Teorema 3. **(Regra da Cadeia)** *Sejam $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$, $f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Se f é derivável no ponto a e g é derivável no ponto b então $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a, com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$.*

Demonstração: Consideremos uma seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$ e ponhamos $y_n = f(x_n)$, logo $\lim y_n = b$. Sejam $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N}; f(x_n) \neq f(a)\}$ e $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N}; f(x_n) = f(a)\}$. Se $n \in \mathbb{N}_1$ então $y_n \in Y - \{b\}$ e

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

Portanto, se $\mathbb{N}_1$ é infinito, tem-se $\lim_{n \in \mathbb{N}_1} [g(f(x_n)) - g(f(a))]/(x_n - a) = g'(f(a)).f'(a)$. Se $\mathbb{N}_2$ é infinito tem-se $\lim_{n \in \mathbb{N}_2} [f(x_n) - f(a)]/(x_n - a) = 0$, logo $f'(a) = 0$. Ainda neste caso, tem-se $\lim_{n \in \mathbb{N}_2} [g(f(x_n)) - g(f(a))]/(x_n - a) = 0 = g'(f(a)).f'(a)$. Como $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, resulta daí que, em qualquer hipótese, vale

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{[g(f(x_n)) - g(f(a))]}{(x_n - a)} = g'(f(a)).f'(a),$$

o que prova o teorema. □

Corolário. *Seja $f: X \to Y$ uma bijeção entre os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, com inversa $g = f^{-1}: Y \to X$. Se f é derivável no ponto $a \in X \cap X'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$ então g é derivável no ponto b se, e somente se, $f'(a) \neq 0$. No caso afirmativo, tem-se $g'(b) = 1/f'(a)$.*

Com efeito, se $x_n \in X - \{a\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$ então, como f é injetiva e contínua no ponto a, tem-se $y_n = f(x_n) \in Y - \{b\}$ e $\lim y_n = b$. Portanto, $b \in Y \cap Y'$. Se g for derivável no ponto b, a igualdade $g(f(x)) = x$, válida para todo $x \in X$, juntamente com a Regra da Cadeia, fornece $g'(b).f'(a) = 1$. Em particular, $f'(a) \neq 0$. Reciprocamente, se $f'(a) \neq 0$ então, para qualquer seqüência de pontos $y_n = f(x_n) \in Y - \{b\}$ com $\lim y_n = b$, a continuidade de g no ponto b nos dá $\lim x_n = a$, portanto $g'(b)$ é igual a

$$\lim \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = \lim \left[\frac{y_n - b}{g(y_n) - g(b)}\right]^{-1} = \lim \left[\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right]^{-1} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Exemplo 5. Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, consideremos as funções $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $g(x) = f(x^2)$ e $h(x) = f(x)^2$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $g'(x) = 2x.f'(x^2)$ e $h'(x) = 2f(x).f'(x)$.

Exemplo 6. Para $n \in \mathbb{N}$ fixo, a função $g: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, dada por $g(x) = \sqrt[n]{x}$, é derivável no intervalo $(0, +\infty)$ com $g'(x) = 1/(n \sqrt[n]{x^{n-1}})$. Com efeito, g é a inversa da bijeção $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, dada por $f(x) = x^n$. Pelo corolário acima, pondo $y = x^n$, temos $g'(y) = 1/f'(x)$ se $f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$, isto é, se $x \neq 0$. Assim, $g'(y) = 1/nx^{n-1} = 1/n \sqrt[n]{y^{n-1}}$ e, mudando de notação, $g'(x) = 1/n \sqrt[n]{x^{n-1}}$. No ponto $x = 0$, a função $g(x) = \sqrt[n]{x}$ não é derivável (salvo quando $n = 1$). Por exemplo, a função $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = x^3$, é um homeomorfismo, cujo inverso $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ não possui derivada no ponto 0.

3. Derivada e crescimento local

As proposições seguintes, que se referem a derivadas laterais e a desigualdades, têm análogas com f'_+ trocada por f'_-, com $>$ substituído por $<$, etc. Para evitar repetições monótonas, trataremos apenas um caso, embora utilizemos livremente seus análogos.

Teorema 4. *Se $f: X \to \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$, com $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta$ implicam $f(a) < f(x)$.*

Demonstração: Temos $\lim_{x \to a_+} [f(x) - f(a)]/(x - a) = f'_+(a) > 0$. Pela definição de limite à direita, tomando $\varepsilon = f'_+(a)$, obtemos $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, \ \ a < x < a + \delta \Rightarrow [f(x) - f(a)]/(x - a) > 0 \Rightarrow f(a) < f(x).$$

□

Corolário 1. *Se $f: X \to \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente então suas derivadas laterais, onde existem, são ≥ 0.*

Com efeito, se alguma derivada lateral, digamos $f'_+(a)$, fosse negativa então o (análogo do) Teorema 4 nos daria $x \in X$ com $a < x$ e $f(x) < f(a)$, uma contradição. □

Corolário 2. *Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f: X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a, com $f'(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $a - \delta < x < a < y < a + \delta$ implicam $f(x) < f(a) < f(y)$.*

Diz-se que a função $f: X \to \mathbb{R}$ tem um *máximo local* no ponto $a \in X$

quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x-a| < \delta$ implicam $f(x) \leq f(a)$. Quando $x \in X$, $0 < |x-a| < \delta$ implicam $f(x) < f(a)$, diz-se que f tem um *máximo local estrito* no ponto a. Definições análogas para *mínimo local* e *mínimo local estrito*.

Quando $a \in X$ é tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in X$, diz-se que a é um ponto de *mínimo absoluto* para a função $f: X \to \mathbb{R}$. Se vale $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in X$, diz-se que a é um ponto de *máximo absoluto*.

Corolário 3. *Se $f: X \to \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$ e tem aí um máximo local então $f'_+(a) \leq 0$.*

Com efeito, se fosse $f'_+(a) > 0$ então, pelo Teorema 4, teríamos $f(a) < f(x)$ para todo $x \in X$ à direita e suficientemente próximo de a, logo f não teria máximo local no ponto a. □

Corolário 4. *Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f: X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a e possui aí um máximo ou mínimo local então $f'(a) = 0$.*

Com efeito, pelo Corolário 3 temos $f'_+(a) \leq 0$ e $f'_-(a) \geq 0$. Como $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$, segue-se que $f'(a) = 0$. □

Exemplo 7. Do Teorema 4 e seu Corolário 2 não se pode concluir que uma função com derivada positiva num ponto a seja crescente numa vizinhança de a. (A menos que f' seja contínua no ponto a.) Tudo o que se pode garantir é que $f(x) < f(a)$ para $x < a$, x próximo de a, e que $f(x) > f(a)$ se x está próximo de a, com $x > a$. Por exemplo, seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x) + x/2$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. A função f é derivável, com $f'(0) = 1/2$ e $f'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) + 1/2$ para $x \neq 0$. Se tomarmos $x \neq 0$ muito pequeno com $\operatorname{sen}(1/x) = 0$ e $\cos(1/x) = 1$ teremos $f'(x) < 0$. Se escolhermos $x \neq 0$ pequeno com $\operatorname{sen}(1/x) = 1$ e $\cos(1/x) = 0$, teremos $f'(x) > 0$. Logo existem pontos x arbitrariamente próximos de 0 com $f'(x) < 0$ e com $f'(x) > 0$. Segue-se do Corolário 1 que f não é monótona em vizinhança alguma de 0.

Exemplo 8. No Corolário 1, mesmo que f seja monótona crescente e derivável, não se pode garantir que sua derivada seja positiva em todos os pontos. Por exemplo, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$, é crescente mas sua derivada $f'(x) = 3x^2$ se anula para $x = 0$.

Exemplo 9. Se $f: X \to \mathbb{R}$ tem, digamos, um mínimo local no ponto $a \in X$, não se pode concluir daí que seja $f'(a) = 0$. Em primeiro lugar, $f'(a)$ pode não existir. Este é o caso de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, que possui um mínimo local no ponto $x = 0$, onde se tem $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$, em conformidade com o Corolário 3. Em segundo lugar, mesmo que f seja derivável no ponto a, este pode não ser um ponto de acumulação bilateral e aí pode ocorrer $f'(a) \neq 0$. É o caso da função $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Temos $f'(0) = f'(1) = 1$ embora f tenha um mínimo no ponto $x = 0$ e um máximo no ponto $x = 1$.

Um ponto $c \in X$ chama-se *ponto crítico* da função derivável $f: X \to \mathbb{R}$ quando $f'(c) = 0$. Se $c \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ é um ponto de mínimo ou de máximo local então c é crítico, mas a recíproca é falsa: a bijeção crescente $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$, não pode ter máximo nem mínimo local mas admite o ponto crítico $x = 0$.

4. Funções deriváveis num intervalo

Mesmo quando é descontínua, a derivada goza da propriedade do valor intermediário, como se verá a seguir.

Teorema 5. **(Darboux.)** *Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável. Se $f'(a) < d < f'(b)$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = d$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente $d = 0$. A função contínua f, pelo Teorema de Weierstrass, atinge seu valor mínimo em algum ponto c do conjunto compacto $[a,b]$. Como $f'(a) < 0$, o Teorema 4 assegura a existência de pontos $x \in (a,b)$ tais que $f(x) < f(a)$, logo esse mínimo não é atingido no ponto a, isto é, $a < c$. Por motivo análogo tem-se $c < b$. O Corolário 4 então nos dá $f'(c) = 0$. O caso geral reduz-se a este considerando a função auxiliar $g(x) = f(x) - dx$. Então $g'(x) = f'(x) - d$, donde $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = d$ e $g'(a) < 0 < g'(b) \Leftrightarrow f'(a) < d < f'(b)$. □

Exemplo 10. Seja $g: [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -1$ se $-1 \leq x < 0$ e $g(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 1$. A função g não goza da propriedade do valor intermediário pois assume apenas os valores -1 e 1 no intervalo $[-1,1]$. Logo não existe $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ derivável tal que $f' = g$. Por outro lado, a função $h: [-1,1] \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$ se $x \neq 0$, $h(0) = 0$, que possui uma descontinuidade bastante complicada no ponto $x = 0$, é a derivada da função $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. No capítulo 11, veremos que toda função contínua $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ é derivada de alguma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ e, no Exercício 4.1 deste capítulo, o leitor é convidado a mostrar que se $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ é descontínua num ponto $c \in (a,b)$ onde existem os limites laterais $\lim_{x\to c-} g(x)$ e $\lim_{x\to c+} g(x)$ então g não pode ser a derivada de uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Teorema 6. **(Rolle.)** *Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a,b) então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Pelo Teorema de Weierstrass, f atinge seu valor mínimo m e seu valor máximo M em pontos de $[a,b]$. Se esses pontos forem a e b então $m = M$ e f será constante, daí $f'(x) = 0$ qualquer que seja $x \in (a,b)$. Se um desses pontos, digamos c, estiver em (a,b) então $f'(c) = 0$. □

Teorema 7. **(Teorema do Valor Médio, de Lagrange.)** *Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a,b), existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b-a)$.*

Demonstração: Consideremos a função auxiliar $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = f(x) - dx$, onde d é escolhido de modo que $g(a) = g(b)$, ou seja, $d = [f(b) - f(a)]/(b-a)$. Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$, isto é, $f'(c) = d = [f(b) - f(a)]/(b-a)$. □

Um enunciado equivalente: Seja $f: [a, a+h] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em $(a, a+h)$. Existe um número θ, $0 < \theta < 1$ tal que $f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h).h$.

Corolário 1. *Uma função $f: I \to \mathbb{R}$, contínua no intervalo I, com derivada $f'(x) = 0$ para todo $x \in \operatorname{int} I$, é constante.*

Com efeito, dados $x, y \in I$ quaisquer, existe c entre x e y tal que $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) = 0.(y-x) = 0$, logo $f(x) = f(y)$. □

Corolário 2. *Se $f, g: I \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, deriváveis em $\operatorname{int} I$, com $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in \operatorname{int} I$ então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $c \in I$.*

Com efeito, basta aplicar o Corolário 1 à diferença $g - f$. □

Corolário 3. *Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$ então $x, y \in I \Rightarrow$*

$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$.

Com efeito, dados $x, y \in I$, f é contínua no intervalo fechado cujos extremos são x, y e derivável no seu interior. Logo existe z entre x e y tal que $f(y) - f(x) = f'(z)(y-x)$, donde $|f(y) - f(x)| = |f'(z)||y-x| \leq k|y-x|$. □

Corolário 4. *A fim de que a função derivável $f: I \to \mathbb{R}$ seja monótona não-decrescente no intervalo I é necessário e suficiente que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é uma bijeção crescente de I sobre um intervalo J e sua inversa $g = f^{-1}: J \to I$ é derivável, com $g'(y) = 1/f'(x)$ para todo $y = f(x) \in J$.*

Com efeito, já sabemos, pelo Corolário 1 do Teorema 4, que se f é monótona não decrescente então $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Reciprocamente, se vale esta condição então, para quaisquer x, y em I, temos $f(y) - f(x) = f'(z)(y-x)$, onde $z \in I$ está entre x e y. Como $f'(z) \geq 0$, vemos que $f(y) - f(x) \geq 0$, isto é, $x < y$ em $I \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Do mesmo modo se vê que, supondo $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, tem-se f crescente. As demais afirmações seguem-se do Teorema 5, Capítulo 7 e do Corolário da Regra da Cadeia (Teorema 3). □

Exemplo 11. O Corolário 3 é a fonte mais natural de funções lipschitzianas. Por exemplo, se $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um polinômio então, para cada subconjunto limitado $X \subset \mathbb{R}$, a restrição $p|X$ é lipschitziana porque a derivada p', sendo contínua, é limitada no compacto $\overline{X}$. Como toda função lipschitziana é uniformemente contínua, segue-se do Teorema 12, Capítulo 7 que se $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ tem derivada limitada então existem os limites laterais $\lim_{x\to a+} f(x)$ e $\lim_{x\to b-} f(x)$. A função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, não pode ter derivada limitada em nenhum intervalo do tipo $(0, \delta)$ pois não existe $\lim_{x\to 0+} f(x)$.

5. Exercícios

Seção 1: A noção de derivada

1. A fim de que $f: X \to \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que exista uma função $\eta: X \to \mathbb{R}$, contínua no ponto a, tal que $f(x) = f(a) + \eta(x)(x-a)$ para todo $x \in X$.

2. Sejam $f, g, h: X \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in X$. Se f

e h são deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$, com $f(a) = h(a)$ e $f'(a) = h'(a)$ prove que g é derivável nesse ponto, com $g'(a) = f'(a)$.

3. Seja $f: X \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se $x_n < a < y_n$ para todo n e $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim_{n\to\infty}[f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n) = f'(a)$. Interprete este fato geometricamente.

4. Dê exemplo de uma função derivável $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e seqüências de pontos $0 < x_n < y_n$, com $\lim x_n = \lim y_n = 0$ sem que entretanto exista o limite $\lim_{n\to\infty}[f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n)$.

5. Seja $f: X \to \mathbb{R}$ derivável num ponto interior $a \in X$. Prove que $\lim_{h\to 0}[f(a+h) - f(a-h)]/2h = f'(a)$. Dê um exemplo em que este limite existe porém f não é derivável no ponto a.

Seção 2: Regras operacionais

1. Admitindo que $(e^x)' = e^x$ e que $\lim_{y\to+\infty} e^y/y = +\infty$, prove que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ quando $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, possui derivada igual a zero no ponto $x = 0$, o mesmo ocorrendo com $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com f'' e assim por diante.

2. Seja I um intervalo aberto. Uma $f: I \to \mathbb{R}$ diz-se *de classe C^2* quando é derivável e sua derivada $f'I: \to \mathbb{R}$ é de classe C^1. Prove que se $f(I) \subset J$ e $g: J \to \mathbb{R}$ também é de classe C^2 então a composta $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ é de classe C^2.

3. Seja $f: I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 com $f(I) = J$ e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Calcule a derivada segunda de $f^{-1}: J \to \mathbb{R}$ e mostre que f^{-1} é de classe C^2.

4. Seja I um intervalo com centro 0. Uma função $f: I \to \mathbb{R}$ chama-se *par* quando $f(-x) = f(x)$ e *ímpar* quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in I$. Se f é par, suas derivadas de ordem par (quando existem) são funções pares e suas derivadas de ordem ímpar são funções ímpares. Em particular, estas últimas se anulam no ponto 0. Enuncie resultado análogo para f ímpar.

5. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, tal que $f(tx) = tf(x)$ para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = f'(0) \cdot x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Mais geralmente, se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é k vezes derivável e $f(tx) = t^k.f(x)$ para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$, prove que $f(x) = [f^{(k)}(0)/k!] \cdot x^k$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seção 3: Derivada e crescimento local

1. Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, o conjunto dos seus pontos críticos é fechado. Dê exemplo de uma função derivável $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que 0 seja limite de uma seqüência de pontos críticos de f, mas $f'(0) > 0$.

2. Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Um ponto crítico $c \in I$ chama-se *não-degenerado* quando $f''(c)$ é diferente de 0. Prove que todo ponto crítico não degenerado é um ponto de máximo local ou de mínimo local.

3. Se $c \in I$ é um ponto crítico não-degenerado da função $f: I \to \mathbb{R}$, derivável no intervalo aberto I, prove que existe $\delta > 0$ tal que c é o único ponto crítico de f no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$. Conclua que, se f é de classe C^1, então num conjunto compacto $K \subset I$, onde os pontos críticos de f são todos não-degenerados, só existe um número finito deles.

4. Prove diretamente (sem usar o exercício anterior) que se o ponto crítico c da função $f: I \to \mathbb{R}$ é limite de uma seqüência de pontos críticos $c_n \neq c$ e $f''(c)$ existe. então $f''(c) = 0$.

5. Prove que o conjunto dos pontos de máximo ou de mínimo local estrito de qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é enumerável.

Seção 4: Funções deriváveis num intervalo

1. Seja $g: I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo aberto I, exceto no ponto $c \in I$. Se existem os limites laterais $\lim_{x\to c-} g(x) = A$ e $\lim_{x\to c+} g(x) = B$, com $A \neq B$ então nenhuma função derivável $f: I \to \mathbb{R}$ tem derivada $f' = g$.

2. Seja $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x/x$. Admitindo que $(\log)'(x) = 1/x$, indique os intervalos de crescimento e decrescimento de f, seus pontos críticos e seus limites quando $x \to 0$ e quando $x \to +\infty$.

3. Faça um trabalho análogo ao do exercício anterior para a função $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = e^x/x$, admitindo que $(e^x)' = e^x$.

4. Supondo conhecidas as regras de derivação para as funções seno e cosseno, prove que $\text{sen}: (-\pi/2, \pi/2) \to (-1, 1)$, $\cos: (0, \pi) \to (-1, 1)$ e $\text{tg} = \text{sen}/\cos: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ são bijeções com derivadas $\neq 0$ em todos os pontos e calcule as derivadas das funções inversas $\text{arcsen}: (-1, 1) \to$

$(-\pi/2, \pi/2)$, arccos: $(-1, 1) \to (0, \pi)$ e arctg: $\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$.

5. Dada f derivável no intervalo I, sejam $X = \{f'(x); x \in I\}$ e $Y = \{[f(y) - f(x)]/(y - x); x \neq y \in I\}$. O Teorema do Valor Médio assegura que $Y \subset X$. Dê um exemplo em que $Y \neq X$. Prove que $\overline{Y} = \overline{X}$ e conclua que $\sup X = \sup Y$, $\inf X = \inf Y$.
6. Seja $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ limitada e derivável. Se não existir $\lim_{x \to a+} f(x)$ ou $\lim_{x \to b-} f(x)$, prove que, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = c$.
7. Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável no intervalo aberto (a, b), com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Se $f'(x) = 0$ apenas num conjunto finito, prove que f é crescente.
8. Use o princípio dos intervalos encaixados para provar diretamente (sem usar o Teorema do Valor Médio) que se $f: I \to \mathbb{R}$ é derivável, com $f'(x) = 0$ em todos os pontos x do intervalo I, então f é constante.
9. Com a mesma técnica do exercício anterior, prove que uma função $f: I \to \mathbb{R}$, derivável, com $|f'(x)| \leq k$ para todo x no intervalo I cumpre a condição de Lipschitz $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ se $x, y \in I$.
10. Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a, b), exceto possivelmente no ponto $c \in (a, b)$. Se existir $\lim_{x \to c} f'(x) = L$, prove que $f'(c)$ existe e é igual a L.
11. Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função com derivada limitada em (a, b) e com a propriedade do valor intermediário (cfr. Exercício 2.3, Capítulo 7). Prove que f é contínua.
12. Se $f: I \to \mathbb{R}$ cumpre $|f(y) - f(x)| \leq c.|y - x|^\alpha$ com $\alpha > 1$, $c \in \mathbb{R}$ e $x, y \in I$ arbitrários, prove que f é constante.
13. Prove que se f é derivável num intervalo e f' é contínua no ponto a então, para quaisquer seqüências de pontos $x_n \neq y_n$ nesse intervalo, com $\lim x_n = \lim y_n = a$, tem-se $\lim[f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n) = f'(a)$.

9

Fórmula de Taylor e Aplicações da Derivada

As aplicações mais elementares da derivada, ligadas a problemas de máximos e mínimos, e à regra de L'Hôpital, se encontram amplamente divulgadas nos livros de Cálculo. Aqui exporemos duas aplicações, a saber o estudo das funções convexas e o método de Newton.

1. Fórmula de Taylor

A *n-ésima derivada* (ou *derivada de ordem* n) de uma função f no ponto a será indicada com a notação $f^{(n)}(a)$. Para $n = 1, 2$ e 3 escreve-se $f'(a)$, $f''(a)$ e $f'''(a)$ respectivamente. Por definição, $f''(a) = (f')'(a)$ e assim sucessivamente: $f^{(n)}(a) = [f^{(n-1)}]'(a)$. Para que $f^{(n)}(a)$ tenha sentido, é necessário que $f^{(n-1)}(x)$ esteja definida num conjunto do qual a seja ponto de acumulação e seja derivável no ponto $x = a$. Em todos os casos que consideraremos, tal conjunto será um intervalo. Quando existe $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in I$, diz-se que a função $f: I \to \mathbb{R}$ é *n vezes derivável no intervalo* I. Quando f é $n - 1$ vezes derivável numa vizinhança de a e existe $f^{(n)}(a)$, dizemos que $f: I \to \mathbb{R}$ é *n vezes derivável no ponto* $a \in I$.

Dizemos que $f: I \to \mathbb{R}$ é uma função *de classe* C^n, e escrevemos $f \in C^n$, quando f é n vezes derivável e, além disso, a função $f^{(n)}: I \to \mathbb{R}$ é contínua. Quando $f \in C^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que f é de classe C^∞ e escrevemos $f \in C^\infty$. É conveniente considerar f como sua própria "derivada de ordem zero" e escrever $f^{(0)} = f$. Assim, $f \in C^0$ significa que f é uma função contínua.

Exemplo 1. Para $n = 0, 1, 2, \ldots$ seja $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^n|x|$. Então $f_n(x) = x^{n+1}$ se $x \geq 0$ e $f_n(x) = -x^{n+1}$ se $x \leq 0$. Cada uma das funções f_n é de classe C^n pois sua n-ésima derivada é igual a

$(n+1)!|x|$. Mas f_n não é $n+1$ vezes derivável no ponto 0, logo não é de classe C^{n+1}. As funções mais comumente encontradas, como polinômios, funções racionais, funções trigonométricas, exponencial e logaritmo, são de classe C^∞.

Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ definida no intervalo I e n vezes derivável no ponto $a \in I$. O *polinômio de Taylor de ordem* n da função f no ponto a é o polinômio $p(h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n$ (de grau $\leq n$) cujas derivadas de ordem $\leq n$ no ponto $h = 0$ coincidem com as derivadas de mesma ordem de f no ponto a, isto é, $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(a), i = 0, 1, \ldots, n$. Ora, as derivadas $p^{(0)}(0), p'(0), \ldots, p^{(n)}(0)$ determinam de modo único o polinômio $p(h)$ pois $p^{(i)}(0) = i!a_i$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a é

$$p(h) = f(a) + f'(a).h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

Se $p(h)$ é o polinômio de Taylor de ordem n da função $f\colon I \to \mathbb{R}$ no ponto $a \in I$ então a função $r(h) = f(a+h) - p(h)$, definida no intervalo $J = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in I\}$, é n vezes derivável no ponto $0 \in J$, com $r(0) = r'(0) = \cdots = r^{(n)}(0) = 0$.

Lema. *Seja $r\colon J \to \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $0 \in J$. A fim de que seja $r^{(i)}(0) = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, é necessário e suficiente que $\lim_{h\to 0} r(h)/h^n = 0$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que as derivadas de r no ponto 0 sejam nulas até a ordem n. Para $n = 1$, isto significa que $r(0) = r'(0) = 0$. Então $\lim_{h\to 0} r(h)/h = \lim_{h\to 0}[r(h) - r(0)]/h = r'(0) = 0$. Para $n = 2$, temos $r(0) = r'(0) = r''(0) = 0$. Pelo que acabamos de ver, isto implica $\lim_{x\to 0} r'(x)/x = 0$. O Teorema do Valor Médio assegura que, para todo $h \neq 0$, existe x no intervalo de extremos 0 e h tal que $r(h)/h^2 = [r(h) - r(0)]/h^2 = r'(x).h/h^2 = r'(x)/h$. Por conseguinte, $\lim_{h\to 0} r(h)/h^2 = \lim_{h\to 0} r'(x)/h = \lim_{h\to 0}[r'(x)/x](x/h) = 0$ pois $h \to 0$ implica $x \to 0$ e, além disso, $|x/h| \leq 1$. O mesmo argumento permite passar de $n = 2$ para $n = 3$ e assim por diante. Reciprocamente, suponhamos que $\lim_{h\to 0} r(h)/h^n = 0$. Daí resulta, para $i = 0, 1, \ldots, n$, que $\lim_{h\to 0} r(h)/h^i = \lim_{h\to 0}(r(h)/h^n)h^{n-i} = 0$. Portanto $r(0) = \lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{h\to 0} r(h)/h^0 = 0$. Além disso, $r'(0) = \lim_{h\to 0} r(h)/h = 0$. Quanto a $r''(0)$, consideremos a função auxiliar $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(h) = r(h) - r''(0)h^2/2$. Evidentemente, vale $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$. Pela parte do lema já demonstrada segue-se que $\lim_{h\to 0} \varphi(h)/h^2 = 0$. Como $\varphi(h)/h^2 = r(h)/h^2 - r''(0)/2$ e sabemos que $\lim_{h\to 0} r(h)/h^2 = 0$, resulta que $r''(0) = 0$. O mesmo argumento permite passar de $n = 2$ para $n = 3$ e assim por diante. □

Teorema 1. **(Fórmula de Taylor infinitesimal.)** *Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in I$. A função $r\colon J \to \mathbb{R}$, definida no intervalo $J = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in I\}$ pela igualdade*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \frac{f''(a)}{2} \cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n + r(h),$$

cumpre $\lim_{h\to 0} r(h)/h^n = 0$. Reciprocamente, se $p(h)$ é um polinômio de grau $\leq n$ tal que $r(h) = f(a+h) - p(h)$ cumpre $\lim_{h\to 0} r(h)/h^n = 0$ então $p(h)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto a, isto é,

$$p(h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot h^i.$$

Demonstração: A função r, definida pela fórmula de Taylor, é n vezes derivável no 0 e tem derivadas nulas nesse ponto, até a ordem n. Logo, pelo Lema, vale $\lim_{h\to 0} r(h)/h^n = 0$. Reciprocamente, se $r(h) = f(a+h) - p(h)$ é tal que $\lim r(h)/h^n = 0$ então, novamente pelo Lema, as derivadas de r no ponto 0 são nulas até a ordem n, logo $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, ou seja, $p(h)$ é o polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a. □

Exemplo 2. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in \operatorname{int} I$, com $f^{(i)}(a) = 0$ para $1 \leq i < n$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$. Se n é par então: f possui um mínimo local estrito no ponto a caso $f^{(n)}(a) > 0$ e um máximo local estrito quando $f^{(n)}(a) < 0$. Se n é ímpar então a não é ponto de mínimo nem de máximo local. Com efeito, neste caso podemos escrever a fórmula de Taylor como

$$f(a+h) - f(a) = h^n\left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n}\right].$$

Pela definição de limite, existe $\delta > 0$ tal que, para $a + h \in I$ e $0 < |h| < \delta$ a soma dentro dos colchetes tem o mesmo sinal de $f^{(n)}(a)$. Como $a \in \operatorname{int} I$, podemos tomar este δ de modo que $|h| < \delta \Rightarrow a + h \in I$. Então, quando n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, a diferença $f(a+h) - f(a)$ é positiva sempre que $0 < |h| < \delta$, logo f possui um mínimo local estrito no ponto a. Analogamente, se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$, a diferença $f(a+h) - f(a)$ é negativa quando $0 < |h| < \delta$, logo f tem um máximo local no ponto a. Finalmente, se n é ímpar, o fator h^n tem o mesmo sinal de h, logo a diferença $f(a+h)-f(a)$ muda de sinal juntamente com h, logo f não tem máximo nem mínimo local no ponto a.

Exemplo 3. (*Novamente a Regra de L' Hôpital.*) Sejam $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ n vezes deriváveis no ponto $a \in I$, com derivadas nulas neste ponto até a ordem $n-1$. Se $g^{(n)}(a) \neq 0$ então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Com efeito, pela fórmula de Taylor, temos

$$f(a+h) = h^n[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n}]$$

e

$$g(a+h) = h^n[\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{s(h)}{h^n}]$$

onde $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{s(h)}{h^n} = 0$. Portanto

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n}}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{s(h)}{h^n}} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

A fórmula de Taylor infinitesimal é assim chamada porque só afirma algo quando $h \to 0$. A seguir daremos outra versão dessa fórmula, onde é feita uma estimativa do valor $f(a+h)$ para h fixo. Ela é uma extensão do Teorema do Valor Médio, de Lagrange. Como naquele teorema, trata-se de um resultado global, onde se supõe que f seja n vezes derivável em todos os pontos do intervalo $(a, a+h)$.

Teorema 2. **(Fórmula de Taylor, com resto de Lagrange.)** *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ n vezes derivável no intervalo aberto (a,b), com $f^{(n-1)}$ contínua em $[a,b]$. Existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

Pondo $b = a+h$, isto quer dizer que existe θ, com $0 < \theta < 1$, tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n.$$

Demonstração: Seja $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{K}{n!}(b-x)^n,$$

onde a constante K é escolhida de modo que $\varphi(a) = 0$. Então φ é contínua em $[a,b]$, diferenciável em (a,b), com $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Vê-se facilmente que

$$\varphi'(x) = \frac{K - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}.$$

Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$. Isto significa que $K = f^{(n)}(c)$. O Teorema 2 se obtém fazendo $x = a$ na definição de φ e lembrando que $\varphi(a) = 0$. □

2. Funções convexas e côncavas

Se $a \neq b$, a *reta* que liga os pontos (a, A) e (b, B) no plano $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$y = A + \frac{B-A}{b-a}(x-a)$$

ou, equivalentemente,

$$y = B + \frac{B-A}{b-a}(x-b).$$

Quando se tem uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, e são dados $a, b \in X$, o segmento de reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, pertencentes ao gráfico de f, será chamado a *secante* ab.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$ chama-se *convexa* quando seu gráfico se situa abaixo de qualquer de suas secantes. Em termos precisos, a convexidade de f se exprime assim:

$$a < x < b \text{ em } I \Rightarrow f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

ou seja:

$$a < x < b \text{ em } I \Rightarrow f(x) \leq f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b).$$

Portanto $f\colon I \to \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I se, e somente se, valem as desigualdades fundamentais:

$$a < x < b \text{ em } I \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}. \quad (*)$$

Qualquer uma das duas desigualdades acima implica a outra. Elas significam que, para $a < x < b$, a secante ax tem inclinação menor que a secante ab e esta, por sua vez, tem inclinação menor do que a secante xb.

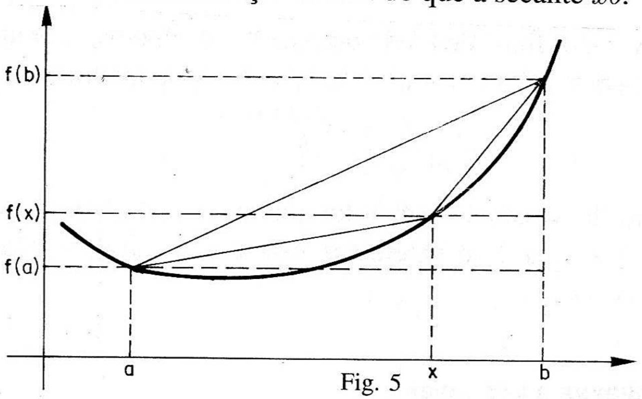

Fig. 5

Teorema 3. *Se $f\colon I \to \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I então existem as derivadas laterais $f'_+(c)$ e $f'_-(c)$ em todo ponto $c \in \operatorname{int} I$.*

Demonstração: Em virtude das observações feitas acima, a função $\varphi_c(x) = [f(x) - f(c)]/(x - c)$ é monótona não-decrescente no intervalo $J = I \cap (c, +\infty)$. Além disso, como $c \in \operatorname{int} I$, existe $a \in I$, com $a < c$. Portanto $\varphi_c(x) \geq [f(a) - f(c)]/(a - c)$, para todo $x \in J$. Assim, a função $\varphi_c\colon J \to \mathbb{R}$ é limitada inferiormente. Logo existe o limite à direita $f'_+(c) = \lim_{x \to c+} \varphi_c(x)$. Raciocínio análogo para a derivada à esquerda. □

Corolário . *Uma função convexa $f\colon I \to \mathbb{R}$ é contínua em todo ponto interior ao intervalo I.*

Observe-se que $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(0) = 1$ e $f(x) = 0$ se $0 < x \leq 1$, é convexa porém descontínua no ponto 0.

Teorema 4. *As seguintes afirmações sobre a função $f\colon I \to \mathbb{R}$, derivável no intervalo I, são equivalentes:*

(1) *f é convexa.*

(2) *A derivada $f'\colon I \to \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente.*

(3) *Para quaisquer $a, x \in I$ tem-se $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$, ou seja, o gráfico de f está situado acima de qualquer de suas tangentes.*

Demonstração: Provaremos as implicações (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2). Sejam $a < x < b$ em I. Nas desigualdades fundamentais $(*)$ fazendo primeiro $x \to a+$, e depois $x \to b-$, vem $f'_+(a) \leq [f(b) - f(a)]/(b - a) \leq f'_-(b)$. Logo $a < b \Rightarrow f'(a) \leq f'(b)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Suponhamos $a < x$ em I. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (a, x)$ tal que $f(x) = f(a) + f'(z)(x - a)$. Como f' é monótona não-decrescente, temos $f'(z) \geq f'(a)$. Logo $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$. Raciocínio análogo no caso $x < a$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sejam $a < c < b$ em I. Escrevamos $\alpha(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$ e chamemos de $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \alpha(x)\}$ o semi-plano superior determinado pela reta $y = \alpha(x)$, tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$. Evidentemente, H é um subconjunto convexo do plano, isto é, o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de H está contido em H. A hipótese (3) assegura que os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ pertencem a H, logo o segmento de reta que une estes pontos está contido em H. Em particular, o ponto desse segmento que tem abcissa c pertence a H, isto é, tem ordenada $\geq \alpha(c) = f(c)$. Isto significa que $f(c) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$. Como $a < c < b$ são quaisquer em I, a função f é convexa. □

Corolário 1. *Todo ponto crítico de uma função convexa é um ponto de mínimo absoluto.*

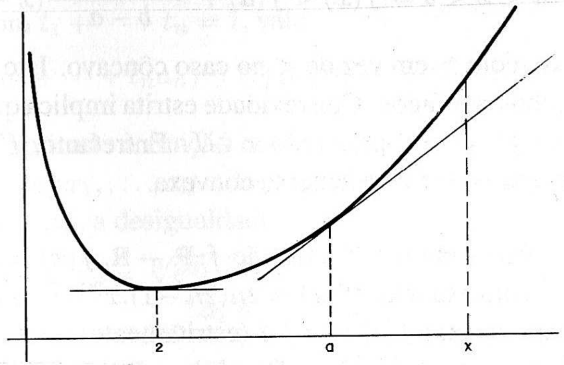

Fig. 6 – A função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{1}{x}$, é convexa. Seu ponto crítico $x = 2$ é um mínimo global. Seu gráfico situa-se acima de qualquer de suas tangentes.

Com efeito, dizer que $a \in I$ é ponto crítico da função $f\colon I \to \mathbb{R}$ significa afirmar que f possui derivada igual a zero no ponto a. Se f é convexa e $a \in I$

é ponto crítico de f então a condição (3) acima assegura $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in I$, logo a é ponto de mínimo absoluto para f. □

Corolário 2. *Uma função $f: I \to \mathbb{R}$, duas vezes derivável no intervalo I, é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*

Com efeito, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ equivale a afirmar que $f': I \to \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente. □

Uma função $f: I \to \mathbb{R}$ diz-se *côncava* quando $-f$ é convexa, isto é, quando o gráfico de f está acima de qualquer de suas secantes. As desigualdades que caracterizam uma função côncava f são análogas a (*) acima, com $\geq$ em lugar de $\leq$. Existem as derivadas laterais de uma função côncava em cada ponto interior ao seu domínio, logo a função é contínua nesse ponto. Uma função derivável é côncava se, e somente se, sua derivada é monótona não-crescente. Uma função duas vezes derivável é côncava se, e somente se, sua derivada segunda é ≤ 0. Uma função derivável é côncava se, e somente se, seu gráfico está abaixo de qualquer de suas tangentes. Todo ponto crítico de uma função côncava é um ponto de máximo absoluto.

Existem ainda as noções de função *estritamente convexa* e *estritamente côncava* , onde se exige que

$$a < x < b \Rightarrow f(x) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

no caso convexo, com $>$ em vez de $<$ no caso côncavo. Isto evita que o gráfico de f possua trechos retilíneos. Convexidade estrita implica que f' seja crescente mas não implica $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$. Entretanto, $f''(x) > 0$ para todo $x \in I \Rightarrow f'$ crescente $\Rightarrow f$ estritamente convexa.

Exemplo 4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n}$, é estritamente convexa mas $f''(x) = 2n(2n-1).x^{2n-2}$ anula-se no ponto $x = 0$. A função exponencial $f(x) = e^x$ é (estritamente) convexa, enquanto $\log x$ (para $x > 0$) é côncava. A função $g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1/x$, é côncava para $x < 0$ e convexa para $x > 0$.

Os pontos x do intervalo $[a, b]$ se escrevem, de modo único, sob a forma $x = (1-t)a + tb$, com $0 \leq t \leq 1$. Com efeito, esta igualdade equivale a $t = (x-a)/(b-a)$. No segmento de reta que liga o ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$ no plano, o ponto de abcissa $x = (1-t)a + tb$ tem ordenada $(1-t)f(a) + tf(b)$.

Portanto, uma função $f: I \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se

$$a, b \in I, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Equivalentemente, $f: I \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, para quaisquer $a_1, a_2 \in I$ e $t_1, t_2 \in [0,1]$ com $t_1 + t_2 = 1$ tem-se

$$f(t_1a_1 + t_2a_2) \leq t_1f(a_1) + t_2f(a_2).$$

Sejam agora $f: I \to \mathbb{R}$ convexa, $a_1, a_2, a_3 \in I$ e $t_1, t_2, t_3 \in [0,1]$ com $t_1 + t_2 + t_3 = 1$. Afirmamos que

$$f(t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3) \leq t_1f(a_1) + t_2f(a_2) + t_3f(a_3).$$

Com efeito, esta desigualdade é óbvia quando $t_1 = t_2 = 0$ e $t_3 = 1$. Se, entretanto, $t_1 + t_2 \neq 0$, podemos escrever

$$t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3 = (t_1 + t_2)\left[\frac{t_1}{t_1+t_2}a_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2}a_2\right] + t_3a_3.$$

Como

$$(t_1 + t_2) + t_3 = 1 \text{ e } \frac{t_1}{t_1+t_2} + \frac{t_2}{t_1+t_2} = 1,$$

a desigualdade alegada resulta de aplicar-se duas vezes o caso já conhecido, em que se têm duas parcelas.

Analogamente, se $f: I \to \mathbb{R}$ é convexa então, dados $a_1, \ldots, a_n \in I$ e $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ com $t_1 + \cdots + t_n = 1$, vale

$$f(t_1a_1 + \cdots + t_na_n) \leq t_1f(a_1) + \cdots + t_nf(a_n).$$

Este resultado, aplicado à função convexa $f(x) = \exp x$, com $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 1/n$, $a_1 = \log x_1, \ldots, a_n = \log x_n$ fornece, para quaisquer n números reais positivos $x_1, \ldots, x_n$, a desigualdade

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} &= \sqrt[n]{e^{a_1}.e^{a_2}\ldots e^{a_n}} \\
&= \exp\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \\
&= f(t_1a_1 + \cdots + t_na_n) \\
&\leq t_1f(a_1) + \cdots + t_nf(a_n) \\
&= \frac{e^{a_1} + \cdots + e^{a_n}}{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},
\end{aligned}$$

ou seja:

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Esta é a clássica desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica.

Mais geralmente, o mesmo método serve para demonstrar a desigualdade

$$x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n} \le t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n,$$

válida para números não-negativos $x_1, x_2, \dots, x_n$, e $t_1, t_2, \dots, t_n$, com $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$. A desigualdade anterior, entre a média aritmética e a média geométrica, corresponde ao caso particular em que $t_1 = \dots = t_n = 1/n$.

3. Aproximações sucessivas e método de Newton

Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ chama-se uma *contração* quando existe uma constante $k \in [0,1)$ tal que $|f(y) - f(x)| \le k|y - x|$ para quaisquer $x, y \in X$. O exemplo mais comum de contração é uma função $f: I \to \mathbb{R}$, derivável no intervalo I, com $|f'(x)| \le k < 1$ para todo $x \in I$. Evidentemente, toda contração é uma função uniformemente contínua.

Teorema 5. **(Ponto fixo das contrações.)** *Se $X \subset \mathbb{R}$ é fechado então toda contração $f: X \to X$ possui um único ponto fixo. Mais precisamente, fixando qualquer $x_0 \in X$, a seqüência das aproximações sucessivas*

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

converge para o único ponto $a \in X$ tal que $f(a) = a$.

Demonstração: Seja $|f(y) - f(x)| \le k|y - x|$ para quaisquer $x, y \in X$, onde $0 \le k < 1$. Então $|x_{n+1} - x_n| \le k|x_n - x_{n-1}|$ logo, pelo Teste de d'Alembert, a série $s = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ é absolutamente convergente. Ora, a soma dos n primeiros termos desta série é $s_n = x_n - x_0$. De $\lim s_n = s$ segue-se $\lim x_n = s + x_0 = a$. Tem-se $a \in X$ porque o conjunto X é fechado. Fazendo $n \to \infty$ na igualdade $x_{n+1} = f(x_n)$, como f é contínua, obtem-se $a = f(a)$. Finalmente, se $f(a) = a$ e $f(b) = b$ então $|b - a| = |f(b) - f(a)| \le k|b - a|$, ou seja, $(1 - k)|b - a| \le 0$. Como $1 - k > 0$, concluímos que $a = b$, logo o ponto fixo $a \in X$ é único. □

Exemplo 5. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, não possui ponto fixo pois $f(x) > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sua derivada $f'(x) = x/\sqrt{x^2 + 1}$ cumpre $|f'(x)| < 1$, logo tem-se $|f(y) - f(x)| < |y - x|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Este exemplo mostra que a condição $|f(y) - f(x)| < |y - x|$ sozinha não basta para se obter um ponto fixo.

Exemplo 6. A função $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x/2$, é uma contração mas não possui ponto fixo $a \in [1, +\infty)$. Isto mostra que, no método das aproximações sucessivas, é essencial verificar que a condição $f(X) \subset X$ é satisfeita. Neste exemplo, não se tem $f([1, +\infty)) \subset [1, +\infty)$.

Exemplo 7. $f: (0,1) \to (0,1)$, dada por $f(x) = x/2$, tem derivada $f'(x) = 1/2$ mas não possui ponto fixo pois $(0,1)$ não é fechado.

Um exemplo importante de aproximações sucessivas é o chamado *método de Newton* para a obtenção de valores aproximados de uma raiz da equação $f(x) = 0$. Neste método, tem-se uma função $f: I \to \mathbb{R}$, de classe C^1 no intervalo I, com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, toma-se um valor inicial x_0, põe-se

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ etc.}$$

Se a seqüência (x_n) convergir, seu limite a será uma raiz da equação $f(x) = 0$ pois, fazendo $n \to \infty$ na igualdade

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

resulta $a = a - f(a)/f'(a)$, donde $f(a) = 0$.

O método de Newton resulta da observação de que as raízes da equação $f(x) = 0$ são os pontos fixos da função $N = N_f: I \to \mathbb{R}$, definida por

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

O número $N(x) = x - f(x)/f'(x)$ é a abscissa do ponto em que a tangente ao gráfico de f no ponto x encontra o eixo horizontal. A idéia que motiva o método de Newton é que, se a tangente aproxima a curva então sua interseção com o eixo x aproxima o ponto de interseção da curva com esse eixo, isto é, o ponto x em que $f(x) = 0$.

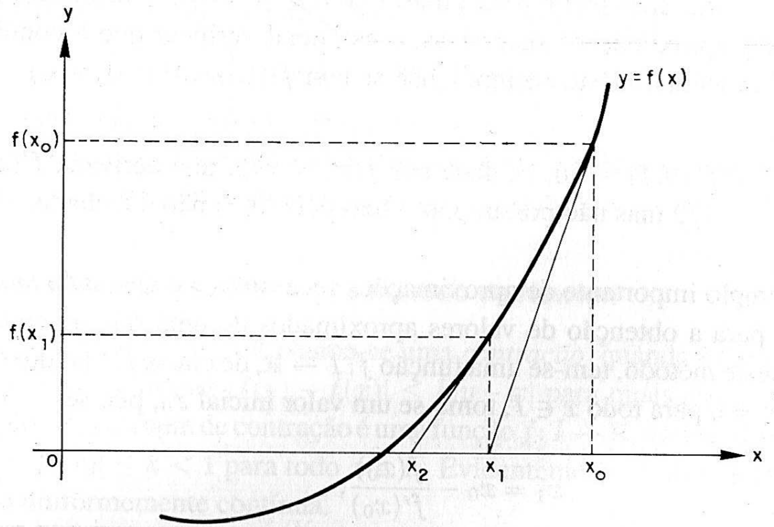

Fig. 7 – Como a inclinação da tangente é $f'(x_0) = f(x_0)/(x_0 - x_1)$, segue-se que $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.

É fácil dar exemplos em que a seqüência (x_n) de aproximações de Newton não converge: basta tomar uma função, como $f(x) = e^x$, que não assuma o valor zero. E, mesmo que a equação $f(x) = 0$ tenha uma raiz real, a seqüência (x_n) pode divergir, caso x_0 seja tomado longe da raiz.

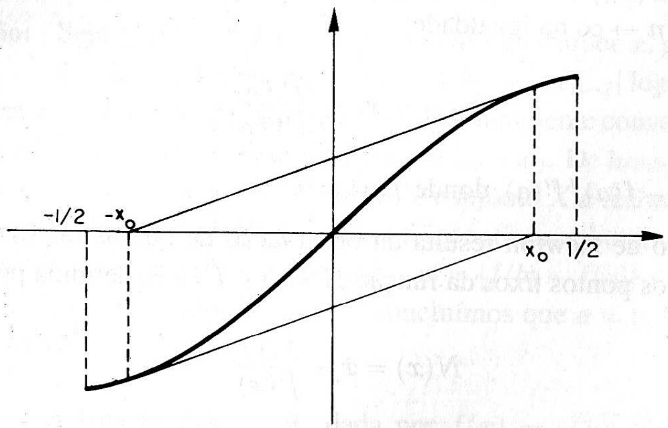

Fig. 8 – A função $f: [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x - x^3$, anula-se para $x = 0$. Valores aproximados desta raiz pelo método de Newton, começando com $x_0 = \sqrt{5}/5$, são sucessivamente $x_0, -x_0, x_0, -x_0$, etc. O método não converge.

Existem, evidentemente, infinitas funções cujos pontos fixos são as raízes da equação $f(x) = 0$. A importância de $N(x)$ reside na rapidez com que as aproximações sucessivas convergem para a raiz a da equação $f(x) = 0$ (quando convergem): cada $x_{n+1} = N(x_n)$ é um valor aproximado de a com cerca do dobro dos algarismos decimais exatos de x_n. (Veja Exemplo 9.)

Mostraremos agora que se $f: I \to \mathbb{R}$ possui derivada segunda contínua $f'': I \to \mathbb{R}$, com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então cada ponto $a \in \operatorname{int} I$ onde $f(a) = 0$ tem uma vizinhança $J = [a-\delta, a+\delta]$ tal que, começando com qualquer valor inicial $x_0 \in J$, a seqüência de pontos $x_{n+1} = N(x_n)$ converge para a.

Com efeito, a derivada $N'(x) = f(x)f''(x)/f'(x)^2$ se anula no ponto $x = a$. Como $N'(x)$ é contínua, se fixarmos arbitrariamente $k \in (0,1)$ obteremos $\delta > 0$ tal que $J = [a-\delta, a+\delta] \subset I$ e $|N'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in J$. Afirmamos que $x \in J \Rightarrow N(x) \in J$. De fato, $x \in J \Rightarrow |N(x) - N(a)| \leq k|x-a| \leq |x-a| \leq \delta \Rightarrow N(x) \in J$. Portanto, $N: J \to J$ é uma contração. Logo a seqüência $x_1 = N(x_0)$, $x_{n+1} = N(x_n)$ converge para o único ponto fixo $a \in J$ da contração N.

Exemplo 8. (*Cálculo aproximado de* $\sqrt[n]{c}$.) Dados $c > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, consideremos o intervalo $I = [\sqrt[n]{c}, +\infty)$ e a função $f: I \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^n - c$. Como $f'(x) = nx^{n-1}$, a função de Newton $N: I \to \mathbb{R}$ assume a forma $N(x) = \frac{1}{n}[(n-1)x + c/x^{n-1}]$. Assim, para todo $x > 0$, $N(x)$ é a média aritmética dos n números $x, x, \ldots, x, c/x^{n-1}$. Como a média geométrica desses números é $\sqrt[n]{c}$, concluímos que $N(x) \geq \sqrt[n]{c}$ para todo $x > 0$. Em particular, $x \in I \Rightarrow N(x) \in I$. Além disso, $N'(x) = \frac{n-1}{n}(1 - c/x^n)$, logo $0 \leq N'(x) \leq (n-1)/n$ para todo $x \in I$. Tudo isto mostra que $N: I \to I$ é uma contração. Portanto, tomando-se qualquer $x_0 > 0$, temos $N(x_0) = x_1 \in I$ e as aproximações sucessivas $x_{n+1} = N(x_n)$ convergem (rapidamente) para $\sqrt[n]{c}$.

Exemplo 9. (*O método de Newton converge quadraticamente.*) Considere $f: I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 no intervalo I, com $|f''(x)| \leq A$ e $|f'(x)| \geq B$ para todo $x \in I$, onde A e B são constantes positivas. Vimos acima que, tomando a aproximação inicial x_0 suficientemente próxima de um ponto a onde $f(a) = 0$, a seqüência de aproximações de Newton $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ converge para a. Agora usaremos o Teorema 2 para estabelecer uma comparação entre os erros $|x_{n+1} - a|$ e $|x_n - a|$. Existe um número d entre