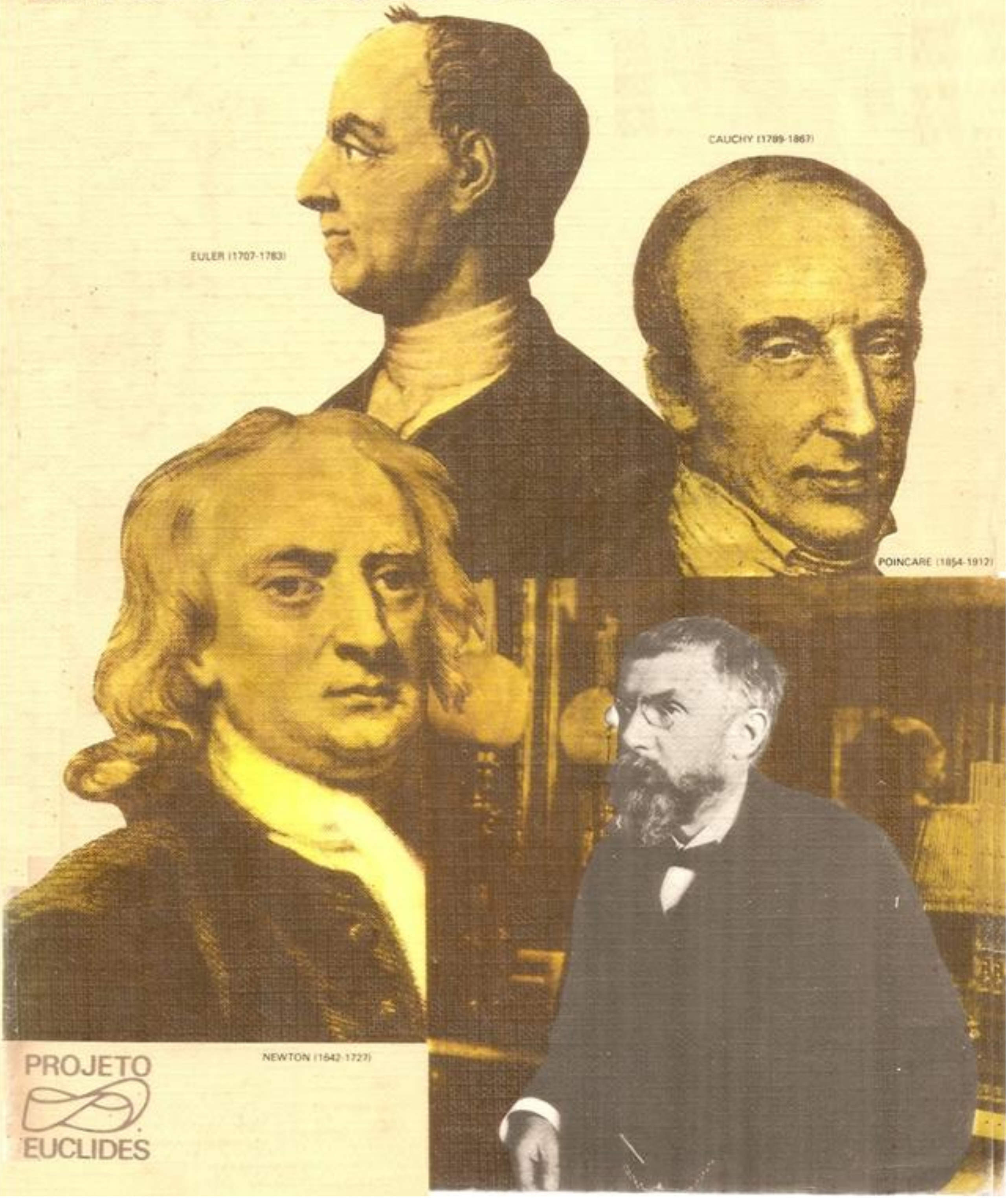
jorge sotomayor

lições de equações diferenciais ordinárias



PROJETO EUCLIDES

ÍNDICE

PARTE C: TEORIA QUALITATIVA

PREFÁCIO

Este livro baseia-se nos cursos sobre Equações Diferenciais Ordinarias dadas pelo autor em 1971 e 1973 no Instituto de Matemática Pura e Aplicada, para alunos de pós-graduação orientados para o Mestrado em Matemática.

Desenvolvemos aqui a Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, isto é, o estudo das propriedades gerais das funções que são soluções deste tipo de equações, a partir de hipóteses amplas sobre as funções que as definem, usando os recursos da Análise Matemática Clássica e da Álgebra Linear, sem recorrer necessariamente à forma particular das equações.

A matéria apresentada não difere essencialmente daquela desenvolvida em vários tratados clássicos ou modernos, mormente em língua estrangeira. Registramos aqui nosso reconhecimento pela influência recebida destes, e especialmente mencionamos Hartman [1964], Coddington e Levinson [1955] e Pontrjagin [1962].

O livro está dividido em três partes basicamente autosuficientes: Fundamentos, Equações Lineares e Teoria Qualitativa. Um quadro de interdependência entre os capítulos permite atalhos diretos para varios tópicos, sem seguir necessariamente a ordem em que estão apresentados no texto. Isto é conseguido ao custo de uma certa repetição dos fundamentos da Teoria, em diversas versões, que, a nosso ver, se complementam para dar uma visão mais ampla dos métodos disponíveis. O conteúdo dos capítulos é ditado por uma inevitável escolha dentro do vasto universo das Equações Diferenciais. Acreditamos entretanto ter abordado os elementos da maior parte dos assuntos surgidos ou sistematizados a partir do grande movimento de fundamentação e expansão que experimentou a Teoria no século XIX e que ainda na atualidade, sob variadas formas, são objeto de pesquisa ou usados nas aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias.

O texto apresenta mais material do que poderia ser razoavelmente coberto no curso de um período letivo, sendo indispensável neste caso uma escolha criteriosa de tópicos para uma primeira leitura.

O texto central é complementado com diversos apêndices, nos quais desenvolvemos aspectos importantes da Teoria mas tecnicamente mais elaborados ou diferentes no enfoque, cuja introdução no texto quebraria a continuidade de idéias e métodos elementares que neste predominam.

Os exercícios propostos, quando não são rotineiros, representam complementos, aplicações ou abordagens diferentes para a teoria; algumas vezes eles visam fornecer ao leitor informações sobre assuntos correlatos importantes que por limitação de espaço e tempo não puderam ser abordados com plenitude no texto. Estas informações devem ser complementadas, sempre que possível, com a leitura de bibliografia apropriada. Recomendamos ao leitor abordar e pensar em todos os exercícios propostos. Quase sempre anexamos sugestões para aqueles menos imediatos.

A Teoria das Equações Diferenciais se distingue tanto por sua riqueza de idéias e métodos como por sua aplicabilidade. O aluno obterá de seu estudo uma experiência de grande valor formativo, já que terá oportunidade de integrar, num único corpo, os fundamentos da Análise Clássica, Álgebra Linear e Topologia, disciplinas que pelas limitações e distorções derivadas da departamentalização do conhecimento são, amiúde, apresentadas em forma isolada.

É com grande satisfação que registramos nossos agradecimentos aos colegas e alunos que, com palavras de estímulo, sugestões e comentários, contribuiram para o aprimoramento das notas de aula precursoras deste livro. Com particular ênfase mencionamos a Wilson Barbosa, Roberto Paterlini e Genésio L. dos Reis, por sua inestimável colaboração na revisão e complementação de versões preliminares.

Agrademos também aos colegas, Carlos Gutiérrez, Cesar Camacho, Elon Lima, Jacob Palis e Pedro Mendes por sugestões diversas após terem usado parte destas versões preliminares em cursos ministrados.

Finalmente, mas não com menor satisfação, agradecemos a Maurício Peixoto pela influência que suas estimulantes lições dadas no IMPA em 1963-64, tiveram na concepção inicial deste livro.

Jorge Sotomayor
Rio de Janeiro, abril de 1979

séries infinitas (ainda sem a preocupação com a análise da convergência das mesmas).

Em fins do século XVIII a Teoria das Equações Diferenciais se transformou numa das disciplinas matemáticas mais importantes e o método mais efetivo para a pesquisa científica. As contribuições de Euler, Lagrange, Laplace e outros expandiram notavelmente o conhecimento dentro do Cálculo das Variações, Mecânica Celeste, Teoria das Oscilações, Elasticidade, Dinâmica de Fluidos, etc. Nesta época iniciou-se também a descoberta das relações das equações diferenciais com as funções de variável complexa, séries de potências e trigonométricas e funções especiais (conhecidas posteriormente como de Bessel, etc.). O grau que o conhecimento matemático atingiu nesta primeira fase ficou registrado na obra de Euler "Institutiones Calculi Integralis" em quatro volumes, o último deles publicado em 1794.

No século XIX os fundamentos da Análise Matemática experimentaram uma revisão e reformulação gerais visando maior rigor e exatidão. Assim, os conceitos de limite, derivada, convergência de séries numéricas e séries de funções e outros processos infinitos foram definidos em termos aritméticos. A integral, que no século anterior era concebida como primitiva, foi definida como limite de uma sequência de somas. Este movimento de fundamentação não deixou de atingir as equações diferenciais. Enquanto no século anterior procurava-se uma solução geral para uma dada equação diferencial, passou-se a considerar como questão prévia em cada problema a existência e unicidade de soluções satisfazendo dados iniciais. Este é o problema de Cauchy, estudado em sua generalidade na parte A deste livro. Tomava-se então uma classe ampla de equações diferenciais, como as lineares, por exemplo, para as quais a existência e unicidade das soluções estava aceita e procuravam-se propriedades gerais destas soluções a partir de características das funções que definiam a equação diferencial. Por outro lado, o método de separação de variáveis aplicado a certas equações diferenciais parciais conduziu a equações ordinárias que não admitem soluções em termos de funções elementares conhecidas, como é o caso das equações de Sturm-Liouville e das equações de Fuchs (lineares com coeficientes analíticos complexos com singularidades isoladas regulares). As primeiras fornecem um exemplo característico de um problema linear de contorno, enquanto que as equações Fuchsianas sistematizam vários tipos de equações especiais surgidas originalmente no século XVIII em trabalhos de Euler e Bernoulli e estudadas também por Gauss e Riemann. Incluem equações de relevância da Física-Matemática, como as de Bessel, de Legendre e de Gauss (ou hipergeométrica). A parte B deste livro aborda o estudo das equações diferenciais lineares nos moldes descritos acima.

Um marco de referência fundamental na evolução das equações diferenciais é o trabalho de Poincaré "Mémoire sur les courbes définies par une équation differentielle" (1881) no qual são lançadas as bases da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Esta teoria visa a descrição da configuração global das soluções e o efeito de pequenas perturbações das condições iniciais (estabilidade). O estudo da estabilidade de um sistema, de grande importância na tecnologia contemporânea, teve sua origem em questões de Mecânica Celeste estudadas inicialmente por Newton, Lagrange e Laplace. Pergunta-se se uma pequena perturbação na posição e velocidade de um corpo celeste o coloca em uma órbita que se afasta ou converge para a órbita original. O problema geral da estabilidade foi simultaneamente estudado por Liapounov, que juntamente com Poincaré, é considerado fundador da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. O conceito de estabilidade de soluções é estudado no capítulo 8 deste livro.

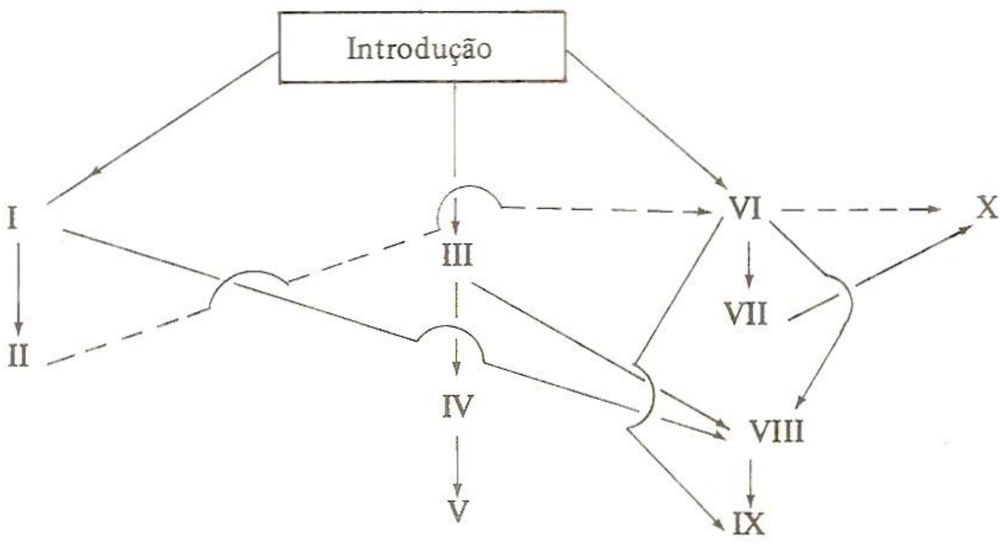
Outro aspecto da Teoria Qualitativa, também estudado por Poincaré, visa descrever o comportamento assintótico das soluções e a estrutura de seus conjuntos limites. O comportamento assintótico de uma solução se obtem quando se faz a variável independente (tempo) tender para infinito. O conjunto limite pode ser um ponto de equilíbrio, uma solução periódica ou outro conjunto mais complicado. A Teoria de Poincaré-Bendixson, estudada nos capítulos 7 e 10, responde a este tipo de questões no plano e em superfícies bidimensionais, respectivamente.

O estudo de oscilações não lineares de fenômenos elétricos realizado no primeiro quarto do presente século conduziu a equações especiais de segunda ordem tais como as de van der Pol e Lienard. No capítulo 7 estudamos suas propriedades mais elementares à luz do teorema de Poincaré-Bendixson.

A introdução do conceito de estabilidade estrutural por Andronov e Pontrjagin (1937) e os trabalhos de Peixoto (1958-62) relativos à caracterização, abertura e densidade das equações diferenciais estruturalmente estáveis em superfícies constituem uma marco fundamental para o desenvolvimento contemporâneo das equações diferenciais. Trata-se de determinar as condições necessárias e suficientes para que o retrato de fase de uma equação diferencial não experimente mudanças qualitativas bruscas por pequenas perturbações das funções que as definem. Na Física encontramos motivação para o estudo destes conceitos. No capítulo 9 deste livro tratamos com detalhe o caso local da estabilidade estrutural (Teorema de Hartman).

No desenvolvimento presente do assunto distinguem-se os métodos de Topologia Diferencial nas contribuições de Smale e Thom, que têm grande influência na pesquisa atual.

Quadro de interdependência entre os capítulos



BIBLIOGRAFIA

Textos gerais

GREENBERG, M. – Lectures on Algebraic Topology, W. A. Benjamin, 1967.

HOFFMAN, K; KUNZE, R. – Linear Algebra 2^{nd} ed. Prentice Hall, 1971.

KLINE, M. – Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, 1972.

LIMA, E. L. – Espaços Métricos. Coleção Projeto Euclides, CNPq. 1977.

LOOMIS, L; STERNBERG, S. – Advanced Calculus. Addison Wesley, 1968.

Textos introdutórios

BIRKHOFF, G; ROTA, G. C. – Ordinary Differencial Equations Gin and Company, 1962.

KAPLAN, W. – Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley, 1958.

SIMMONS, G. – Ordinary Differential Equations with Applications and Historical Notes, Mc. Graw Hill, 1972.

Textos intermediários

ARNOLD, V. – Equations Différentielles Ordinaires, Éditions MIR, 1974.

GUZMAN, M. – Ecuaciones Diferenciales Ordinárias; Teoria de estabilidad y control, Editorial Alhambra, 1975.

PONTRYAGIN, L. – Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley, 1962.

RAINVILLE, E. – Intermediate Differential Equations. 2^{nd} ed. Mac-Millan, 1964.

SMALE, S; HIRSCH, M. – Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press, 1974.

Textos avançados e tratados

CODDINGTON, E; LEVINSON, N. – Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, 1955.

HALE, J. – Ordinary Differential Equations, J. Wiley, 1969.

HARTMAN, P. – Ordinary Differential Equations, J. Wiley, 1964.

LEFSCHETZ, S. – Differential Equations: Geometric Theory. Interscience, 1959.

PALIS, J; MELO, W. – Introdução aos Sistemas Dinâmicos. Projeto Euclides, CNPq, 1978.

PEIXOTO, M. – Teoria Geométrica das Equações diferenciais. IMPA, Colóquio Brasileiro de Matemática, 1969.

PICARD, E. – Traité D'analyse, Tome III, Gauthier – Villars, 1904.

Aplicações

ANDRONOV, A. et al. – Theory of Oscillators, Addison-Wesley, 1966.

BRAUN, M. – Differential Equations and Their Applications, Springer-Verlag, 1975.

jorge sotomayor

Bacharelou-se em Matemática na Universidade de San Marcos, em Lima, Peru, e doutorou-se no IMPA.

Foi Professor do Instituto de Matemática da Universidade de Engenharia (Lima) e na Universidade da California (Berkeley). Foi Professor Visitante da Universidade de Dijon (França), Universidad de Los Andes (Venezuela), Universidad de Chile e no Institut de Hautes Études Scientifiques (França). É pesquisador do IMPA desde 1972.

É autor do Livro "Singularidades de Aplicações Diferenciáveis" e de vários trabalhos de pesquisa sobre a Teoria de Bifurcações das Equações Diferenciais, onde seu trabalho é considerado pioneiro no enfoque moderno. Trabalha na inter-relação entre as Teorias de Sistemas Dinâmicos e de Singularidades de Aplicações Diferenciáveis.

É divulgador entusiasta da Teoria das Catástrofes de R. Thom, sobre a qual tem organizado seminários e proferido numerosas palestras.

Admirador do jogo de xadrês, que cultiva com algum empenho, especialmente no calçadão do Leblon.

lições de equações diferenciais ordinárias

CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

impa Instituto de Matemática Pura e Aplicada