GRUPO DE ESTUDOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA

G. E. E. M. — SÃO PAULO

SÉRIE PROFESSOR N.o 6

INICIAÇÃO ÀS ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

L. H. JACY MONTEIRO

SÃO PAULO

GRUPO DE ESTUDOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA

G. E. E. M. — São Paulo

Série Professor N.o 6

Prof. Altamir A. R. Aveldi

181

INICIAÇÃO ÀS ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

7ª Edição

DISTRIBUIÇÃO

LIVRARIA NOBEL S. A.
EDITORA - DISTRIBUIDORA
MATRIZ: RUA MARIA ANTONIA, 108
TELEFONES 256-7081 - 256-6100 - 256-0054
FILIAL: R. DA CONSOLAÇÃO, 49 - TEL. 35-0763
CAIXA POSTAL 2373 - 01.222 SÃO PAULO

APRESENTAÇÃO

1ª edição

O Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, de São Paulo, no cumprimento de sua programação editorial, tem o prazer de lançar, dentro da *Série Professor*, o Volume de nº 6— *"Iniciação às Estruturas Algébricas"*, de autoria de seu membro L.H.Jacy Monteiro.

Tal volume, mais que um livro de rico conteúdo, é um guia a todo professor secundário interessado no aspecto atual da Matemática, abrangendo áreas pertencentes ao 1º e 2º ciclos da escola média.

O Capítulo I trata de *Relações* que, desde a 1ª série ginasial, participam de toda programação de Matemática da escola secundária. No Capítulo II é feito o estudo geral das *Aplicações* e o III é o Capítulo destinado às *Operações*, com as respectivas propriedades estruturais.

Finalmente no Capítulo IV são estudados os *Grupos, Anéis* e *Corpos*, com aplicações. Atente-se para a ênfase dada ao tratamento da importante estrutura de *Grupo*, cujo estudo até o Teorema de Lagrange, é recomendado a todo professor secundário de Matemática.

O Departamento de Publicações do GEEM espera, com este novo volume de sua coleção, continuar contribuindo para o aprimoramento do professorado secundário brasileiro.

Outrossim, aproveita o ensejo para agradecer ao seu membro Renate G. Watanabe pela leitura dos originais, incluindo valiosas sugestões, bem como a todos que colaboraram para que este volume chegasse a termo num mínimo de tempo.

São Paulo, janeiro de 1968

GRUPO DE ESTUDOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA—SP

INTRODUÇÃO

1. Utilizaremos nestas notas a teoria dos conjuntos que está exposta no volume 3 desta mesma série de publicações (ver [3], pp.21-66). Suporemos que o leitor conheça as propriedades elementares dos seguintes conjuntos:

N — conjunto dos números naturais ($0 \in \mathbf{N}$);

Z — conjunto dos números inteiros;

Q — conjunto dos números racionais;

R — conjunto dos números reais.

2. Faremos, a seguir, um resumo das propriedades relativas à Aritmética do anel **Z** dos números inteiros que serão freqüentemente utilizadas neste livro.

2.1 — Axioma de indução finita

Se S *é um subconjunto qualquer do conjunto* **N** *dos números naturais e se* S *satisfaz as condições*

a) $0 \in S$;

b) $n \in S \Longrightarrow n + 1 \in S$;

então $S = \mathbf{N}$.

O axioma de indução finita nos mostra que o único subconjunto de **N** que satisfaz as condições a) e b) é o próprio **N**.

2.2 — Princípio do menor número natural

Todo conjunto não vazio de números naturais possui um mínimo.

Isto é, se $S \subset \mathbf{N}$ e se $S \neq \emptyset$, então existe $m \in S$ tal que $m \leqslant x$ para todo x em S (m é o *mínimo* de S).

2.3 — Princípio do menor número inteiro

Todo subconjunto S, *de* **Z**, *que é não vazio e minorado, possui um mínimo.*

Isto é, se $S \subset \mathbf{Z}$, com $S \neq \emptyset$, e se existe $b \in \mathbf{Z}$ tal que $b \leqslant x$ para todo x em S (b é

um *minorante* de S), então existe um número inteiro m tal que: 1) $m \in S$; 2) $m \leqslant x$ para todo x em S (m é o *mínimo* de S).

2.4 — Algoritmo da divisão

Se a *e* b *são dois números inteiros e se* $b \neq 0$, *então existe um único par* (q,r), *de números inteiros, tal que*

$$a = bq + r \qquad e \qquad 0 \leqslant r < |b| .$$

2.5 — Máximo divisor comum

Diz-se que um número inteiro d é o *máximo divisor comum* de dois números inteiros a e b se, e somente se, são válidas as seguintes condições

D0: $d \geqslant 0$;
D1: $d|a$ e $d|b$;
D2: para todo inteiro d', se $d'|a$ e $d'|b$, então $d'|d$.

Demonstra-se que *dados dois números inteiros* a *e* b *existe um único* $d \in \mathbf{Z}$ *que satisfaz as condições* D0, D1 *e* D2; *além disso, existem números inteiros* r *e* s *tais que*

$$d = ra + sb.$$

O máximo divisor comum de a e b é indicado pela notação mdc(a,b). Notemos que mdc(0, 0) = 0.

2.6 — Números primos

Diz-se que um número inteiro p é *primo* se, e somente se, p satisfaz as seguintes condições

1) $p \neq 0$ e $p \neq \pm 1$;
2) os únicos divisores de p são −1, 1, p e −p.

Com o auxílio do último teorema enunciado acima demonstra-se que *se* p *é um número primo e se* $p|(ab)$, *com* a *e* b *inteiros, então* $p|a$ *ou* $p|b$. De um modo mais geral temos: *se* $m|(ab)$ (onde a, b e m são números inteiros) *e se* mdc(m, a) = 1 (isto é, se a e m são primos entre si), *então* $m|b$.

2.7 — Teorema fundamental da Aritmética

Todo número inteiro n, *com* $n \neq 0$, *e* $n \neq \pm 1$, *é igual a um produto de números pri-*

mos; além disso, se

$$n = p_1 p_2 \ldots p_s = q_1 q_2 \ldots q_t$$

são duas decomposições de n *como produtos de números primos, então* $s = t$ *e usando-se uma notação conveniente temos:* $p_i = \pm q_i$ *para* $i = 1, 2, \ldots, s$.

Uma conseqüência imediata do teorema acima é a seguinte: para todo número inteiro n, com $n \neq 0$ e $n \neq \pm 1$, existem números primos positivos

$$p_1, p_2, \ldots, p_r$$

tais que

$$n = \pm p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r},$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_r$ são números naturais não nulos; além disso, esta decomposição de n é única a menos da ordem dos fatores.

ÍNDICE

pág.

ÍNDICE ALFABÉTICO

A

B

C

D

E

F

G

H

I

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

V

Z

BIBLIOGRAFIA

[1] BEAUMONT, R.A. — PIERCE, R.S. — *The Algebraic Foundations of Mathematics,* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading (1963)

[2] CALAME, A. — *Mathématiques Modernes*, volume I (1965), volume II (1966), Éditions du Griffon, Neuchâtel

[3] CASTRUCCI, B. — *Elementos de teoria dos conjuntos,* Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, Série Professor, Nº 3, S. Paulo (1967)

[4] DEAN, R.A. — *Elements of Abstract Algebra,* John Wiley and Sons Inc., New York (1966)

[5] JACY MONTEIRO, L.H. — *Elementos de Álgebra,* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro (1969)

[6] PATTERSON, E.M. — RUTHERFORD, D.E. — *Elementary Abstract Algebra,* University Mathematical Texts, Oliver and Boyd Ltd., Londres (1965)

[7] *Um Programa Moderno de Matemática para o Ensino Secundário (Do Original: Un Programme Moderne de Mathématiques pour l'Enseignement Secondaire* — O.E.C.E.), Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, Série Professor Nº 2 (1965)

[8] WHITESITT, J.E. — *Principles of Modern Algebra,* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading (1964).

PUBLICAÇÕES DO G. E. E. M. — SÃO PAULO

SÉRIE PROFESSOR

N.º 1 — MATEMÁTICA MODERNA PARA O ENSINO SECUNDÁRIO — G. E. E. M.

N.º 2 — UM PROGRAMA MODERNO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO SECUNDÁRIO — G. E. E. M.

N.º 3 — ELEMENTOS DA TEORIA DOS CONJUNTOS — Benedito Castrucci

N.º 4 — INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA — Benedito Castrucci

N.º 5 — COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES — Ruy Madsen Barbosa

N.º 7 — POLINÔMIOS — DIVISIBILIDADE — L. H. Jacy Monteiro

SÉRIE ENSINO PRIMÁRIO

N.º 1 — INTRODUÇÃO DA MATEMÁTICA MODERNA NA ESCOLA PRIMÁRIA — Anna Franchi e Manhucia P. Liberman (esgotado)

N.º 2 — UMA INICIAÇÃO À MATEMÁTICA
Lucília Bechara Sanchez e Manhúcia Perelberg Liberman