo obtendo, assim, uma sequência de aproximações $\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(n)}, \dots$. Use um argumento indutivo para mostrar que

$$\Phi^{(n)}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mathbf{A}^n \frac{t^n}{n!} \right) \mathbf{x}^0. \quad (iv)$$

- (d) Faça $n \rightarrow \infty$ e mostre que a solução do problema de valor inicial (i) é

$$\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^0. \quad (v)$$

7.8 Autovalores Repetidos

Concluiremos nossa discussão do sistema linear homogêneo com coeficientes constantes

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1)$$

considerando o caso em que a matriz $\mathbf{A}$ tem autovalores repetidos. Lembre que observamos, na Seção 7.3, que um autovalor repetido com multiplicidade algébrica $k \geq 2$ pode ter multiplicidade geométrica menor do que k . Em outras palavras, pode ter menos do que k autovetores linearmente independentes associados a esse autovalor. O exemplo a seguir ilustra essa possibilidade.

EXEMPLO

1

Encontre os autovalores e autovetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Os autovalores r e os autovetores ξ satisfazem a equação $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$, ou

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Os autovalores são as raízes da equação

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 4r + 4 = 0. \quad (4)$$

Logo, os dois autovalores são $r_1 = 2$ e $r_2 = 2$, ou seja, o autovalor 2 tem multiplicidade 2.

Para determinar os autovetores associados, precisamos voltar para a Eq. (3) e usar o valor 2 para r . Isso nos dá

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Obtemos, portanto, uma única condição $\xi_1 + \xi_2 = 0$, que determina ξ_2 em função de ξ_1 , ou vice-versa. Então, um autovetor associado ao autovalor $r = 2$ é

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

ou qualquer múltiplo não nulo desse vetor. Note que existe apenas um autovetor linearmente independente associado a esse autovalor duplo.

Voltando para o sistema (1), suponha que $r = \rho$ é uma raiz de multiplicidade k da equação

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \quad (7)$$

Então ρ é um autovalor de multiplicidade k da matriz $\mathbf{A}$. Nesse caso, existem duas possibilidades: ou existem k vetores linearmente independentes associados ao autovalor ρ , ou existem menos do que k desses vetores.

No primeiro caso, sejam $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}$ os k autovetores linearmente independentes associados ao autovalor ρ de multiplicidade k . Então, $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)}e^{\rho t}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t) = \xi^{(k)}e^{\rho t}$ são k soluções linearmente independentes da Eq. (1). Assim, nesse caso, não faz diferença que o autovalor $r = \rho$ seja repetido: ainda existe um conjunto fundamental de soluções da Eq. (1) da forma $\xi e^{\rho t}$. Esse caso sempre ocorre se a matriz $\mathbf{A}$ de coeficientes for autoadjunta.

No entanto, se a matriz de coeficientes não for autoadjunta então podem existir menos do que k vetores linearmente independentes associados ao autovalor ρ de multiplicidade algébrica k e, se for esse o caso, haverá menos do que k soluções da Eq. (1) da forma $\xi e^{\rho t}$ associadas a esse autovalor. Portanto, para construir a solução geral da Eq. (1) é preciso encontrar outras soluções de forma diferente. Por analogia com resultados anteriores para equações lineares de ordem n , é natural procurar outras soluções envolvendo produtos de funções polinomiais e exponenciais. Vamos primeiro considerar um exemplo.

EXEMPLO

2

Encontre um conjunto fundamental de soluções para

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (8)$$

e desenhe um retrato de fase para esse sistema.

A Figura 7.8.1 mostra um campo de direções para o sistema (8). Nessa figura parece que todas as soluções não nulas se afastam da origem.

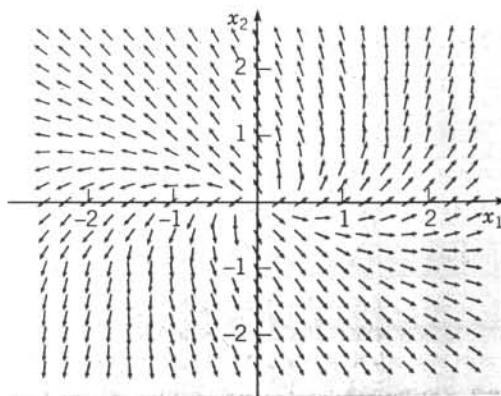


FIGURA 7.8.1 Um campo de direções para o sistema (8).

Para resolver esse sistema, note que a matriz de coeficientes é igual à matriz no Exemplo 1. Sabemos, então, que $r = 2$ é um autovalor duplo que tem um único autovetor correspondente linearmente independente, que podemos escolher como $\xi^T = (1, -1)$. Logo, uma solução do sistema (8) é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad (9)$$

mas não existe uma segunda solução da forma $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$.

Baseado no procedimento usado para equações lineares de segunda ordem na Seção 3.4, parece natural tentar encontrar uma segunda solução do sistema (8) da forma

$$\mathbf{x} = \xi t e^{2t}, \quad (10)$$

onde ξ é um vetor constante a ser determinado. Substituindo $\mathbf{x}$ na Eq. (8), obtemos

$$2\xi t e^{2t} + \xi e^{2t} - \mathbf{A}\xi t e^{2t} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Para que a Eq. (11) seja satisfeita para todo t , é necessário que os coeficientes de $t e^{2t}$ e de e^{2t} sejam nulos. Do termo e^{2t} , vemos que

$$\xi = \mathbf{0}. \quad (12)$$

Logo, não existe solução não nula do sistema (8) da forma (10).

Como a Eq. (11) contém termos em $t e^{2t}$ e e^{2t} , parece que além de $\xi t e^{2t}$ a segunda solução tem que conter, também, um termo da forma ηe^{2t} ; em outras palavras, precisamos supor que

$$\mathbf{x} = \xi t e^{2t} + \eta e^{2t}, \quad (13)$$

onde ξ e η são vetores constantes que deverão ser determinados. Substituindo $\mathbf{x}$ na Eq. (8) por essa expressão, obtemos

$$2\xi t e^{2t} + (\xi + 2\eta) e^{2t} = \mathbf{A}(\xi t e^{2t} + \eta e^{2t}). \quad (14)$$

Igualando os coeficientes de $t e^{2t}$ e de e^{2t} de cada lado da Eq. (14), encontramos as condições

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\xi = \mathbf{0} \quad (15)$$

e

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\eta = \xi \quad (16)$$

para ξ e η . A Eq. (15) será satisfeita se ξ for um autovetor de $\mathbf{A}$ associado ao autovalor $r = 2$, ou seja, $\xi^T = (1, -1)$. Como $\det(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ é nulo, poderíamos esperar que a Eq. (16) não tivesse solução. No entanto, isso não é necessariamente verdade, já que para alguns vetores ξ é possível resolver a Eq. (16). De fato, a matriz aumentada para a Eq. (16) é

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

A segunda linha dessa matriz é proporcional à primeira, de modo que o sistema pode ser resolvido. Temos

$$-\eta_1 - \eta_2 = 1,$$

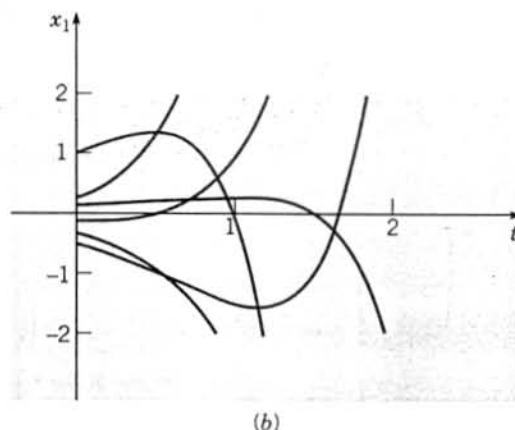
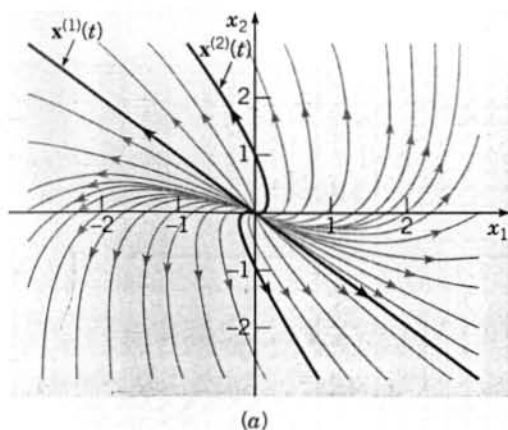


FIGURA 7.8.2 (a) Trajetórias do sistema (8); a origem é um nó impróprio. (b) Gráficos de x_1 em função de t para o sistema (8).

de modo que se $\eta_1 = k$, onde k é arbitrário, então $\eta_2 = -k - 1$. Se escrevermos

$$\eta = \begin{pmatrix} k \\ -1 - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

então, substituindo ξ e η na Eq. (13), obtemos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \quad (18)$$

O último termo na Eq. (18) é simplesmente um múltiplo da primeira solução $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e pode ser ignorado, mas os dois primeiros termos constituem uma nova solução:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \quad (19)$$

Um cálculo elementar mostra que $W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = -e^{4t}$ e, portanto, $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema (8). A solução geral é

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

O gráfico da solução (20) é um pouco mais difícil de analisar do que em alguns dos exemplos anteriores. É claro que $\mathbf{x}$ torna-se ilimitada quando $t \rightarrow \infty$ e que $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ quando $t \rightarrow -\infty$. É possível mostrar que quando $t \rightarrow -\infty$, todas as soluções se aproximam da origem tangentes à reta $x_2 = -x_1$ determinada pelo autovetor. Analogamente, quando $t \rightarrow \infty$, cada trajetória é assintótica a uma reta com coeficiente angular -1 . As trajetórias do sistema (8) aparecem na Figura 7.8.2a, e alguns gráficos típicos de x_1 em função de t aparecem na Figura 7.8.2b. O padrão de trajetórias nessa figura é típico de sistemas de segunda ordem $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ com autovalores iguais e apenas um autovetor independente. A origem é chamada de **nó impróprio** nesse caso. Se os autovalores forem negativos, então as trajetórias são semelhantes mas percorridas em sentido oposto. Um nó impróprio pode ser assintoticamente estável ou instável, dependendo de os autovalores serem negativos ou positivos.

Uma diferença entre um sistema de duas equações de primeira ordem e uma única equação de segunda ordem é evidente no exemplo precedente. Lembre-se de que para uma equação linear de segunda ordem cuja equação característica tem uma raiz repetida r_1 , não é necessário um termo da forma $\eta e^{r_1 t}$ na segunda solução, já que isso é um múltiplo da primeira solução. Por outro lado, para um sistema com duas equações de primeira ordem o termo $\eta e^{r_1 t}$ da Eq. (13) com $r_1 = 2$ não é um múltiplo da primeira solução $\xi e^{r_1 t}$, de modo que o termo $\eta e^{r_1 t}$ precisa ser mantido.

O Exemplo 2 é típico do caso geral quando existe um autovalor duplo e um único autovetor associado independente. Considere, novamente, o sistema (1) e suponha que $r = \rho$ é um autovalor duplo de $\mathbf{A}$, mas que existe apenas um autovetor associado independente ξ . Então, uma solução [semelhante à Eq. (9)] é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi e^{\rho t}, \quad (21)$$

onde ξ satisfaz

$$(\mathbf{A} - \rho \mathbf{I})\xi = \mathbf{0}. \quad (22)$$

Procedendo como no Exemplo 2, vemos que uma segunda solução [semelhante à Eq. (19)] é

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \xi te^{\rho t} + \eta e^{\rho t}, \quad (23)$$

onde ξ satisfaz a Eq. (22) e η é determinado de

$$(\mathbf{A} - \rho \mathbf{I})\eta = \xi. \quad (24)$$

Embora $\det(\mathbf{A} - \rho \mathbf{I}) = 0$, pode-se mostrar que é sempre possível resolver a Eq. (24) para η . O vetor η é chamado de **autovetor generalizado** associado ao autovalor ρ .

Matrizes Fundamentais. Como explicado na Seção 7.7, matrizes fundamentais são formadas colocando-se soluções linearmente independentes em colunas. Assim, por exemplo, pode-se formar uma matriz fundamental para o sistema (8) usando-se as soluções $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ dadas nas Eqs. (9) e (19), respectivamente:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -te^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -1 - t \end{pmatrix}. \quad (25)$$

A matriz Φ que satisfaz $\Phi(0) = \mathbf{I}$ também pode ser imediatamente encontrada através da relação $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(0)$. Para a Eq. (8), temos

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \Psi(t)\Psi^{-1}(0) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

A última matriz é, também, a matriz exponencial $\exp(\mathbf{A}t)$.

Formas de Jordan. Como vimos na Seção 7.7, uma matriz $\mathbf{A}$ $n \times n$ só pode ser diagonalizada se tiver um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes. Se existem menos autovetores (devido a autovalores repetidos), então $\mathbf{A}$ sempre pode ser transformada em uma matriz quase diagonal denominada sua forma canônica de Jordan,⁶ que tem os autovalores de $\mathbf{A}$ em sua diagonal, um em determinadas posições acima da diagonal principal e zeros em todos os outros lugares.

Considere, novamente, a matriz $\mathbf{A}$ dada pela Eq. (2). Forme a matriz de semelhança $\mathbf{T}$ com o único autovetor ξ dado pela Eq. (6) em sua primeira coluna e com o autovetor generalizado η dado pela Eq. (17) com $k = 0$ na segunda coluna. Então, $\mathbf{T}$ e sua inversa são dados por

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Como você pode verificar, segue que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{J}. \quad (29)$$

A matriz $\mathbf{J}$ na Eq. (29) é a forma canônica de Jordan de $\mathbf{A}$. Ela é típica de todas as formas de Jordan por ter o número 1 acima da diagonal principal na coluna correspondente ao autovetor que está faltando (e é substituído em $\mathbf{T}$ pelo autovetor generalizado).

Se começarmos de novo da Eq. (1),

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

a transformação $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$, onde $\mathbf{T}$ é dado pela Eq. (28), produz o sistema

$$\mathbf{y}' = \mathbf{J}\mathbf{y}, \quad (30)$$

onde $\mathbf{J}$ é dado pela Eq. (29). Em forma escalar, o sistema (30) é

$$y_1' = 2y_1 + y_2, \quad y_2' = 2y_2. \quad (31)$$

Essas equações podem ser resolvidas imediatamente em ordem inversa. Dessa forma, obtemos

$$y_2 = c_1 e^{2t}, \quad y_1 = c_1 t e^{2t} + c_2 e^{2t}. \quad (32)$$

Logo, as duas soluções independentes do sistema (30) são

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{y}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad (33)$$

e a matriz fundamental correspondente é

$$\hat{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & t e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Como $\hat{\Psi}(0) = \mathbf{I}$, podemos identificar, também, a matriz na Eq. (34) como $\exp(\mathbf{J}t)$. O mesmo resultado pode ser encontrado calculando-se as potências de $\mathbf{J}$ e substituindo-as na série exponencial (veja os Problemas de 19 a 21). Para obter uma matriz fundamental para o sistema original, formamos o produto

⁶Camille Jordan (1838-1921), professor da École Polytechnique e do Collège de France, fez contribuições importantes à análise, à topologia e especialmente à álgebra. A forma de Jordan de uma matriz apareceu em seu influente livro, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, publicado em 1870.

$$\Psi(t) = T \exp(Jt) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -e^{2t} - te^{2t} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

que é igual à matriz fundamental dada na Eq. (25).

Não discutiremos aqui as formas de Jordan de matrizes $n \times n$ em maiores detalhes. Para n grande, é possível que existam autovalores com multiplicidade algébrica alta e talvez com multiplicidade geométrica muito menor. Uma discussão completa⁷ da forma de Jordan para uma matriz $n \times n$ geral requer conhecimentos mais profundos de álgebra linear do que supomos que os leitores deste livro têm. Os Problemas de 17 a 21 pedem que você explore o uso de formas de Jordan para sistemas com três equações.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4:

- Desenhe um campo de direções e esboce algumas trajetórias.
- Descreva como as soluções se comportam quando $t \rightarrow \infty$.
- Encontre a solução geral do sistema de equações.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Nos Problemas 5 e 6, encontre a solução geral do sistema de equações dado.

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Em cada um dos Problemas de 7 a 10:

- Encontre a solução do problema de valor inicial dado.
- Desenhe a trajetória da solução no plano x_1, x_2 e desenhe, também, o gráfico de x_1 em função de t .

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Em cada um dos Problemas 11 e 12:

- Encontre a solução do problema de valor inicial dado.
- Desenhe a trajetória correspondente no espaço x_1, x_2, x_3 e desenhe, também, o gráfico de x_1 em função de t .

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Em cada um dos Problemas 13 e 14, resolva o sistema de equações dado pelo método do Problema 19 da Seção 7.5. Suponha que $t > 0$.

⁷Veja, por exemplo, os livros listados nas Referências no final deste capítulo.

$$13. \mathbf{t}\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$14. \mathbf{t}\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

15. Mostre que todas as soluções do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$ se, e somente se, $a + d < 0$ e $ad - bc > 0$. Compare esse resultado com o do Problema 38 na Seção 3.4.

16. Considere, novamente, o circuito elétrico no Problema 26 da Seção 7.6. Esse circuito é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que os autovalores são reais e iguais se $L = 4R^2C$.

(b) Suponha que $R = 1 \Omega$, $C = 1 \text{ F}$ e $L = 4 \text{ H}$. Suponha, também, que $I(0) = 1 \text{ A}$ e $V(0) = 2 \text{ V}$. Encontre $I(t)$ e $V(t)$.

Autovalores de Multiplicidade 3. Se a matriz $\mathbf{A}$ tem um autovalor de multiplicidade algébrica 3, então podem existir um, dois ou três autovetores associados linearmente independentes. A solução geral do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é diferente, dependendo do número de autovetores independentes associados ao autovalor triplo. Como observado no texto não há dificuldade se existem três autovetores, já que, nesse caso, existem três soluções independentes da forma $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$. Os dois problemas a seguir ilustram o procedimento para se encontrar a solução no caso de um autovalor triplo com um ou dois autovetores independentes, respectivamente.

17. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (\text{i})$$

(a) Mostre que $r = 2$ é um autovalor de multiplicidade 3 da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ e que existe apenas um autovetor associado, a saber,

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Usando a informação do item (a), escreva uma solução $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ do sistema (i). Não existe outra solução da forma puramente exponencial $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$.

(c) Para encontrar uma segunda solução, suponha que $\mathbf{x} = \xi t e^{2t} + \eta e^{2t}$. Mostre que ξ e η satisfazem as equações

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\eta = \xi.$$

Como ξ já foi encontrado no item (a), resolva a segunda equação para η . Despreze o múltiplo de $\xi^{(1)}$ que aparece em η , já que nos leva, apenas, a um múltiplo da primeira solução $\mathbf{x}^{(1)}$. Depois, escreva uma segunda solução $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ do sistema (i).

(d) Para encontrar uma terceira solução, suponha que $\mathbf{x} = \xi(t^2/2)e^{2t} + \eta t e^{2t} + \zeta e^{2t}$. Mostre que ξ , η e ζ satisfazem as equações

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\eta = \xi, \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\zeta = \eta.$$

As duas primeiras equações são as mesmas do item (c), logo, para resolver a equação para ζ despreze novamente o múltiplo de $\xi^{(1)}$ que aparece. Depois, escreva uma terceira solução $\mathbf{x}^{(3)}(t)$ do sistema (i).

(e) Escreva uma matriz fundamental $\Psi(t)$ para o sistema (i).

(f) Forme a matriz $\mathbf{T}$ com o autovetor $\xi^{(1)}$ na primeira coluna e os autovetores generalizados η e ζ nas segunda e terceira colunas. Depois, encontre $\mathbf{T}^{-1}$ e forme o produto $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. A matriz $\mathbf{J}$ é a forma canônica de Jordan de $\mathbf{A}$.

18. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (\text{i})$$

- (a) Mostre que $r = 1$ é um autovetor triplo da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ e que existem dois autovetores associados linearmente independentes, que podemos escolher como

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad (\text{ii})$$

Encontre duas soluções linearmente independentes $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ da Eq. (i).

- (b) Para encontrar uma terceira solução, suponha que $\mathbf{x} = \xi e^t + \eta e^t$; mostre que então ξ e η têm que satisfazer

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\xi = \mathbf{0}, \quad (\text{iii})$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\eta = \xi. \quad (\text{iv})$$

- (c) Mostre que $\xi = c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, é a solução mais geral da Eq. (iii). Mostre que para resolver a Eq. (iv) é necessário que $c_1 = c_2$.
- (d) É conveniente escolher $c_1 = c_2 = 2$. Para essa escolha, mostre que

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{v})$$

onde retiramos os múltiplos de $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ que aparecem em η . Use os resultados dados nas Eqs. (v) para encontrar uma terceira solução linearmente independente $\mathbf{x}^{(3)}(t)$ da Eq. (i).

- (e) Escreva uma matriz fundamental $\Psi(t)$ para o sistema (i).

- (f) Forme a matriz $\mathbf{T}$ com o autovetor $\xi^{(1)}$ na primeira coluna e com o autovetor ξ e o autovetor generalizado η , dados pelas Eqs. (v), nas duas últimas colunas. Encontre $\mathbf{T}^{-1}$ e forme o produto $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. A matriz $\mathbf{J}$ é a forma canônica de Jordan de $\mathbf{A}$.

19. Seja $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, onde λ é um número real arbitrário.

- (a) Encontre $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ e $\mathbf{J}^4$.
- (b) Use um argumento indutivo para mostrar que $\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.
- (c) Determine $\exp(\mathbf{J}t)$.
- (d) Use $\exp(\mathbf{J}t)$ para resolver o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{J}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$.

20. Seja

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde λ é um número real arbitrário.

- (a) Encontre $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ e $\mathbf{J}^4$.
- (b) Use um argumento indutivo para mostrar que

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

- (c) Determine $\exp(\mathbf{J}t)$.
- (d) Observe que se você escolher $\lambda = 1$, então a matriz $\mathbf{J}$ neste problema é igual à matriz $\mathbf{J}$ no Problema 18(f). Usando a matriz $\mathbf{T}$ do Problema 18(f), forme o produto $\mathbf{T}\exp(\mathbf{J}t)$ com $\lambda = 1$. A matriz resultante é igual à matriz fundamental $\Psi(t)$ no Problema 18(e)? Se não for, explique a discrepância.

21. Seja

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde λ é um número real arbitrário.

- (a) Encontre $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ e $\mathbf{J}^4$.
- (b) Use um argumento indutivo para mostrar que

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & [n(n-1)/2]\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

- (c) Determine $\exp(\mathbf{J}t)$.
 (d) Observe que se você escolher $\lambda = 2$, então a matriz $\mathbf{J}$ neste problema é igual à matriz $\mathbf{J}$ no Problema 17(f). Usando a matriz $\mathbf{T}$ do Problema 17(f), forme o produto $\mathbf{T}\exp(\mathbf{J}t)$ com $\lambda = 2$. Observe que a matriz resultante é a mesma da matriz fundamental $\Psi(t)$ no Problema 17(e).

7.9 Sistemas Lineares Não Homogêneos

Nesta seção vamos considerar o sistema não homogêneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad (1)$$

onde a matriz $n \times n$ $\mathbf{P}(t)$ e o vetor $n \times 1$ $\mathbf{g}(t)$ são contínuos em $\alpha < t < \beta$. Pelo mesmo argumento usado na Seção 3.5 (veja, também, o Problema 16 nesta seção), a solução geral da Eq. (1) pode ser expressa na forma

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (2)$$

onde $c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$ é a solução geral do sistema homogêneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}(t)$ é uma solução particular do sistema não homogêneo (1). Vamos descrever, rapidamente, diversos métodos para se encontrar $\mathbf{v}(t)$.

Diagonalização. Começamos com um sistema da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad (3)$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times n$ constante diagonalizável. Diagonalizando a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ como indicado na Seção 7.7, podemos transformar a Eq. (3) em um sistema de equações facilmente solúvel.

Seja $\mathbf{T}$ a matriz cujas colunas são os autovetores $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ de $\mathbf{A}$ e defina uma variável dependente nova $\mathbf{y}$ por

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}. \quad (4)$$

Então, substituindo $\mathbf{x}$ na Eq. (3) pela expressão anterior, obtemos

$$\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t).$$

Multiplicando por $\mathbf{T}^{-1}$, segue que

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t), \quad (5)$$

onde $\mathbf{h}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t)$ e $\mathbf{D}$ é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são os autovalores $r_1, \dots, r_n$ de $\mathbf{A}$, arrumados na mesma ordem que os autovetores correspondentes $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ que aparecem como colunas de $\mathbf{T}$. A Eq. (5) é um sistema de n equações *desacopladas* para $y_1(t), \dots, y_n(t)$; em consequência, as equações podem ser resolvidas separadamente. Em forma escalar, a Eq. (5) fica

$$y_j'(t) = r_j y_j(t) + h_j(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

onde $h_j(t)$ é uma determinada combinação linear de $g_1(t), \dots, g_n(t)$. A Eq. (6) é uma equação linear de primeira ordem e pode ser resolvida pelos métodos da Seção 2.1. De fato, temos

$$y_j(t) = e^{r_j t} \int_0^t e^{-r_j s} h_j(s) ds + c_j e^{r_j t}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

onde os c_j são constantes arbitrárias. Finalmente, a solução $\mathbf{x}$ da Eq. (3) é obtida da Eq. (4). Ao ser multiplicado pela matriz de semelhança $\mathbf{T}$ o segundo termo do lado direito do sinal de igualdade na Eq. (7) fornece a solução geral da equação homogênea $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, enquanto o primeiro termo fornece uma solução particular do sistema não homogêneo (3).

EXEMPLO

1

Encontre a solução geral do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (8)$$

Procedendo como na Seção 7.5, vemos que os autovalores da matriz de coeficientes são $r_1 = -3$ e $r_2 = -1$, e os autovetores correspondentes são

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Logo, a solução geral da equação homogênea é

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (10)$$

Antes de escrever a matriz $\mathbf{T}$ de autovetores, lembre que vamos precisar encontrar $\mathbf{T}^{-1}$. A matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ é real e simétrica, logo podemos usar o resultado enunciado no final da Seção 7.3: $\mathbf{T}^{-1}$ é simplesmente a adjunta ou (como $\mathbf{T}$ é real) a transposta de $\mathbf{T}$, desde que os autovetores de $\mathbf{A}$ estejam normalizados de modo que $(\xi, \xi) = 1$. Portanto, normalizando $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$, temos

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Fazendo $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ e substituindo na Eq. (8), obtemos o seguinte sistema de equações para a variável dependente nova $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2e^{-t} - 3t \\ 2e^{-t} + 3t \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Logo,

$$y_1' + 3y_1 = \sqrt{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}t, \quad (13)$$

$$y_2' + y_2 = \sqrt{2}e^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}t.$$

Cada uma das Eqs. (13) é uma equação linear de primeira ordem e, portanto, pode ser resolvida pelos métodos da Seção 2.1. Desse modo, obtemos

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{t}{3} \right) - \frac{1}{9} \right] + c_1 e^{-3t} \quad (14)$$

$$y_2 = \sqrt{2}te^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}(t-1) + c_2 e^{-t}.$$

Finalmente, escrevemos a solução em função das variáveis originais:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_1/\sqrt{2})e^{-3t} + \left[(c_2/\sqrt{2}) + \frac{1}{2} \right] e^{-t} + t - \frac{4}{3} + te^{-t} \\ -(c_1/\sqrt{2})e^{-3t} + \left[(c_2/\sqrt{2}) - \frac{1}{2} \right] e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} + te^{-t} \end{pmatrix} \\ &= k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

onde $k_1 = c_1/\sqrt{2}$ e $k_2 = c_2/\sqrt{2}$. As duas primeiras parcelas à direita do sinal de igualdade na Eq. (15) formam a solução geral do sistema homogêneo associado à Eq. (8). As parcelas restantes formam uma solução particular do sistema não homogêneo.

Se a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ na Eq. (3) não for diagonalizável (devido a autovalores repetidos e à falta de autovetores) pode, de qualquer jeito, ser reduzida à sua forma canônica de Jordan $\mathbf{J}$ através de uma matriz de semelhança apropriada $\mathbf{T}$, envolvendo tanto autovetores quanto autovetores generalizados. Nesse caso, as equações diferenciais para $y_1, \dots, y_n$ não estarão totalmente desacopladas, já que algumas

linhas de $\mathbf{J}$ têm dois elementos não nulos, um autovalor na posição diagonal e um 1 na posição adjacente à direita. No entanto, as equações para $y_1, \dots, y_n$ ainda podem ser resolvidas consecutivamente, começando com y_n . Então, a solução do sistema original (3) pode ser encontrada pela relação $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$.

Coefficientes Indeterminados. Uma segunda maneira de se encontrar uma solução particular do sistema não homogêneo (1) é o método dos coeficientes indeterminados. Para usar esse método supomos que a solução tem determinada forma com alguns ou todos os coeficientes indeterminados e depois procuramos esses coeficientes de modo a satisfazer a equação diferencial. Do ponto de vista prático esse método só é aplicável se a matriz de coeficientes $\mathbf{P}$ for constante e se as componentes de $\mathbf{g}$ forem funções polinomiais, exponenciais, senoidais ou produtos de tais funções. Nesse caso, a forma correta da solução pode ser prevista de maneira simples e sistemática. O procedimento para escolher a forma da solução é essencialmente o mesmo dado na Seção 3.5 para equações lineares de segunda ordem. A principal diferença é ilustrada pelo caso de um termo não homogêneo da forma $\mathbf{u}e^{\lambda t}$, onde λ é uma raiz simples da equação característica. Nessa situação, em vez de supor uma solução da forma $\mathbf{a}te^{\lambda t}$ é preciso usar $\mathbf{a}te^{\lambda t} + \mathbf{b}e^{\lambda t}$, onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são determinados substituindo-se a expressão na equação diferencial.

EXEMPLO

2

Use o método dos coeficientes indeterminados para encontrar uma solução particular de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (16)$$

Esse é o mesmo sistema de equações do Exemplo 1. Para usar o método dos coeficientes a determinar escrevemos $\mathbf{g}(t)$ na forma

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} t. \quad (17)$$

Vamos supor, então, que

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{a}te^{-t} + \mathbf{b}e^{-t} + \mathbf{c}t + \mathbf{d}, \quad (18)$$

onde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$ são vetores a serem determinados. Note que $r = -1$ é um autovalor da matriz de coeficientes e, portanto, temos que incluir tanto $\mathbf{a}te^{-t}$ quanto $\mathbf{b}e^{-t}$ na solução proposta. Substituindo a Eq. (18) na Eq. (16) e juntando os termos, obtemos as seguintes equações algébricas para $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{a} &= -\mathbf{a}, \\ \mathbf{A}\mathbf{b} &= \mathbf{a} - \mathbf{b} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}\mathbf{c} &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}\mathbf{d} &= \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (19)$$

Da primeira das Eqs. (19), vemos que $\mathbf{a}$ é um autovetor de $\mathbf{A}$ associado ao autovalor $r = -1$. Logo, $\mathbf{a}^T = (\alpha, \alpha)$, onde α é qualquer constante diferente de zero. Note que a segunda das Eqs. (19) só pode ser resolvida se $\alpha = 1$ e, nesse caso, temos

$$\mathbf{b} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

para qualquer constante k . A escolha mais simples é $k = 0$, donde $\mathbf{b}^T = (0, -1)$. As terceira e quarta equações em (19) fornecem, então, $\mathbf{c}^T = (1, 2)$ e $\mathbf{d}^T = (-4/3, -5/3)$, respectivamente. Finalmente, da Eq. (18) obtemos a solução particular

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

A solução particular (21) não é idêntica à contida na Eq. (15) do Exemplo 1, porque o termo contendo e^{-t} é diferente. No entanto, se escolhermos $k = 1/2$ na Eq. (20) teremos $\mathbf{b}^T = (1/2, -1/2)$, e as duas soluções particulares ficarão idênticas.

Varição dos Parâmetros. Vamos considerar, agora, problemas mais gerais onde a matriz de coeficientes não é constante ou não é diagonalizável. Seja

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad (22)$$

onde $\mathbf{P}(t)$ e $\mathbf{g}(t)$ são contínuas em $\alpha < t < \beta$. Suponha que uma matriz fundamental $\Psi(t)$ para o sistema homogêneo associado

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \quad (23)$$

já foi encontrada. Vamos usar o método de variação dos parâmetros para construir uma solução particular e, portanto, a solução geral do sistema não homogêneo (22).

Como a solução geral do sistema homogêneo (23) é $\Psi(t)\mathbf{c}$, é natural proceder como na Seção 3.6 e buscar uma solução do sistema não homogêneo (22) substituindo-se o vetor constante $\mathbf{c}$ por uma função vetorial $\mathbf{u}(t)$. Assim, supomos que

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{u}(t), \quad (24)$$

onde $\mathbf{u}(t)$ é um vetor a ser encontrado. Diferenciando $\mathbf{x}$ dado pela Eq. (24) e impondo a Eq. (22), obtemos

$$\Psi'(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{P}(t)\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t). \quad (25)$$

Como $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental, $\Psi'(t) = \mathbf{P}(t)\Psi(t)$; logo, a Eq. (25) se reduz a

$$\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t). \quad (26)$$

Lembre que $\Psi(t)$ é invertível em qualquer intervalo onde $\mathbf{P}$ é contínua. Então $\Psi^{-1}(t)$ existe e temos

$$\mathbf{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t). \quad (27)$$

Logo, podemos selecionar como $\mathbf{u}(t)$ qualquer vetor na classe de vetores que satisfazem a Eq. (27); esses vetores estão determinados a menos de um vetor constante aditivo; portanto, denotamos $\mathbf{u}(t)$ por

$$\mathbf{u}(t) = \int \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t) dt + \mathbf{c}, \quad (28)$$

onde o vetor constante $\mathbf{c}$ é arbitrário. Se as integrais na Eq. (28) puderem ser calculadas, a solução geral do sistema (22) poderá ser encontrada substituindo-se $\mathbf{u}(t)$ na Eq. (24) pela expressão na Eq. (28). No entanto, mesmo se as integrais não puderem ser calculadas ainda podemos escrever a solução geral da Eq. (22) na forma

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t) \int_{t_1}^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds, \quad (29)$$

onde t_1 é qualquer ponto no intervalo (α, β) . Note que a primeira parcela à direita do sinal de igualdade na Eq. (29) é a solução geral do sistema homogêneo associado (23), e a segunda parcela é uma solução particular da Eq. (22).

Vamos considerar agora o problema de valor inicial consistindo na equação diferencial (22) e na condição inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0. \quad (30)$$

Podemos encontrar a solução desse problema de maneira conveniente se escolhermos o limite inferior de integração na Eq. (29) como o ponto inicial t_0 . Então a solução geral da equação diferencial é

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds. \quad (31)$$

Para $t = t_0$ a integral na Eq. (31) é zero, de modo que a condição inicial (30) também será satisfeita se escolhermos

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0. \quad (32)$$

Portanto,

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds \quad (33)$$

é a solução do problema de valor inicial dado. Mais uma vez, embora seja útil usar Ψ^{-1} para escrever as soluções (29) e (33) em geral, em casos particulares é melhor resolver as equações necessárias por redução de linhas do que calcular Ψ^{-1} e substituir nas Eqs. (29) e (33).

A solução (33) fica em uma forma ligeiramente mais simples se usarmos a matriz fundamental $\Phi(t)$ que satisfaz $\Phi(t_0) = \mathbf{I}$. Nesse caso, temos

$$\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}^0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds. \quad (34)$$

A Eq. (34) pode ser ainda mais simplificada se a matriz de coeficientes $\mathbf{P}(t)$ for constante (veja o Problema 17).

EXEMPLO

3

Use o método de variação dos parâmetros para encontrar a solução geral do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (35)$$

Esse é o mesmo sistema de equações dos Exemplos 1 e 2.

A solução geral do sistema homogêneo associado foi dada na Eq. (10). Assim,

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \quad (36)$$

é uma matriz fundamental. Então, a solução $\mathbf{x}$ da Eq. (35) é dada por $\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{u}(t)$, onde $\mathbf{u}(t)$ satisfaz $\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t)$, ou

$$\begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Resolvendo a Eq. (37) por redução de linhas, obtemos

$$u_1' = e^{2t} - \frac{3}{2}te^{3t},$$

$$u_2' = 1 + \frac{3}{2}te^t.$$

Logo,

$$u_1(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t} + c_1,$$

$$u_2(t) = t + \frac{3}{2}te^t - \frac{3}{2}e^t + c_2,$$

e

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{u}(t)$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

que é a mesma solução obtida anteriormente.

Transformadas de Laplace. Usamos a transformada de Laplace no Capítulo 6 para resolver equações lineares de qualquer ordem. Ela também pode ser usada de maneira semelhante para resolver sistemas de equações. Como a transformada é uma integral, a transformada de um vetor é calculada componente a componente. Assim, $\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$ é o vetor cujas componentes são as transformadas das componentes respectivas de $\mathbf{x}(t)$ e, analogamente, para $\mathcal{L}\{\mathbf{x}'(t)\}$. Denotaremos $\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$ por $\mathbf{X}(s)$. Então, por uma extensão do Teorema 6.2.1 para vetores, temos

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}'(t)\} = s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0). \quad (39)$$

EXEMPLO

4

Use o método de transformada de Laplace para resolver o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (40)$$

Esse é o mesmo sistema de equações dos Exemplos de 1 a 3.

Calculando a transformada de Laplace de cada parcela na Eq. (40), obtemos

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{G}(s), \quad (41)$$

onde $\mathbf{G}(s)$ é a transformada de $\mathbf{g}(t)$. A transformada $\mathbf{G}(s)$ é dada por

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} 2/(s+1) \\ 3/s^2 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Simplificaremos os cálculos restantes supondo que $\mathbf{x}(t)$ satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Então, a Eq. (41) fica

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s), \quad (43)$$

onde, como de hábito, $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Logo, $\mathbf{X}(s)$ é dada por

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{G}(s). \quad (44)$$

A matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ é chamada **matriz de transferência** porque, multiplicando-a pela transformada do vetor de entrada $\mathbf{g}(t)$, obtemos a transformada do vetor de saída $\mathbf{x}(t)$. Neste exemplo, temos

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

e obtemos, por um cálculo direto,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Então, substituindo as Eqs. (42) e (46) na Eq. (44) e efetuando as multiplicações indicadas, vemos que

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} \frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} + \frac{3}{s^2(s+1)(s+3)} \\ \frac{2}{(s+1)^2(s+3)} + \frac{3(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Finalmente, precisamos obter a solução $\mathbf{x}(t)$ de sua transformada $\mathbf{X}(s)$. Isso pode ser feito expandindo-se as expressões na Eq. (47) em frações parciais e usando-se a Tabela 6.2.1 ou (mais eficientemente) usando um programa de computador apropriado. De qualquer modo, depois de simplificado o resultado fica

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

A Eq. (48) fornece a solução particular do sistema (40) que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Por causa disso, ela difere ligeiramente das soluções particulares obtidas nos três exemplos precedentes. Para obter a solução geral da Eq. (40) você precisa somar a expressão na Eq. (48) à solução geral (10) do sistema homogêneo associado à Eq. (40).

Cada um dos métodos para se resolver equações não homogêneas tem vantagens e desvantagens. O método dos coeficientes indeterminados não precisa de integração, mas tem escopo limitado e pode levar a diversos conjuntos de equações algébricas. O método de diagonalização requer que se encontre a inversa da matriz de semelhança e a solução de um conjunto de equações lineares de primeira ordem desacopladas, seguida de uma multiplicação de matrizes. Sua principal vantagem é que para matrizes de coeficiente autoadjuntas a inversa da matriz de semelhança pode ser encontrada sem cálculos — uma característica muito importante para sistemas grandes. O método da transformada de Laplace envolve a inversão de uma matriz para se encontrar a matriz de transferência, seguida de uma multiplicação e, finalmente, da determinação da transformada inversa de cada parcela na expressão resultante. Ela é particularmente útil em problemas com termos não homogêneos que envolvem funções descontínuas ou impulsivas. O método de variação dos parâmetros é o mais geral. Por outro lado, envolve a solução de um conjunto de equações lineares algébricas com coeficientes variáveis, seguido de uma integração e de uma multiplicação de matrizes, de modo que também é o mais complicado do ponto de vista computacional. Para muitos sistemas pequenos com coeficientes constantes, tais como as dos exemplos desta seção, todos esses métodos funcionam bem, e pode não fazer muita diferença qual deles é escolhido.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12, encontre a solução geral do sistema de equações dados.

$$1. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$

$$2. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{3}e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$3. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$4. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

$$(6) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1} + 4 \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

$$7. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

$$8. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

$$9. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$10. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$11. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \pi$$

$$12. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \csc t \\ \sec t \end{pmatrix}, \quad \frac{\pi}{2} < t < \pi$$

13. O circuito elétrico mostrado na Figura 7.9.1 é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} I(t), \quad (i)$$

onde x_1 é a corrente através do indutor, x_2 é a queda de tensão através do capacitor e $I(t)$ é a corrente fornecida pela fonte externa.

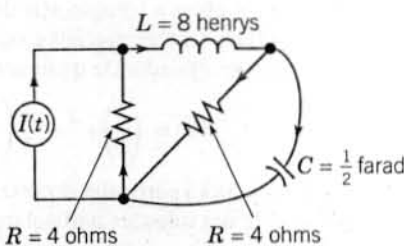


FIGURA 7.9.1 O circuito no Problema 13.

- (a) Determine uma matriz fundamental $\Psi(t)$ para o sistema homogêneo associado à Eq. (i). Veja o Problema 25 da Seção 7.6.
- (b) Se $I(t) = e^{-t/2}$, determine a solução do sistema (i) que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.

Em cada um dos Problemas 14 e 15, verifique que o vetor dado é a solução geral do sistema homogêneo associado e depois resolva o sistema não homogêneo. Suponha que $t > 0$.

$$14. \quad t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$$

$$(15) \quad t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2t \\ t^4 - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2$$

(16) Seja $\mathbf{x} = \phi(t)$ a solução geral de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ e seja $\mathbf{x} = \mathbf{v}(t)$ uma solução particular do mesmo sistema. Considerando a diferença $\phi(t) - \mathbf{v}(t)$, mostre que $\Phi(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$, onde $\mathbf{u}(t)$ é a solução geral do sistema homogêneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$.

17. Considere o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0.$$

- (a) Depois de observar o Problema 15(c) na Seção 7.7, mostre que

$$\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}^0 + \int_0^t \Phi(t-s)\mathbf{g}(s) ds.$$

- (b) Mostre também que

$$\mathbf{x} = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^0 + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t-s)]\mathbf{g}(s) ds.$$

Compare esses resultados com os do Problema 27 na Seção 3.6.

REFERÊNCIAS* Mais informações sobre matrizes e álgebra linear estão disponíveis em qualquer livro introdutório sobre o assunto. A lista a seguir é uma amostra representativa:

Anton, H. and Rorres, C., *Elementary Linear Algebra* (8th ed.) (New York: Wiley, 2000).

Johnson, L. W., Riess, R. D., and Arnold, J. T., *Introduction to Linear Algebra* (5th ed.) (Reading, MA: Addison-Wesley, 2001).

Kolman, B., *Elementary Linear Algebra* (8th ed.) (Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2003).

Leon, S. J., *Linear Algebra with Applications* (6th ed.) (New York: Macmillan, 2002).

Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications* (4th ed.) (New York: Academic Press, 1998).

O livro a seguir trata equações diferenciais elementares com ênfase especial em sistemas de equações de primeira ordem:

Brannan, J. R. and Boyce, W. E., *Differential Equations: An Introduction to Modern Methods and Applications* (New York: Wiley, 2007).

*Os livros de Kolman, B. e Leon, S.J. foram traduzidos para o português. (N.T.)

Métodos Numéricos

Até agora discutimos métodos para resolver equações diferenciais usando técnicas analíticas como integração ou expansão em séries. Em geral, a ênfase era em encontrar uma expressão exata para a solução. Infelizmente, existem muitos problemas importantes em engenharia e ciência, especialmente problemas não lineares, nos quais esses métodos ou não se aplicam ou são muito complicados para se usar. Neste capítulo vamos usar uma abordagem alternativa, a utilização de métodos numéricos aproximados para se obter uma aproximação precisa da solução de um problema de valor inicial. Vamos apresentar esses métodos no contexto o mais simples possível, ou seja, uma única equação escalar de primeira ordem. No entanto, eles podem ser facilmente estendidos para sistemas de equações de primeira ordem, e isso está esquematizado rapidamente na Seção 8.6. Os procedimentos aqui descritos podem ser executados facilmente em computadores pessoais.

8.1 O Método de Euler ou Método da Reta Tangente

Para discutir o desenvolvimento e a utilização de procedimentos numéricos vamos nos concentrar principalmente em problemas de valor inicial para equações de primeira ordem consistindo na equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (1)$$

e na condição inicial

$$y(t_0) = y_0. \quad (2)$$

Vamos supor que as funções f e f_y são contínuas em algum retângulo no plano ty contendo o ponto (t_0, y_0) . Então, pelo Teorema 2.4.2 existe uma única solução $y = \phi(t)$ do problema dado em algum intervalo em torno de t_0 . Se a Eq. (1) for não linear, então o intervalo de existência da solução pode ser difícil de ser determinado e pode não ter uma relação simples com a função f . No entanto, vamos supor, em todas as nossas discussões, que existe uma única solução do problema de valor inicial (1), (2) no intervalo de interesse.*

Na Seção 2.7 descrevemos o método mais antigo e mais simples de aproximação numérica, a saber, o método de Euler, ou o método da reta tangente. Esse método é expresso pela equação

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Se o tamanho do passo tiver valor uniforme h e se denotarmos $f(t_n, y_n)$ por f_n , então a Eq. (3) fica na forma

$$y_{n+1} = y_n + f_n h, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

O método de Euler consiste em calcular repetidamente a Eq. (3) ou (4), usando o resultado de cada passo para executar o próximo passo. Dessa maneira você obtém uma sequência de valores $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ que aproximam o valor da solução $\phi(t)$ nos pontos $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$

Na Seção 2.7 observamos que um programa de computador para o método de Euler tem a estrutura dada a seguir. As instruções específicas podem ser escritas em qualquer linguagem de programação conveniente.

O Método de Euler

- Passo 1.** defina $f(t, y)$
Passo 2. alimente os valores iniciais t_0 e y_0
Passo 3. alimente o tamanho do passo h e o número de passos n
Passo 4. escreva t_0 e y_0
Passo 5. para j de 1 até n calcule
Passo 6. $k_1 = f(t, y)$
 $y = y + h * k_1$
 $t = t + h$
Passo 7. escreva t e y
Passo 8. fim

Alguns exemplos do método de Euler aparecem na Seção 2.7. Como outro exemplo, considere o problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \quad (5)$$

$$y(0) = 1. \quad (6)$$

A Eq. (5) é uma equação linear de primeira ordem, e pode-se verificar facilmente que a solução que satisfaz as condições iniciais (6) é

$$y = \phi(t) = \frac{1}{4}t - \frac{3}{16} + \frac{19}{16}e^{4t}. \quad (7)$$

Como a solução exata é conhecida não precisamos de métodos numéricos para resolver o problema de valor inicial (5), (6). Por outro lado, a disponibilidade da solução exata torna fácil determinar a precisão de qualquer procedimento numérico utilizado nesse problema. Usaremos esse problema ao longo do capítulo para ilustrar e comparar os métodos numéricos diferentes. As soluções da Eq. (5) divergem rapidamente umas das outras, de modo que deveríamos esperar uma dificuldade razoável em aproximar bem a solução (7) em qualquer intervalo considerável. De fato, essa é a razão da escolha desse problema em particular; será relativamente fácil observar as vantagens de se usar métodos mais precisos.

EXEMPLO

1

Usando a fórmula de Euler (4) e tamanhos de passo $h = 0,05; 0,025; 0,01$ e $0,001$, determine valores aproximados da solução $y = \phi(t)$ do problema (5), (6) no intervalo $0 \leq t \leq 2$.

Os cálculos indicados foram feitos em um computador, e a Tabela 8.1.1 mostra alguns resultados. A precisão não impressiona muito. Para $h = 0,01$, o erro percentual é de 3,85% em $t = 0,5$, 7,49% em $t = 1,0$ e 14,4% em $t = 2,0$. Os erros percentuais correspondentes para $h = 0,001$ são de 0,40%, 0,79% e 1,58%, respectivamente. Note que se $h = 0,001$, precisamos de 2.000 passos para atravessar o intervalo de $t = 0$ até $t = 2$. Assim, é necessária uma quantidade considerável de cálculos para se obter uma precisão razoavelmente boa para esse problema usando-se o método de Euler. Quando discutirmos outros métodos numéricos mais adiante, neste capítulo, veremos que é possível obter precisão comparável, ou até melhor, com tamanhos de passos muito maiores e muito menos passos computacionais.

TABELA 8.1.1 Comparação dos Resultados de Aproximações Numéricas da Solução de $y' = 1 - t + 4y, y(0) = 1$, Usando o Método de Euler para Tamanhos de Passos Diferentes h

t	$h = 0,05$	$h = 0,025$	$h = 0,01$	$h = 0,001$	Exata
0,0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	1,5475000	1,5761188	1,5952901	1,6076289	1,6090418
0,2	2,3249000	2,4080117	2,4644587	2,5011159	2,5053299
0,3	3,4333560	3,6143837	3,7390345	3,8207130	3,8301388
0,4	5,0185326	5,3690304	5,6137120	5,7754845	5,7942260
0,5	7,2901870	7,9264062	8,3766865	8,6770692	8,7120041
1,0	45,588400	53,807866	60,037126	64,382558	64,897803
1,5	282,07187	361,75945	426,40818	473,55979	479,25919
2,0	1745,6662	2432,7878	3029,3279	3484,1608	3540,2001

Para se começar a investigar os erros na utilização de aproximações numéricas e sugerir, também, maneiras de se construir algoritmos mais precisos ajuda mencionar algumas maneiras alternativas de se olhar o método de Euler.

Primeiro, vamos escrever a equação diferencial (1) no ponto $t = t_n$ na forma

$$\frac{d\phi}{dt}(t_n) = f[t_n, \phi(t_n)]. \quad (8)$$

Então, aproximamos a derivada na Eq. (8) pelo quociente de diferenças correspondente (direto, ou para a frente), obtendo

$$\frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \cong f[t_n, \phi(t_n)]. \quad (9)$$

Finalmente, se substituirmos $\phi(t_{n+1})$ e $\phi(t_n)$ pelos seus valores aproximados y_{n+1} e y_n , respectivamente, e resolvermos para y_{n+1} , obteremos a fórmula de Euler (3).

Outro ponto de vista é escrever o problema como uma equação integral. Como $y = \phi(t)$ é uma solução do problema de valor inicial (1), (2), integrando-se de t_n até t_{n+1} obtemos

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, \phi(t)] dt,$$

ou

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, \phi(t)] dt. \quad (10)$$

A integral na Eq. (10) representa geometricamente a área sob a curva na Figura 8.1.1 entre $t = t_n$ e $t = t_{n+1}$. Se aproximarmos a integral substituindo $f[t, \phi(t)]$ por seu valor $f[t_n, \phi(t_n)]$ em $t = t_n$, estaremos aproximando a área real pela área do retângulo sombreado. Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} \phi(t_{n+1}) &\cong \phi(t_n) + f[t_n, \phi(t_n)](t_{n+1} - t_n) \\ &= \phi(t_n) + hf[t_n, \phi(t_n)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Finalmente, para obter uma aproximação y_{n+1} para $\phi(t_{n+1})$ fazemos uma segunda aproximação substituindo $\phi(t_n)$ pelo seu valor aproximado y_n na Eq. (11). Isso nos dá a fórmula de Euler $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$. Um algoritmo mais preciso pode ser obtido através de uma aproximação mais precisa da integral. Isso será discutido na Seção 8.2.

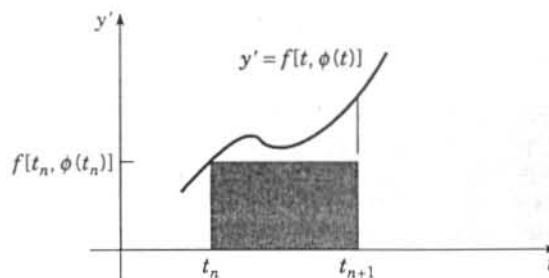


FIGURA 8.1.1 Dedução integral do método de Euler.

Uma terceira abordagem é supor que a solução $y = \phi(t)$ tem uma série de Taylor em torno do ponto t_n . Então,

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \phi''(t_n)\frac{h^2}{2!} + \dots,$$

ou

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + f[t_n, \phi(t_n)]h + \phi''(t_n)\frac{h^2}{2!} + \dots \quad (12)$$

Se a série é truncada depois das duas primeiras parcelas e $\phi(t_{n+1})$ e $\phi(t_n)$ são substituídos por seus valores aproximados y_{n+1} e y_n , novamente obtemos a fórmula de Euler (4). Se forem usadas mais parcelas na série, obtém-se uma fórmula mais precisa. Além disso, usando uma série de Taylor com resto é possível estimar o tamanho do erro na fórmula. Isso será discutido mais adiante nesta seção.

A Fórmula de Euler Inversa. Pode-se obter uma variante da fórmula de Euler aproximando-se a derivada na Eq. (8) pelo quociente de diferenças inverso (ou para trás) $[\phi(t_n) - \phi(t_{n-1})]/h$, em vez do quociente de diferenças direto usado na Eq. (9). Obtemos, assim,

$$\phi(t_n) - \phi(t_{n-1}) \cong hf(t_n, y_n),$$

ou

$$y_n = y_{n-1} + hf(t_n, y_n).$$

Variando o índice de n para $n + 1$, obtemos a fórmula de Euler inversa

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}). \quad (13)$$

Supondo y_n conhecido e y_{n+1} a ser calculado, note que a Eq. (13) não fornece uma fórmula explícita para y_{n+1} . Em vez disso, é uma equação que define implicitamente y_{n+1} e precisa ser resolvida para se determinar o valor de y_{n+1} . A dificuldade disso depende exclusivamente da natureza da função f .

EXEMPLO 2

Use a fórmula de Euler inversa (13) e tamanhos de passos $h = 0,05; 0,025; 0,01$ e $0,001$ para encontrar valores aproximados da solução do problema de valor inicial (5), (6) no intervalo $0 \leq t \leq 2$.

Para este problema, a fórmula de Euler inversa (13) fica

$$y_{n+1} = y_n + h(1 - t_{n+1} + 4y_{n+1}).$$

Vamos mostrar os dois primeiros passos em detalhe, de modo a tornar claro como o método funciona. No primeiro passo, temos

$$y_1 = y_0 + h(1 - t_1 + 4y_1) = 1 + (0,05)(1 - 0,05 + 4y_1).$$

Resolvendo essa equação para y_1 , obtemos

$$y_1 = 1,0475/0,8 = 1,309375.$$

Note que como a equação diferencial é linear, a equação implícita para y_1 também é linear e, portanto, fácil de resolver. A seguir,

$$y_2 = y_1 + h(1 - t_2 + 4y_2) = 1,309375 + (0,05)(1 - 0,1 + 4y_2),$$

o que leva a

$$y_2 = 1,354375/0,8 = 1,69296875.$$

Continuando os cálculos em um computador, obtemos os resultados ilustrados na Tabela 8.1.2. Os valores dados pela fórmula de Euler inversa são uniformemente muito grandes para este problema, enquanto os valores obtidos pelo método de Euler eram muito pequenos. Neste problema os erros são um pouco maiores para a fórmula de Euler inversa do que para o método de Euler, embora para valores pequenos de h a diferença seja insignificante. Como o método de Euler inverso parece ser menos preciso do que o direto e é um pouco mais complicado, é natural perguntar por que mencioná-lo. A resposta é que ele é o exemplo mais simples de uma classe de métodos conhecidos como fórmulas inversas de diferenciação que são muito úteis para certos tipos de equações diferenciais. Voltaremos a essa questão mais adiante, neste capítulo.

TABELA 8.1.2 Comparação dos Resultados de Aproximações Numéricas da Solução de $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$ Usando-se o Método de Euler Inverso para Tamanhos de Passos Diferentes h

t	$h = 0,05$	$h = 0,025$	$h = 0,01$	$h = 0,001$	Exata
0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	1,6929688	1,6474375	1,6236638	1,6104634	1,6090418
0,2	2,7616699	2,6211306	2,5491368	2,5095731	2,5053299
0,3	4,4174530	4,0920886	3,9285724	3,8396379	3,8301388
0,4	6,9905516	6,3209569	5,9908303	5,8131282	5,7942260
0,5	10,996956	9,7050002	9,0801473	8,7472667	8,7120041
1,0	103,06171	80,402761	70,452395	65,419964	64,897803
1,5	959,44236	661,00731	542,12432	485,05825	479,25919
2,0	8934,0696	5435,7294	4172,7228	3597,4478	3540,2001

Erros em Aproximações Numéricas. A utilização de um procedimento numérico, como a fórmula de Euler, para resolver um problema de valor inicial levanta uma série de questões que precisam ser respondidas antes de se aceitar a solução numérica aproximada como satisfatória. Uma dessas é a questão da **convergência**, ou seja, quando o tamanho do passo h tende a zero os valores da solução numérica $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ tendem ao valor correspondente da solução exata? Mesmo supondo que a resposta seja afirmativa, resta o problema prático importante de quão rápido a aproximação numérica converge para a solução. Em outras palavras, o quão pequeno tem que ser o tamanho do passo para garantir um determinado nível de precisão? Queremos usar um tamanho de passo que seja suficientemente pequeno para garantir a precisão necessária, mas que não seja pequeno demais. Um passo desnecessariamente pequeno torna os cálculos mais lentos, mais caros e, em alguns casos, pode até causar perda de precisão.

Existem duas fontes fundamentais de erro ao se resolver um problema de valor inicial numericamente. Vamos supor, primeiro, que nosso computador é tal que podemos efetuar todos os cálculos com precisão absoluta, ou seja, mantendo um número infinito de casas decimais. A diferença E_n entre a solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial (1), (2) e sua aproximação numérica é dada por

$$E_n = \phi(t_n) - y_n \quad (14)$$

e é conhecida como o **erro de truncamento global**. Ele tem duas causas: primeiro, em cada passo usamos uma fórmula aproximada para determinar y_{n+1} ; segundo, os dados de entrada em cada etapa estão apenas aproximadamente corretos, já que em geral $\phi(t_n)$ não é igual a y_n . Se supusermos que $y_n = \phi(t_n)$, então o único erro efetuado em cada passo é devido ao uso de uma fórmula aproximada. Esse erro é conhecido como o **erro de truncamento local** e_n .

A segunda fonte fundamental de erro é que efetuamos os cálculos em aritmética com apenas um número finito de dígitos. Isso nos leva a um **erro de arredondamento** R_n definido por

$$R_n = y_n - Y_n \quad (15)$$

onde Y_n é o valor *computado de fato* pelo método numérico dado.

O valor absoluto do erro total em se calcular $\phi(t_n)$ é dado por

$$|\phi(t_n) - Y_n| = |\phi(t_n) - y_n + y_n - Y_n|. \quad (16)$$

Usando a desigualdade triangular, $|a + b| \leq |a| + |b|$, obtemos da Eq. (16)

$$\begin{aligned} |\phi(t_n) - Y_n| &\leq |\phi(t_n) - y_n| + |y_n - Y_n| \\ &\leq |E_n| + |R_n|. \end{aligned} \quad (17)$$

Logo, o erro total é limitado pela soma dos valores absolutos dos erros de truncamento e de arredondamento. Para os procedimentos numéricos discutidos neste livro é possível obter estimativas úteis do erro de truncamento. No entanto, limitamos nossa discussão basicamente ao erro de truncamento local, que é um pouco mais simples. O erro de arredondamento é claramente de natureza mais aleatória. Depende do tipo de computador utilizado, da ordem em que os cálculos são efetuados, do método de arredondamento e assim por diante. Embora uma análise do erro de arredondamento esteja além do escopo deste livro, é possível dizer mais do que se poderia esperar à primeira vista (veja, por exemplo, o livro de Henrici listado nas referências). Alguns dos perigos do erro de arredondamento são discutidos nos Problemas de 25 a 27 e na Seção 8.5.

Erro de Truncamento Local para o Método de Euler. Vamos supor que a solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial (1), (2) tem derivada segunda contínua no intervalo de interesse. Para garantir isso podemos supor que f, f_x e f_y são contínuas. Observe que se f tem essas propriedades e se ϕ é uma solução do problema de valor inicial (1), (2), então

$$\phi'(t) = f[t, \phi(t)],$$

e, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= f_x[t, \phi(t)] + f_y[t, \phi(t)]\phi'(t) \\ &= f_x[t, \phi(t)] + f_y[t, \phi(t)]f[t, \phi(t)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Como a expressão à direita do sinal de igualdade nessa equação é contínua, ϕ'' também é contínua.

Usando, então, um polinômio de Taylor com resto para expandir ϕ em torno de t_n , obtemos

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \frac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2, \quad (19)$$

onde $\bar{t}_n$ é algum ponto no intervalo $t_n < \bar{t}_n < t_n + h$. Subtraindo a Eq. (4) da Eq. (19) e observando que $\phi(t_n + h) = \phi(t_{n+1})$ e $\phi'(t_n) = f[t_n, \phi(t_n)]$, vemos que

$$\phi(t_{n+1}) - y_{n+1} = [\phi(t_n) - y_n] + h[f[t_n, \phi(t_n)] - f(t_n, y_n)] + \frac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2. \quad (20)$$

Para calcular o erro de truncamento local, aplicamos a Eq. (20) à solução exata $\phi(t)$, ou seja, tomamos y_n como sendo $\phi(t_n)$. Então, vemos imediatamente da Eq. (20) que o erro de truncamento local e_{n+1} é

$$e_{n+1} = \phi(t_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2. \quad (21)$$

Assim, o erro de truncamento local para o método de Euler é proporcional ao quadrado do tamanho do passo h , e o fator de proporcionalidade depende da derivada segunda da solução ϕ . A expressão dada pela Eq. (21) depende de n e, em geral, é diferente para cada passo. Uma cota uniforme, válida em um intervalo $[a, b]$, é dada por

$$|e_n| \leq Mh^2/2, \quad (22)$$

onde M é o máximo de $|\phi''(t)|$ no intervalo $[a, b]$. Como a Eq. (22) é baseada no pior caso possível — ou seja, o maior valor possível de $|\phi''(t)|$ — essa pode ser uma estimativa bem maior do que o erro de truncamento local em certas partes do intervalo $[a, b]$. Um dos usos da Eq. (22) é escolher um tamanho de passo que resultará em um erro de truncamento local que não ultrapasse um nível de tolerância dado. Por exemplo, se o erro de truncamento local não pode ser maior do que ϵ , então, da Eq. (22), temos

$$h \leq \sqrt{2\epsilon/M}. \quad (23)$$

A dificuldade básica em se usar a Eq. (21), (22) ou (23) reside na estimativa de $|\phi''(t)|$, ou M . No entanto, o fato central expresso por essas equações é que o erro de truncamento local é proporcional a h^2 . Logo, se h for reduzido por um fator de 1/2, então o erro é reduzido por um fator de 1/4, e assim por diante.

O erro de truncamento global E_n é mais importante do que o erro de truncamento local. A análise para se estimar E_n é mais difícil do que a para e_n . Entretanto, conhecendo o erro de truncamento local podemos fazer uma estimativa intuitiva do erro de truncamento global em um ponto fixo $T > t_0$ como segue. Suponha que levamos n passos para ir de t_0 até $T = t_0 + nh$. Em cada passo o erro é no máximo $Mh^2/2$; logo, o erro em n passos é no máximo $nMh^2/2$. Notando que $n = (T - t_0)/h$, vemos que o erro de truncamento global para o método de Euler para se ir de t_0 até T é limitado por

$$n \frac{Mh^2}{2} = (T - t_0) \frac{Mh}{2}. \quad (24)$$

Esse argumento não está completo, pois não leva em consideração o efeito de um erro em um passo sobre os passos seguintes. De qualquer jeito, pode-se mostrar que o erro de truncamento global ao se usar o método de Euler em um intervalo finito não é maior do que uma constante vezes h ; veja o Problema 23 para mais detalhes. O método de Euler é chamado de um método de primeira ordem porque seu erro de truncamento global é proporcional à primeira potência do tamanho do passo.

Por ser mais acessível, vamos usar daqui para a frente o erro de truncamento local como nossa medida principal da precisão de um método numérico e para comparar métodos diferentes. Se tivermos uma informação *a priori* sobre a solução do problema de valor inicial dado, podemos usar o resultado (21) para obter informação mais precisa sobre como o erro de truncamento local varia com t . Como exemplo, considere o problema ilustrativo

$$y' = 1 - t + 4y, \quad y(0) = 1 \quad (25)$$

no intervalo $0 \leq t \leq 2$. Seja $y = \phi(t)$ a solução do problema de valor inicial (25). Então, como observado anteriormente,

$$\phi(t) = (4t - 3 + 19e^{4t})/16$$

e, portanto,

$$\phi''(t) = 19e^{4t}.$$

A Eq. (21) diz, então, que

$$e_{n+1} = \frac{19e^{4\bar{t}_n}h^2}{2}, \quad t_n < \bar{t}_n < t_n + h. \quad (26)$$

O aparecimento do fator 19 e o crescimento rápido de e^{4t} explicam por que os resultados na Tabela 8.1.1 não foram muito precisos.

Por exemplo, para $h = 0,05$ o erro no primeiro passo é

$$e_1 = \phi(t_1) - y_1 = \frac{19e^{4\bar{t}_0}(0,0025)}{2}, \quad 0 < \bar{t}_0 < 0,05.$$

É claro que e_1 é positivo e, como $e^{4\bar{t}_0} < e^{0,2}$, temos

$$e_1 \leq \frac{19e^{0,2}(0,0025)}{2} \cong 0,02901. \quad (27)$$

Note, também, que $e^{4\bar{t}_0} > 1$: logo, $e_1 > 19(0,0025)/2 = 0,02375$. O erro é, de fato, 0,02542. Segue da Eq. (26) que o erro piora progressivamente quando t aumenta; isso também é claro nos resultados que aparecem na Tabela 8.1.1. Cálculos semelhantes para cotas do erro de truncamento local dão

$$1,0617 \cong \frac{19e^{3,8}(0,0025)}{2} \leq e_{20} \leq \frac{19e^4(0,0025)}{2} \cong 1,2967 \quad (28)$$

para se ir de 0,95 para 1,0 e

$$57,96 \cong \frac{19e^{7,8}(0,0025)}{2} \leq e_{40} \leq \frac{19e^8(0,0025)}{2} \cong 70,80 \quad (29)$$

para se ir de 1,95 para 2,0.

Esses resultados indicam que para este problema o erro de truncamento local é em torno de 2500 vezes maior perto de $t = 2$ do que próximo a $t = 0$. Assim, para reduzir o erro de truncamento local a um nível aceitável em todo o intervalo $0 \leq t \leq 2$ é preciso escolher um tamanho de passo baseado na análise em uma vizinhança de $t = 2$. É claro que esse tamanho de passo será muito maior do que o necessário próximo a $t = 0$. Por exemplo, para se obter um erro de truncamento local de 0,01 para este problema precisamos de um tamanho de passo de em torno de 0,00059 próximo a $t = 2$ e de um tamanho de passo de aproximadamente 0,032 perto de $t = 0$. A utilização de um tamanho de passo uniforme que é menor do que o necessário em boa parte do intervalo resulta em mais cálculos do que necessário, mais tempo consumido e, possivelmente, mais perigo de erros de arredondamento inaceitáveis.

Outra abordagem é manter o erro de truncamento local aproximadamente constante ao longo do intervalo, reduzindo gradualmente o tamanho do passo à medida que t aumenta. No problema do exemplo precisaríamos reduzir h por um fator de mais ou menos 50 ao se ir de $t = 0$ para $t = 2$. Um método onde se varia o tamanho do passo é dito **adaptativo**. Todos os códigos computacionais modernos para se resolver equações diferenciais têm a capacidade de ajustar o tamanho do passo quando necessário. Voltaremos a essa questão na próxima seção.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0,1; 0,2; 0,3$ e $0,4$.

- Use o método de Euler com $h = 0,05$.
- Use o método de Euler com $h = 0,025$.
- Use o método de Euler inverso com $h = 0,05$.
- Use o método de Euler inverso com $h = 0,025$.

- | | |
|---|--|
|  1. $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$ |  2. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$ |
|  3. $y' = 2y - 3t, \quad y(0) = 1$ |  4. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$ |
|  5. $y' = \frac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(0) = 0,5$ |  6. $y' = (t^2 - y^2)\sen y, \quad y(0) = -1$ |

Em cada um dos Problemas de 7 a 12, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0,5; 1,0; 1,5$ e $2,0$.

- Use o método de Euler com $h = 0,025$.
- Use o método de Euler com $h = 0,0125$.
- Use o método de Euler inverso com $h = 0,025$.
- Use o método de Euler inverso com $h = 0,0125$.

7. $y' = 0.5 - t + 2y$, $y(0) = 1$ 8. $y' = 5t - 3\sqrt{y}$, $y(0) = 2$
 9. $y' = \sqrt{t+y}$, $y(0) = 3$ 10. $y' = 2t + e^{-ty}$, $y(0) = 1$
 11. $y' = (4 - ty)/(1 + y^2)$, $y(0) = -2$
 12. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2)$, $y(0) = 0,5$

13. Complete os cálculos que levam aos elementos nas colunas três e quatro da Tabela 8.1.1.
 14. Complete os cálculos que levam aos elementos nas colunas três e quatro da Tabela 8.1.2.

15. Usando três parcelas da série de Taylor dada na Eq. (12) e fazendo $h = 0,1$, determine valores aproximados da solução do exemplo ilustrativo $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$ em $t = 0,1$ e $0,2$. Compare os resultados com os do método de Euler e com os valores exatos.

Sugestão: se $y' = f(t, y)$, o que é y'' ?

Nos Problemas 16 e 17, estime o erro de truncamento local para o método de Euler em termos da solução $y = \phi(t)$. Obtenha uma cota para e_{n+1} em termos de t e de $\phi(t)$ que seja válida no intervalo $0 \leq t \leq 1$. Usando uma fórmula para a solução, obtenha uma cota mais precisa para e_{n+1} . Para $h = 0,1$, calcule uma cota para e_1 e compare-a com o erro exato em $t = 0,1$. Calcule, também, uma cota para o erro e_1 no quarto passo.

16. $y' = 2y - 1$, $y(0) = 1$ 17. $y' = \frac{1}{2} - t + 2y$, $y(0) = 1$

Em cada um dos Problemas de 18 a 21, obtenha uma fórmula para o erro de truncamento local para o método de Euler em termos de t e da solução ϕ .

18. $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$ 19. $y' = 5t - 3\sqrt{y}$, $y(0) = 2$
 20. $y' = \sqrt{t+y}$, $y(1) = 3$ 21. $y' = 2t + e^{-ty}$, $y(0) = 1$

22. Considere o problema de valor inicial

$$y' = \cos 5\pi t, \quad y(0) = 1.$$

- (a) Determine a solução $y = \phi(t)$ e desenhe o gráfico de $y = \phi(t)$ para $0 \leq t \leq 1$.
 (b) Determine valores aproximados para $\phi(t)$ em $t = 0,2; 0,4$ e $0,6$ usando o método de Euler com $h = 0,2$. Desenhe um gráfico com segmentos de reta para a solução aproximada e compare-o com o gráfico da solução exata.
 (c) Repita o cálculo do item (b) para $0 \leq t \leq 0,4$ mas com $h = 0,1$.
 (d) Mostre, através do cálculo do erro de truncamento local, que nenhum desses tamanhos de passos é suficientemente pequeno. Determine um valor de h que garanta que o erro de truncamento local é menor do que $0,05$ ao longo do intervalo $0 \leq t \leq 1$. O fato de ser necessário um valor tão pequeno de h é consequência de o $\max|\phi''(t)|$ ser tão grande.
23. Vamos discutir, neste problema, o erro de truncamento global associado ao método de Euler para o problema de valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. Supondo que as funções f e f_y são contínuas em uma região R fechada e limitada do plano ty que inclui o ponto (t_0, y_0) , pode-se mostrar que existe uma constante L tal que $|f(t, y) - f(t, \bar{y})| < L|y - \bar{y}|$ onde (t, y) e $(t, \bar{y})$ são dois pontos quaisquer em R com a mesma coordenada t (veja o Problema 15 da Seção 2.8). Além disso, vamos supor que f_t é contínua, de modo que a solução ϕ tem derivada segunda contínua.

- (a) Usando a Eq. (20), mostre que

$$|E_{n+1}| \leq |E_n| + h|f(t_n, \phi(t_n)) - f(t_n, y_n)| + \frac{1}{2}h^2|\phi''(\bar{t}_n)| \leq \alpha|E_n| + \beta h^2, \quad (i)$$

onde $\alpha = 1 + hL$ e $\beta = \max|\phi''(t)|/2$ em $t_0 \leq t \leq t_n$.

- (b) Aceitando, sem demonstração, o fato de que se $E_0 = 0$ e se $|E_n|$ satisfaz a Eq. (i), então $|E_n| \leq \beta h^2(\alpha^n - 1)/(\alpha - 1)$ para $\alpha \neq 1$, mostre que

$$|E_n| \leq \frac{(1 + hL)^n - 1}{L} \beta h. \quad (ii)$$

A Eq. (ii) fornece uma cota para $|E_n|$ em termos de h , L , n e β . Note que para um h fixo essa cota aumenta quando n aumenta, ou seja, o erro aumenta com a distância ao ponto inicial t_0 .

- (c) Mostre que $(1 + hL)^n \leq e^{nhL}$; portanto,

$$|E_n| \leq \frac{e^{nhL} - 1}{L} \beta h = \frac{e^{(t_n - t_0)L} - 1}{L} \beta h.$$

Para um ponto fixo $T = t_0 + nh$ [ou seja, nh é constante e $h = (T - t_0)/n$], essa cota para o erro é da forma uma constante vezes h e tende a zero quando $h \rightarrow 0$. Note, também, que para $nhL = (T - t_0)L$ pequeno o lado à direita do sinal de igualdade na equação precedente é aproximadamente igual a $nh^2\beta = (T - t_0)\beta h$, que foi obtido na Eq. (24) por um argumento intuitivo.

24. Deduza uma expressão análoga à Eq. (21) para o erro de truncamento local para a fórmula de Euler inversa.

Sugestão: construa uma aproximação de Taylor apropriada de $\phi(t)$ em torno de $t = t_{n+1}$.

25. Usando um tamanho de passo $h = 0,05$ e o método de Euler, mas mantendo apenas três dígitos ao longo dos cálculos, determine valores aproximados para a solução em $t = 0,1; 0,2; 0,3$ e $0,4$ para cada um dos problemas de valor inicial a seguir.

(a) $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$

(b) $y' = 3 + t - y$, $y(0) = 1$

(c) $y' = 2y - 3t$, $y(0) = 1$

Compare os resultados com os obtidos no Exemplo 1 e nos Problemas 1 e 3. As pequenas diferenças entre alguns dos resultados arredondados para três dígitos e os resultados atuais são devidas ao erro de arredondamento. O erro de arredondamento tornar-se-ia importante se os cálculos exigissem muitos passos.

26. O problema a seguir ilustra um perigo que ocorre devido ao erro de arredondamento quando números quase iguais são subtraídos e a diferença é multiplicada, então, por um número muito grande. Calcule a quantidade

$$1000 \cdot \begin{vmatrix} 6,010 & 18,04 \\ 2,004 & 6,000 \end{vmatrix}$$

da seguinte maneira:

- (a) Arredonde primeiro cada elemento no determinante para dois dígitos.
 (b) Arredonde primeiro cada elemento no determinante para três dígitos.
 (c) Retenha todos os quatro dígitos. Compare este valor com os resultados dos itens (a) e (b).
27. A distributividade $a(b - c) = ab - ac$ não vale, em geral, se os produtos são arredondados para um número menor de dígitos. Para mostrar isso em um caso específico, faça $a = 0,22$, $b = 3,19$ e $c = 2,17$. Depois de cada multiplicação, arredonde retirando o último dígito.

8.2 Aprimoramentos no Método de Euler

Como para muitos problemas o método de Euler precisa de um tamanho de passo muito pequeno para se obter resultados suficientemente precisos, houve um grande esforço para se desenvolver métodos mais eficientes. Nas próximas três seções vamos discutir alguns desses métodos. Considere o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (1)$$

e denote por $y = \phi(t)$ sua solução. Lembre da Eq. (10) da Seção 8.1 que, ao integrar uma equação diferencial dada de t_n até t_{n+1} , obtemos

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, \phi(t)] dt. \quad (2)$$

A fórmula de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (3)$$

é obtida substituindo-se $f[t, \phi(t)]$ na Eq. (2) por seu valor aproximado $f(t_n, y_n)$ no extremo esquerdo do intervalo de integração.

Fórmula de Euler Aprimorada. Uma fórmula de aproximação melhor pode ser obtida se o integrando na Eq. (2) for aproximado de modo mais preciso. Um modo de fazer isso é aproximar o integrando pela média de seus valores nas duas extremidades, a saber, $[f(t_n, \phi(t_n)) + f(t_{n+1}, \phi(t_{n+1}))]/2$. Isso é equivalente a aproximar a área em baixo da curva na Figura 8.2.1 entre $t = t_n$ e $t = t_{n+1}$ pela área do trapézio sombreado. Além disso, substituímos $\phi(t_n)$ e $\phi(t_{n+1})$ pelos seus valores aproximados respectivos y_n e y_{n+1} . Dessa forma, obtemos, da Eq. (2),

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2} h. \quad (4)$$

Como a incógnita y_{n+1} aparece como um dos argumentos de f à direita do sinal de igualdade na Eq. (4), esta equação define y_{n+1} implicitamente, em vez de explicitamente. Dependendo da natureza da função f pode ser bem difícil resolver a Eq. (4) para y_{n+1} . Essa dificuldade pode ser sanada substituindo-se y_{n+1} à direita do sinal de igualdade na Eq. (4) pelo valor obtido usando-se a fórmula de Euler (3). Então,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{f(t_n, y_n) + f[t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)]}{2} h \\ &= y_n + \frac{f_n + f(t_n + h, y_n + hf_n)}{2} h, \end{aligned} \quad (5)$$

onde t_{n+1} foi substituído por $t_n + h$.

A Eq. (5) nos dá uma fórmula explícita para se calcular y_{n+1} , o valor aproximado de $\phi(t_{n+1})$, em função dos dados em t_n . Essa fórmula é conhecida como a **fórmula de Euler aprimorada** ou a **fórmula de Heun**.¹ A fórmula de Euler aprimorada é um exemplo de um método em duas etapas: primeiro calculamos $y_n + hf_n$ da fórmula de Euler e, depois, usamos esse resultado para calcular y_{n+1} da Eq. (5). A fórmula de Euler aprimorada (5) não representa uma melhoria sobre a fórmula (3), já que o erro de truncamento local ao se usar a Eq. (5) é proporcional a h^3 , enquanto para o método de Euler é proporcional a h^2 . Essa estimativa para o erro na fórmula de Euler aprimorada está provada no Problema 14. Pode-se mostrar, também, que para um intervalo finito o erro de truncamento global para a fórmula de Euler aprimorada é limitado por uma constante vezes h^2 , de modo que esse método é de segunda ordem. Note que essa precisão maior é obtida à custa de mais trabalho computacional, já que agora é necessário calcular $f(t, y)$ duas vezes para se ir de t_n a t_{n+1} .

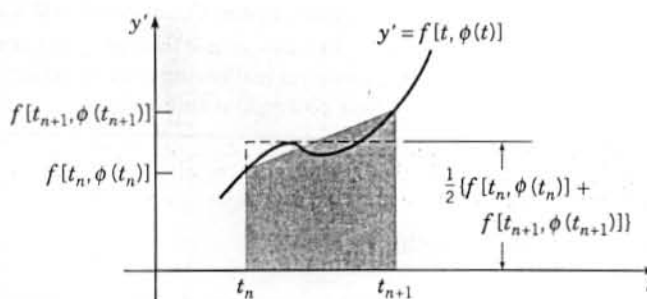


FIGURA 8.2.1 Dedução do método de Euler aprimorado.

Se $f(t, y)$ depender apenas de t e não de y , então a resolução da equação diferencial $y' = f(t, y)$ se reduzirá a integrar $f(t)$. Nesse caso, a fórmula de Euler aprimorada (5) fica

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2} [f(t_n) + f(t_n + h)], \quad (6)$$

que é, simplesmente, a regra do trapézio para integração numérica.

EXEMPLO

1

Use a fórmula de Euler aprimorada (5) para calcular valores aproximados da solução do problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \quad y(0) = 1. \quad (7)$$

Para esclarecer exatamente quais cálculos são necessários, vamos mostrar alguns passos em detalhe. Para este problema, $f(t, y) = 1 - t + 4y$; logo,

$$f_n = 1 - t_n + 4y_n$$

e

$$f(t_n + h, y_n + hf_n) = 1 - (t_n + h) + 4(y_n + hf_n).$$

¹A fórmula tem esse nome em homenagem a Karl Heun (1859-1929), professor da Technical University of Karlsruhe.

Além disso, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$ e $f_0 = 1 - t_0 + 4y_0 = 5$. Se $h = 0,025$, então

$$f(t_0 + h, y_0 + hf_0) = 1 - 0,025 + 4[1 + (0,025)(5)] = 5,475.$$

Portanto, da Eq. (5) temos

$$y_1 = 1 + (0,5)(5 + 5,475)(0,025) = 1,1309375. \quad (8)$$

No segundo passo, precisamos calcular

$$f_1 = 1 - 0,025 + 4(1,1309375) = 5,49875,$$

$$y_1 + hf_1 = 1,1309375 + (0,025)(5,49875) = 1,26840625,$$

e

$$f(t_2, y_1 + hf_1) = 1 - 0,05 + 4(1,26840625) = 6,023625.$$

Logo, da Eq. (5),

$$y_2 = 1,1309375 + (0,5)(5,49875 + 6,023625)(0,025) = 1,2749671875. \quad (9)$$

A Tabela 8.2.1 mostra outros resultados para $0 \leq t \leq 2$ obtidos usando-se o método de Euler aprimorado com $h = 0,025$ e $h = 0,01$. Para comparar os resultados do método de Euler aprimorado com os do método de Euler, note que o método de Euler aprimorado precisa de dois cálculos dos valores de f em cada passo, enquanto o método de Euler precisa só de um. Isso é importante, já que tipicamente a maior parte do tempo computacional de cada passo é gasto calculando-se os valores de f , de modo que contar essas operações é uma maneira razoável de se estimar o esforço computacional total. Então, para um tamanho de passo dado h o método de Euler aprimorado precisa do dobro dos cálculos de valores de f do método de Euler. De outro ponto de vista, o método de Euler aprimorado com tamanho de passo h necessita do mesmo número de cálculos de valores de f que o método de Euler com passo $h/2$.

TABELA 8.2.1 Uma Comparação dos Resultados Usando-se os Métodos de Euler e de Euler Aprimorado para o Problema de Valor Inicial $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$

t	Euler		Euler Aprimorado		Exata
	$h = 0,01$	$h = 0,001$	$h = 0,025$	$h = 0,01$	
0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	1,5952901	1,6076289	1,6079462	1,6088585	1,6090418
0,2	2,4644587	2,5011159	2,5020618	2,5047827	2,5053299
0,3	3,7390345	3,8207130	3,8228282	3,8289146	3,8301388
0,4	5,6137120	5,7754845	5,7796888	5,7917911	5,7942260
0,5	8,3766865	8,6770692	8,6849039	8,7074637	8,7120041
1,0	60,037126	64,382558	64,497931	64,830722	64,897803
1,5	426,40818	473,55979	474,83402	478,51588	479,25919
2,0	3029,3279	3484,1608	3496,6702	3532,8789	3540,2001

Observando a Tabela 8.2.1 você pode ver que o método de Euler aprimorado com $h = 0,025$ dá resultados muito melhores do que o método de Euler com $h = 0,01$. Note que para alcançar $t = 2$ com esses tamanhos de passos o método de Euler aprimorado precisa de 160 cálculos de valores de f , enquanto o método de Euler precisa de 200. Mais importante de se notar é que o método de Euler aprimorado com $h = 0,025$ é ligeiramente mais preciso do que o método de Euler com $h = 0,001$ (2000 cálculos de valores de f). Em outras palavras, com algo da ordem de um doze avos do esforço computacional o método de Euler aprimorado fornece resultados para este problema comparáveis a, ou um pouco melhores do que, os gerados pelo método de Euler. Isso ilustra o fato de que comparado ao método de Euler o método de Euler aprimorado é claramente mais eficiente, gerando resultados substancialmente melhores ou precisando de muito menos esforço computacional total, ou ambos.

Os erros percentuais em $t = 2$ para o método de Euler aprimorado são de 1,22% para $h = 0,025$ e de 0,21% para $h = 0,01$.

Um programa de computador para o método de Euler pode ser imediatamente modificado para implementar o método de Euler aprimorado. Basta substituir o Passo 6 no algoritmo da Seção 8.1 pelo seguinte:

$$\begin{aligned}
 \text{Passo 6.} \quad k1 &= f(t, y) \\
 k2 &= f(t + h, y + h * k1) \\
 y &= y + (h/2) * (k1 + k2) \\
 t &= t + h
 \end{aligned}$$

Varição no Tamanho dos Passos. Mencionamos, na Seção 8.1, a possibilidade de ajustar o tamanho dos passos à medida que os cálculos prosseguem, de modo a manter o erro de truncamento local em um nível mais ou menos constante. O objetivo é não usar mais passos do que o necessário e, ao mesmo tempo, manter algum controle sobre a precisão das aproximações. Vamos descrever aqui como isso pode ser feito. Suponha que, após n passos, chegamos ao ponto (t_n, y_n) . Escolhemos um tamanho de passo h e calculamos y_{n+1} . A seguir, estimamos o erro que fizemos ao calcular y_{n+1} . Sem conhecer a solução exata, o melhor que podemos fazer é usar um método mais preciso e repetir os cálculos a partir de (t_n, y_n) . Por exemplo, se tivermos usado o método de Euler para o cálculo original poderíamos repetir com o método de Euler aprimorado. Então, a diferença entre os dois valores calculados é uma estimativa e_{n+1}^{est} do erro ao se usar o método original. Se o erro estimado é diferente da tolerância de erro ϵ , então ajustamos o tamanho do passo e repetimos o cálculo. A chave em fazer esse ajuste eficientemente é saber como o erro de truncamento local e_{n+1} depende do tamanho do passo h . Para o método de Euler o erro de truncamento local é proporcional a h^2 , de modo que para trazer o erro estimado (diminuindo ou aumentando) ao nível de tolerância ϵ precisamos multiplicar o tamanho do passo original pelo fator $\sqrt{\epsilon/e_{n+1}^{\text{est}}}$.

Para ilustrar esse procedimento vamos considerar o problema (7) do exemplo

$$y' = 1 - t + 4y, \quad y(0) = 1.$$

Você pode verificar que após um passo com $h = 0,1$ obtemos os valores 1,5 e 1,595 com os métodos de Euler e de Euler aprimorado, respectivamente. Logo, o erro estimado para o método de Euler é 0,095. Se tivermos escolhido uma tolerância de 0,05 para o erro, por exemplo, precisaríamos diminuir o tamanho do passo multiplicando-o pelo fator $\sqrt{0,05/0,095} \cong 0,73$. Arredondando para baixo para ser conservador, vamos escolher o tamanho de passo ajustado como sendo $h = 0,07$. Obtemos, então, da fórmula de Euler,

$$y_1 = 1 + (0,07)f(0, 1) = 1,35 \cong \phi(0,07).$$

Usando a fórmula de Euler aprimorada obtemos $y_1 = 1,39655$, de modo que o erro estimado ao se usar a fórmula de Euler é 0,04655, que é ligeiramente menor do que a tolerância especificada. O erro de fato, baseado em uma comparação com a solução exata, é um pouco maior, a saber, 0,05122.

Podemos seguir o mesmo procedimento em cada passo dos cálculos, mantendo assim o erro de truncamento local aproximadamente constante ao longo de todo o processo. Códigos modernos adaptativos para a resolução de equações diferenciais ajustam o tamanho do passo à medida que prosseguem de maneira bem semelhante a essa, embora usem, em geral, fórmulas mais precisas do que as de Euler e de Euler aprimorado. Em consequência, são ao mesmo tempo eficientes e precisos, usando passos muito pequenos apenas onde é realmente necessário.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0,1; 0,2; 0,3$ e $0,4$. Compare os resultados com os obtidos pelo método de Euler e pelo método de Euler inverso na Seção 8.1 e com a solução exata (se disponível).

- Use o método de Euler aprimorado com $h = 0,05$.
- Use o método de Euler aprimorado com $h = 0,025$.
- Use o método de Euler aprimorado com $h = 0,0125$.

 1. $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$	 2. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
 3. $y' = 2y - 3t, \quad y(0) = 1$	 4. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
 5. $y' = \frac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(0) = 0,5$	 6. $y' = (t^2 - y^2)\text{sen}y, \quad y(0) = -1$

Em cada um dos Problemas de 7 a 12, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0,5; 1,0; 1,5$ e $2,0$.

- Use o método de Euler aprimorado com $h = 0,025$.
- Use o método de Euler aprimorado com $h = 0,0125$.

7. $y' = 0,5 - t + 2y$, $y(0) = 1$ 8. $y' = 5t - 3\sqrt{y}$, $y(0) = 2$
 9. $y' = \sqrt{t+y}$, $y(0) = 3$ 10. $y' = 2t + e^{-ty}$, $y(0) = 1$
 11. $y' = (4 - ty)/(1 + y^2)$, $y(0) = -2$
 12. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2)$, $y(0) = 0,5$

13. Complete os cálculos necessários para se obter os elementos nas colunas quatro e cinco da Tabela 8.2.1.
 14. Neste problema vamos provar que o erro de truncamento local para a fórmula de Euler aprimorada é proporcional a h^3 . Se supusermos que a solução ϕ do problema de valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ tem derivadas contínuas até a terceira ordem (f tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas), segue que

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \frac{\phi''(t_n)}{2!}h^2 + \frac{\phi'''(\bar{t}_n)}{3!}h^3,$$

onde $t_n < \bar{t}_n < t_n + h$. Suponha que $y_n = \phi(t_n)$.

- (a) Mostre que, para y_{n+1} dado pela Eq. (5),

$$e_{n+1} = \phi(t_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{\phi''(t_n)h - \{f[t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)] - f(t_n, y_n)\}}{2!}h + \frac{\phi'''(\bar{t}_n)h^3}{3!}. \quad (i)$$

- (b) Usando os fatos de que $\phi''(t) = f_t[t, \phi(t)] + f_y[t, \phi(t)]\phi'(t)$ e a aproximação de Taylor com resto para uma função $F(t, y)$ de duas variáveis é da forma

$$F(a + h, b + k) = F(a, b) + F_t(a, b)h + F_y(a, b)k + \frac{1}{2!}(h^2 F_{tt} + 2hk F_{ty} + k^2 F_{yy}) \Big|_{x=\xi, y=\eta}$$

onde ξ está entre a e $a + h$ e η está entre b e $b + k$, mostre que o primeiro termo à direita do sinal de igualdade na Eq. (i) é proporcional a h^3 mais termos de ordem maior. Esse é o resultado desejado.

- (c) Mostre que, se $f(t, y)$ é linear em t e y , então $e_{n+1} = \phi'''(\bar{t}_n)h^3/6$, onde $t_n < \bar{t}_n < t_{n+1}$.

Sugestão: o que são f_t, f_y e f_{yy} ?

15. Considere o método de Euler aprimorado para resolver o problema de valor inicial ilustrativo $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$. Usando o resultado do problema 14(c) e a solução exata do problema de valor inicial, determine e_{n+1} e uma cota para o erro em qualquer passo em $0 \leq t \leq 2$. Compare esse erro com o obtido na Eq. (26) da Seção 8.1 usando o método de Euler. Obtenha, também, uma cota para e_1 com $h = 0,05$ e compare com a Eq. (27) da Seção 8.1.

Em cada um dos Problemas 16 e 17, use a solução exata $\phi(t)$ para determinar e_{n+1} e uma cota para e_{n+1} em qualquer passo no intervalo $0 \leq t \leq 1$ para o método de Euler aprimorado para o problema de valor inicial dado. Obtenha, também, uma cota para e_1 com $h = 0,1$ e compare com a estimativa semelhante para o método de Euler e com o erro exato usando o método de Euler aprimorado.

16. $y' = 2y - 1$, $y(0) = 1$ 17. $y' = 0,5 - t + 2y$, $y(0) = 1$

Em cada um dos Problemas de 18 a 21, efetue um passo do método de Euler e do método de Euler aprimorado usando o tamanho de passo $h = 0,1$. Suponha que se deseja um erro de truncamento local não maior do que 0,0025. Estime o tamanho de passo necessário para o método de Euler satisfazer essa condição no primeiro passo.

18. $y' = 0,5 - t + 2y$, $y(0) = 1$ 19. $y' = 5t - 3\sqrt{y}$, $y(0) = 2$
 20. $y' = \sqrt{t+y}$, $y(0) = 3$ 21. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2)$, $y(0) = 0,5$

22. A **fórmula de Euler modificada** para o problema de valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ é dada por

$$y_{n+1} = y_n + hf[t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n)].$$

Seguindo o procedimento esquematizado no Problema 14, mostre que o erro de truncamento local na fórmula de Euler modificada é proporcional a h^3 .

Em cada um dos Problemas de 23 a 26, use a fórmula de Euler modificada do Problema 22 com $h = 0,05$ para calcular valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0,1; 0,2; 0,3$ e $0,4$. Compare os resultados com os obtidos nos Problemas de 1 a 4.

$$23. y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$$

$$24. y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$$

$$25. y' = 2y - 3t, \quad y(0) = 1$$

$$26. y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$$

27. Mostre que a fórmula de Euler modificada do Problema 22 é idêntica à fórmula de Euler aprimorada da Eq. (5) para $y' = f(t, y)$ se f é linear em t e y .

8.3 O Método de Runge-Kutta

Introduzimos, nas seções anteriores, a fórmula de Euler, a fórmula de Euler inversa e a fórmula de Euler aprimorada como maneiras de resolver o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (1)$$

numericamente. Os erros de truncamento locais para esses métodos são proporcionais a h^2 , h^2 e h^3 , respectivamente. Os métodos de Euler e de Euler aprimorado pertencem àquela que é conhecida hoje como a classe de métodos de Runge-Kutta.²

Nesta seção vamos discutir o método desenvolvido originalmente por Runge e Kutta. Esse método é chamado atualmente de método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem em quatro estágios, mas na prática as pessoas se referem a ele simplesmente como o método de Runge-Kutta, e seguiremos essa prática. Esse método tem um erro de truncamento local proporcional a h^5 . Assim, é duas ordens de grandeza mais preciso do que o método de Euler aprimorado e três ordens de grandeza mais preciso do que o método de Euler. Ele é relativamente simples de usar e suficientemente preciso para tratar muitos problemas de maneira eficiente. Isso é particularmente verdadeiro para os métodos de Runge-Kutta adaptativos, nos quais se pode variar o tamanho dos passos quando necessário. Retornaremos a essa questão no final desta seção.

A fórmula de Runge-Kutta envolve uma média ponderada de valores de $f(t, y)$ em pontos diferentes no intervalo $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. É dada por

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right), \quad (2)$$

onde

$$\begin{aligned} k_{n1} &= f(t_n, y_n) \\ k_{n2} &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right), \\ k_{n3} &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right), \\ k_{n4} &= f(t_n + h, y_n + hk_{n3}). \end{aligned} \quad (3)$$

A soma $(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})/6$ também pode ser interpretada como um coeficiente angular médio. Note que k_{n1} é o coeficiente angular no extremo esquerdo do intervalo, k_{n2} é o coeficiente angular no ponto médio usando-se a fórmula de Euler para ir de t_n até $t_n + h/2$, k_{n3} é a segunda aproximação do coeficiente angular no ponto médio e k_{n4} é o coeficiente angular em $t_n + h$ usando a fórmula de Euler e o coeficiente angular k_{n3} para ir de t_n a $t_n + h$.

Embora, em princípio, não seja difícil mostrar que a Eq. (2) difere da expansão de Taylor da solução ϕ por termos proporcionais a h^5 , os cálculos algébricos são bem longos.³ Vamos aceitar, então, o fato de que o erro de truncamento local ao se usar a Eq. (2) é proporcional a h^5 e que, para um intervalo finito, o erro de truncamento global é no máximo uma constante vezes h^4 . A descrição anterior deste método como um método de quarta ordem em quatro estágios reflete os fatos de que o erro de truncamento global é de quarta ordem no tamanho do passo h e há quatro estágios intermediários nos cálculos (os cálculos de $k_{n1}, \dots, k_{n4}$).

É claro que as fórmulas de Runge-Kutta, Eqs. (2) e (3), são mais complicadas que qualquer das fórmulas discutidas até agora. Isso não é muito importante, no entanto, já que não é difícil escrever um programa

²Carl David Runge (1856-1927), matemático e físico alemão, trabalhou muitos anos em espectroscopia. A análise de dados o levou a considerar problemas em computação numérica, e o método de Runge-Kutta teve origem em seu artigo sobre soluções numéricas de equações diferenciais de 1895. O método foi estendido para sistemas de equações em 1901 por M. Wilhelm Kutta (1867-1944). Kutta era um matemático alemão que trabalhava com aerodinâmica e é, também, muito conhecido por suas contribuições importantes à teoria clássica de aerofólio.

³Veja, por exemplo, o Capítulo 3 do livro de Henrici, listado nas referências.

ma de computador que implemente esse método. Tal programa tem a mesma estrutura que o algoritmo para o método de Euler esquematizado na Seção 8.1. Especificamente, as linhas no Passo 6 no algoritmo de Euler têm que ser substituídas pelas seguintes:

$$\begin{aligned}\text{Passo 6.} \quad & k_1 = f(t, y) \\ & k_2 = f(t + 0,5 * h, y + 0,5 * h * k_1) \\ & k_3 = f(t + 0,5 * h, y + 0,5 * h * k_2) \\ & k_4 = f(t + h, y + h * k_3) \\ & y = y + (h/6) * (k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4) \\ & t = t + h\end{aligned}$$

Note que, se f não depende de y , então

$$k_{n1} = f(t_n), \quad k_{n2} = k_{n3} = f(t_n + h/2), \quad k_{n4} = f(t_n + h), \quad (4)$$

e a Eq. (2) se reduz a

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6} [f(t_n) + 4f(t_n + h/2) + f(t_n + h)]. \quad (5)$$

A Eq. (5) pode ser identificada com a regra de Simpson⁴ para o cálculo aproximado da integral de $y' = f(t)$. O fato de que a regra de Simpson tem um erro proporcional a h^5 é consistente com o erro de truncamento local na fórmula de Runge-Kutta.

EXEMPLO

1

Use o método de Runge-Kutta para calcular valores aproximados da solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \quad y(0) = 1. \quad (6)$$

Fazendo $h = 0,2$, temos

$$\begin{aligned}k_{01} &= f(0; 1) = 5; & hk_{01} &= 1,0, \\ k_{02} &= f(0 + 0,1; 1 + 0,5) = 6,9; & hk_{02} &= 1,38, \\ k_{03} &= f(0 + 0,1; 1 + 0,69) = 7,66; & hk_{03} &= 1,532, \\ k_{04} &= f(0 + 0,2; 1 + 1,532) = 10,928.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}y_1 &= 1 + \frac{0,2}{6} [5 + 2(6,9) + 2(7,66) + 10,928] \\ &= 1 + 1,5016 = 2,5016.\end{aligned}$$

A Tabela 8.3.1 mostra outros resultados obtidos pelo método de Runge-Kutta com $h = 0,2$, $h = 0,1$ e $h = 0,05$. Note que o método de Runge-Kutta fornece um valor em $t = 2$ que difere da solução exata por apenas 0,122%.

TABELA 8.3.1 Uma Comparação dos Resultados para a Aproximação Numérica da Solução do Problema de Valor Inicial $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$

t	Euler Aprimorado	Runge-Kutta			Exata
	$h = 0,025$	$h = 0,2$	$h = 0,1$	$h = 0,05$	
0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	1,6079462		1,6089333	1,6090338	1,6090418
0,2	2,5020618	2,5016000	2,5050062	2,5053060	2,5053299
0,3	3,8228282		3,8294145	3,8300854	3,8301388
0,4	5,7796888	5,7776358	5,7927853	5,7941197	5,7942260
0,5	8,6849039		8,7093175	8,7118060	8,7120041
1,0	64,497931	64,441579	64,858107	64,894875	64,897803
1,5	474,83402		478,81928	479,22674	479,25919
2,0	3496,6702	3490,5574	3535,8667	3539,8804	3540,2001

⁴A regra de Simpson leva esse nome em homenagem a Thomas Simpson (1710-1761), um matemático inglês e autor de livros-textos, que a publicou em 1743.

se o tamanho do passo é $h = 0,1$, e por apenas 0,00903% se $h = 0,05$. No último caso, o erro é menor do que uma parte em dez mil, e o valor calculado em $t = 2$ está correto até quatro dígitos.

Para efeitos de comparação, note que os métodos de Runge-Kutta, com $h = 0,05$, e o de Euler aprimorado, com $h = 0,025$, precisam de 160 cálculos de valores de f para chegar a $t = 2$. O método de Euler aprimorado fornece um resultado em $t = 2$ com erro de 1,23%. Embora esse erro possa ser aceitável para alguns fins, é mais de 135 vezes o erro feito pelo método de Runge-Kutta com esforço computacional comparável. Note, também, que o método de Runge-Kutta com $h = 0,2$, ou 40 cálculos de valores de f produz um valor em $t = 2$ com erro de 1,40%, que é só ligeiramente maior do que o erro no método de Euler aprimorado com $h = 0,025$, que calcula 160 valores de f . Assim, vemos, de novo, que um algoritmo mais preciso é mais eficiente; produz melhores resultados com esforço semelhante, ou resultados análogos com menos esforço.

O método clássico de Runge-Kutta sofre dos mesmos defeitos que outros métodos com tamanho de passo fixo para problemas onde o erro de truncamento local varia muito no intervalo de interesse. Ou seja, um passo suficientemente pequeno para obter precisão satisfatória em algumas partes do intervalo pode ser muito menor do que o necessário em outras partes. Isso estimulou o desenvolvimento de métodos de Runge-Kutta adaptativos, que providenciam a modificação do tamanho do passo automaticamente à medida que procedem os cálculos, de modo a manter o erro de truncamento local próximo ou abaixo de um nível de tolerância especificado. Como explicado na Seção 8.2, isso requer a estimativa do erro de truncamento local em cada passo. Um modo de fazer isso é repetir os cálculos com um método de quinta ordem — que tem um erro de truncamento local proporcional a h^6 — e depois usar a diferença entre os dois resultados como uma estimativa para o erro. Se isso for feito de um modo direto o uso de um método de quinta ordem precisa de pelo menos mais cinco cálculos de f em cada etapa, além dos necessários originalmente pelo método de quarta ordem. No entanto, se fizermos uma escolha apropriada dos pontos intermediários e dos coeficientes de peso nas expressões para $k_{n1}, \dots$ em um determinado método de Runge-Kutta de quarta ordem, então essas expressões podem ser usadas novamente, junto com um estágio adicional, em um método de quinta ordem correspondente. Isso resulta em um ganho substancial em eficiência. Acontece que isso pode ser feito de mais de uma maneira.

O primeiro par de métodos de Runge-Kutta de quarta e quinta ordens foi desenvolvido por Erwin Fehlberg⁵ no final da década de 1960 e é conhecido como o método de Runge-Kutta-Fehlberg, ou método RKF.⁶ A popularidade do método RKF foi consideravelmente aumentada pelo aparecimento, em 1977, de sua implementação RKF45 em Fortran por Lawrence F. Shampine e H. A. Watts. O método RKF e outros métodos de Runge-Kutta adaptativos são métodos muito poderosos e eficientes para a aproximação numérica de soluções de uma classe enorme de problemas de valor inicial. Implementações específicas de um ou mais deles estão disponíveis amplamente em pacotes comerciais de softwares.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0,1; 0,2; 0,3$ e $0,4$. Compare os resultados com os obtidos usando outros métodos e com a solução exata (se disponível).

(a) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0,1$.

(b) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0,05$.

- | | |
|---|--|
| 1. $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$ | 2. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$ |
| 3. $y' = 2y - 3t, \quad y(0) = 1$ | 4. $y' = 2t + e^{-y}, \quad y(0) = 1$ |
| 5. $y' = \frac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(0) = 0,5$ | 6. $y' = (t^2 - y^2)\sin y, \quad y(0) = -1$ |

Em cada um dos Problemas de 7 a 12, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0,5; 1,0; 1,5$ e $2,0$. Compare os resultados com os obtidos usando outros métodos.

(a) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0,1$.

(b) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0,05$.

⁵Fehlberg (1911-1990) nasceu na Alemanha, recebeu seu doutorado da Technical University of Berlin em 1942, emigrou para os Estados Unidos depois da Segunda Guerra Mundial e trabalhou na NASA por muitos anos. O método de Runge-Kutta-Fehlberg foi publicado pela primeira vez em um Relatório Técnico da NASA em 1969.

⁶Os detalhes do método RKF podem ser encontrados, por exemplo, no livro de Ascher e Petzold e no de Mattheij e Molenaar, listados nas referências.