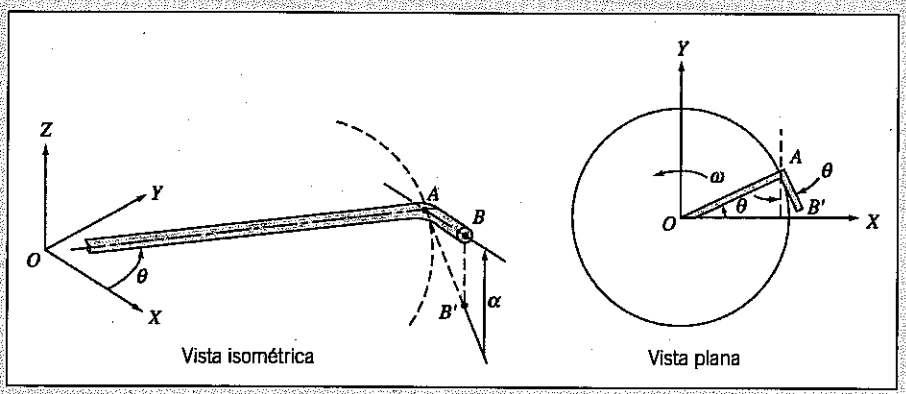
logo o segundo termo no lado esquerdo da equação é igual a zero. O único torque externo atuando sobre o VC é o atrito no pivô. Ele opõe-se ao movimento, de modo que

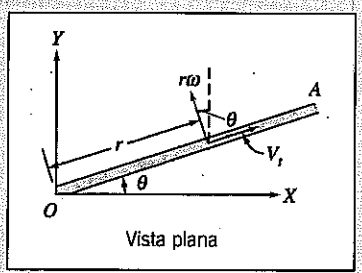
$$\vec{T}_{\text{eixo}} = -T_f\hat{K} \tag{2}$$

A nossa próxima tarefa é determinar os dois termos de quantidade de movimento angular do lado direito da Eq. 1. Considere o termo transiente: ele é a taxa de variação da quantidade de movimento angular no interior do volume de controle. Está claro que, embora a posição $\vec{r}$ e a velocidade $\vec{V}$ das partículas de fluido sejam funções do tempo nas coordenadas XYZ, porque o regador gira com velocidade constante, a quantidade de movimento do volume de controle é constante nas coordenadas XYZ e, portanto, esse termo é zero; contudo, como exercício de manipulação de quantidades vetoriais, vamos deduzir este resultado. Para determinar a integral do volume de controle, necessitamos antes desenvolver expressões para o vetor posição instantânea, $\vec{r}$, e para o vetor velocidade instantânea, $\vec{V}$ (medido em relação ao sistema de coordenadas fixas XYZ) para cada elemento do fluido no volume de controle.



OA situa-se no plano XY; AB é inclinada de um ângulo α em relação ao plano XY; o ponto B' é a projeção do ponto B sobre o plano XY.

Admitimos que o comprimento, L, da extremidade AB é pequeno comparado com o comprimento, R, do braço horizontal OA. Assim, podemos desprezar a quantidade de movimento angular do fluido nas extremidades comparada com a quantidade de movimento angular nos braços horizontais.



Considere agora o escoamento no tubo horizontal OA de comprimento R. Denote a posição radial a partir de O por r. Em qualquer ponto no tubo, a velocidade do fluido em relação às coordenadas fixas XYZ é a soma da velocidade relativa ao tubo $\vec{V}_t$ com a velocidade tangencial $\vec{\omega} \times \vec{r}$. Deste modo,

$$\vec{V} = \hat{I}(V_t \cos\theta - r\omega \operatorname{sen}\theta) + \hat{J}(V_t \operatorname{sen}\theta + r\omega\cos\theta)$$

(Note que θ é uma função do tempo.) O vetor posição é

$$\vec{r} = \hat{I}r\cos\theta + \hat{J}r\operatorname{sen}\theta$$

e

$$\vec{r} \times \vec{V} = \hat{K}(r^2\omega\cos^2\theta + r^2\omega\operatorname{sen}^2\theta) = \hat{K}r^2\omega$$

Então,

$$\int_{\forall_{OA}} \vec{r} \times \vec{V}\rho\, d\forall = \int_O^R \hat{K}r^2\omega\rho A\, dr = \hat{K}\frac{R^3\omega}{3}\rho A$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall_{OA}} \vec{r} \times \vec{V}\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{K}\frac{R^3\omega}{3}\rho A\right] = 0 \tag{3}$$

onde A é a área da seção transversal do tubo horizontal. Resultados idênticos são obtidos para o outro tubo horizontal no volume de controle. Dessa forma, confirmamos a nossa assertiva de que a quantidade de movimento angular no interior do volume de controle não varia com o tempo.

Precisamos agora determinar o segundo termo no lado direito da Eq. (1), a taxa líquida de fluxo de quantidade de movimento através da superfície de controle. Existem três superfícies através das quais detectamos fluxo de massa e, portanto, de quantidade de movimento: a seção transversal do tubo de suprimento de água (para o qual $\vec{r} \times \vec{V} = 0$ porque $\vec{r} = 0$) e as seções dos dois bocais. Considere o bocal no final do braço OAB. Para $L << R$, temos

$$\vec{r}_{\text{jato}} = \vec{r}_B = \vec{r}\Big|_{r=R} = (\hat{I}r\cos\theta + \hat{J}r\,\text{sen}\,\theta)\Big|_{r=R} = \hat{I}R\cos\theta + \hat{J}R\,\text{sen}\,\theta$$

e para a velocidade instantânea do jato $\vec{V}_j$, temos

$$\vec{V}_j = \vec{V}_{\text{rel}} + \vec{V}_{\text{extr}} = \hat{I}V_{\text{rel}}\cos\alpha\,\text{sen}\,\theta - \hat{J}V_{\text{rel}}\cos\alpha\cos\theta + \hat{K}V_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha - \hat{I}\omega R\,\text{sen}\,\theta + \hat{J}\omega R\cos\theta$$

$$\vec{V}_j = \hat{I}(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\,\text{sen}\,\theta - \hat{J}(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\cos\theta + \hat{K}V_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\vec{r}_B \times \vec{V}_j = \hat{I}RV_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta - \hat{J}RV_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha\cos\theta - \hat{K}R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)(\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta)$$

$$\vec{r}_B \times \vec{V}_j = \hat{I}RV_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta - \hat{J}RV_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha\cos\theta - \hat{K}R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)$$

A integral do fluxo avaliada para o escoamento atravessando a superfície de controle na posição B é, então,

$$\int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}_j\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \left[\hat{I}RV_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta - \hat{J}RV_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha\cos\theta - \hat{K}R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\right]\rho\frac{Q}{2}$$

Os vetores raio e velocidade para o escoamento no braço esquerdo devem ser descritos em termos dos mesmos vetores unitários usados para o braço direito. No braço esquerdo, as componentes $\hat{I}$ e $\hat{J}$ do produto vetorial são de sinais opostos, pois $\text{sen}\,(\theta + \pi) = -\text{sen}(\theta)$ e $\cos\,(\theta + \pi) = -\cos\,(\theta)$. Assim, para todo o VC,

$$\int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}_j\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = -\hat{K}R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\rho Q \tag{4}$$

Substituindo os termos (2), (3) e (4) na Eq. 1, obtemos

$$-T_f\hat{K} = -\hat{K}R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\rho Q$$

ou

$$T_f = R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\rho Q$$

Esta expressão indica que, quando o regador gira com velocidade constante, o torque de atrito no pivô balanceia o torque gerado pela quantidade de movimento angular dos dois jatos.

Dos dados fornecidos,

$$\omega R = 30\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 150\text{ mm} \times 2\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60\text{ s}} \times \frac{\text{m}}{1000\text{ mm}} = 0{,}471\text{ m/s}$$

Substituindo, resulta em

$$T_f = 150\text{ mm} \times \left(4{,}97\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \cos 30^\circ - 0{,}471\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 7{,}5\,\frac{\text{L}}{\text{min}}$$
$$\times \frac{\text{m}^3}{1000\text{ L}} \times \frac{\text{min}}{60\text{ s}} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^3}{\text{kg}\cdot\text{m}} \times \frac{\text{m}}{1000\text{ mm}}$$

$$T_f = 0{,}0718\text{ N}\cdot\text{m} \longleftarrow T_f$$

Este problema ilustra o uso do princípio da quantidade de movimento angular para um volume de controle inercial. Note que, neste exemplo, o vetor posição $\vec{r}$ e o vetor velocidade $\vec{V}$ da partícula fluida são dependentes do tempo (através de θ) nas coordenadas XYZ. Este problema é resolvido novamente no Problema-Exemplo 4.15 do CD, usando um sistema de coordenadas não-inercial (rotativo) xyz.

• Equação para Volume de Controle em Rotação

Em problemas envolvendo componentes em rotação, tais como o regador giratório do Problema-Exemplo 4.14, é conveniente, em geral, expressar todas as velocidades do fluido em relação ao componente rotativo. O volume de controle mais conveniente é um não-inercial que gira juntamente com o componente. Nesta seção, desenvolvemos uma formulação do princípio da quantidade de movimento angular (ou do momento da quantidade de movimento) para um volume de controle não-inercial girando em torno de um eixo fixo no espaço.

Os sistemas de referência inercial e não-inercial foram relatados na Seção 4-6. A Fig. 4.5 mostrou a notação utilizada. Para um sistema em um referencial inercial,

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.3a}$$

A quantidade de movimento angular de um sistema em movimento geral deve ser especificada em relação ao sistema de referência inercial. Utilizando a notação da Fig. 4.5,

$$\vec{H}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} (\vec{R} + \vec{r}) \times \vec{V}_{XYZ}\, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} (\vec{R} + \vec{r}) \times \vec{V}_{XYZ}\, \rho\, d\forall$$

Com $\vec{R} = 0$, o referencial xyz está restrito à rotação dentro de XYZ, e a equação torna-se

$$\vec{H}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V}_{XYZ}\, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V}_{XYZ}\, \rho\, d\forall$$

de forma que

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \frac{d}{dt}\int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V}_{XYZ}\, dm$$

Como a massa de um sistema é constante,

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{V}_{XYZ})\, dm$$

ou

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V}_{XYZ} + \vec{r} \times \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}\right) dm \tag{4.47}$$

A partir da análise da Seção 4-6,

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{rf} + \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{4.36}$$

Com xyz restrito à rotação pura, $\vec{V}_{rf} = 0$. O primeiro termo sob a integral no lado direito da Eq. 4.47 é, então,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Desse modo, a Eq. 4.47 reduz-se a

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}\, dm = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{a}_{XYZ}\, dm \tag{4.48}$$

Da Eq. 4.41, com $\vec{a}_{rf} = 0$ (posto que xyz não translada),

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{xyz} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

BIBLIOTECA - FACULDADE PITÁGORAS

Substituindo na Eq. 4.48, resulta

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times [\vec{a}_{xyz} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, dm$$

ou

$$\vec{T}_{\text{sistema}} - \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times [2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, dm$$

$$= \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{a}_{xyz}\, dm = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \left.\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\right)_{xyz} dm \tag{4.49}$$

Podemos escrever o último termo como

$$\int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \left.\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\right)_{xyz} dm = \frac{d}{dt}\left(\int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}\, dm\right)_{xyz} = \left.\frac{d\vec{H}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.50}$$

O torque sobre o sistema é dado por

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \vec{r} \times \vec{F}_s + \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{g}\, dm + \vec{T}_{\text{eixo}} \tag{4.3c}$$

A relação entre as formulações de sistema e de volume de controle é

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \eta\, \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \eta\, \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \tag{4.25}$$

onde

$$N_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \eta\, dm$$

Fazendo N igual a $\vec{H}_{xyz})_{\text{sistema}}$ e $\eta = \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}$, obtém-se

$$\left.\frac{d\vec{H}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}\, \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}\, \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \tag{4.51}$$

Combinando as Eqs. 4.49, 4.50, 4.51 e 4.3c, resulta

$$\vec{r} \times \vec{F}_s + \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{g}\, dm + \vec{T}_{\text{eixo}}$$
$$- \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times [2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, dm$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}\, \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}\, \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A}$$

Como o sistema e o volume de controle coincidem em t_0,

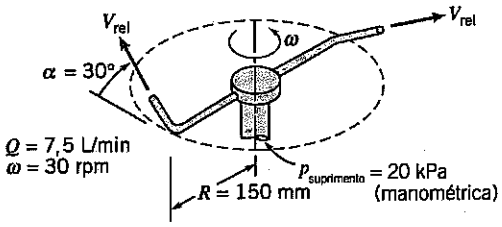
$$\vec{r} \times \vec{F}_s + \int_{\text{VC}} \vec{r} \times \vec{g}\, \rho\, d\forall + \vec{T}_{\text{eixo}}$$
$$- \int_{\text{VC}} \vec{r} \times [2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, \rho\, d\forall \tag{4.52}$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}\, \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}\, \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A}$$

A Eq. 4.52 é a formulação do princípio da quantidade de movimento angular para um volume de controle (não-inercial) girando em torno de um eixo fixo no espaço. Todas as velocidades do fluido na Eq. 4.52 são avaliadas em relação ao volume de controle. Comparando a Eq. 4.52 com a Eq. 4.46 (para coordenadas inerciais XYZ), verificamos que as coordenadas não-inerciais (em rotação) xyz possuem

um termo de "momento" extra no lado esquerdo que inclui três componentes. Conforme discutido em seguida à Eq. 4.44, esses componentes aparecem por causa de forças "fictícias": a força de Coriolis devido ao movimento da partícula fluida dentro do referencial *xyz*, e as forças centrípeta e tangencial devido ao movimento de rotação das coordenadas *xyz*, respectivamente. A Eq. 4.52 reduz-se à Eq. 4.46, quando o volume de controle não está em movimento (quando $\vec{\omega}$ e $\dot{\vec{\omega}}$ são zero). Mesmo tendo um termo extra para avaliar, a Eq. 4.52 é algumas vezes mais simples de usar do que a Eq. 4.44, porque um problema que é transiente em coordenadas *XYZ* torna-se permanente em coordenadas *xyz*, conforme veremos no Problema-Exemplo 4.15.

EXEMPLO 4.15 Regador Giratório de Gramado: Análise Usando Volume de Controle Rotativo

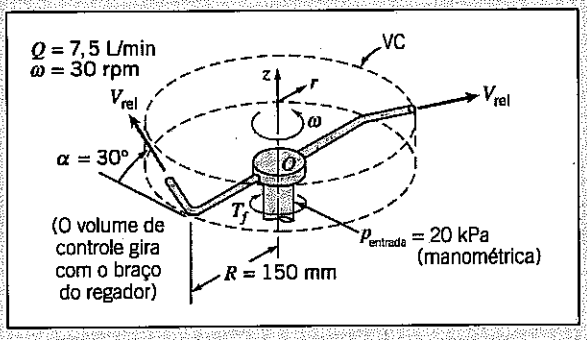
Um pequeno regador giratório de gramado é mostrado no esquema. Para uma pressão manométrica de entrada de 20 kPa, a vazão total em volume de água é de 7,5 litros por minuto, e o regador gira a 30 rpm. O diâmetro de cada jato é 4 mm. Calcule a velocidade do jato relativa a cada bocal do regador. Avalie o torque devido ao atrito no pivô do regador.



PROBLEMA-EXEMPLO 4.15

DADOS: Um pequeno regador giratório de gramado, conforme mostrado.

DETERMINAR: (a) A velocidade do jato em relação a cada bocal.
(b) O torque devido ao atrito no pivô.



SOLUÇÃO:
Aplique as equações da continuidade e da quantidade de movimento angular, utilizando o volume de controle rotativo que compreende os braços do regador.

Equações básicas:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, d\forall}_{=0(1)} + \int_{SC}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{r}\times\vec{F}_S + \int_{VC}\vec{r}\times\vec{g}\,\rho\, d\forall + \vec{T}_{eixo} - \int_{VC}\vec{r}\times[2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \underbrace{\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}}_{=0(3)}]\,\rho\, d\forall$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\,\rho\, d\forall}_{=0(1)} + \int_{VC}\vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\,\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \qquad (4.52)$$

Considerações:
(1) Escoamento permanente em relação ao VC rotativo.
(2) Escoamento uniforme em cada seção.
(3) $\omega =$ constante.

Da continuidade,

$$V_{rel} = \frac{Q}{2A_{jato}} = \frac{Q}{2}\frac{4}{\pi D_{jato}^2}$$

$$= \frac{1}{2}\times 7,5\,\frac{L}{min}\times\frac{4}{\pi}\frac{1}{(4)^2\,mm^2}\times\frac{m^3}{1000\,L}\times 10^6\,\frac{mm^2}{m^2}\times\frac{min}{60\,s}$$

$$V_{rel} = 4,97\ m/s \longleftarrow V_{rel}$$

Considere, separadamente, os termos na equação da quantidade de movimento angular. Como no Problema-Exemplo 4.14, o único torque externo atuando sobre o VC é aquele devido ao atrito no pivô. Ele opõe-se ao movimento, logo

$$\vec{T}_{\text{eixo}} = -T_f\hat{k} \tag{1}$$

A segunda integral à esquerda na Eq. 4.52 é avaliada para escoamento dentro do VC. Sejam V_{VC} e A_{VC} a velocidade e a área no interior dos tubos do regador, respectivamente. Então, para *um lado*, o primeiro termo (um efeito Coriolis) é

$$\begin{aligned}\int_{VC} \vec{r} \times [2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz}]\rho\, d\forall &= \int_0^R r\hat{e}_r \times [2\omega\hat{k} \times V_{VC}\hat{e}_r]\rho A_{VC}\, dr \\ &= \int_0^R r\hat{e}_r \times 2\omega V_{VC}\hat{e}_\theta \rho A_{VC}\, dr \\ &= \int_0^R 2\omega V_{VC}\rho A_{VC} r\, dr\, \hat{k} = \omega R^2 \rho V_{VC} A_{VC}\hat{k} \qquad \{\text{um lado}\}\end{aligned}$$

(O escoamento na parte curva do tubo não tem componente r da velocidade, de forma que não contribui para a integral.)

Da continuidade, $Q = 2\,V_{VC}\,A_{VC}$, de modo que, para *os dois lados*, a integral torna-se

$$\int_{VC} \vec{r} \times [2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz}]\rho\, d\forall = \omega R^2 \rho Q\hat{k} \tag{2}$$

O segundo termo na integral (um momento gerado pela aceleração centrípeta) é avaliado como

$$\begin{aligned}\int_{VC} \vec{r} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]\rho d\forall &= \int_{VC} r\hat{e}_r \times [\omega\hat{k} \times (\omega\hat{k} \times r\hat{e}_r)]\rho d\forall \\ &= \int_{VC} r\hat{e}_r \times [\omega\hat{k} \times \omega r\hat{e}_\theta]\rho d\forall = \int_{VC} r\hat{e}_r \times \omega^2 r(-\hat{e}_r)]\rho d\forall = 0\end{aligned}$$

e, portanto, não contribui para o torque. (A força gerada pela aceleração centrípeta é radial e, portanto, não gera momento.)

A integral no lado direito da Eq. 4.52 é avaliada para escoamento cruzando a superfície de controle. Para o braço direito do regador,

$$\begin{aligned}\int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} &= R\hat{e}_r \times V_{rel}[\cos\alpha(-\hat{e}_\theta) + \operatorname{sen}\alpha\hat{k}]\{+\rho V_{rel}A_{jato}\} \\ &= RV_{rel}[\cos\alpha(-\hat{k}) + \operatorname{sen}\alpha(-\hat{e}_\theta)]\rho\frac{Q}{2}\end{aligned}$$

Os vetores velocidade e raio para o escoamento no braço esquerdo devem ser descritos em termos dos mesmos vetores unitários usados para o braço direito. No braço esquerdo do regador, a componente θ tem a mesma magnitude, porém sinal oposto, portanto se anulam. Para o VC completo,

$$\int_{VC} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}\,\rho\,\vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} = -RV_{rel}\cos\alpha\,\rho Q\,\hat{k} \tag{3}$$

Combinando os termos (1), (2) e (3), resulta

$$-T_f\hat{k} - \omega R^2\rho Q\hat{k} = -RV_{rel}\cos\alpha\,\rho Q\,\hat{k}$$

ou

$$T_f = R(V_{rel}\cos\alpha - \omega R)\rho Q$$

A partir dos dados fornecidos,

$$\omega R = 30\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 150\,\text{mm} \times 2\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60\,\text{s}} \times \frac{\text{m}}{1000\,\text{mm}} = 0{,}471\,\text{m/s}$$

Substituindo, fornece

$$T_f = 150\ \text{mm}\left(4{,}97\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \cos 30° - 0{,}471\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) 999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 7{,}5\ \frac{\text{L}}{\text{min}} \times \frac{\text{m}^3}{1000\ \text{L}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}} \times \frac{\text{m}}{1000\ \text{mm}}$$

$$T_f = 0{,}0718\ \text{N}\cdot\text{m} \longleftarrow T_f$$

Este problema ilustra o uso do princípio da quantidade de movimento angular para um volume de controle não-inercial (girando). Note que nesta abordagem, diferentemente do volume de controle inercial do Problema-Exemplo 4.14, o vetor posição $\vec{r}$ e o vetor velocidade $\vec{V}$ da partícula fluida *não* são dependentes do tempo. Como seria esperado, o resultado concorda usando ambos os volumes de controle, inercial e não-inercial.

4-8 A PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

A primeira lei da termodinâmica é um enunciado da conservação da energia. Lembre-se de que formulação de sistema para a primeira lei foi estabelecida na forma

$$\dot{Q} - \dot{W} = \left.\frac{dE}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.4a}$$

onde a energia total do sistema é dada por

$$E_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} e\, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} e\,\rho\, d\forall \tag{4.4b}$$

e

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Na Eq. 4.4a, a taxa de transferência de calor, $\dot{Q}$, é positiva quando calor é adicionado *ao* sistema pelo meio que o envolve; a taxa de transferência de trabalho, $\dot{W}$, é positiva quando trabalho é realizado pelo sistema sobre o meio.

Para deduzir a formulação de volume de controle da primeira lei da termodinâmica, fazemos

$$N = E \qquad \text{e} \qquad \eta = e$$

na Eq. 4.10 e obtemos

$$\left.\frac{dE}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} e\,\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} e\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.53}$$

Como o sistema e o volume de controle coincidem no instante t_0,

$$\left[\dot{Q} - \dot{W}\right]_{\text{sistema}} = \left[\dot{Q} - \dot{W}\right]_{\text{volume de controle}}$$

Ante o exposto, as Eqs. 4.4a e 4.53 fornecem a formulação de volume de controle da primeira lei da termodinâmica,

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} e\,\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} e\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.54}$$

onde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Note que, para escoamento permanente, o primeiro termo no lado direito da Eq. 4.54 é zero.

É a Eq. 4.54 a forma da primeira lei usada na termodinâmica? Mesmo para escoamento permanente, a Eq. 4.54 não é bem a mesma forma usada na aplicação da primeira lei a problemas de volume de controle. Para obter uma formulação adequada e conveniente à solução de problemas, examinemos mais detidamente o termo de taxa de trabalho, $\dot{W}$.

Taxa de Trabalho Realizado por um Volume de Controle

O termo $\dot{W}$ na Eq. 4.54 tem um valor numérico positivo quando o trabalho é realizado pelo volume de controle sobre o meio que o envolve. A taxa de trabalho realizado *sobre* o volume de controle é de sinal oposto ao trabalho feito *pelo* volume de controle.

A taxa de trabalho realizado pelo volume de controle é convenientemente subdividida em quatro classificações,

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_{\text{normal}} + \dot{W}_{\text{cisalhamento}} + \dot{W}_{\text{outros}}$$

Vamos considerá-las separadamente:

1. Trabalho de Eixo

Designaremos o trabalho de eixo por W_s e, portanto, a taxa de trabalho de eixo transferido para fora através da superfície de controle é designada por $\dot{W}_s$. Exemplos de trabalho de eixo são o trabalho produzido por uma turbina a vapor (trabalho de eixo positivo) de uma central termelétrica, e o trabalho requerido para acionar um compressor de um refrigerador (trabalho de eixo negativo).

2. Trabalho Realizado por Tensões Normais na Superfície de Controle

Lembre-se de que o trabalho requer que uma força aja através de uma distância. Assim, quando uma força, $\vec{F}$, age através de um deslocamento infinitesimal $d\vec{s}$, o trabalho realizado é

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Para obter a taxa à qual trabalho é realizado pela ação da força, divida pelo incremento de tempo Δt e tome o limite quando $\Delta t \to 0$. Assim procedendo, a taxa de trabalho realizado pela ação da força, $\vec{F}$, é dada por

$$\dot{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{\Delta t} \qquad \text{ou} \qquad \dot{W} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

Podemos utilizar isto para calcular a taxa de trabalho realizado pelas tensões normais e cisalhantes. Considere o segmento de superfície de controle mostrado na Fig. 4.6. Para uma área elementar $d\vec{A}$, podemos escrever uma expressão para a força da tensão normal $d\vec{F}_{\text{normal}}$: ela será dada pela tensão normal σ_{nn} multiplicada pelo vetor do elemento de área $d\vec{A}$ (normal à superfície de controle).

Então, a taxa de trabalho realizado sobre um elemento de área é

$$d\vec{F}_{\text{normal}} \cdot \vec{V} = \sigma_{nn}\, d\vec{A} \cdot \vec{V}$$

Uma vez que o trabalho para fora através da superfície de controle é o negativo do trabalho feito sobre o volume de controle, a taxa total de trabalho para fora do volume de controle devido às tensões normais é

$$\dot{W}_{\text{normal}} = -\int_{SC} \sigma_{nn}\, d\vec{A} \cdot \vec{V} = -\int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

3. Trabalho Realizado por Tensões de Cisalhamento na Superfície de Controle

Da mesma forma que trabalho é realizado por tensões normais nas fronteiras do volume de controle, também pode ser feito por tensões de cisalhamento.

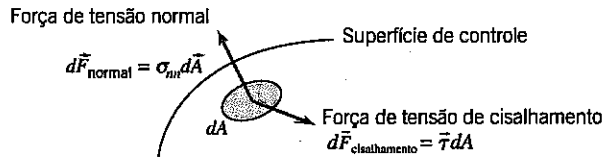


Fig. 4.6 Forças de tensões normais e de cisalhamento.

Conforme mostrado na Fig. 4.6, a força de cisalhamento atuando sobre um elemento de área da superfície de controle é dada por

$$d\vec{F}_{\text{cisalhamento}} = \vec{\tau}\, dA$$

onde o vetor tensão de cisalhamento, $\vec{\tau}$, é a tensão de cisalhamento atuando em alguma direção no plano de dA.

A taxa de trabalho feito sobre toda a superfície de controle pelas tensões de cisalhamento é dada por

$$\int_{SC} \vec{\tau}\, dA \cdot \vec{V} = \int_{SC} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA$$

Uma vez que o trabalho para fora através das fronteiras do volume de controle é o negativo do trabalho feito sobre o volume de controle, a taxa total de trabalho para fora do volume de controle devido às tensões de cisalhamento é dada por

$$\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = -\int_{SC} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA$$

Esta integral é descrita melhor em três termos

$$\begin{aligned}\dot{W}_{\text{cisalhamento}} &= -\int_{SC} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA \\ &= -\int_{A\,(\text{eixos})} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA - \int_{A\,(\text{superfície de sólido})} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA - \int_{A\,(\text{aberturas})} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA\end{aligned}$$

Nós já consideramos o primeiro termo, visto que incluímos $\dot{W}_s$ como uma das quatro classificações da taxa de trabalho. Em superfícies sólidas, $\vec{V} = 0$, de modo que o segundo termo é zero (para um volume de controle fixo). Então,

$$\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = -\int_{A\,(\text{aberturas})} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA$$

Este último termo pode ser feito igual a zero pela escolha apropriada das superfícies de controle. Se escolhermos uma superfície de controle que corte cada passagem perpendicularmente ao escoamento, então $d\vec{A}$ será paralelo a $\vec{V}$. Como $\vec{\tau}$ está no plano de dA, segue que $\vec{\tau}$ será perpendicular a $\vec{V}$. Assim, para uma superfície de controle perpendicular a $\vec{V}$,

$$\vec{\tau} \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{W}_{\text{cisalhamento}} = 0$$

4. Outros Trabalhos

Energia elétrica poderia ser adicionada ao volume de controle. Energia eletromagnética também poderia ser absorvida, como em radares ou feixes de laser. Na maioria dos problemas, tais contribuições estão ausentes, mas devemos considerá-las em nossa formulação geral.

Com a avaliação de todos os termos em $\dot{W}$, obtemos

$$\dot{W} = \dot{W}_s - \int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A} + \dot{W}_{\text{cisalhamento}} + \dot{W}_{\text{outros}} \tag{4.55}$$

Equação do Volume de Controle

Substituindo a expressão para $\dot{W}$ da Eq. 4.55 na Eq. 4.54, temos

$$\dot{Q} - \dot{W}_s + \int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A} - \dot{W}_{\text{cisalhamento}} - \dot{W}_{\text{outros}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho \, d\forall + \int_{SC} e \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Rearranjando esta equação, resulta em

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{cisalhamento}} - \dot{W}_{\text{outros}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho \, d\forall + \int_{SC} e \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Como $\rho = 1/v$, onde v é o *volume específico*, segue que

$$\int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{SC} \sigma_{nn} v \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Então,

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{cisalhamento}} - \dot{W}_{\text{outros}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho \, d\forall + \int_{SC} (e - \sigma_{nn} v) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Efeitos viscosos ou de compressibilidade podem fazer a tensão normal, σ_{nn}, diferente do negativo da pressão termodinâmica, $-p$. Contudo, para a maioria dos escoamentos de interesse comum na engenharia, $\sigma_{nn} \cong -p$. Deste modo,

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{cisalhamento}} - \dot{W}_{\text{outros}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho \, d\forall + \int_{SC} (e + pv) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Finalmente, substituindo $e = u + V^2/2 + gz$ no último termo à direita, obtemos a forma familiar da primeira lei para um volume de controle,

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{cisalhamento}} - \dot{W}_{\text{outros}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho \, d\forall + \int_{SC} \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.56}$$

Cada termo de trabalho na Eq. 4.56 representa a taxa de trabalho realizado pelo volume de controle sobre o meio. Note que na termodinâmica, por conveniência, a combinação $u + pv$ (a energia interna do fluido mais o que é comumente chamado de "trabalho do fluxo") é substituída pela entalpia, $h \equiv u + pv$ (esta é uma das razões pelas quais o termo h foi criado).

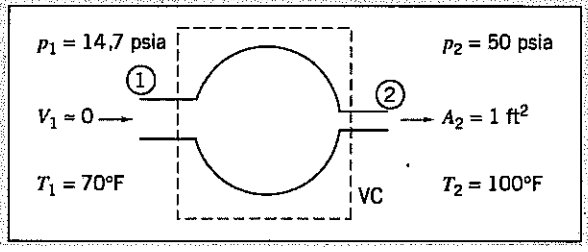
EXEMPLO 4.16 Compressor: Análise de Primeira Lei

Ar a 14,7 psia, 70°F, entra em um compressor com velocidade desprezível e é descarregado a 50 psia, 100°F, através de um tubo com área transversal de 1 ft². A vazão em massa é 20 lbm/s. A potência fornecida ao compressor é 600 hp. Determine a taxa de transferência de calor.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.16

DADOS: Ar entra em um compressor em ① e sai em ② com as condições mostradas. A razão em massa de ar é 20 lbm/s e a potência fornecida ao compressor é 600 hp.

DETERMINAR: A taxa de transferência de calor.



SOLUÇÃO:

Equações básicas:

$$\cancelto{0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, d\forall} + \int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \cancelto{0(4)}{\dot{W}_{cisalhamento}} = \cancelto{0(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho\, d\forall} + \int_{SC}\left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Considerações:
(1) Escoamento permanente.
(2) Propriedades uniformes nas seções de entrada e saída.
(3) O ar é tratado como um gás ideal, $p = \rho RT$.
(4) As áreas do VC em ① e ② são perpendiculares à velocidade, assim, $\dot{W}_{cisalhamento} = 0$.
(5) $z_1 = z_2$.
(6) Energia cinética desprezível na entrada.

Com estas considerações, a primeira lei torna-se

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \int_{VC}\left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \int_{SC}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

ou

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \int_{SC}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Para propriedades uniformes, consideração (2), podemos escrever

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \left(h_1 + \cancelto{\approx 0(6)}{\frac{V_1^2}{2}} + gz_1\right)(-\rho_1 V_1 A_1) + \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right)(\rho_2 V_2 A_2)$$

Da conservação de massa para escoamento permanente, vem

$$\int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

Portanto, $-(\rho V_1 A_1) + (\rho V_2 A_2) = 0$, ou $\rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2 = \dot{m}$. Então, podemos escrever

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \dot{m}\left[(h_2 - h_1) + \frac{V_2^2}{2} + g\cancelto{0(5)}{(z_2 - z_1)}\right]$$

Admita que o ar comporta-se como um gás ideal, com calor específico, c_p, constante. Então, $h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1)$, e

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \dot{m}\left[c_p(T_2 - T_1) + \frac{V_2^2}{2}\right]$$

Da continuidade, $V_2 = \dot{m}/\rho_2 A_2$. Como $p_2 = \rho_2 RT_2$,

$$V_2 = \frac{\dot{m}}{A_2}\frac{RT_2}{p_2} = 20\ \frac{\text{lbm}}{\text{s}} \times \frac{1}{1\ \text{ft}^2} \times 53{,}3\ \frac{\text{ft}\cdot\text{lbf}}{\text{lbm}\cdot{}^\circ\text{R}} \times 560^\circ\text{R} \times \frac{\text{in}^2}{50\ \text{lbf}} \times \frac{\text{ft}^2}{144\ \text{in}^2}$$

$$V_2 = 82{,}9\ \text{ft/s}$$

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \dot{m}c_p(T_2 - T_1) + \dot{m}\frac{V_2^2}{2}$$

Note que a potência é fornecida *ao* VC, logo $\dot{W}_s = -600$ hp, e

$$\dot{Q} = -\frac{600\ \text{hp}}{} \times \frac{550\ \text{ft}\cdot\text{lbf}}{\text{hp}\cdot\text{s}} \times \frac{\text{Btu}}{778\ \text{ft}\cdot\text{lbf}} + \frac{20\ \text{lbm}}{\text{s}} \times 0{,}24\ \frac{\text{Btu}}{\text{lbm}\cdot{}^\circ\text{R}} \times 30^\circ\text{R}$$

$$+\frac{20\ \text{lbm}}{\text{s}} \times \frac{(82{,}9)^2}{2}\ \frac{\text{ft}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{slug}}{32{,}2\ \text{lbm}} \times \frac{\text{Btu}}{778\ \text{ft}\cdot\text{lbf}} \times \frac{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}{\text{slug}\cdot\text{ft}}$$

$$\dot{Q} = -277\ \text{Btu/s} \longleftarrow \{\text{rejeição de calor}\}\ \dot{Q}$$

Este problema ilustra o uso da primeira lei da termodinâmica para um volume de controle. É, também, um exemplo do cuidado que se deve ter com as conversões de unidades para massa, energia e potência.

EXEMPLO 4.17 Enchimento de um Tanque: Análise de Primeira Lei

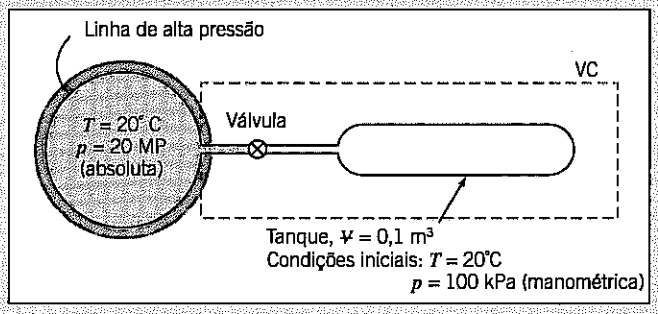
Um tanque, com volume de 0,1 m³, está conectado a uma linha de ar de alta pressão (linha de ar comprimido); tanto a linha quanto o tanque estão inicialmente a uma temperatura uniforme de 20°C. A pressão manométrica inicial no tanque é 100 kPa. A pressão absoluta na linha de ar é 2,0 MPa; a linha é suficientemente grande, de forma que a temperatura e a pressão do ar comprimido podem ser consideradas constantes. A temperatura no tanque é monitorada por um termopar de resposta rápida. Imediatamente após a abertura da válvula, a temperatura do ar no tanque sobe à taxa de 0,05°C/s. Determine a vazão em massa instantânea de ar entrando no tanque se a transferência de calor é desprezível.

PROBLEMA-EXEMPLO 4.17

DADOS: Tubulação de suprimento de ar e tanque, conforme mostrado. Em $t = 0^+$, $\partial T/\partial t = 0{,}05$°C/s.

DETERMINAR: $\dot{m}$ em $t = 0^+$.

SOLUÇÃO:
Escolha o VC mostrado e aplique a equação da energia.



Equação básica:

$$\underbrace{\dot{Q}}_{=0(1)} - \underbrace{\dot{W}_s}_{=0(2)} - \underbrace{\dot{W}_{\text{cisalhamento}}}_{=0(3)} - \underbrace{\dot{W}_{\text{outros}}}_{=0(4)} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho\, d\forall + \int_{SC} (e + pv)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$e = u + \underbrace{\frac{V^2}{2}}_{\simeq 0(5)} + \underbrace{gz}_{\simeq 0(6)}$$

Considerações: (1) $\dot{Q} = 0$ (dado).
(2) $\dot{W}_s = 0$.
(3) $\dot{W}_{\text{cisalhamento}} = 0$.
(4) $\dot{W}_{\text{outros}} = 0$.
(5) As velocidades na linha e no tanque são pequenas.
(6) A energia potencial é desprezível.
(7) Escoamento uniforme na entrada do tanque.
(8) Propriedades uniformes no tanque.
(9) Gás ideal, $p = \rho RT$, $du = c_v dT$.

Então,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u_{\text{tanque}}\,\rho\, d\forall + (u + pv)\big|_{\text{linha}}(-\rho VA) = 0$$

Isto expressa o fato de que o ganho de energia no tanque é devido à energia específica (na forma de entalpia $h = u + pv$) contida no escoamento de ar da linha para o tanque. O que nos interessa é o instante inicial, quando T é uniforme e igual 20°C, logo $u_{\text{tanque}} = u_{\text{linha}} = u$, a energia interna a T; também, $pv_{\text{linha}} = RT_{\text{linha}} = RT$, e

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\,\rho\, d\forall + (u + RT)(-\rho VA) = 0$$

Uma vez que as propriedades no tanque são uniformes, $\partial/\partial t$ pode ser substituída por d/dt, e

$$\frac{d}{dt}(uM) = (u + RT)\dot{m}$$

(onde M é a massa instantânea no tanque e $\dot{m} = \rho VA$ é a vazão mássica instantânea para dentro do tanque), ou

$$u\frac{dM}{dt} + M\frac{du}{dt} = u\dot{m} + RT\dot{m} \tag{1}$$

O termo dM/dt pode ser avaliado da continuidade:

Equação básica: $$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

$$\frac{dM}{dt} + (-\rho VA) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dM}{dt} = \dot{m}$$

Substituindo na Eq. 1, dá

$$u\dot{m} + Mc_v\frac{dT}{dt} = u\dot{m} + RT\dot{m}$$

ou

$$\dot{m} = \frac{Mc_v(dT/dt)}{RT} = \frac{\rho\forall c_v(dT/dt)}{RT} \tag{2}$$

Mas em $t = 0$, $p_{\text{tanque}} = 100$ kPa (manométrica), e

$$\rho = \rho_{\text{tanque}} = \frac{p_{\text{tanque}}}{RT} = (1{,}00 + 1{,}01)10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{293\ \text{K}} = 2{,}39\ \text{kg/m}^3$$

Substituindo na Eq. 2, obtemos

$$\dot{m} = 2{,}39\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0{,}1\ \text{m}^3 \times 717\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 0{,}05\ \frac{\text{K}}{\text{s}} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{293\ \text{K}} \times 1000\ \frac{\text{g}}{\text{kg}}$$

$$\dot{m} = 0{,}102\ \text{g/s} \longleftarrow \dot{m}$$

Este problema ilustra o uso da primeira lei da termodinâmica para um volume de controle. É, também, um exemplo do cuidado que se deve ter com as conversões de unidades para massa, energia e potência.

4-9 A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

A formulação da segunda lei da termodinâmica para um sistema pode ser escrita como

$$\left.\frac{dS}{dt}\right)_{\text{sistema}} \geq \frac{1}{T}\dot{Q} \tag{4.5a}$$

onde a entropia total do sistema é dada por

$$S_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} s\,dm = \int_{\forall(\text{sistema})} s\,\rho\,d\forall \tag{4.5b}$$

Para deduzir a formulação de volume de controle da segunda lei da termodinâmica, fazemos

$$N = S \quad \text{e} \quad \eta = s$$

na Eq. 4.10 de modo a obter

$$\left.\frac{dS}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} s\,\rho\,d\forall + \int_{\text{SC}} s\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.57}$$

O sistema e o volume de controle coincidem em t_0; logo, na Eq. 4.5a,

$$\left.\frac{1}{T}\dot{Q}\right)_{\text{sistema}} = \left.\frac{1}{T}\dot{Q}\right)_{\text{VC}} = \int_{\text{SC}} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right) dA$$

Assim é que as Eqs. 4.5a e 4.57 resultam na formulação da segunda lei da termodinâmica para volume de controle,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} s\,\rho\,d\forall + \int_{\text{SC}} s\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \geq \int_{\text{SC}} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right) dA \tag{4.58}$$

Na Eq. 4.58, o termo $(\dot{Q}/A)$ representa a taxa de transferência de calor por unidade de área para dentro do volume de controle através do elemento de área dA. Para avaliar o termo

$$\int_{\text{SC}} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right) dA$$

tanto o fluxo local de calor $(\dot{Q}/A)$, quanto a temperatura local, T, devem ser conhecidos para cada elemento de área da superfície de controle.

4-10 RESUMO

Neste capítulo, escrevemos as leis básicas para um sistema: conservação de massa (ou continuidade), segunda lei de Newton, equação da quantidade de movimento angular, primeira lei da termodinâmica e segunda lei da termodinâmica. Desenvolvemos, em seguida, uma equação (por vezes chamada de Teorema do Transporte de Reynolds) para relacionar as formulações de sistema às de volume de controle. Usando esta equação, deduzimos as formas para volumes de controle da:

- ✓ Equação da conservação de massa (comumente chamada de equação da continuidade).
- ✓ Segunda lei de Newton (ou equação da quantidade de movimento linear) para:
  - o Um volume de controle inercial.
  - o Um volume de controle com aceleração retilínea.
  - o*Um volume de controle com aceleração arbitrária.
- ✓ *Equação da quantidade de movimento angular (ou do momento da quantidade de movimento) para:
  - o Um volume de controle fixo.
  - o Um volume de controle rotativo.
- ✓ Primeira lei da termodinâmica (ou equação da energia).
- ✓ Segunda lei da termodinâmica.

*Estes tópicos referem-se a uma seção que pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

O significado físico de cada termo contido nessas equações de volume de controle foi discutido, e usamos as equações para solucionar uma variedade de problemas de escoamento. Em particular, usamos um volume de controle diferencial* para deduzir uma equação notória da mecânica dos fluidos — a equação de Bernoulli — e, enquanto fizemos isso, aprendemos sobre as restrições a seu uso para a solução de problemas.

PROBLEMAS

4.1 A fim de resfriar uma embalagem com seis latas de refrigerante tão depressa quanto possível, ela é deixada num freezer durante uma hora. Se a temperatura ambiente é de 25°C e a temperatura final da bebida gelada é de 5°C, determine a variação na sua entropia específica.

4.2 Uma massa de 3 kg cai livremente por uma distância vertical de 5 m antes de bater sobre uma mola fixada no chão. Se o coeficiente de rigidez da mola é 400 N/m, qual é a compressão máxima da mola?

4.3 Um jato comercial Boeing 777-200 pesa, totalmente carregado, 715.000 lbf. O piloto leva as duas turbinas ao empuxo máximo de decolagem de 102.000 lbf cada, antes de liberar os freios. Desprezando resistências aerodinâmicas e de rolamento, estime o comprimento de pista e o tempo mínimo necessários para atingir a velocidade de decolagem de 140 mph. Admita que o empuxo das turbinas permaneça constante durante o trajeto no solo.

4.4 Uma investigação policial de marcas de pneus mostrou que um carro, trafegando ao longo de uma rua nivelada e reta, tinha deslizado por uma distância total de 50 m até parar, após acionar os freios. O coeficiente de atrito estimado entre os pneus e o pavimento é $\mu = 0{,}6$. Qual era a velocidade mínima provável do carro quando os freios foram acionados?

4.5 Uma pequena bola de aço de raio r colocada no topo de uma esfera muito maior de raio R começa a rolar sob a influência da gravidade. As resistências de rolamento e do ar são desprezíveis. Quando a velocidade da bola aumenta, ela deixa a superfície da esfera e torna-se um projétil. Determine o local em que a bola perde o contato com a esfera.

4.6 Ar, a 20°C e pressão absoluta de 1 atm, é comprimido adiabaticamente, sem atrito, até uma pressão absoluta de 3 atm. Determine a variação de energia interna.

4.7 A taxa média de transferência de calor de uma pessoa para o ambiente é cerca de 300 Btu/h, quando a pessoa não está trabalhando ativamente. Suponha que, num auditório com volume de aproximadamente $1{,}2 \times 10^7$ ft^3, com 6000 pessoas presentes, o sistema de ventilação falhe. Qual o aumento da energia interna do ar do auditório, durante os primeiros 15 minutos após a pane? Considerando o auditório e as pessoas como um sistema, e admitindo que não haja transferência de calor para o meio ambiente, qual a variação da energia interna do sistema? Como você explica o fato de que a temperatura do ar aumenta? Estime a taxa de aumento de temperatura nessas condições.

4.8 Em um experimento com uma lata de refrigerante, ela foi deixada durante 3 horas num refrigerador a 5°C para ser resfriada de 25°C até 10°C. Em seguida, ela foi retirada do refrigerador e exposta ao ambiente a 20°C. Quanto tempo ela levou para atingir 15°C? Admita que, para ambos os processos, a transferência de calor é modelada por $\dot{Q} \approx -k(T - T_{amb})$, onde T é a temperatura da lata, T_{amb} a do ambiente e k é um coeficiente de transferência de calor.

4.9 A massa de uma lata de refrigerante, em alumínio, é 20 g. O seu diâmetro e altura são 65 e 120 mm, respectivamente. Quando cheia, a lata contém 354 mililitros de refrigerante com densidade relativa SG = 1,05. Avalie a altura do centro de gravidade da lata como uma função do nível do líquido. A que nível corresponderia a menor probabilidade da lata tombar, quando submetida a uma aceleração lateral constante? Calcule o coeficiente mínimo de atrito estático para o qual a lata cheia tombaria em vez de deslizar sobre uma superfície horizontal. Trace um gráfico do coeficiente de atrito estático mínimo, para o qual a lata tombaria em vez de deslizar em uma superfície horizontal, como uma função do nível do líquido na lata.

4.10 Um campo de velocidade é dado por $\vec{V} = az\,\hat{j} + b\,\hat{k}$, onde $a = 10$ s^{-1} e $b = 5$ m/s. Para o volume de controle triangular de 1 m × 1 m (com profundidade $w = 1$ perpendicular ao diagrama), um elemento de área ① pode ser representado por $w(-dz\,\hat{j} + dy\,\hat{k})$, e um elemento de área ② por $wdz\,\hat{j}$.

(a) Encontre uma expressão para $\vec{V} \cdot d\vec{A}_1$.

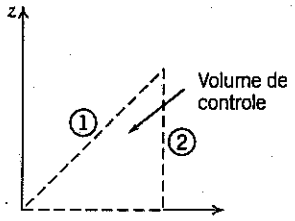
*Estes tópicos referem-se a uma seção que pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

(b) Avalie $\int_{A_1} \vec{V} \cdot d\vec{A}_1$.

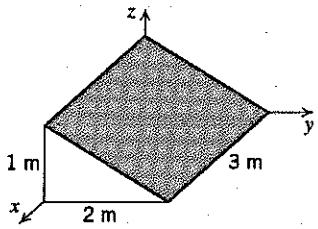
(c) Encontre uma expressão para $\vec{V} \cdot d\vec{A}_2$.

(d) Encontre uma expressão para $\vec{V}(\vec{V} \cdot d\vec{A}_2)$.

(e) Avalie $\int_{A_2} \vec{V}(\vec{V} \cdot d\vec{A}_2)$.



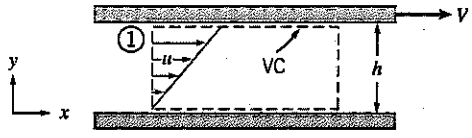
P4.10



P4.11

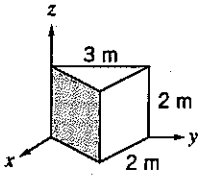
4.11 A área sombreada mostrada está num escoamento onde o campo de velocidade é dado por $\vec{V} = ax\hat{i} - by\hat{j}$, $a = b = 1\ \text{s}^{-1}$; e as coordenadas são medidas em metros. Avalie a vazão volumétrica e o fluxo de quantidade de movimento através da área sombreada.

4.12 Obtenha expressões para a vazão volumétrica e para o fluxo de quantidade de movimento através da seção transversal ① do VC mostrado no diagrama.



P4.12

P4.13



4.13 A área sombreada mostrada está em um escoamento onde o campo de velocidade é dado por $\vec{V} = -ax\hat{i} + by\hat{j} + c\hat{k}$, $a = b = 1\ \text{s}^{-1}$ e $c = 1$ m/s. Escreva uma expressão vetorial para um elemento da área sombreada. Avalie as integrais $\int \vec{V} \cdot d\vec{A}$ e $\int \vec{V}(\vec{V} \cdot d\vec{A})$ sobre a área sombreada.

4.14 A distribuição de velocidades para escoamento laminar em um longo tubo circular de raio R é dada pela expressão unidimensional,

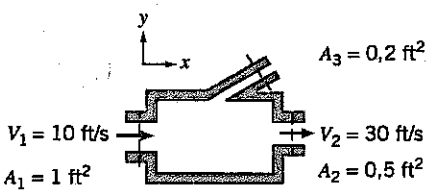
$$\vec{V} = u\hat{i} = u_{\text{máx}}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\hat{i}$$

Para este perfil, obtenha expressões para a vazão volumétrica e para o fluxo de quantidade de movimento através da seção normal ao eixo do tubo.

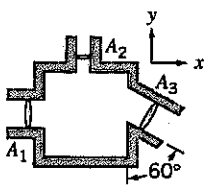
4.15 Para o escoamento do Problema 4.12, obtenha uma expressão para o fluxo de energia cinética, $\int (V^2/2)\rho\vec{V} \cdot d\vec{A}$, através da seção transversal ① do VC mostrado.

4.16 Para o escoamento do Problema 4.14, obtenha uma expressão para o fluxo de energia cinética, $\int (V^2/2)\rho\vec{V} \cdot d\vec{A}$, através da seção normal ao eixo do tubo.

4.17 Considere o escoamento incompressível e permanente através do dispositivo mostrado. Determine a magnitude da vazão volumétrica através da abertura 3 e verifique se o fluxo é para fora ou para dentro do dispositivo.



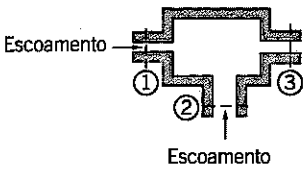
P4.17



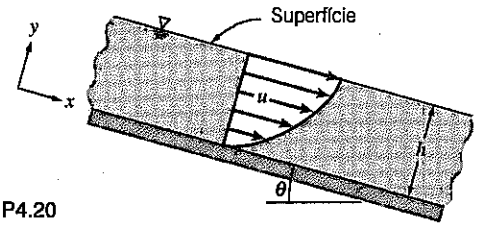
P4.18

4.18 Um fluido, com massa específica de 1050 kg/m³, flui em regime permanente através da caixa retangular mostrada. Dados $A_1 = 0{,}05\ \text{m}^2$, $A_2 = 0{,}01\ \text{m}^2$, $A_3 = 0{,}06\ \text{m}^2$, $\vec{V}_1 = 4\hat{i}$ m/s e $\vec{V}_2 = 8\hat{j}$ m/s, determine a velocidade $\vec{V}_3$.

4.19 No escoamento incompressível através do dispositivo mostrado, as velocidades podem ser consideradas uniformes em todas as seções de entrada e de saída. As seguintes condições são conhecidas: $A_1 = 0{,}1\ \text{m}^2$, $A_2 = 0{,}2\ \text{m}^2$, $A_3 = 0{,}15\ \text{m}^2$, $V_1 = 10e^{-t/2}$ m/s e $V_2 = 2\cos(2\pi t)$ m/s (t em segundos). Obtenha uma expressão para a velocidade na seção ③ e trace um gráfico de V_3 como uma função do tempo. Em que instante V_3 torna-se zero pela primeira vez? Qual é a vazão volumétrica total média na seção ③?



P4.19



P4.20

4.20 Óleo escoa em regime permanente formando uma fina camada em um plano inclinado para baixo. O perfil de velocidade é dado por:

$$u = \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta}{\mu}\left[hy - \frac{y^2}{2}\right]$$

Expresse a vazão em massa por unidade de largura em termos de ρ, μ, g, θ e h.

4.21 Água entra em um canal largo e plano, de altura $2h$, com uma velocidade de 5 m/s. Na saída do canal, a distribuição de velocidades é dada por

$$\frac{u}{u_{\text{máx}}} = 1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2$$

onde y é medido a partir da linha de centro do canal. Determine a velocidade, $u_{\text{máx}}$, na linha de centro na saída do canal.

4.22 Um fluido incompressível escoa em regime permanente através de um canal plano divergente. Na seção de entrada, de altura H, o escoamento é uniforme com magnitude V_1. Na saída, de altura $2H$, o perfil de velocidade é

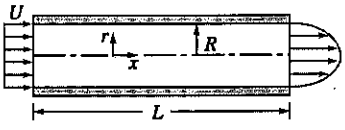
$$V_2 = V_m \cos\left(\frac{\pi y}{2H}\right)$$

onde y é medido a partir da linha de centro do canal. Expresse V_m em termos de V_1.

4.23 Água escoa em regime permanente através de um tubo de comprimento L e raio $R = 3$ in. Calcule a velocidade uniforme na entrada, U, se a distribuição de velocidades na saída é dada por

$$u = u_{\text{máx}}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

e $u_{\text{máx}} = 10$ ft/s.

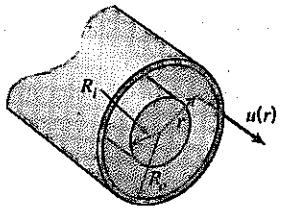


P4.23

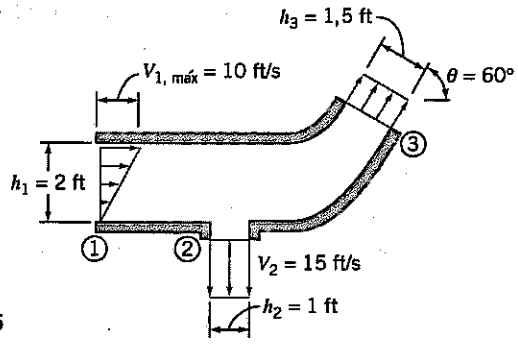
4.24 O perfil de velocidade para escoamento laminar em uma seção anular é dado por

$$u(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu L}\left[R_o^2 - r^2 + \frac{R_o^2 - R_i^2}{\ln(R_i/R_o)}\ln\frac{R_o}{r}\right]$$

onde $\Delta p/L = -10$ kPa/m é o gradiente de pressão, μ é a viscosidade (óleo SAE 10 a 20°C) e $R_o = 5$ mm e $R_i = 1$ mm são os raios externo e interno do anel. Determine a vazão volumétrica, a velocidade média e a velocidade máxima. Faça um gráfico da distribuição de velocidades.



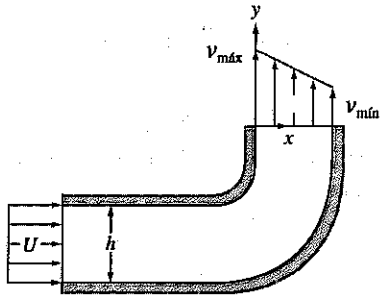
P4.24



P4.25

4.25 Uma curva redutora bidimensional tem um perfil de velocidade linear na seção ①. O escoamento é uniforme nas seções ② e ③. O fluido é incompressível e o escoamento é permanente. Determine o módulo e o sentido da velocidade uniforme na seção ③.

4.26 Água entra em um canal bidimensional de largura constante, $h = 75{,}5$ mm, com velocidade uniforme, U. O canal faz uma curva de 90° que distorce o escoamento, de modo a produzir, na saída, o perfil linear de velocidade mostrado com $v_{máx} = 2v_{mín}$. Avalie $v_{mín}$, se $U = 7{,}5$ m/s.



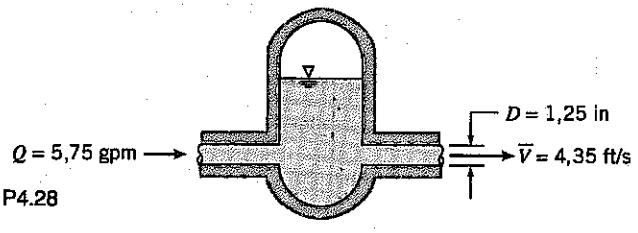
P4.26, 4.78

4.27 Um tubo redondo e poroso, com $D = 60$ mm, transporta água. A velocidade de entrada é uniforme com $V_1 = 7{,}0$ m/s. A água vaza para fora do tubo através das paredes porosas, radialmente e com simetria em relação ao eixo do tubo. A distribuição de velocidades da água vazando ao longo do tubo é dada por

$$v = V_0\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

onde $V_0 = 0{,}03$ m/s e $L = 0{,}950$ m. Calcule a vazão mássica dentro do tubo em $x = L$.

4.28 Um *acumulador hidráulico* é projetado para reduzir as pulsações de pressão do sistema hidráulico de uma máquina operatriz. Para o instante mostrado, determine a taxa à qual o acumulador ganha ou perde óleo hidráulico.



P4.28

4.29 Um tanque, com volume de 0,5 m³, contém ar comprimido. Uma válvula é aberta e o ar escapa com velocidade de 300 m/s através de uma abertura de 130 mm² de área. A temperatura do ar passando pela abertura é – 15°C e a pressão absoluta é 350 kPa. Determine a taxa de variação da massa específica do ar no tanque nesse instante.

4.30 Um líquido viscoso é drenado de um tanque circular, com diâmetro $D = 300$ mm, através de um longo tubo circular de raio $R = 50$ mm. O perfil de velocidade no tubo de descarga é

$$u = u_{máx}\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]$$

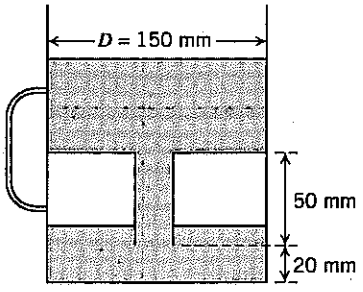
Mostre que a velocidade média do escoamento no tubo de drenagem é $\overline{V} = \frac{1}{2}u_{máx}$. Avalie a taxa de variação do nível de líquido no tanque no instante em que $u_{máx} = 0{,}155$ m/s.

4.31 Um tanque retangular, usado para fornecer água em uma experiência de número de Reynolds, tem profundidade de 230 mm, largura $W = 150$ mm e comprimento $L = 230$ mm. O número de Reynolds da água do tubo de saída (diâmetro interno $D = 6{,}35$ mm) é $Re = 2000$, quando o tanque está metade cheio. A válvula de admissão de água para o tanque está fechada. Determine a taxa de variação do nível da água nesse instante.

4.32 Ar entra em um tanque através de uma área de 0,2 ft² com velocidade de 15 ft/s e massa específica de 0,03 slug/ft³. Sai com uma velocidade de 5 ft/s e uma massa específica igual àquela no tanque. A massa específica inicial do ar no tanque é 0,02 slug/ft². O volume total do tanque é 20 ft³ e a área de saída é 0,4 ft². Determine a taxa de variação inicial da massa específica do ar no tanque.

4.33 Água é drenada de um tanque cilíndrico, de 0,3 m de diâmetro, através de um orifício no fundo do tanque. No instante em que a profundidade da água é 0,6 m, a vazão em massa observada no dreno é 4 kg/s. Determine a taxa de variação do nível da água nesse instante.

4.34 Um tipo de filtro de água residencial, conforme mostrado, está inicialmente vazio. A câmara superior é, então, enchida com água até uma profundidade de 80 mm. Quanto tempo levará para que água na câmara inferior toque o fundo do filtro? Quanto tempo será necessário para que o nível da água na câmara inferior atinja 50 mm? Observe que ambas as superfícies da água estão à pressão atmosférica, e admita que o volume ocupado pelo material do filtro em si possa ser desprezado. Trace um gráfico do nível da água na câmara inferior como uma função do tempo. Para o filtro, a vazão é dada por $Q = kH$, onde $k = 2 \times 10^{-4}$ m²/s e H (m) é a altura hidrostática através do filtro.



P4.34

4.35 Em uma notícia divulgada recentemente na TV sobre o abaixamento do nível do lago Shafer perto de Monticello, Indiana, pelo aumento na descarga através da comporta do lago, as seguintes informações foram repassadas a respeito do escoamento na comporta:

Vazão normal	290 ft³/s
Vazão durante a drenagem do lago	2000 ft³/s

(A vazão durante a drenagem foi dita ser equivalente a 16.000 gal/s.) O repórter afirmou também que, durante a drenagem, esperava-se uma diminuição no nível do lago à taxa de 1 ft a cada 8 horas. Calcule a vazão real durante a drenagem em gal/s. Estime a área superficial do lago.

4.36 Líquido é drenado de um tanque cilíndrico, de diâmetro $D = 50$ mm, através de uma abertura, com $d = 5$ mm, no fundo do tanque. A velocidade do líquido saindo do tanque é dada, aproximadamente, por $V = \sqrt{2gy}$, onde y é a distância vertical do fundo do tanque até a superfície livre. Se o tanque estava inicialmente com água até $y_0 = 0{,}4$ m, determine a profundidade em $t = 12$ segundos após o início da drenagem. Trace um gráfico de y/y_0 *versus* t para $0{,}1 \le y_0 \le 1$ m, com D/d como um parâmetro para $2 \le D/d \le 10$ e $y_0 = 0{,}4$ m.

4.37 Para as condições do Problema 4.36, estime o tempo requerido para drenar o tanque até a profundidade $y = 20$ mm. Trace um gráfico do tempo para drenar o tanque em função de y/y_0 para $0{,}1 \le y_0 \le 1$ m, com d/D como um parâmetro para $0{,}1 \le d/D \le 0{,}5$.

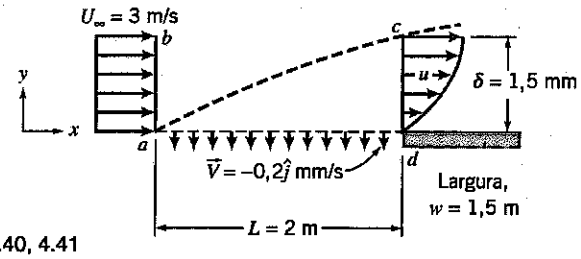
4.38 Um frasco cônico contém água até uma altura $H = 36{,}8$ mm, onde o diâmetro do vaso é $D = 29{,}4$ mm. A água é drenada do frasco através de um orifício circular de bordas lisas e diâmetro $d = 7{,}35$ mm no vértice do cone. A velocidade da água na saída do orifício é dada aproximadamente por $V = \sqrt{2gy}$, onde y é a distância vertical da superfície livre do líquido até o orifício. Uma corrente de água entra pelo topo do frasco com uma vazão volumétrica constante, $Q = 3{,}75 \times 10^{-7}$ m³/h. Determine a vazão em volume no fundo do vaso. Avalie a taxa de variação do nível da superfície livre no vaso e o seu sinal nesse instante.

4.39 Um funil cônico, com meio ângulo $\theta = 15$ graus, com diâmetro máximo $D = 70$ mm e altura H, deixa escapar líquido por um orifício (diâmetro $d = 3{,}12$ mm) no seu vértice. A velocidade do líquido deixando o reservatório é dada aproximadamente por $V = \sqrt{2gy}$, onde y é a altura da superfície livre do líquido acima do orifício. Determine a taxa de variação do nível da superfície no reservatório no instante em que $y = H/2$.

4.40 Água escoa em regime permanente sobre uma placa plana porosa. Uma sucção constante é aplicada ao longo da seção porosa. O perfil de velocidade na seção *cd* é

$$\frac{u}{U_\infty} = 3\left[\frac{y}{\delta}\right] - 2\left[\frac{y}{\delta}\right]^{1,5}$$

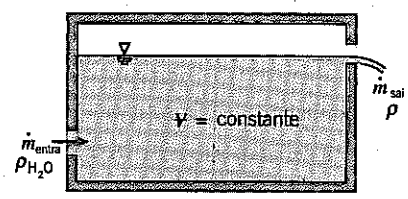
Avalie a vazão mássica através da seção *bc*.



P4.40, 4.41

4.41 Considere um escoamento incompressível e permanente de ar padrão em uma camada-limite sobre toda a extensão da superfície porosa mostrada. Admita que a camada-limite na extremidade a jusante da superfície tenha um perfil de velocidade aproximadamente parabólico dado por $u/U_\infty = 2(y/\delta) - (y/\delta)^2$. Uma sucção uniforme é aplicada ao longo da superfície porosa, como mostrado. Calcule a vazão volumétrica através da superfície *cd*, através da superfície porosa de sucção, e através da superfície *bc*.

4.42 Um tanque de volume fixo contém salmoura com massa específica inicial, ρ_i, maior que a da água. Água pura entra no tanque em regime permanente e mistura-se perfeitamente com a salmoura. O nível do líquido no tanque permanece constante. Deduza expressões para (a) a taxa de variação da massa específica da mistura líquida no tanque, e (b) o tempo requerido para que a massa específica dessa mistura atinja o valor ρ_f, sendo $\rho_i > \rho_f > \rho_{H_2O}$.



P4.42

4.43 Num funil cônico, com meio ângulo θ, o líquido é drenado através de um pequeno orifício de diâmetro d no vértice do funil. A velocidade do líquido através do orifício é dada, aproximadamente, por $V = \sqrt{2gy}$, onde y é a altura da superfície livre do líquido acima do orifício. Inicialmente, o funil está cheio até uma altura y_0. Obtenha uma expressão para o tempo, t, de drenagem do funil. Expresse o resultado em termos do volume inicial, $\forall_0$, de líquido no funil e da vazão em volume inicial, $Q_0 = A\sqrt{2gy_0} = AV_0$. Se o diâmetro do orifício é $d = 5$ mm, trace um gráfico do tempo para drenar o funil como função de y para a faixa $0{,}1 \le y_0 \le 1$ m, com o ângulo θ como um parâmetro para $15° \le \theta \le 45°$.

4.44 Com o passar do tempo, o ar escapa dos pneus de alta pressão de uma bicicleta por migração através dos poros da borracha. É regra corrente dizer que um pneu perde pressão a uma taxa de "uma libra [1 psi] por

dia". A taxa real de perda de pressão não é constante; o que ocorre é que a taxa de perda de massa de ar instantânea é proporcional à massa específica e à pressão manométrica do ar no pneu, $\dot{m} \propto \rho p$. Como a taxa de vazamento é baixa, o ar no pneu é aproximadamente isotérmico. Considere um pneu que está inicialmente inflado com 0,7 MPa (manométrica). Admita que a taxa inicial de perda de pressão seja de 1 psi por dia. Estime o tempo necessário para que a queda de pressão atinja 500 kPa. Quão preciso é "uma libra por dia" no período total de 30 dias? Trace um gráfico da pressão no pneu *versus* tempo para um período de 30 dias. Compare os resultados obtidos com aqueles da regra corrente "uma libra por dia".

4.45 Avalie a taxa líquida de fluxo de quantidade de movimento para fora da superfície de controle do Problema 4.18.

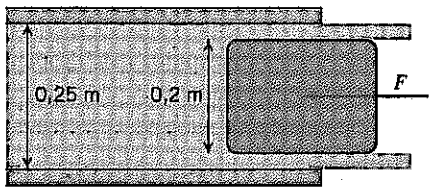
4.46 Para as condições do Problema 4.21, avalie a razão entre o fluxo de quantidade de movimento na direção x na saída do canal e aquele na entrada.

4.47 Para as condições do Problema 4.23, avalie a razão entre o fluxo de quantidade de movimento na direção x na saída do tubo e aquele na entrada.

4.48 Avalie o fluxo líquido de quantidade de movimento através da curva do Problema 4.25, se a profundidade normal ao diagrama for $w = 3$ ft.

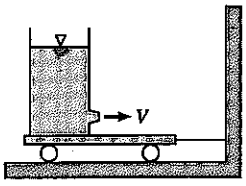
4.49 Avalie o fluxo líquido de quantidade de movimento através do canal do Problema 4.26. Você esperaria que a pressão na saída fosse maior, menor ou a mesma que a pressão na entrada? Por quê?

4.50 Calcule a força requerida para manter o tampão fixo na saída do tubo de água. A vazão é 1,5 m³/s e a pressão a montante é 3,5 MPa.

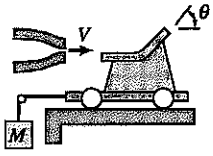


P4.50

4.51 Um grande tanque, de altura $h = 1$ m e diâmetro $D = 0{,}6$ m, está fixado sobre uma plataforma rolante conforme mostrado. Água jorra do tanque através de um bocal de diâmetro $d = 10$ mm. A velocidade uniforme do líquido saindo do bocal é, aproximadamente, $V = \sqrt{2gy}$, onde y é a distância vertical do bocal até a superfície livre do líquido. Determine a tração no cabo para $y = 0{,}8$ m. Trace um gráfico da tração no cabo como uma função da profundidade de água para a faixa $0 \leq y \leq 0{,}8$ m.



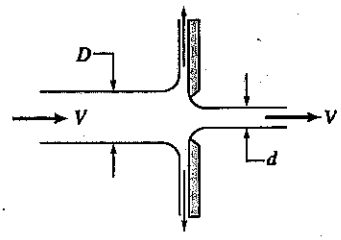
P4.51



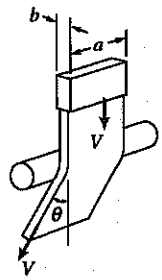
P4.52

4.52 Um jato de água saindo de um bocal estacionário a 15 m/s ($A_j = 0{,}05$ m²) atinge uma pá defletora curva montada sobre um carrinho conforme mostrado. A pá desvia o jato de um ângulo $\theta = 50°$. Determine o valor de M requerido para manter o carrinho estacionário. Se o ângulo da pá, θ, for regulável, trace um gráfico da massa, M, necessária para manter o carrinho estacionário como uma função de θ para $0 \leq \theta \leq 180°$.

4.53 Uma placa vertical tem um orifício de bordas vivas no seu centro. Um jato de água com velocidade V atinge a placa concentricamente. Obtenha uma expressão para a força externa requerida para manter a placa no lugar, se o jato que sai do orifício também tem velocidade V. Avalie a força para $V = 5$ m/s, $D = 100$ mm e $d = 25$ mm. Trace um gráfico da força requerida *versus* a razão de diâmetros para uma faixa adequada de diâmetros d.



P4.53



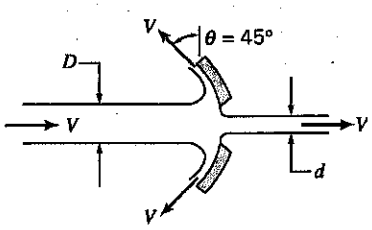
P4.54

4.54 Um cilindro circular inserido de través numa corrente de água, conforme mostrado, deflete o escoamento de um ângulo θ. (Isto é chamado de "efeito Coanda".) Para $a = 0{,}5$ in, $b = 0{,}1$ in, $V = 10$ ft/s e $\theta = 20°$, determine a componente horizontal da força sobre o cilindro devido ao escoamento da água.

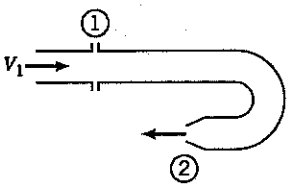
4.55 Um fazendeiro compra 675 kg de grãos, a granel, da cooperativa local. Os grãos são despejados na sua caminhonete através de um alimentador afunilado com um diâmetro de saída de 0,3 m. O operador do alimentador determina a carga a pagar observando a variação como o tempo do peso bruto da caminhonete indicado na balança. O fluxo de grãos do alimentador ($\dot{m} = 40$ kg/s) é interrompido, quando a leitura da balança atinge o peso bruto desejado. Se a massa específica do grão é 600 kg/m^3, determine a verdadeira carga a pagar.

4.56 Água escoa em regime permanente através do bocal de uma mangueira de incêndio. A mangueira tem diâmetro interno de 75 mm e a ponta do bocal 25 mm; a pressão manométrica na mangueira é 510 kPa e a corrente de água deixando o bocal é uniforme. Na saída do bocal, a velocidade da água é 32 m/s e a pressão é atmosférica. Determine a força transmitida pelo acoplamento entre a mangueira e o bocal. Indique se o bocal está sob tração ou compressão.

4.57 Um tipo de prato, raso e circular, tem um orifício de bordas vivas no centro, conforme mostrado. Um jato d'água, de velocidade V, atinge o prato concentricamente. Obtenha uma expressão para a força externa necessária para manter o prato no lugar, se o jato que sai pelo orifício também tem velocidade V. Avalie a força para $V = 5$ m/s, $D = 100$ mm e $d = 20$ mm. Trace um gráfico da força requerida em função do ângulo θ ($0 \leq \theta \leq 90°$), com a razão de diâmetros como parâmetro para uma faixa adequada de diâmetros d.



P4.57



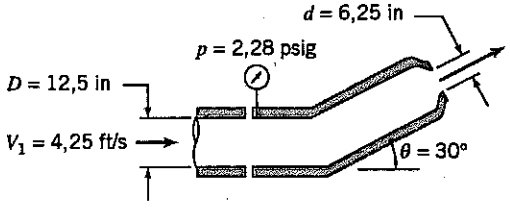
P4.58

4.58 Água escoa em regime permanente através de um cotovelo de 180°, conforme mostrado. Na entrada do cotovelo, a pressão manométrica é 96 kPa. A água é descarregada para a atmosfera. Admita que as propriedades são uniformes nas seções de entrada e de saída; $A_1 = 2600$ mm^2, $A_2 = 650$ mm^2 e $V_1 = 3{,}05$ m/s. Determine a componente horizontal da força necessária para manter o cotovelo no lugar.

4.59 Água entra em um cotovelo redutor de 180°, com velocidade média de 1 m/s e pressão manométrica de 400 kPa. Na saída, a pressão manométrica é 50 kPa e os diâmetros das seções de entrada e de saída do cotovelo são 0,25 m e 0,05 m, respectivamente. Qual é a força requerida para manter o cotovelo estacionário.

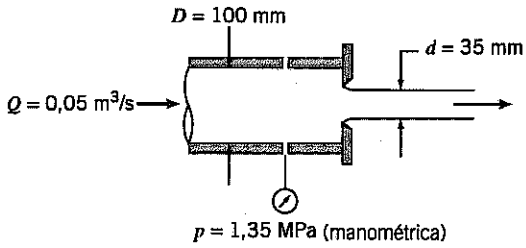
4.60 Água escoa em regime permanente através do bocal mostrado, descarregando para a atmosfera. Calcule a componente horizontal da força na junta flangeada. Indique se a junta está sob tração ou compressão.

P4.60

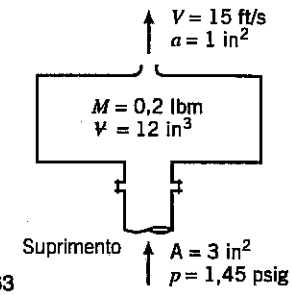


4.61 Suponha que a curva do Problema 4.26 seja um segmento de um canal largo no plano horizontal. A pressão na entrada é de 170 kPa (abs.) e, na saída, 130 kPa (abs). Determine a força requerida para manter a curva no lugar.

4.62 Uma placa plana com um orifício de 50 mm de diâmetro está instalada na extremidade de um tubo de 100 mm de diâmetro interno, conforme mostrado. Água escoa através do tubo e do orifício a uma taxa de 0,05 m³/s. O diâmetro do jato a jusante do orifício é 35 mm. Calcule a força externa necessária para manter a placa de orifício no lugar. Despreze o atrito na parede do tubo.



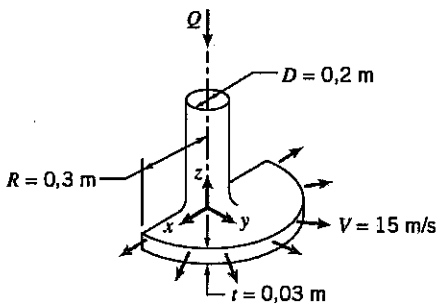
P4.62



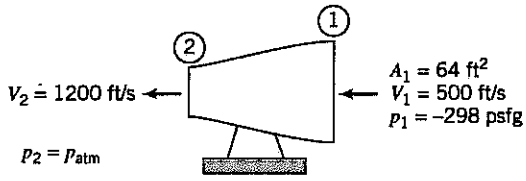
P4.63

4.63 Um dispositivo de formação de jato é mostrado no diagrama. A água é fornecida a $p = 1{,}45$ psig através da abertura flangeada de área $A = 3$ in². A água sai do dispositivo num jato livre, em regime permanente, à pressão atmosférica. A área e a velocidade do jato são $a = 1{,}0$ in² e $V = 15$ ft/s. O dispositivo tem massa de 0,2 lbm e contém $\forall = 12$ in³ de água. Determine a força exercida pelo dispositivo sobre o tubo de suprimento de água.

4.64 O bocal mostrado descarrega uma cortina de água num arco de 180°. A uma distância radial de 0,3 m a partir da linha de centro do tubo de suprimento, a velocidade da água é 15 m/s e a espessura do jato é 30 mm. Determine (a) a vazão volumétrica da cortina de água (b) a componente y da força necessária para manter o bocal no lugar.



P4.64



P4.65

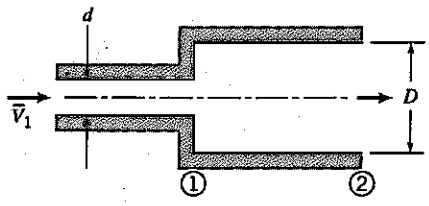
4.65 Uma máquina típica para testes de motores a jato é mostrada na figura, juntamente com alguns dados de testes. O combustível entra verticalmente no topo da máquina a uma taxa igual a 2% da vazão em massa do ar de admissão. Para as condições dadas, calcule a vazão em massa de ar através da máquina e estime o empuxo produzido.

4.66 Um motor de foguete a combustível líquido consome, na condição de empuxo nominal, 180 lbm/s de ácido nítrico como oxidante e 70 lbm/s de anilina como combustível. Os gases de escape saem axialmente a 6000 ft/s em relação ao bocal de descarga e a 16,5 psia. O diâmetro de saída do bocal é $D = 2$ ft. Calcule o empuxo produzido pelo motor numa bancada de testes instalada no nível do mar.

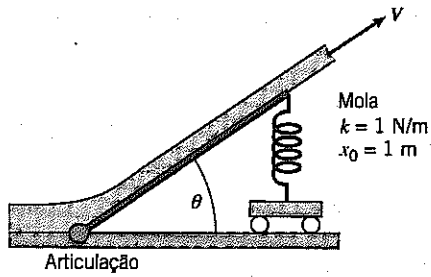
4.67 Considere o escoamento através da expansão súbita mostrada. Se o escoamento for incompressível e o atrito desprezível, mostre que o aumento de pressão, $\Delta p = p_2 - p_1$, é dado por

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho \overline{V}_1^2} = 2\left(\frac{d}{D}\right)^2\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^2\right]$$

Trace o gráfico do aumento de pressão adimensional *versus* razão de diâmetros para determinar o valor ótimo de d/D e o valor correspondente do aumento adimensional de pressão. *Sugestão:* suponha que a pressão seja uniforme e igual a p_1 na superfície vertical da expansão.



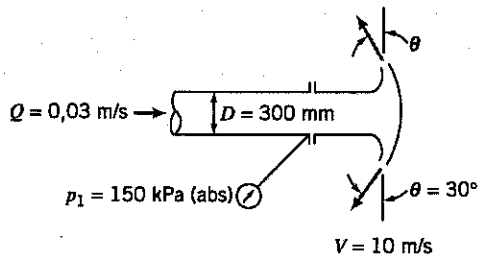
P4.67



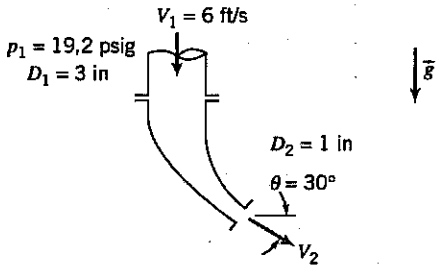
P4.68

4.68 Um jato livre de água, com área de seção transversal constante e igual a 0,005 m², é defletido por uma placa suspensa de 2 m de comprimento, suportada por uma mola com constante $k = 1$ N/m e comprimento distendido $x_0 = 1$ m. Determine e plote o ângulo de deflexão θ como uma função da velocidade do jato V. Para qual velocidade do jato o ângulo de deflexão é 10°?

4.69 Uma cabeça cônica de *jateamento* é mostrada. O fluido é a água e a corrente de saída é uniforme. Avalie (a) a espessura do jato em forma de cortina d'água no raio de 400 mm e (b) a força axial exercida pelo dispositivo sobre o tubo de alimentação de água.



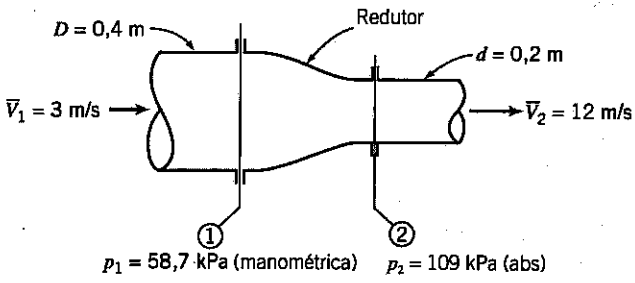
P4.69



P4.70

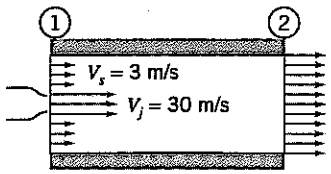
4.70 A figura mostra um bocal curvo que descarrega para a atmosfera. O bocal pesa 10 lbf e seu volume interno é 150 in³. O fluido é água. Determine a força de reação do bocal sobre o acoplamento do tubo de admissão com o bocal.

4.71 A figura mostra um redutor em uma tubulação. O volume interno do redutor é 0,2 m³ e sua massa é 25 kg. Avalie a força total de reação que deve ser feita pelos tubos adjacentes para suportar o redutor. O fluido é gasolina.

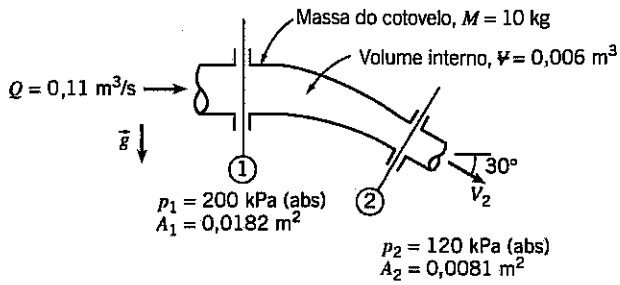


P4.71

4.72 Uma bomba a jato d'água tem área do jato de 0,01 m² e velocidade do jato de 30 m/s. O jato está dentro de uma corrente secundária de água com velocidade $V_s = 3$ m/s. A área total do duto (a soma das áreas do jato principal e da corrente secundária) é de 0,075 m². As duas correntes são vigorosamente misturadas e a água deixa a bomba como uma corrente uniforme. As pressões do jato e da corrente secundária são iguais na entrada da bomba. Determine a velocidade na saída da bomba e o aumento de pressão, $p_2 - p_1$.



P4.72



P4.73

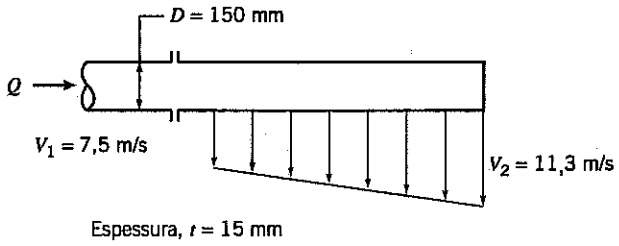
4.73 Um cotovelo redutor de 30° é mostrado na figura. O fluido é água. Avalie as componentes da força que devem ser aplicadas pelos tubos adjacentes para manter o cotovelo estático.

4.74 Uma caldeira monotubular consiste em um tubo de 20 pés de comprimento e 0,375 polegadas de diâmetro interno. Água líquida entra no tubo a uma taxa de 0,3 lbm/s com pressão de 500 psia. Vapor sai do tubo a 400 psig, com massa específica de 0,024 slug/ft³. Determine o módulo, a direção e o sentido da força exercida pelo fluido sobre o tubo.

4.75 Um gás escoa em regime permanente através de um tubo poroso aquecido, de área de seção transversal constante e igual a 0,2 m². Na entrada do tubo, a pressão absoluta é 340 kPa, a massa específica é 5,1 kg/m³ e a velocidade média é de 152 m/s. O fluido que atravessa a parede porosa sai em uma direção normal ao eixo do tubo com vazão mássica total de 29,2 kg/s. Na saída do tubo, a pressão absoluta é 280 kPa e a massa específica é 2,6 kg/m³. Determine a força axial do fluido sobre o tubo.

4.76 Considere o escoamento permanente e adiabático de ar através de um longo tubo retilíneo com área de seção transversal de 0,5 ft². Na entrada do tubo, o ar está a 30 psia, 140°F e tem uma velocidade de 500 ft/s. Na saída, o ar está a 11,3 psia, com velocidade de 985 ft/s. Calcule a força axial do ar sobre o tubo. (Certifique-se de estabelecer com clareza o sentido da força.)

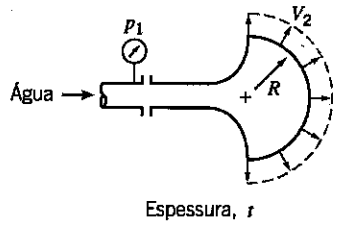
4.77 Água é descarregada através de um fenda estreita em um tubo de 150 mm de diâmetro. O jato horizontal, bidimensional, resultante tem 1 m de comprimento e espessura de 15 mm, mas com velocidade não-uniforme. A pressão na seção de entrada é 30 kPa (manométrica). Calcule (a) a vazão em volume na seção de entrada e (b) as forças requeridas no acoplamento para manter o tubo de jateamento no lugar. Despreze as massas do tubo e da água nele contida.



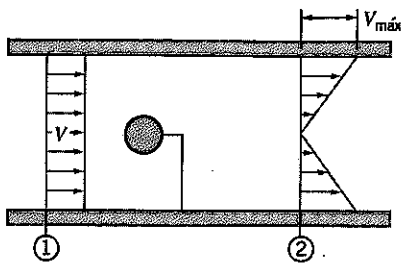
P4.77

4.78 Água escoa em regime permanente através da curva de 90° do Problema 4.26. O escoamento na entrada está a p_1 = 185 kPa (abs). O escoamento na saída é não-uniforme, vertical e à pressão atmosférica. A massa da estrutura do canal é M_c = 2,05 kg; o volume interno do canal é $\forall$ = 0,00355 m³. Avalie a força exercida pelo canal sobre o duto de suprimento de água.

4.79 Um bocal de jateamento é projetado para produzir uma cortina de água radial e plana. A cortina d'água sai do bocal com V_2 = 10 m/s, cobre um arco de 180° e tem espessura t = 1,5 mm. O raio da descarga do bocal é R = 50 mm. O tubo de suprimento de água tem 35 mm de diâmetro e a pressão de entrada é p_1 = 150 kPa (abs). Avalie a força axial exercida pelo bocal sobre o acoplamento com o tubo de suprimento.



P4.79



P4.80

4.80 Um pequeno objeto redondo é testado num túnel de vento de 1 m de diâmetro. A pressão é uniforme nas seções ① e ②. A pressão a montante é 20 mm de H_2O (manométrica), a pressão a jusante é 10 mm de H_2O (manométrica) e a velocidade média do ar é 10 m/s. O perfil de velocidade na seção ② é linear; ele varia de zero na linha de centro do túnel a um máximo na parede do túnel. Calcule (a) a vazão em massa no túnel de vento, (b) a velocidade máxima na seção ②, e (c) o arrasto sobre o objeto e sua haste de sustentação. Despreze a resistência viscosa na parede do túnel.

4.81 A velocidade horizontal na onda atrás de um objeto posicionado em uma corrente de ar de velocidade uniforme U é dada por

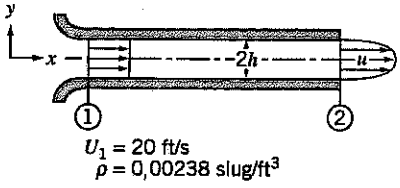
$$u(r) = U\left[1 - \cos^2\left(\frac{\pi r}{2}\right)\right] \qquad |r| \leq 1$$
$$u(r) = U \qquad |r| > 1$$

onde r é a coordenada radial adimensional, medida na direção perpendicular ao escoamento. Encontre uma expressão para o arrasto sobre o objeto.

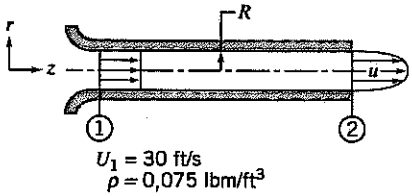
4.82 Um fluido incompressível escoa em regime permanente na região de entrada de um canal bidimensional de altura $2h$. A velocidade uniforme na entrada do canal é $U_1 = 20$ ft/s. A distribuição de velocidades numa seção a jusante é

$$\frac{u}{u_{máx}} = 1 - \left[\frac{y}{h}\right]^2$$

Avalie a velocidade máxima na seção a jusante. Calcule a queda de pressão que existiria no canal se o atrito viscoso nas paredes fosse desprezível.



P4.82



P4.83

4.83 Um fluido incompressível escoa em regime permanente na região de entrada de um tubo circular de raio R. A velocidade uniforme na entrada do tubo é $U_1 = 30$ ft/s. A distribuição de velocidades em uma seção a jusante é

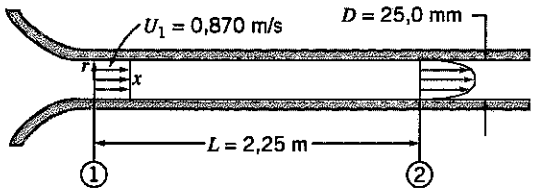
$$\frac{u}{u_{máx}} = 1 - \left[\frac{r}{R}\right]^2$$

Avalie a velocidade máxima na seção a jusante. Calcule a queda de pressão que existiria no tubo se o atrito viscoso nas paredes fosse desprezível.

4.84 Ar entra em um duto, de diâmetro $D = 25$ mm, através de uma entrada bem arredondada com velocidade uniforme, $U_1 = 0{,}870$ m/s. Em uma seção a jusante, onde $L = 2{,}25$ m, o perfil de velocidade inteiramente desenvolvido é

$$\frac{u(r)}{U_c} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

A queda de pressão entre essas seções é $p_1 - p_2 = 1{,}92$ N/m². Determine a força total de atrito exercida pelo tubo sobre o ar.



P4.84

4.85 Ar, na condição padrão, escoa ao longo de uma placa plana. A velocidade da corrente livre, não-perturbada, é $U_0 = 10$ m/s. Em $L = 145$ mm a jusante da borda de ataque da placa, a espessura da camada-limite é $\delta = 2{,}3$ mm. O perfil de velocidade nesse local é

$$\frac{u}{U_0} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left[\frac{y}{\delta}\right]^3$$

Calcule a componente horizontal da força por unidade de largura requerida para manter a placa estacionária.

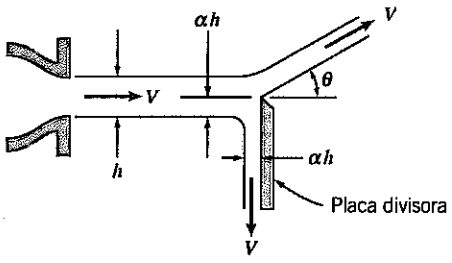
4.86 Considere o escoamento incompressível de um fluido em uma camada-limite como descrito no Problema-Exemplo 4.2. Mostre que a força de arrasto devido ao atrito do fluido sobre a superfície é dada por

$$F_f = \int_0^\delta \rho u(U - u) w \, dy$$

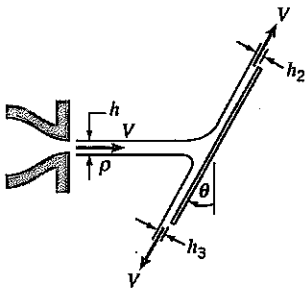
Avalie a força de arrasto para as condições do Problema-Exemplo 4.2.

4.87 Ar, na condição padrão, escoa ao longo de uma placa plana. A velocidade da corrente livre, não-perturbada, é $U_0 = 30$ m/s. Em $L = 0{,}3$ m a jusante da borda de ataque da placa, a espessura da camada-limite é $\delta = 1{,}5$ mm. O perfil de velocidade nesse local é aproximado para $u/U_0 = y/\delta$. Calcule a componente horizontal da força por unidade de largura requerida para manter a placa estacionária.

4.88 Uma placa divisora de jato, de borda viva, inserida parcialmente numa corrente plana de água, produz o padrão de escoamento mostrado. Analise a situação de modo a avaliar θ como uma função de α, onde $0 \le \alpha < 0{,}5$. Avalie a força necessária para manter a placa divisora no lugar. (Despreze qualquer força de atrito entre a corrente de água e a placa divisora.) Trace um gráfico de ambos, θ e R_x, como funções de α.



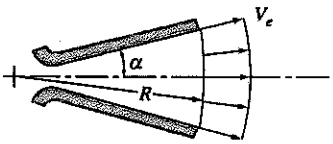
P4.88



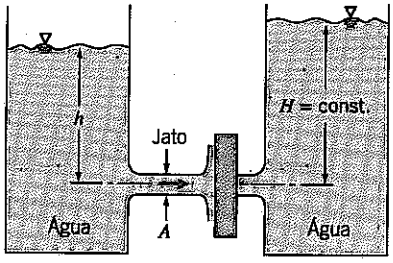
P4.89

4.89 Quando um jato plano de líquido atinge uma placa inclinada, ele parte-se em duas correntes de velocidades iguais, mas de espessuras desiguais. Para escoamento sem atrito, não pode haver força tangencial na superfície da placa. Use esta simplificação para desenvolver uma expressão para h_2/h como função do ângulo da placa, θ. Plote seus resultados e comente sobre os casos limites, $\theta = 0$ e $\theta = 90°$.

4.90 Os gases saindo do bocal de propulsão de um foguete são modelados como se escoassem radialmente para fora a partir de um ponto a montante da garganta do bocal. Assuma V_e como velocidade do escoamento de saída. Desenvolva uma expressão para o empuxo axial, T_a, resultante do escoamento deixando o plano de saída do bocal. Compare seus resultados com a aproximação unidimensional $T = \dot{m} V_e$. Avalie o erro percentual para $\alpha = 15°$. Trace um gráfico do erro percentual *versus* α para $0 \le \alpha \le 22{,}5°$.



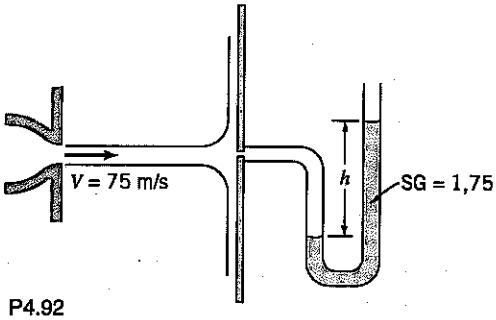
P4.90



P4.91

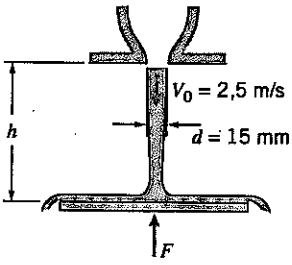
***4.91** Dois grandes tanques contendo água têm pequenos orifícios de contorno liso e arredondado e de áreas iguais. Um jato de líquido sai do tanque da esquerda. Admita que o fluxo seja uniforme e não afetado por atrito. O jato atinge uma placa plana cobrindo a abertura do tanque da direita. Determine o valor mínimo da altura, h, requerida para manter a placa no lugar sobre a abertura do tanque da direita.

***4.92** Um jato de ar de 10 mm de diâmetro, horizontal e com simetria axial, atinge um disco estacionário vertical com 200 mm de diâmetro. A velocidade do jato é de 75 m/s na saída do bocal. Um manômetro está conectado ao centro do disco. Calcule (a) a deflexão, h, se o líquido do manômetro tem densidade relativa SG = 1,75 e (b) a força exercida pelo jato sobre o disco.

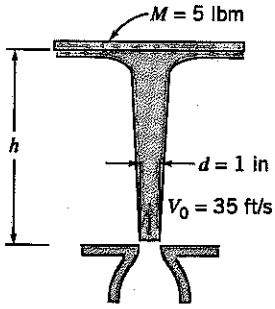


P4.92

***4.93** Um jato uniforme de água sai de um bocal de 15 mm de diâmetro e escoa diretamente para baixo. A velocidade do jato no plano de saída do bocal é 2,5 m/s. O jato atinge um disco horizontal e escoa radialmente para fora como uma lâmina d'água. Obtenha uma expressão geral para a velocidade que a corrente líquida atingiria no nível do disco. Desenvolva uma expressão para a força requerida para manter o disco estacionário, desprezando as massas do disco e da lâmina de água. Avalie para h = 3 m.



P4.93

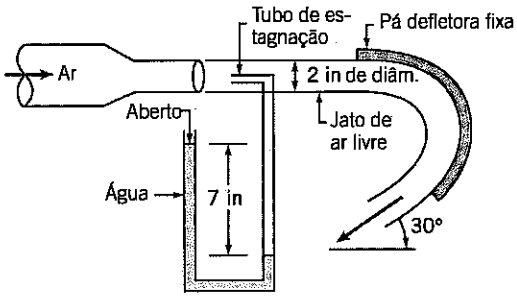


P4.94

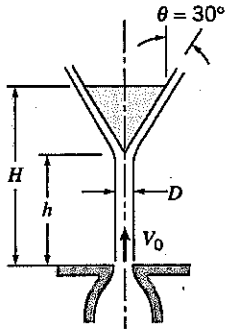
***4.94** Um disco de 5 lbm é restringido horizontalmente, mas está livre para mover na direção vertical. O disco é atingido por baixo por um jato vertical de água na saída do bocal, a velocidade e o diâmetro do jato d'água são 35 ft/s e 1 in. Obtenha uma expressão geral para a velocidade do jato d'água como uma função da altura, h. Determine a altura que o disco subirá e permanecerá estacionário.

*Estes problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

***4.95** Uma corrente de ar, na condição padrão, sai de um bocal de 2 in de diâmetro e atinge uma pá curva, conforme mostrado. Um tubo de estagnação conectado a um manômetro de tubo em U com água é instalado no plano de saída do bocal. Calcule a velocidade do ar deixando o bocal. Estime a componente horizontal da força exercida pelo jato sobre a pá. Comente sobre cada uma das considerações usadas na solução do problema.



P4.95

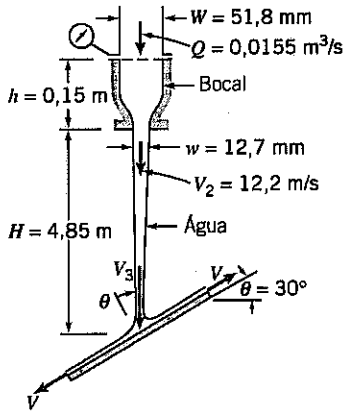


P4.96

***4.96** A água de um jato de diâmetro D é usada para suportar o objeto cônico mostrado. Deduza uma expressão para a massa combinada do cone e da água, M, que pode ser suportada pelo jato, em termos de parâmetros associados com um volume de controle adequadamente escolhido. Use a expressão obtida para calcular M quando $V_0 = 10$ m/s, $H = 1$ m, $h = 0{,}8$ m, $D = 50$ mm e $\theta = 30°$. Estime a massa de água no volume de controle.

***4.97** Um medidor venturi instalado numa tubulação de água consiste em uma seção convergente, uma garganta de área constante e uma seção divergente. O diâmetro do tubo é $D = 100$ mm e o diâmetro da garganta é $d = 40$ mm. Determine a força resultante do fluido atuando sobre a seção convergente, se a pressão da água no tubo é 600 kPa (manométrica) e a velocidade média é 5 m/s. Para a análise, despreze efeitos viscosos.

***4.98** Um bocal plano descarrega verticalmente para baixo na atmosfera. O bocal é alimentado com um fluxo permanente de água. Uma placa plana estacionária, inclinada, colocada abaixo do bocal é atingida pela corrente de água. A corrente de água divide-se e escoa ao longo da placa inclinada; as duas correntes deixando a placa têm espessuras *desiguais*. Efeitos de atrito são desprezíveis no bocal e no escoamento ao longo da superfície da placa. Avalie a pressão manométrica mínima requerida na saída do bocal. Calcule o módulo, direção e sentido da força exercida pela corrente d'água sobre a placa inclinada. Esboce a distribuição de pressão ao longo da superfície da placa. Explique por que a distribuição de pressão tem a forma esboçada.



P4.98

***4.99** No antigo Egito, vasos circulares cheios de água eram por vezes utilizados como relógios primitivos. Os vasos tinham um formato tal que, à medida que a água drenava pelo fundo, o nível da superfície

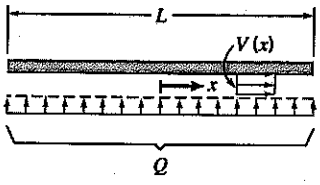
*Estes problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

descia a uma taxa constante, s. Admita que a água drene por um pequeno orifício de área A. Determine uma expressão para o raio do vaso, r, como função do nível de água, h. Obtenha uma expressão para o volume de água necessário para que o relógio funcione por n horas.

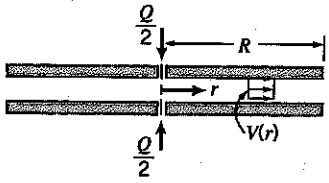
***4.100** Uma corrente de fluido incompressível movendo-se à baixa velocidade sai de um bocal apontado diretamente para baixo. Admita que a velocidade em qualquer seção reta seja uniforme e despreze efeitos viscosos. A velocidade e a área do jato na saída do bocal são V_0 e A_0, respectivamente. Aplique a conservação de massa e a equação da quantidade de movimento a um volume de controle diferencial de comprimento dz na direção do escoamento. Deduza expressões para as variações da velocidade e da área do jato como funções de z. Encontre a posição na qual a área do jato é metade do seu valor original. (Tome a origem de coordenadas na saída do bocal.)

***4.101** Uma corrente de fluido incompressível movendo-se a baixa velocidade sai de um bocal apontado diretamente para cima. Admita que a velocidade em qualquer seção reta seja uniforme e despreze efeitos viscosos. A velocidade e a área do jato na saída do bocal são V_0 e A_0, respectivamente. Aplique a conservação de massa e a equação da quantidade de movimento a um volume de controle diferencial de comprimento dz na direção do escoamento. Deduza expressões para as variações da velocidade e da área do jato como funções de z. Avalie a distância vertical necessária para reduzir a velocidade do jato a zero. (Tome a origem de coordenadas na saída do bocal.)

***4.102** Um líquido incompressível de viscosidade desprezível é bombeado com uma vazão volumétrica total, Q, através de uma superfície porosa para dentro de uma pequena fresta entre placas paralelas estreitamente espaçadas, conforme mostrado. Admita que, na fresta, o líquido tenha apenas movimento horizontal e que o escoamento seja uniforme através de qualquer seção vertical. Obtenha uma expressão para a variação de pressão como uma função de x. *Sugestão*: aplique a conservação de massa e a equação da quantidade de movimento a um volume de controle diferencial de tamanho dx localizado na posição x.



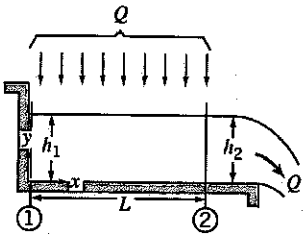
P4.102



P4.103

***4.103** Líquido incompressível de viscosidade desprezível é bombeado com uma vazão volumétrica total, Q, através de dois pequenos orifícios para dentro de uma pequena fresta entre placas paralelas estreitamente espaçadas, conforme mostrado. Admita que, na fresta, o líquido tenha apenas movimento radial e que o escoamento é uniforme através de qualquer seção vertical. A descarga é feita para atmosfera em $r = R$. Obtenha uma expressão para a variação de pressão como uma função do raio. *Sugestão*: aplique a conservação de massa e a equação da quantidade de movimento a um volume de controle diferencial de tamanho dr localizado no raio r.

***4.104** Um líquido cai verticalmente dentro de um canal retangular aberto, curto e horizontal, de largura b. A vazão volumétrica total, Q, é uniformemente distribuída sobre a área bL. Despreze efeitos viscosos. Obtenha uma expressão para h_1 em termos de h_2, Q e b. *Sugestão*: escolha um volume de controle com fronteira externa localizada em $x = L$. Esboce o perfil da superfície, $h(x)$. *Sugestão*: use um volume de controle diferencial de largura dx.



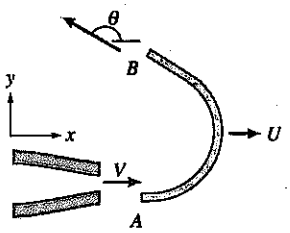
P4.104

*Estes problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

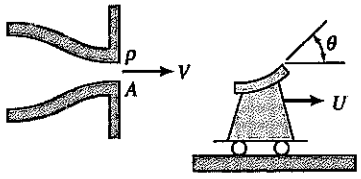
***4.105** Uma fresta estreita entre duas placas circulares está inicialmente preenchida com líquido incompressível. Em $t = 0$, a placa superior começa a mover-se para baixo de encontro à placa inferior, com velocidade constante, V_0, provocando a expulsão do líquido através da fresta. Desprezando efeitos viscosos e admitindo escoamento uniforme na direção radial, desenvolva uma expressão para o campo de velocidade entre as placas paralelas. *Sugestão*: aplique a conservação de massa a um volume de controle com superfície externa localizada no raio r. Note que o escoamento não é permanente, embora a velocidade da placa superior seja constante.

***4.106** Projete uma clepsidra (relógio de água Egípcio) — um recipiente do qual água é drenada por gravidade através de um orifício no fundo e que indica o tempo pelo nível da água remanescente. Especifique as dimensões do recipiente e o tamanho do orifício de drenagem; indique a quantidade de água necessária para encher o recipiente e o intervalo de tempo ao fim do qual ele deve ser novamente enchido. Trace um gráfico do raio do vaso em função da elevação.

4.107 Um jato de água é dirigido contra uma pá defletora, que poderia ser uma pá de turbina ou outra peça de uma máquina hidráulica qualquer. A água sai de um bocal estacionário, de 50 mm de diâmetro, com uma velocidade de 20 m/s e entra na pá tangente à sua superfície em A. A superfície interna da pá em B faz um ângulo $\theta = 150°$ com a direção x. Calcule a força que deve ser aplicada sobre a pá para manter sua velocidade constante em $U = 5$ m/s.



P4.107



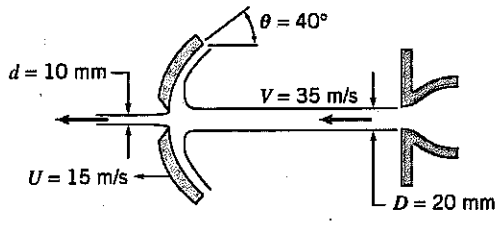
P4.108, 4.110, 4.113, 4.125, 4.152

4.108 Água, proveniente de um bocal estacionário, atinge um carrinho com uma pá defletora de curvatura $\theta = 120°$, conforme mostrado. O conjunto afasta-se do bocal com velocidade constante $U = 30$ ft/s, à medida que recebe o jato d'água com velocidade de 100 ft/s. O bocal tem uma área de saída de 0,04 ft^2. Determine a força que deve ser aplicada sobre o carrinho, de modo a manter sua velocidade constante.

4.109 Um barco a jato capta água a uma taxa volumétrica Q por aberturas laterais no casco e a ejeta em alta velocidade V_j pela sua traseira. Um orifício de saída de área variável controla a velocidade do jato. O arrasto sobre o barco é dado por $F_{arrasto} \approx kV^2$, onde V é a velocidade do barco. Encontre uma expressão para a velocidade permanente V. Se uma velocidade do jato $V_j = 25$ m/s produz uma velocidade do barco de 10 m/s, qual é a velocidade do jato requerida para dobrar a velocidade do barco?

4.110 Um jato de óleo (SG = 0,8) atinge uma lâmina curva que desvia o fluido de um ângulo $\theta = 180°$. A área do jato é 1200 mm^2 e sua velocidade relativa ao bocal estacionário é 20 m/s. A lâmina aproxima-se do bocal a uma taxa de 10 m/s. Determine a força que deve ser aplicada sobre a lâmina para manter sua velocidade constante.

4.111 Um prato circular, cuja seção reta é mostrada, tem um diâmetro externo de 0,20 m. Um jato d'água, com velocidade de 35 m/s, atinge o prato concentricamente. O diâmetro do jato saindo do bocal é 20 mm e o prato distancia-se do bocal a uma taxa de 15 m/s. O disco tem um orifício central (10 mm de diâmetro) que permite a passagem sem resistência de uma corrente de água. O restante do jato é defletido e escoa pelo prato. Calcule a força requerida para manter o movimento do prato.



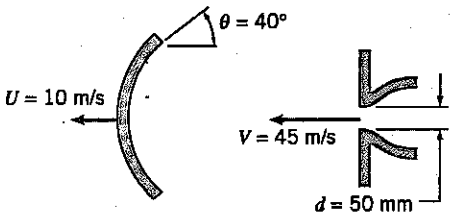
P4.111

*Estes problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

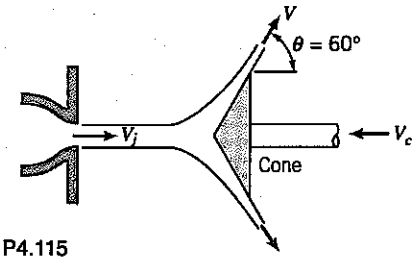
4.112 O avião anfíbio Canadair CL-215T é especialmente projetado para combater incêndios. É o único avião em produção que pode sugar água — 1620 galões em 12 segundos — de qualquer lago, rio ou oceano. Determine o empuxo adicional requerido durante a sucção de água como uma função da velocidade do avião, para uma faixa razoável de velocidades.

4.113 Considere uma pá defletora simples, com curvatura θ, movendo-se horizontalmente com velocidade constante, U, sob a ação de um jato impingente como no Problema 4.108. A velocidade absoluta do jato é V. Obtenha expressões gerais para a força resultante e para a potência que a pá poderia produzir. Mostre que a potência é maximizada quando $U = V/3$.

4.114 O prato circular, cuja seção transversal é mostrada, tem um diâmetro externo de 0,15 m. Um jato d'água o atinge concentricamente e, em seguida, escoa para fora ao longo da superfície do prato. A velocidade do jato é 45 m/s e o prato distancia-se do bocal a uma taxa de 10 m/s. Determine a espessura da lâmina d'água em um raio de 75 mm a partir do eixo do jato. Que força horizontal sobre o prato é requerida para manter o seu movimento?



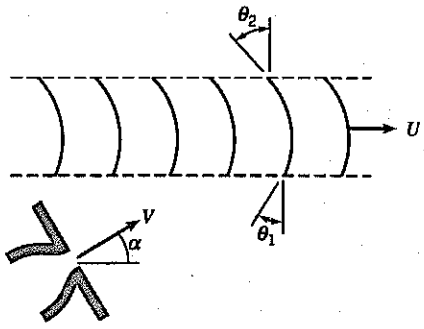
P4.114



P4.115

4.115 Um jato d'água, de 100 mm de diâmetro e velocidade de 30 m/s, é defletido por um cone que se move de encontro ao jato a uma taxa de 15 m/s, conforme mostrado. Determine (a) a espessura da lâmina de água num raio de 200 mm medido verticalmente a partir da linha de centro do eixo do cone (ou do jato) e (b) a força externa horizontal necessária para mover o cone.

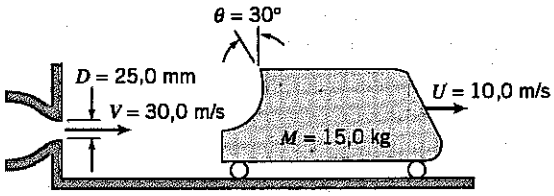
4.116 Considere uma série de pás curvas atingidas por um jato contínuo de água com velocidade constante, $V = 86{,}6$ m/s. O jato sai de um bocal de 50 mm de diâmetro e as pás movem com velocidade constante, $U = 50$ m/s. Note que toda a vazão em massa do jato atravessa as pás. A curvatura das pás é descrita pelos ângulos $\theta_1 = 30°$ e $\theta_2 = 45°$, conforme mostrado. Avalie o ângulo do bocal, α, requerido para assegurar que o jato entre tangente à borda de ataque de cada pá. Calcule a força que deve ser aplicada para manter a velocidade das pás constante.



P4.116, 4.117, 4.163

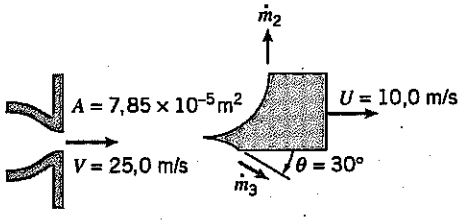
4.117 Considere novamente o sistema móvel de pás múltiplas do Problema 4.116. Admitindo que pode ser encontrada uma maneira de tornar o ângulo α aproximadamente zero (e daí, θ aproximadamente 90°), avalie a velocidade das pás, U, que resultaria na potência máxima gerada pelo sistema.

4.118 Um jato contínuo de água é empregado para propelir um carrinho ao longo de uma pista horizontal, conforme mostrado. A resistência total ao movimento do carrinho é dada por $F_D = kU^2$, com $k = 0{,}92$ N·s²/m². Avalie a aceleração do carrinho no instante em que a sua velocidade é $U = 10$ m/s.



P4.118, 4.120, 4.124, 4.163

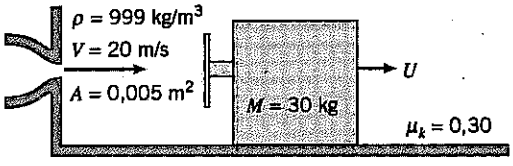
4.119 Um jato plano de água atinge uma pá divisora, repartindo-se em duas correntes planas, conforme mostrado. Determine a razão entre as vazões mássicas, $\dot{m}_2/\dot{m}_3$, necessária para produzir uma força resultante vertical igual a zero sobre a pá divisora. Determine a força horizontal que deve ser aplicada para manter a pá com velocidade constante sob essas condições.



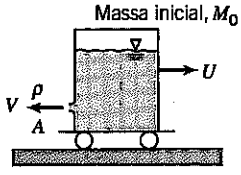
P4.119

4.120 O carrinho do Problema 4.118 é acelerado pelo jato de água que atinge sua pá curva e move-se ao longo de uma pista horizontal com resistência desprezível. Num dado instante, sua velocidade é U. Calcule o tempo requerido para acelerar o carrinho do repouso até $U = V/2$.

4.121 Um conjunto pá/bloco deslizante move-se sob a ação do jato de um líquido, conforme mostrado. O coeficiente de atrito cinético para o movimento do bloco ao longo da superfície é $\mu_k = 0{,}30$. Calcule a velocidade terminal do bloco.



P4.121, 4.122, 4.132, 4.133



P4.123, 4.164

4.122 Para o conjunto pá/bloco deslizante do Problema 4.121, encontre e plote expressões para a aceleração, velocidade e posição do bloco como funções do tempo.

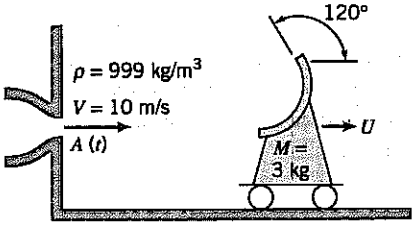
4.123 Um carrinho é propelido por um jato de líquido que sai horizontalmente de um tanque, conforme mostrado. A pista é horizontal e a resistência ao movimento pode ser desprezada. O tanque é pressurizado, de modo que a velocidade do jato pode ser considerada constante. Obtenha uma expressão geral para a velocidade do carrinho à medida que ele acelera a partir do repouso. Se $M_0 = 100$ kg, $\rho = 999$ kg/m³ e $A = 0{,}005$ m², determine a velocidade do jato V requerida para que o carrinho atinja uma velocidade de 1,5 m/s após 30 segundos. Para esta condição, trace um gráfico da velocidade U como uma função do tempo. Trace um gráfico da velocidade do carrinho em função da velocidade do jato, para o tempo de 30 segundos.

4.124 Se o carrinho do Problema 4.118 inicia o movimento em $t = 0$, em que instante você esperaria a aceleração máxima? Esboce a sua expectativa para a curva de aceleração em função do tempo. Qual o valor de θ que daria a aceleração máxima em qualquer instante? Por quê? A velocidade do carrinho poderá em algum instante igualar-se à velocidade do jato? Explique de forma clara e sucinta.

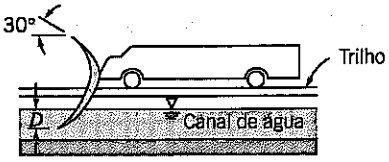
4.125 A aceleração do carrinho do Problema 4.108 deve ser controlada pela variação do ângulo da sua pá, θ, a partir do instante em que ele inicia o movimento. Uma aceleração constante, $a = 1{,}5$ m/s², é desejada. O jato d'água deixa o bocal de área $A = 0{,}025$ m² com velocidade $V = 15$ m/s. O conjunto carrinho/pá

tem massa de 55 kg; despreze o atrito. Determine θ no instante $t = 5$ s. Trace um gráfico de $\theta(t)$ para uma dada aceleração constante sobre uma faixa adequada de tempo.

4.126 O carrinho mostrado rola com resistência desprezível. Ele deve acelerar para a direita a uma taxa constante de 2 m/s². Isto deverá ser realizado pela "programação" da área do jato de água, $A(t)$, que atinge o carrinho. A velocidade do jato permanece constante em 10 m/s. Obtenha uma expressão para $A(t)$ requerida para produzir o movimento desejado. Esboce a variação de área para $t \leq 4$ s. Avalie a área do jato em $t = 2$ s.



P4.126

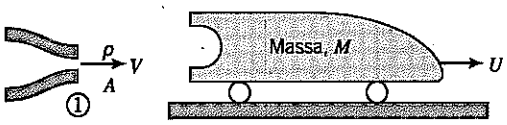


P4.127, 4.128

4.127 Um veículo-foguete, pesando 10.000 lbf e viajando a 600 mph, deve ser freado pelo abaixamento de uma concha para dentro de um reservatório de água. A concha tem 6 in de largura. Determine o tempo necessário (após o abaixamento da concha até uma profundidade de 3 in na água) para reduzir a velocidade do veículo a 20 mph. Trace um gráfico da velocidade do veículo em função do tempo.

4.128 Um veículo-foguete, com velocidade inicial de 300 m/s, deve ser desacelerado pelo abaixamento de uma concha para dentro de um reservatório de água. A concha tem 0,3 m de largura e deflete a água de 150°. O reservatório tem 800 m de comprimento e a massa do veículo é 8000 kg. Na velocidade inicial, o veículo é submetido a uma força de arrasto aerodinâmico de 90 kN. A força aerodinâmica é proporcional ao quadrado da velocidade do veículo. Deseja-se diminuir a velocidade do veículo para 100 m/s. Determine a profundidade requerida D de imersão da concha na água.

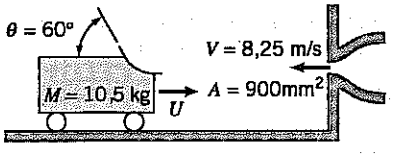
4.129 Partindo do repouso, o carrinho mostrado é propelido por uma *catapulta hidráulica* (jato de líquido). O jato atinge a superfície curva e é defletido de 180°, saindo na horizontal. As resistências de rolamento e do ar podem ser desprezadas. Se a massa do carrinho é de 100 kg e o jato d'água sai do bocal (área 0,001 m²) com uma velocidade de 35 m/s, determine a velocidade do carrinho 5 s após ser atingido pelo jato. Trace um gráfico da velocidade do carrinho em função do tempo.



P4.129, 4.130, 4.153

4.130 Considere novamente o jato e o carrinho do Problema 4.129, mas inclua agora uma força de arrasto aerodinâmico proporcional ao quadrado da velocidade do carrinho, $F_D = kU^2$, com $k = 2\ \text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^2$. Deduza uma expressão para a aceleração do carrinho como uma função de sua velocidade e de outros parâmetros dados. Avalie a aceleração do carrinho para $U = 10$ m/s. Esta velocidade representa que fração da velocidade terminal do carrinho?

4.131 Um carrinho, com uma pá defletora fixa, está livre para rolar sobre uma superfície nivelada. A massa do carrinho/pá é $M = 10{,}5$ kg e sua velocidade inicial é $U_0 = 12{,}5$ m/s. Em $t = 0$, a pá é atingida por um jato de água em sentido oposto ao movimento do carrinho, conforme mostrado. Despreze quaisquer forças externas decorrentes de resistência do ar e de rolamento. Determine o tempo e a distância necessários para que o jato de líquido cause a parada do carrinho. Trace um gráfico da velocidade do carrinho (adimensionalizada com U_0) e da distância percorrida como funções do tempo.

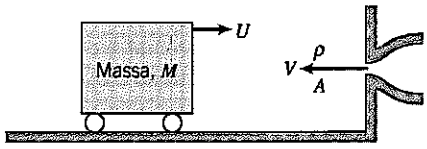


P4.131

4.132 Resolva o Problema 4.121, considerando o bloco/pá deslizando sobre uma película de óleo em vez de estar em contato direto com a superfície. Admita que a resistência ao movimento é proporcional à velocidade do bloco, $F_R = kU$, com $k = 7{,}5$ N·s/m.

4.133 Para o conjunto bloco deslizante/pá do Problema 4.132, encontre e plote expressões gerais para a aceleração, velocidade e posição do bloco como funções do tempo. (Considere integração numérica.)

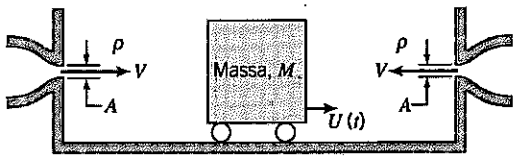
4.134 Um bloco retangular de massa M, com faces verticais, rola sem resistência ao longo de um plano horizontal liso, conforme mostrado. O bloco viaja, inicialmente, à velocidade U_0. Em $t = 0$, ele é atingido por um jato líquido e a sua velocidade começa a diminuir. Obtenha uma expressão algébrica para a aceleração do bloco para $t > 0$. Resolva a equação, a fim de determinar o instante em que $U = 0$.



P4.134, 4.135

4.135 Considere a figura mostrada, com $M = 100$ kg, $\rho = 999$ kg/m³ e $A = 0{,}01$ m². Determine a velocidade V do jato requerida para que o carrinho seja levado ao repouso depois de um segundo, se a velocidade inicial do carrinho for $U_0 = 5$ m/s. Para esta condição, trace um gráfico da velocidade U e da posição x do carrinho como funções do tempo. Qual é o valor máximo de x, e quanto tempo o carrinho leva para retornar à sua posição inicial?

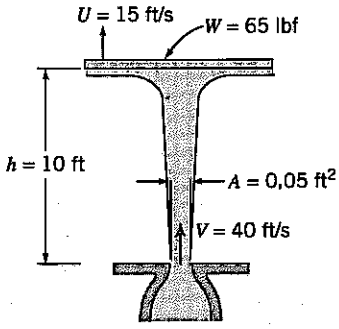
4.136 Um bloco retangular de massa M, com faces verticais, rola sobre uma superfície horizontal entre dois jatos opostos, conforme mostrado. Em $t = 0$, o bloco é posto em movimento com velocidade U_0. Em seguida, ele move-se sem atrito paralelamente aos eixos dos jatos com velocidade $U(t)$. Despreze a massa de líquido aderente ao bloco em comparação com M. Obtenha expressões gerais para a aceleração do bloco, $a(t)$, e para sua velocidade, $U(t)$.



P4.136, 4.137

4.137 Considere novamente o enunciado e o diagrama do Problema 4.136. Admita que em $t = 0$, quando o bloco está em $x = 0$, ele seja posto em movimento para a direita com velocidade $U_0 = 10$ m/s. Calcule o tempo requerido para reduzir a velocidade do bloco a $U = 0{,}5$ m/s, e a posição do bloco nesse instante.

***4.138** Um jato vertical de água atinge um disco horizontal de peso igual a 65 lbf, conforme mostrado. No instante em que o disco encontra-se a 10 ft acima da saída do bocal, o seu movimento é para cima com velocidade $U = 15$ ft/s. Calcule a aceleração vertical do disco nesse instante.



P4.138, 4.139, 4.160

*Estes problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

*4.139 Um jato vertical de água sai de um bocal de 75 mm de diâmetro. O jato atinge um disco horizontal (veja Problema 4.138). O disco é restringido horizontalmente, mas está livre para se mover verticalmente. A massa do disco é 35 kg. Trace um gráfico da massa do disco *versus* vazão para determinar a vazão de água requerida para elevar o disco 3 m acima do plano de saída do jato.

4.140 Uma cápsula espacial tripulada viaja em vôo nivelado acima da atmosfera terrestre com velocidade inicial $U_0 = 8{,}00$ km/s. A cápsula deve ser desacelerada por um retrofoguete até $U = 5{,}00$ km/s na preparação para a manobra de reentrada. A massa inicial da cápsula é $M_0 = 1600$ kg. O foguete consome combustível à taxa $\dot{m} = 8{,}0$ kg/s, e os gases de descarga saem a $V_e = 3000$ m/s em relação à cápsula, com pressão desprezível. Avalie o tempo de funcionamento do retro-foguete necessário para realizar a desaceleração. Trace um gráfico da velocidade final como uma função do tempo de duração da operação para uma faixa de ± 10% do tempo de queima do combustível.

4.141 Um trenó-foguete, viajando sobre uma pista horizontal, é desacelerado por um retrofoguete com queima no sentido do trajeto. A velocidade inicial do trenó é $U_0 = 500$ m/s. A massa inicial do trenó é $M_0 = 1500$ kg. O retrofoguete consome combustível a uma taxa de 7,75 kg/s e os gases de descarga saem à pressão atmosférica e com uma velocidade de 2500 m/s em relação à cápsula. O retrofoguete opera por 20 s. Despreze atrito de rolamento e arrasto aerodinâmico. Obtenha e plote uma expressão algébrica para a velocidade U do trenó como uma função do tempo de funcionamento do retrofoguete. Calcule a velocidade do trenó no final do funcionamento do retrofoguete.

4.142 Um trenó-foguete acelera do repouso sobre uma pista com resistências do ar e de rolamento desprezíveis. A massa inicial do trenó é $M_0 = 600$ kg e o foguete contém inicialmente 150 kg de combustível. O motor do foguete queima combustível a uma taxa constante, $\dot{m} = 15$ kg/s. Os gases de combustão saem do bocal do foguete à pressão atmosférica, num fluxo uniforme e axial, e com velocidade $V_e = 2900$ m/s em relação ao bocal. Determine a velocidade máxima alcançada pelo trenó-foguete. Calcule a aceleração máxima do trenó durante a corrida.

4.143 Um trenó-foguete, com massa inicial de 2000 lbm, deve ser acelerado em uma pista nivelada. O motor do foguete queima combustível a uma taxa constante $\dot{m} = 30$ lbm/s. Os gases de combustão saem do bocal do foguete à pressão atmosférica, num fluxo uniforme e axial, e com velocidade de 9000 ft/s em relação ao bocal. Determine a massa mínima de combustível necessária para propelir o trenó a uma velocidade de 600 mph antes que o foguete apague. Como primeira aproximação, despreze forças de resistências.

4.144 Um trenó-foguete tem massa inicial de quatro toneladas métricas, incluindo uma tonelada de combustível. As resistência do ar e de rolamento na pista sobre a qual o trenó corre totalizam kU, onde k é 75 N·s/m e U é a velocidade do trenó em m/s. A velocidade de saída dos gases de combustão relativa ao foguete é de 1500 m/s, e a pressão de saída é atmosférica. A queima de combustível ocorre a uma taxa de 75 kg/s. Calcule a velocidade do trenó após 10 s. Plote a velocidade e a aceleração do foguete como funções do tempo. Encontre a velocidade máxima.

4.145 Um motor de foguete é usado para acelerar um míssil até uma velocidade de 1,8 km/s em vôo horizontal. Os gases de combustão deixam o bocal do foguete axialmente e à pressão atmosférica com uma velocidade de 3000 m/s em relação ao foguete. A ignição do motor do foguete ocorre no momento do lançamento do míssil por uma aeronave voando horizontalmente a $U_0 = 300$ m/s. Desprezando resistência do ar, obtenha uma expressão algébrica para a velocidade alcançada pelo míssil em vôo nivelado. Determine a mínima fração da massa inicial do míssil que deve ser combustível para realizar a aceleração desejada.

4.146 Um trenó-foguete, com massa inicial de três toneladas métricas incluindo uma tonelada de combustível, repousa sobre um trecho de uma pista nivelada. Em $t = 0$, ocorre a ignição do combustível sólido do foguete e a queima dá-se a uma taxa de 75 kg/s. A velocidade de saída dos gases de combustão em relação ao foguete é de 2500 m/s, e a pressão de saída é atmosférica. Desprezando atrito e resistência do ar, calcule a aceleração e a velocidade do trenó em $t = 10$ s.

4.147 Um destemido piloto, considerando a possibilidade de um recorde (o mais longo salto de motocicleta do mundo), procura ajuda de um consultor: para realizar o salto, o piloto deve atingir 875 km/h (a partir do repouso sobre um terreno plano) e, para tanto, ele precisa da propulsão de um foguete. A massa total da motocicleta mais motor do foguete sem combustível e mais motociclista é de 375 kg. Os gases de combustão deixam o bocal do foguete horizontalmente, com velocidade de 2510 m/s e à pressão atmosférica. Avalie a quantidade mínima de combustível do foguete necessária para acelerar a motocicleta e o motociclista até a velocidade requerida.

*Estes problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

4.148 Um grande foguete de dois estágios, a combustível líquido e com massa de 30.000 kg, deve ser lançado de uma plataforma no nível do mar. O motor principal queima uma mistura estequiométrica de hidrogênio líquido e oxigênio líquido a uma taxa de 2450 kg/s. O bocal de empuxo tem um diâmetro de saída de 2,6 m. Os gases de combustão saem a 2270 m/s e a pressão absoluta no plano de saída do bocal é 66 kPa. Calcule a aceleração do foguete ao deixar o solo. Obtenha uma expressão para a velocidade como uma função do tempo, desprezando a resistência do ar.

4.149 Um foguete de "construção caseira", a combustível sólido, tem uma massa inicial de 20 lbm; 15 lbm são de combustível. O foguete é lançado verticalmente para cima a partir do repouso, queima combustível a uma taxa constante de 0,5 lbm/s e expele os gases de combustão a uma velocidade de 6500 ft/s em relação ao foguete. Admita que a pressão na saída seja atmosférica e que a resistência do ar possa ser desprezada. Calcule a velocidade do foguete e a distância percorrida por ele 20 s após o lançamento. Plote a velocidade do foguete e a distância percorrida como funções do tempo.

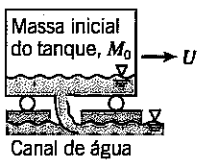
4.150 Desprezando a resistência do ar, que velocidade atinge um foguete 10 segundos após o seu lançamento vertical a partir do repouso, se a sua massa inicial é de 200 kg, a taxa de queima é de 10 kg/s e os gases são expelidos à pressão atmosférica com velocidade de 2900 m/s em relação ao foguete? Trace um gráfico da velocidade do foguete em função do tempo.

4.151 Encha um balão de brinquedo com ar e, em seguida, solte-o num quarto. Observe como o balão desloca-se bruscamente de um lado para outro no quarto. Explique o que causa esse fenômeno.

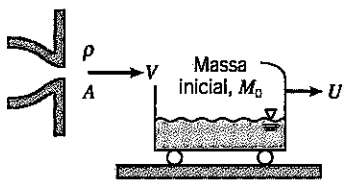
4.152 O conjunto carrinho/pá de massa $M = 30$ kg, mostrado no Problema 4.108, é movido por um jato d'água. A água deixa o bocal estacionário de área $A = 0{,}02$ m^2 com uma velocidade de 20 m/s. O coeficiente de atrito cinético entre o carrinho e a superfície é 0,10. Plote a velocidade terminal do conjunto como uma função do ângulo de deflexão da pá, θ, para $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Para qual ângulo o conjunto começa a mover, se o coeficiente de atrito estático é 0,15?

4.153 Considere o veículo mostrado no Problema 4.129. Partindo do repouso, ele é propelido por uma catapulta hidráulica (jato de líquido). O jato atinge a superfície curva e faz uma volta de 180°, saindo horizontalmente. As resistências do ar e de rolamento podem ser desprezadas. Usando a notação mostrada, obtenha uma equação para a aceleração do veículo em qualquer instante e determine o tempo requerido para o veículo desenvolver a velocidade $U = V/2$.

4.154 O tanque móvel mostrado deve ser desacelerado pelo abaixamento de uma concha que capta água de um reservatório. A massa e a velocidade iniciais do tanque, com seu conteúdo, são M_0 e U_0, respectivamente. Despreze forças externas de pressão e de atrito e admita que a pista seja horizontal. Aplique as equações da continuidade e da quantidade de movimento para mostrar que, em qualquer instante, $U = U_0M_0/M$. Obtenha uma expressão geral para U/U_0 como uma função do tempo.



P4.154



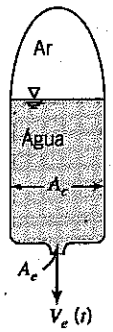
P4.155

4.155 O tanque mostrado pode movimentar ao longo de uma pista horizontal com resistência desprezível. Ele deve ser acelerado do repouso por um jato líquido que se choca contra sua parede curva e é defletido para dentro do tanque. A massa inicial do tanque é M_0. Aplique as equações da continuidade e da quantidade de movimento para mostrar que, em qualquer instante, a massa do veículo mais o líquido no seu interior é $M = M_0V/(V - U)$. Obtenha uma expressão geral para U/V como uma função do tempo.

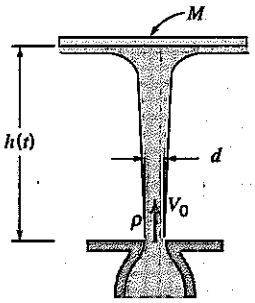
4.156 Um pequeno motor de foguete é utilizado para acionar um dispositivo a "jato portátil" destinado a elevar um passageiro acima da superfície da Terra. O motor do foguete produz um jato uniforme com velocidade constante, $V_e = 2940$ m/s. A massa total inicial do passageiro mais o aparelho é 130 kg. Desta, 40 kg são de combustível para o motor do foguete. Desenvolva uma expressão algébrica para a vazão mássica variável do combustível requerida para manter o dispositivo e o passageiro pairando numa posição fixa acima do solo. Calcule o tempo máximo de sustentação do dispositivo e do passageiro no ar.

4.157 Um modelo de foguete, a propelente sólido, tem uma massa de 69,6 g, da qual 12,5 g são de combustível. O foguete produz 1,3 lbf de empuxo por um período de 1,7 s. Para essas condições, calcule a velocidade e altura máximas atingidas, na ausência de resistência do ar. Trace um gráfico da velocidade do foguete e da distância percorrida como funções do tempo.

*4.158 Diversos fabricantes de brinquedos vendem "foguetes" de água que consistem em um tanque de plástico a ser parcialmente enchido com água e, em seguida, pressurizado com ar. Quando liberado, o ar força a água a sair do bocal rapidamente, impulsionando o foguete. Você é chamado a ajudar na especificação das condições ótimas para esse sistema de propulsão a jato d'água. Para simplificar a análise, considere apenas movimento horizontal. Faça a análise e o projeto necessários para definir o desempenho em aceleração do foguete de brinquedo. Identifique a fração do volume do tanque que deve ser enchida inicialmente com ar comprimido para se atingir o desempenho máximo (isto é, a máxima velocidade da carga de água). Descreva o efeito obtido com a variação da pressão inicial do ar no tanque.



P4.158



P4.159

*4.159 Um disco de massa M é restringido horizontalmente, mas está livre para movimentar na vertical. Um jato d'água atinge o disco por baixo, conforme mostrado. O jato sai do bocal com velocidade inicial V_0. Obtenha uma equação diferencial para a altura variável do disco, $h(t)$, acima do plano de saída do jato, se o disco for largado na horizontal de uma altura, H. Admita que, quando o disco atinge o equilíbrio, a sua altura acima do plano de saída do bocal é h_0. Esboce um gráfico de $h(t)$ para o disco liberado em $t = 0$. partindo de $H > h_0$. Explique por que a curva $h(t)$ tem o aspecto encontrado.

*4.160 Considere a configuração do jato vertical atingindo o disco horizontal conforme mostrado no Problema 4.138. Suponha que o disco é largado do repouso a uma altura inicial de 10 ft acima do plano de saída do jato. Resolva para o movimento subseqüente do disco. Identifique a altura de regime permanente do disco.

4.161 Um pequeno motor de foguete, a combustível sólido, é testado em uma bancada. A câmara de combustão é circular, com 100 mm de diâmetro. O combustível, de massa específica 1660 kg/m³, queima uniformemente à taxa de 12,7 mm/s. Medições mostram que os gases de combustão saem do foguete para o ambiente com uma velocidade de 2750 m/s. A pressão e a temperatura absolutas na câmara de combustão são 7,0 MPa e 3610 K. Trate os produtos da combustão como um gás ideal com massa molecular 25,8. Avalie as taxas de variação da massa e da quantidade de movimento dentro do motor do foguete. Expresse esta taxa de variação da quantidade de movimento como um percentual do empuxo do motor.

*4.162 Uma demonstração em sala de aula da quantidade de movimento linear é planejada usando um sistema de propulsão a jato d'água para um carrinho trafegando sobre uma pista horizontal retilínea. A pista tem 5 m de comprimento e a massa do carrinho é 155 g. O objetivo do projeto é obter o melhor desempenho para o carrinho, usando 1 litro de água contida em um tanque cilíndrico aberto feito de material plástico com massa específica de 0,0819 g/cm². Para estabilidade, a altura máxima do tanque de água não deve exceder 0,5 m. O diâmetro do bocal de jato d'água, liso e bem arredondado, não pode exceder 10 por cento do diâmetro do tanque. Determine as melhores dimensões do tanque e do jato d'água por modelagem do desempenho do sistema. Plote aceleração, velocidade e distância como funções do tempo. Encontre as dimensões ótimas do tanque e do bocal. Discuta as limitações de sua análise. Discuta como as hipóteses afetam o desempenho previsto do carrinho. Seria o desempenho real do carrinho melhor ou pior que o previsto? Por quê? Que fatores contribuem para a(s) diferença(s) entre o desempenho real e o previsto?

*4.163 A capacidade do laboratório do centro de pesquisas para cargas de solo e tração de aeronaves da NASA, em Langley, deve ser ampliada. A instalação consiste em um reboque montado em trilhos e impulsionado por um jato d'água proveniente de um tanque pressurizado. (O conjunto é idêntico conceitual-

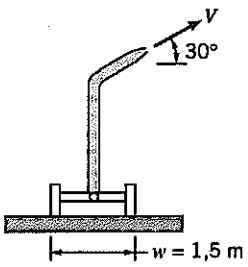
*Estes problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

mente à catapulta hidráulica do Problema 4.118.) As especificações requerem aceleração do reboque com massa de 49.000 kg até uma velocidade de 220 nós em uma distância de 122 m. (O ângulo da pá defletora é 170°.) Identifique as faixas de dimensões e velocidades dos jatos d'água necessários para realizar a operação. Especifique a pressão de operação recomendada para o sistema de jato d'água e determine a forma e tamanho estimado do tanque de contenção da água pressurizada.

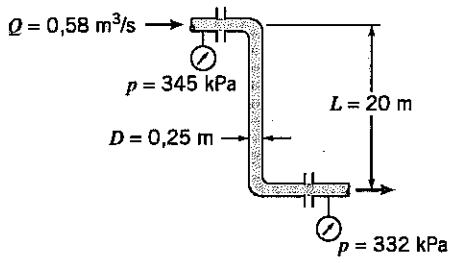
***4.164** Analise o projeto e otimize o desempenho de um carrinho impulsionado ao longo de uma pista horizontal por um jato d'água que sai, sob a ação da gravidade, de um tanque cilíndrico aberto fixado na carroceria do carrinho. (Um carrinho a jato d'água é mostrado no diagrama do Problema 4.123.) Despreze qualquer variação na inclinação da superfície livre do líquido no tanque durante a aceleração. Analise o movimento do carrinho ao longo de uma pista horizontal, admitindo que ele parte do repouso e começa a acelerar quando o jato d'água começa a escoar. Deduza equações algébricas ou resolva numericamente para a aceleração e a velocidade do carrinho como funções do tempo. Apresente os resultados como gráficos de aceleração e de velocidade em função do tempo, desprezando a massa do tanque. Determine as dimensões de um tanque de massa mínima requerido para acelerar o carrinho ao longo de uma pista horizontal do repouso até uma velocidade especificada em um intervalo de tempo especificado.

***4.165** O cotovelo redutor de 90° do Problema-Exemplo 4.6 descarrega para a atmosfera. A seção ② está localizada 0,3 m à direita da seção ①. Estimar o momento exercido pelo flange no cotovelo.

***4.166** Um grande dispositivo de irrigação montado sobre um carrinho descarrega um jato d'água com velocidade de 40 m/s a um ângulo de 30° com a horizontal. O bocal de 50 mm de diâmetro está 3 m acima do solo. A massa do dispositivo mais o carrinho é $M = 350$ kg. Calcule o módulo do momento que tende a tombar o carrinho. Que valor de V levará à condição de movimento iminente do carrinho? Qual será a natureza desse movimento? Qual é o efeito do ângulo de inclinação do jato sobre os resultados? Para o caso de movimento iminente do carrinho, trace um gráfico da velocidade do jato como função do seu ângulo de inclinação para uma faixa apropriada de ângulos do jato.



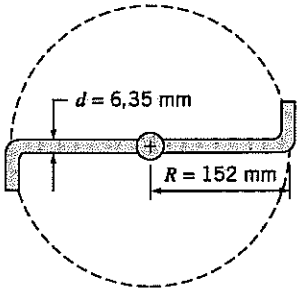
P4.166



P4.167

***4.167** Petróleo bruto (SG = 0,95), proveniente de um petroleiro ancorado, escoa através de uma tubulação de 0,25 m de diâmetro com a configuração mostrada. A vazão é 0,58 m³/s e as pressões manométricas são mostradas no diagrama. Determine a força e o torque que são exercidos pela tubulação sobres seus suportes.

***4.168** Um regador comum de gramados pode girar no plano horizontal, conforme mostrado. Água entra verticalmente pelo pivô central com uma vazão $Q = 4{,}5$ gpm. A água é descarregada em jatos através dos dois bicos no plano horizontal. Admitindo pivô sem atrito, calcule o torque resistente necessário para manter o regador imóvel. Desprezando a inércia do regador, calcule a aceleração angular que resulta quando o torque resistente é removido.



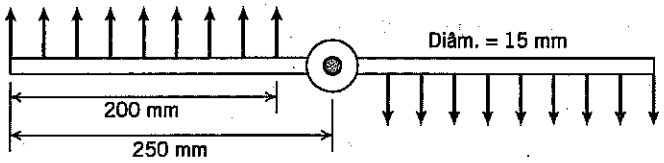
P4.168, 4.169, 4.170

*Estes problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

***4.169** Considere novamente o regador do Problema 4.168. Deduza uma equação diferencial para a sua velocidade angular como uma função do tempo. Avalie a velocidade de rotação em regime permanente, admitindo que não haja atrito no pivô.

***4.170** Repita o Problema 4.169, considerando a existência de um torque retardador constante no pivô igual a 0,045 ft · lbf.

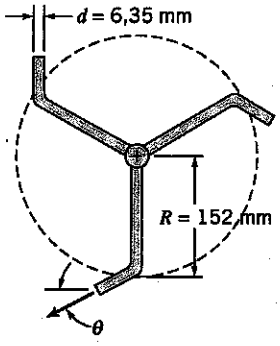
4.171 Água escoa em fluxos uniformes através de ranhuras de 5 mm do sistema rotativo mostrado. A vazão é de 15 kg/s. Determine o torque requerido para manter o dispositivo estacionário e a velocidade de rotação em regime permanente após a retirada do torque resistente.



P4.171, 4.172

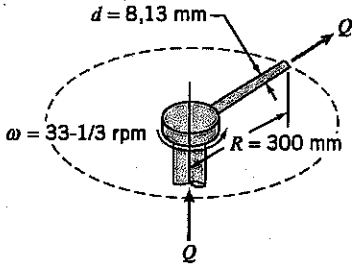
4.172 Considere novamente o sistema rotativo do Problema 4.171. Se, para a mesma vazão mássica, o escoamento for não-uniforme através das ranhuras, variando linearmente de um máximo no raio externo até zero num ponto a 50 mm do pivô, determine o torque requerido para manter o dispositivo estacionário e a velocidade de rotação em regime permanente.

***4.173** O regador de gramados mostrado é suprido com água a uma taxa de 68 *L*/min. Desprezando o atrito no pivô, determine a velocidade angular do regador em regime permanente para $\theta = 30°$. Trace um gráfico da velocidade angular do regador em regime permanente para $0 \leq \theta \leq 90°$.

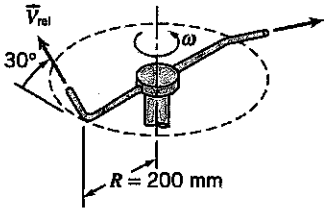


P4.173

***4.174** Um dispositivo simples de irrigação gira com velocidade angular constante, conforme mostrado. Água é bombeada através do tubo com uma vazão $Q = 13{,}8$ *L*/min. Determine o torque que deve ser aplicado para manter o dispositivo com rotação constante, usando dois métodos de análise: (a) um volume de controle rotativo e (b) um volume de controle fixo.



P4.174



P4.175, 4.176, 4.177

*Estes problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

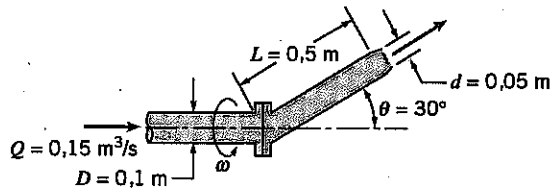
***4.175** A figura mostra um pequeno regador de gramados. Ele opera com uma pressão manométrica de 140 kPa. A vazão volumétrica total de água através dos braços do regador é de 4 *L*/min. Cada jato descarrega água a 17 m/s (em relação ao braço do regador) com uma inclinação de 30° para cima em relação ao plano horizontal. O regador gira em torno de um eixo vertical (pivô). O atrito no pivô causa um torque de oposição à rotação de 0,18 N · m. Avalie o torque necessário para manter o regador estacionário.

***4.176** No Problema 4.175, calcule a aceleração inicial do regador a partir do repouso, admitindo que não haja torque externo aplicado e que o momento de inércia do cabeçote de irrigação é de 0,1 kg · m² quando cheio d'água.

***4.177** Um pequeno regador de gramados é mostrado (Problema 4.175). Ele opera com uma pressão manométrica na entrada de 140 kPa. A vazão total em volume de água através do regador é de 4 *L*/min. Cada jato descarrega água a 17 m/s (em relação ao braço do regador) com uma inclinação de 30° para cima em relação ao plano horizontal. O regador gira em torno de um eixo vertical (pivô). O atrito no pivô causa um torque de oposição à rotação de 0,18 N · m. Determine a velocidade de rotação em regime permanente do regador e a área aproximada coberta pelos jatos d'água.

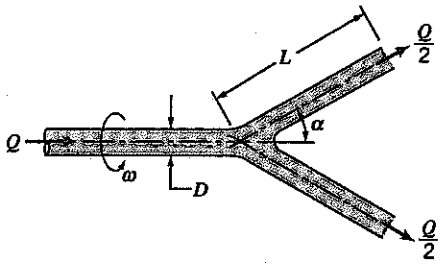
***4.178** Quando uma mangueira de jardim é usada para encher um balde, a água no balde pode desenvolver um movimento giratório como o de um redemoinho. Por que isso ocorre? Como poderia ser avaliada, aproximadamente, a quantidade de movimento giratório?

***4.179** Água escoa com vazão de 0,15 m³/s através de uma tubulação com bocal que gira com velocidade constante de 30 rpm. As massas do tubo inclinado e do bocal são desprezíveis comparadas com a massa de água no interior. Determine o torque necessário para girar o conjunto e os torques de reação no flange.

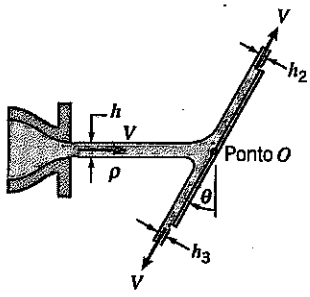


P4.179

4.180 Um tubo bifurca simetricamente em duas pernas de comprimento *L*, e o sistema todo gira com velocidade angular ω em torno do seu eixo de simetria. Cada perna é inclinada de um ângulo α em relação ao eixo de rotação. Líquido entra no tubo em regime permanente, com quantidade de movimento angular igual a zero e com uma vazão volumétrica *Q*. O diâmetro do tubo, *D*, é muito menor que *L*. Obtenha uma expressão para o torque externo necessário para girar o conjunto. Que torque adicional seria necessário para imprimir uma aceleração angular ω?



P4.180



P4.181

***4.181** Líquido, em um jato fino de largura *w* e espessura *h*, escoa de uma ranhura e atinge uma placa plana estacionária, conforme mostrado. Experiências mostram que a força resultante do jato de líquido sobre a placa não atua através do ponto *O*, onde a linha de centro do jato intercepta a placa. Determine o módulo e a linha de ação da força resultante como funções de θ. Avalie o ângulo de equilíbrio da placa, se a força resultante fosse aplicada no ponto *O*. Despreze qualquer efeito viscoso.

*Estes problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

*4.182 Para o regador giratório do Problema-Exemplo 4.14, que valor de α produzirá a velocidade máxima de rotação? Que ângulo fornecerá a área máxima de cobertura do regador? Desenhe um diagrama de velocidades (usando um sistema de coordenadas r, θ, z) para indicar a velocidade absoluta do jato d'água deixando o bocal. O que governa a velocidade de rotação do regador no regime permanente? A velocidade de rotação do regador afeta a área coberta pelos jatos d'água? Como você estimaria essa área? Para um α fixo, o que pode ser feito para aumentar ou diminuir a área coberta pelos jatos d'água?

4.183 Ar, na condição padrão, entra em um compressor a 75 m/s e sai com pressão e temperatura absolutas de 200 kPa e 345 K e velocidade $V = 125$ m/s. A vazão é 1 kg/s. A água de resfriamento que circula na carcaça do compressor remove 18 kJ/kg de ar. Determine a potência requerida pelo compressor.

4.184 Ar comprimido é armazenado a 3000 psia e 140°F em um recipiente com volume de 10 ft³. Num determinado instante, uma válvula é aberta e ar escoa do recipiente à taxa $\dot{m} = 0{,}105$ lbm/s. Determine a taxa de variação da temperatura do ar no recipiente nesse instante.

4.185 Uma bomba centrífuga, com diâmetro de 4 in nos tubos de sucção e de descarga, fornece uma vazão de água de 300 gpm. A pressão na sucção é de 8 inHg (vácuo) e a pressão manométrica na descarga é de 35 psig. As seções de entrada e de saída da bomba estão na mesma elevação. A potência elétrica medida no motor da bomba é 9,1 hp. Determine a eficiência da bomba.

4.186 Ar entra em um compressor a 14 psia e 80°F, com velocidade desprezível e é descarregado a 70 psia e 500°F, com velocidade de 500 ft/s. Se a potência fornecida ao compressor é 3200 hp e a vazão em massa é 20 lbm/s, determine a taxa de transferência de calor.

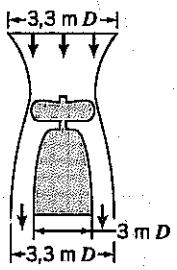
4.187 Uma turbina é alimentada com 0,6 m³/s de água por meio de um tubo com 0,3 m de diâmetro; o tubo de descarga tem diâmetro de 0,4 m. Determine a queda de pressão através da turbina se ela fornece 60 kW.

4.188 Ar é aspirado da atmosfera para dentro de uma turbo-máquina. Na saída, as condições são 500 kPa (manométrica) e 130°C. A velocidade de saída é de 100 m/s e a vazão é de 0,8 kg/s. O escoamento é permanente e não há transferência de calor. Calcule a potência da turbo-máquina.

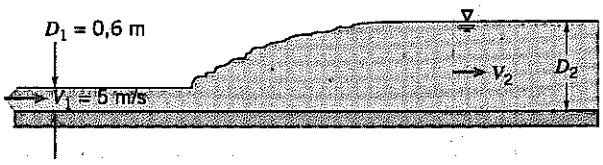
4.189 Uma bomba retira água de um reservatório através de um tubo de sucção de 150 mm de diâmetro e a descarrega para um tubo de saída de 75 mm de diâmetro. A extremidade do tubo de sucção está 2 m abaixo da superfície livre do reservatório. O manômetro no tubo de descarga (2 m acima da superfície do reservatório) indica 170 kPa. A velocidade média no tubo de descarga é de 3 m/s. Se a eficiência da bomba é 75%, determine a potência necessária para acioná-la.

4.190 Todos os grandes portos são equipados com barcos de combate a incêndio em navios cargueiros. Uma mangueira com 75 mm de diâmetro está conectada à descarga de uma bomba de 10 kW em um desses barcos. O bocal conectado à extremidade da mangueira tem um diâmetro de 25 mm. Se a descarga do bocal for mantida 3 m acima da superfície da água, determine a vazão em volume através do bocal, a altura máxima que a água poderia atingir, e a força sobre o barco se o jato d'água for dirigido horizontalmente sobre a popa.

*4.191 A massa total do tipo de helicóptero mostrado é de 1500 kg. A pressão do ar é a atmosférica na saída. Admita que o escoamento seja permanente e unidimensional. Trate o ar como incompressível nas condições-padrão e calcule, para uma posição em que o aparelho paira no ar, a velocidade do ar saindo da aeronave e a potência mínima que deve ser fornecida ao ar pela hélice.



P4.191



P4.192

*Estes problemas requerem material das seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

4.192 Líquido escoando a alta velocidade em um largo canal horizontal aberto pode, sob certas condições, produzir um ressalto hidráulico conforme mostrado. Para um volume de controle convenientemente escolhido, os escoamentos entrando e saindo do ressalto podem ser considerados uniformes com distribuições hidrostáticas de pressão (veja Problema-Exemplo 4.7). Considere um canal de largura w, com escoamento de água com $D_1 = 0{,}6$ m e $V_1 = 5$ m/s. Mostre que, em geral, $D_2 = D_1[\sqrt{1 + 8V_1^2/gD_1} - 1]/2$. Avalie a variação na energia mecânica através do ressalto hidráulico. Se a transferência de calor para o meio ambiente for desprezível, determine a variação na temperatura da água através do ressalto.

Capítulo 5

INTRODUÇÃO À ANÁLISE DIFERENCIAL DOS MOVIMENTOS DOS FLUIDOS

No Capítulo 4, desenvolvemos as equações básicas na forma integral para um volume de controle. As equações integrais são úteis quando estamos interessados no comportamento genérico de um campo de escoamento e nos seus efeitos sobre um ou mais dispositivos. Contudo, a abordagem integral não nos permite obter conhecimentos detalhados ponto por ponto do campo de escoamento. Por exemplo, a metodologia integral pode fornecer informações sobre a sustentação gerada por uma asa, mas não pode ser usada para determinar a distribuição de pressão que produz a sustentação sobre a asa.

Para obter o conhecimento detalhado, devemos aplicar as equações de movimento dos fluidos na forma diferencial. Neste capítulo, desenvolveremos equações diferenciais para a conservação da massa e a segunda lei de Newton. Como estamos interessados na formulação de equações diferenciais, nossa análise será em termos de sistemas e volumes de controle infinitesimais.

5-1 CONSERVAÇÃO DA MASSA

No Capítulo 2, desenvolvemos a representação de campos de propriedades dos fluidos. Os campos de propriedades são definidos por funções contínuas das coordenadas espaciais e do tempo. Os campos de massa específica e de velocidade foram relacionados pela conservação da massa na forma integral no Capítulo 4 (Eq. 4.12). Neste capítulo, deduziremos a equação diferencial para conservação da massa em coordenadas retangulares e cilíndricas. Em ambos os casos, a dedução é feita aplicando a conservação da massa a um volume de controle diferencial.

Sistema de Coordenadas Retangulares

Em coordenadas retangulares, o volume de controle escolhido é um cubo infinitesimal com lados de comprimento dx, dy, dz, conforme mostrado na Fig. 5.1. A massa específica no centro, O, do volume de controle é admitida como sendo ρ e a velocidade ali é admitida como $\vec{V} = \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w$.

Para avaliar as propriedades em cada uma das seis faces da superfície de controle, usaremos uma expansão por série de Taylor em torno do ponto O. Por exemplo, na face direita,

$$\rho\Big)_{x+dx/2} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2} + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right)\frac{1}{2!}\left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \cdots$$

Desprezando os termos de ordem superior, podemos escrever

$$\rho\Big)_{x+dx/2} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

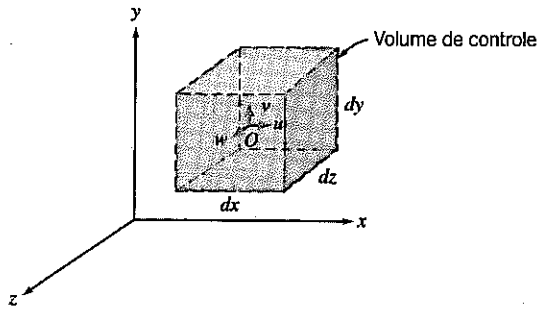


Fig. 5.1 Volume de controle diferencial em coordenadas retangulares.

e

$$u\Big)_{x+dx/2} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

onde ρ, u, $\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ são todos avaliados no ponto O. Os termos correspondentes na face esquerda são

$$\rho\Big)_{x-dx/2} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\left(-\frac{dx}{2}\right) = \rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

$$u\Big)_{x-dx/2} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(-\frac{dx}{2}\right) = u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

Um enunciado da conservação de massa é

$$\begin{bmatrix}\text{Taxa líquida de fluxo de massa}\\ \text{para fora da superfície de controle}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Taxa de variação de massa}\\ \text{dentro do volume de controle}\end{bmatrix} = 0$$

Para determinar o primeiro termo desta equação, devemos avaliar $\int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$; temos que considerar o fluxo de massa através de cada uma das seis faces da superfície de controle. Os detalhes desta avaliação são mostrados na Tabela 5.1. As componentes da velocidade em cada uma das seis faces foram admitidas como estando nos sentidos positivos dos eixos das coordenadas e a convenção de que a normal da área é positiva para fora de cada face foi aplicada. Termos de ordem superior [p. ex., $(dx)^2$] foram desprezados.

Vemos que a taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle é dada por

$$\left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz$$

A massa dentro do volume de controle, em qualquer instante, é o produto da massa por unidade de volume, ρ, pelo volume, $dx\,dy\,dz$. Assim, a taxa de variação da massa dentro do volume de controle é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$$

Em coordenadas retangulares, a equação diferencial para conservação da massa é, então,

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (5.1a)$$

A Eq. 5.1a é freqüentemente chamada de *equação da continuidade.*

Tabela 5.1 Fluxo de Massa através da Superfície de Controle de um Volume de Controle Diferencial Retangular

Superfície	$\int \rho \vec{V} \cdot \delta \vec{A}$
Esquerda $(-x)$	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]\left[u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]dy\,dz = -\rho u\,dy\,dz + \frac{1}{2}\left[u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]dx\,dy\,dz$
Direita $(+x)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]\left[u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]dy\,dz = \rho u\,dy\,dz + \frac{1}{2}\left[u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]dx\,dy\,dz$
Fundo $(-y)$	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)\frac{dy}{2}\right]\left[v - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{2}\right]dx\,dz = -\rho v\,dx\,dz + \frac{1}{2}\left[v\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dx\,dy\,dz$
Topo $(+y)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)\frac{dy}{2}\right]\left[v + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{2}\right]dx\,dz = \rho v\,dx\,dz + \frac{1}{2}\left[v\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dx\,dy\,dz$
Posterior $(-z)$	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]\left[w - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]dx\,dy = -\rho w\,dx\,dy + \frac{1}{2}\left[w\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz$
Frontal $(+z)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]\left[w + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]dx\,dy = \rho w\,dx\,dy + \frac{1}{2}\left[w\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz$

Então

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\left\{u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} + \left\{v\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} + \left\{w\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\right]dx\,dy\,dz$$

ou

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz$$

Posto que o operador vetorial, ∇, em coordenadas retangulares, é dado por

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

então

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \nabla \cdot \rho \vec{V}$$

(Note que o operador del ∇ age sobre ρ e $\vec{V}$!) e a conservação da massa pode ser escrita como

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{5.1b}$$

Dois casos de escoamento para os quais a equação diferencial da continuidade pode ser simplificada cabem destacar.

Para um fluido *incompressível*, ρ = constante; a massa específica não é função nem das coordenadas espaciais nem do tempo. Para um fluido incompressível, a equação da continuidade é simplificada para

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V} = 0 \tag{5.1c}$$

Portanto, o campo de velocidade, $\vec{V}(x, y, z, t)$, para escoamento incompressível deve satisfazer $\nabla \cdot \vec{V} = 0$.

Para escoamento *permanente*, todas as propriedades dos fluidos são, por definição, independentes do tempo; assim, $\partial\rho/\partial t = 0$ e, no máximo, $\rho = \rho\,(x, y, z)$. Para escoamento permanente, a equação da continuidade pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \nabla \cdot \rho\vec{V} = 0 \tag{5.1d}$$

(e lembre-se de que o operador ∇ age sobre ρ e $\vec{V}$).

EXEMPLO 5.1 Integração da Equação Diferencial Bidimensional da Continuidade

Para um escoamento bidimensional no plano xy, a componente x da velocidade é dada por $u = Ax$. Determine uma possível componente y para escoamento permanente, incompressível. Quantas componentes y são possíveis?

PROBLEMA-EXEMPLO 5.1

DADOS: Escoamento bidimensional no plano xy para o qual $u = Ax$.

DETERMINAR: **(a)** Uma possível componente y da velocidade para escoamento permanente, incompressível.
(b) Número possível de componentes y.

SOLUÇÃO:

Equação básica: $\nabla \cdot \rho\vec{V} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Para escoamento incompressível, esta equação reduz-se a $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. Em coordenadas retangulares

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Para escoamento bidimensional no plano xy, $\vec{V} = \vec{V}(x, y)$. Então, as derivadas parciais com relação a z são nulas, e

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Então

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -A$$

que fornece uma expressão para a taxa de variação de v mantendo x constante. Esta equação pode ser integrada para obter uma expressão para v. O resultado é

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y}\,dy + f(x,t) = -Ay + f(x,t) \longleftarrow v$$

{A função de x e de t aparece porque tínhamos uma derivada parcial de v com relação a y.}

Qualquer função $f(x, t)$ é permitida, desde que $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,t) = 0$. Deste modo, qualquer número de expressões para v pode satisfazer a equação diferencial da continuidade sob as condições dadas. A mais simples expressão para v é obtida estabelecendo $f(x, t) = 0$. Neste caso, $v = -Ay$, e

$$\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j} \longleftarrow \vec{V}$$

Este problema:

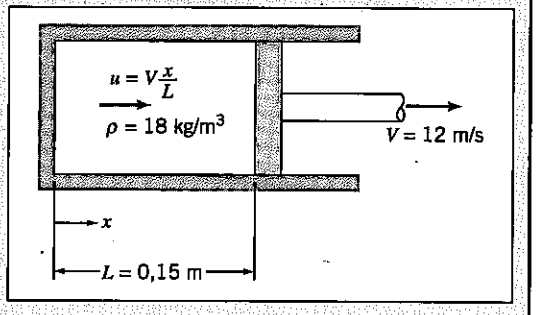
- ✓ Ilustra o uso da equação diferencial da continuidade para obter informação sobre um campo de escoamento.
- ✓ Demonstra a integração de uma derivada parcial.
- ✓ Prova que o escoamento originalmente discutido no Problema-Exemplo 2.1 é, de fato, incompressível.

EXEMPLO 5.2 Equação Diferencial da Continuidade para Regime Não-permanente

Um amortecedor a gás na suspensão de um automóvel comporta-se como um dispositivo pistão-cilindro. No instante em que o pistão está $L = 0{,}15$ m afastado da extremidade fechada do cilindro, a massa específica do gás é uniforme em $\rho = 18$ kg/m³ e o pistão começa a se mover, afastando-se da extremidade fechada do cilindro com $V = 12$ m/s. A velocidade do gás é unidimensional e proporcional à distância em relação à extremidade fechada; varia linearmente de zero, na extremidade, a $u = V$ conforme o pistão. Avalie a taxa de variação da massa específica do gás nesse instante. Obtenha uma expressão para a massa específica média como uma função do tempo.

PROBLEMA-EXEMPLO 5.2

DADOS: Conjunto pistão-cilindro, conforme mostrado.



DETERMINAR: (a) A taxa de variação da massa específica.
(b) $\rho(t)$.

SOLUÇÃO:

Equação básica: $\nabla \cdot \rho\bar{V} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Em coordenadas retangulares, $\dfrac{\partial \rho u}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho v}{\partial y} + \dfrac{\partial \rho w}{\partial z} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Como $u = u(x)$, as derivadas parciais com relação a y e z são nulas, e

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Logo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} = -\rho\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Como ρ é admitido como uniforme no volume, então $\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \dfrac{d\rho}{dt} = -\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Posto que $u = V\dfrac{x}{L}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{V}{L}$, então, $\dfrac{d\rho}{dt} = -\rho\dfrac{V}{L}$. Contudo, note que $L = L_0 + Vt$.

Separando as variáveis e integrando,

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\int_0^t \frac{V}{L}\,dt = -\int_0^t \frac{V\,dt}{L_0 + Vt}$$

$$\ln\frac{\rho}{\rho_0} = \ln\frac{L_0}{L_0 + Vt} \quad \text{e} \quad \rho(t) = \rho_0\left[\frac{1}{1 + Vt/L_0}\right] \longleftarrow \rho(t)$$

BIBLIOTECA - FACULDADE ETAGRAS

Em $t = 0$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{V}{L} = -\frac{18\ \text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{12\ \text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{0{,}15\ \text{m}} = -1440\ \text{kg/(m}^3 \cdot \text{s)} \longleftarrow \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Este problema demonstra o uso da equação diferencial da continuidade para obter a variação temporal da massa específica em um escoamento transiente.

O gráfico da massa específica como função do tempo é mostrado em uma planilha *Excel*. A planilha é interativa: Ela permite que se veja o efeito de diferentes valores de ρ_0, L, e V contra t. Além disto, o tempo para o qual a massa específica atinge um valor prescrito também pode ser determinado.

Sistema de Coordenadas Cilíndricas

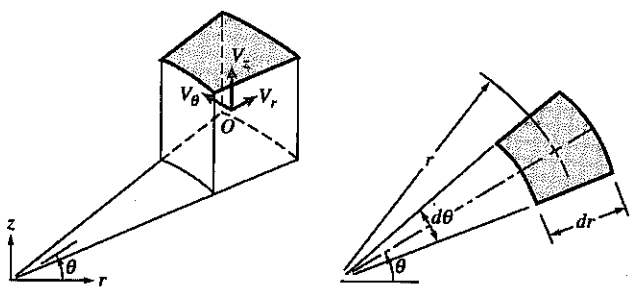
Um volume de controle adequado em coordenadas cilíndricas é mostrado na Fig. 5.2. A massa específica no centro, O, do volume de controle é assumida como ρ, e a velocidade, ali, é considerada como $\vec{V} = \hat{e}_r V_r + \hat{e}_\theta V_\theta + \hat{k} V_z$, onde $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ e $\hat{k}$ são vetores unitários nas direções r, θ e z, respectivamente, e V_r, V_θ e V_z são as componentes da velocidade nas direções r, θ e z, respectivamente. Para avaliar $\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$, devemos considerar o fluxo de massa através de cada uma das seis faces da superfície de controle. As propriedades em cada uma das faces são obtidas de um desenvolvimento por série de Taylor em torno do ponto O. Os detalhes da avaliação do fluxo de massa são mostrados na Tabela 5.2. As componentes da velocidade, V_r, V_θ e V_z, são todas consideradas no sentido positivo das coordenadas, a convenção de que a normal da área é positiva para fora de cada face foi aplicada e os termos de ordem superior foram desprezados.

Vemos que a taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle é dada por

$$\left[\rho V_r + r\frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \rho V_z}{\partial z}\right] dr\, d\theta\, dz$$

A massa dentro do volume de controle diferencial, em qualquer instante, é o produto da massa por unidade de volume, ρ, e o volume, $r d\theta\, dr\, dz$. Deste modo, a taxa de variação da massa no interior do volume de controle é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} r\, d\theta\, dr\, dz$$



(*a*) Vista isométrica (*b*) Projeção no plano $r\theta$

Fig. 5.2 Volume de controle diferencial em coordenadas cilíndricas.

Tabela 5.2 Fluxo de Massa através da Superfície de Controle de um Volume de Controle Diferencial Cilíndrico

Superfície	$\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$
Interna $(-r)$	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)\frac{dr}{2}\right]\left[V_r - \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)\frac{dr}{2}\right]\left(r - \frac{dr}{2}\right)d\theta\, dz = -\rho V_r\, r d\theta\, dz + \rho V_r \frac{dr}{2} d\theta\, dz + \rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta\, dz + V_r\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta\, dz$
Externa $(+r)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)\frac{dr}{2}\right]\left[V_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)\frac{dr}{2}\right]\left(r + \frac{dr}{2}\right)d\theta\, dz = \rho V_r\, r d\theta\, dz + \rho V_r \frac{dr}{2} d\theta\, dz + \rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta\, dz + V_r\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta\, dz$
Frontal $(-\theta)$	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2}\right]\left[V_\theta - \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2}\right] dr\, dz = -\rho V_\theta\, dr\, dz + \rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2} dr\, dz + V_\theta\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2} dr\, dz$
Posterior $(+\theta)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2}\right]\left[V_\theta + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2}\right] dr\, dz = \rho V_\theta\, dr\, dz + \rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2} dr\, dz + V_\theta\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2} dr\, dz$
Fundo $(-z)$	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]\left[V_z - \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right] r d\theta\, dr = -\rho V_z\, r d\theta\, dr + \rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\frac{dz}{2} r d\theta\, dr + V_z\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2} r d\theta\, dr$
Topo $(+z)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]\left[V_z + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right] r d\theta\, dr = \rho V_z\, r d\theta\, dr + \rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\frac{dz}{2} r d\theta\, dr + V_z\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2} r d\theta\, dr$

Então

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\rho V_r + r\left\{\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) + V_r\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)\right\} + \left\{\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) + V_\theta\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\right\} + r\left\{\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) + V_z\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\right\}\right] dr\, d\theta\, dz$$

ou

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\rho V_r + r\frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \rho V_z}{\partial z}\right] dr\, d\theta\, dz$$

Em coordenadas cilíndricas, a equação diferencial para a conservação da massa é, então,

$$\rho V_r + r\frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \rho V_z}{\partial z} + r\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ou

$$\frac{\partial (r\rho V_r)}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \rho V_z}{\partial z} + r\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Dividindo por r, resulta

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{5.2a}$$

Em coordenadas cilíndricas, o operador vetorial ∇ é dado por

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.18}$$

A Eq. 5.2a também pode ser escrita[1] em notação vetorial como

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{5.1b}$$

Para um fluido *incompressível*, $\rho =$ constante, e a Eq. 5.2a reduz-se a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V} = 0 \tag{5.2b}$$

Assim, o campo de velocidade, $\vec{V}(x, y, z, t)$, para escoamento incompressível, deve satisfazer $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. Para escoamento *permanente*, a Eq. 5.2a reduz-se a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} = \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \tag{5.2c}$$

(e lembre-se mais uma vez de que o operador ∇ age sobre ρ *e* $\vec{V}$).

Quando escrita na forma vetorial, a equação diferencial da continuidade (o enunciado matemático da conservação da massa), Eq. 5.1b, pode ser aplicada em qualquer sistema de coordenadas. Substitui-se simplesmente a expressão apropriada para o operador vetorial ∇. Em retrospecto, este resultado não surpreende, posto que a massa deve ser conservada a despeito da nossa escolha do sistema de coordenadas.

EXEMPLO 5.3 Equação Diferencial da Continuidade em Coordenadas Cilíndricas

Considere um escoamento radial e unidimensional, no plano $r\theta$, caracterizado por $V_r = f(r)$ e $V_\theta = 0$. Determine as condições sobre $f(r)$ necessárias para que o escoamento seja incompressível.

[1]Para avaliar $\nabla \cdot \rho \vec{V}$ em coordenadas cilíndricas, devemos lembrar que

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r$$

PROBLEMA-EXEMPLO 5.3

DADOS: Escoamento radial e unidimensional no plano $r\theta$: $V_r = f(r)$ e $V_\theta = 0$.

DETERMINAR: Os requisitos de $f(r)$ para escoamento incompressível.

SOLUÇÃO:

Equação básica: $\nabla \cdot \rho \vec{V} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Para escoamento incompressível em coordenadas cilíndricas, esta equação reduz-se à Eq. 5.2b,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}V_\theta + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Para o campo de velocidade dado, $\vec{V} = \vec{V}(r)$. $V_\theta = 0$ e as derivadas parciais em relação a z são nulas, logo

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) = 0$$

Integrando em r, resulta

$$rV_r = \text{constante}$$

Assim, a equação da continuidade mostra que a velocidade radial deve ser $V_r = f(r) = C/r$ para o escoamento radial, unidimensional, de um fluido incompressível. Este não é um resultado surpreendente: Quando o fluido afasta-se do centro, a vazão volumétrica (por unidade de profundidade na direção z) $Q = 2\pi rV$ para qualquer raio r permanece constante.

*5-2 FUNÇÃO DE CORRENTE PARA ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL BIDIMENSIONAL

Nós já introduzimos a noção de linhas de corrente no Capítulo 2, onde as descrevemos como sendo linhas tangentes aos vetores das velocidades instantâneas em cada ponto. Podemos fazer agora uma definição mais formal da *função de corrente*, ψ. O conceito da função de corrente permite-nos representar matematicamente duas entidades — as componentes $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$ da velocidade de um escoamento incompressível bidimensional — usando uma única função $\psi(x, y, t)$. A função de corrente é definida por

$$u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5.3}$$

Por que esta definição? Porque ela garante que *qualquer* função contínua $\psi(x, y, t)$ satisfaz *automaticamente* a formulação bidimensional da equação da continuidade para escoamentos incompressíveis! Para um escoamento bidimensional incompressível no plano x-y, a Eq. 5.1c torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5.4}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial x} = 0$$

Nós utilizamos anteriormente (no Problema-Exemplo 2.1) o fato de que, em cada ponto, as linhas de corrente são tangentes aos vetores das velocidades instantâneas. Isto significa que

*Esta seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\text{linha de corrente}} = \frac{v}{u}$$

Daí obtemos a equação de uma linha de corrente em um escoamento bidimensional,

$$u\,dy - v\,dx = 0$$

Substituindo as componentes da velocidade, u e v, em termos da função de corrente, ψ, a partir da Eq. 5.3, descobrimos que, ao longo de uma linha de corrente,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0 \tag{5.5}$$

Posto que $\psi = \psi(x, y, t)$, então em um instante, t_0, $\psi = \psi(x, y, t_0)$; neste instante, uma variação em ψ pode ser avaliada considerando $\psi = \psi(x, y)$. Logo, para qualquer instante,

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy \tag{5.6}$$

Comparando as Eqs. 5.5 e 5.6, verificamos que, ao longo de uma linha de corrente instantânea, $d\psi = 0$; em outras palavras, *ψ é uma constante ao longo de uma linha de corrente*. Portanto, nós podemos especificar linhas de corrente individuais pelos valores de suas funções de corrente: $\psi = 0, 1, 2$ etc. Qual é o significado dos valores de ψ? A resposta é que eles podem ser usados para obter a vazão volumétrica entre duas linhas de corrente quaisquer. Considere as linhas de corrente mostradas na Fig. 5.3. Nós podemos calcular a vazão volumétrica entre as linhas de corrente ψ_1 e ψ_2 usando a linha *AB*, *BC*, *DE* ou *EF* (lembre-se de que não existe escoamento *através* de uma linha de corrente).

Vamos calcular a vazão usando a linha *AB* e, em seguida, usando a linha *BC*.

Para uma profundidade unitária (dimensão perpendicular ao plano xy), a vazão através de *AB* é

$$Q = \int_{y_1}^{y_2} u\,dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial\psi}{\partial y}dy$$

Porém, ao longo de *AB*, x = constante, e (da Eq. 5.6) $d\psi = \partial\psi/\partial y\,dy$. Portanto,

$$Q = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Para uma profundidade unitária, a vazão através de *BC* é

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} v\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\psi}{\partial x}dx$$

Ao longo de *BC*, y = constante, e (da Eq. 5.6) $d\psi = \partial\psi/\partial x\,dx$. Portanto,

$$Q = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\psi}{\partial x}dx = -\int_{\psi_2}^{\psi_1} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

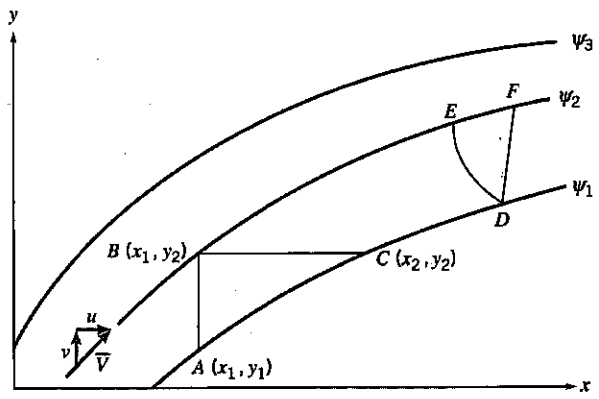


Fig. 5.3 Linhas de corrente instantâneas em um escoamento bidimensional.

Deste modo, a vazão em volume (por unidade de profundidade) entre duas linhas de corrente quaisquer pode ser escrita como a diferença entre os valores constantes de ψ que definem as duas linhas de corrente.[2] Se a linha de corrente através da origem for designada $\psi = 0$, então o valor de ψ para qualquer outra linha de corrente representa a vazão em volume (por unidade de profundidade) entre a origem e aquela linha de corrente. [Nós estamos livres para selecionar qualquer linha de corrente como sendo a linha de corrente zero, porque a função de corrente é definida como uma diferencial (Eq. 5.3); também a vazão será dada sempre por uma *diferença* de valores de ψ.] Note que, como a vazão em volume entre duas linhas de corrente quaisquer é constante, a *velocidade será relativamente alta onde as linhas de corrente estiverem muito próximas, e relativamente baixa onde as linhas de corrente estiverem afastadas* — um conceito muito útil para identificar visualmente regiões de alta ou de baixa velocidade no campo de escoamento.

Para um escoamento incompressível, bidimensional, no plano $r\theta$, a conservação da massa, Eq. 5.2b, pode ser escrita como

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 \tag{5.7}$$

A função de corrente, $\psi(r, \theta, t)$, é definida de modo que

$$V_r \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad V_\theta \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{5.8}$$

Com ψ definido de acordo com a Eq. 5.8, a equação da continuidade, Eq. 5.7, é satisfeita com exatidão.

EXEMPLO 5.4 Função de Corrente para um Escoamento Bidimensional

Dado o campo de velocidade para o escoamento permanente e incompressível do Exemplo 2.1, $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, com $A = 0{,}3\ \text{s}^{-1}$, determine a função de corrente que resultará deste campo de velocidade. Trace gráficos e interprete a configuração das linhas de corrente nos primeiro e segundo quadrantes do plano xy.

PROBLEMA-EXEMPLO 5.4

DADOS: Campo de velocidade, $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, com $A = 0{,}3\ \text{s}^{-1}$.

DETERMINAR: A função de corrente ψ; traçar configurações nos primeiro e segundo quadrantes; interpretar os resultados.

SOLUÇÃO:

O escoamento é incompressível, logo a função de corrente satisfaz a Eq. 5.3.

Da Eq. 5.3, $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ e $v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$. Do campo de velocidade dado,

$$u = Ax = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

[2]Para escoamento compressível, permanente, bidimensional, no plano xy, a função de corrente, ψ, é definida de forma que

$$\rho u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad \rho v \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

A diferença entre os valores constantes de ψ que definem duas linhas de corrente é, neste caso, a vazão em massa (por unidade de profundidade) entre as duas linhas de corrente.

Integrando em y, resulta

$$\psi = \int \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + f(x) = Axy + f(x) \tag{1}$$

onde $f(x)$ é arbitrária. A função $f(x)$ pode ser avaliada usando a equação para v. Assim, da Eq. 1,

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -Ay - \frac{df}{dx} \tag{2}$$

Do campo de velocidade dado, $v = -Ay$. A comparação desta expressão com a Eq. 2 mostra que $\frac{df}{dx} = 0$, ou que $f(x) =$ constante. Por conseguinte, a Eq. 1 torna-se

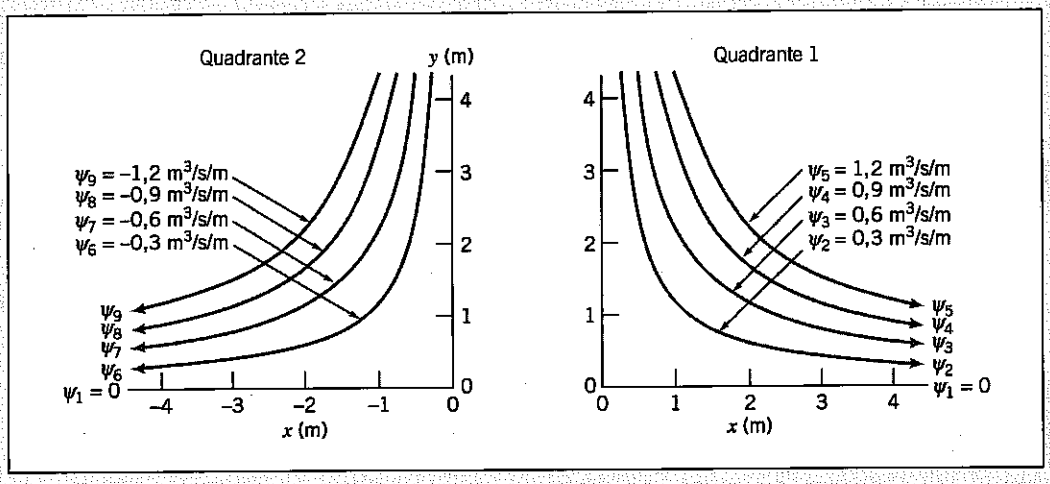
$$\psi = Axy + c \longleftarrow \psi$$

As linhas de ψ constante representam linhas de corrente no campo de escoamento. A constante c pode ser escolhida como qualquer valor conveniente para fins de traçado do gráfico. A constante é escolhida como zero para que a linha de corrente através da origem seja designada como $\psi = \psi_1 = 0$. Deste modo, o valor para qualquer outra linha de corrente representa a vazão em volume (por unidade de profundidade) entre a origem e aquela linha de corrente. Com $c = 0$ e $A = 0{,}3\ s^{-1}$, temos

$$\psi = 0{,}3xy \qquad (m^3/s/m)$$

{Esta equação de uma linha de corrente é idêntica ao resultado (xy = constante) obtido no Problema-Exemplo 2.1}

Gráficos separados das linhas de corrente no primeiro e segundo quadrantes são apresentados na figura que se segue. Note que no quadrante 1, $u > 0$, portanto os valores de ψ são positivos. No quadrante 2, $u < 0$, então os valores de ψ são negativos.



No primeiro quadrante, como $u > 0$ e $v < 0$, o escoamento é da esquerda para a direita e para baixo. A vazão em volume entre a linha de corrente $\psi = \psi_1$ que passa pela origem e a linha de corrente $\psi = \psi_2$ é

$$Q_{12} = \psi_2 - \psi_1 = 0{,}3\ m^3/s/m$$

No segundo quadrante, como $u < 0$ e $v < 0$, o escoamento é da direita para a esquerda e para baixo. A vazão em volume entre as linhas de corrente ψ_7 e ψ_9 é

$$Q_{79} = \psi_9 - \psi_7 = [-1{,}2 - (-0{,}6)]\ m^3/s/m = -0{,}6\ m^3/s/m$$

O sinal negativo é consistente com o escoamento que tem $u < 0$.

Conforme indicam tanto o espaçamento entre as linhas de corrente no gráfico quanto a equação para $\vec{V}$, a velocidade é menor próximo da origem (um "canto").

Há uma planilha *Excel* para este problema que pode ser usada para gerar linhas de corrente para esta e outras funções de corrente.

5-3 MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA FLUIDA (CINEMÁTICA)

A Figura 5.4 mostra um elemento finito de fluido típico, no interior do qual selecionamos uma partícula infinitesimal de massa dm e volume inicial $dx\,dy\,dz$, no tempo t, e como o elemento (e a partícula infinitesimal) pode aparecer após um intervalo de tempo dt. O elemento finito moveu e mudou sua forma e orientação. Note que, enquanto o elemento finito apresenta distorções bastante severas, a partícula infinitesimal tem variações na forma limitadas a estiramento/contração e rotação dos lados do elemento — isto acontece porque estamos considerando tanto um passo temporal infinitesimal, quanto uma partícula infinitesimal, de modo que os lados permanecem retos. Vamos procurar examinar a partícula infinitesimal de modo a, eventualmente, obter resultados aplicáveis a um ponto. Nós podemos decompor o movimento desta partícula em quatro componentes: *translação*, na qual a partícula desloca-se de um ponto para outro; *rotação* da partícula, que pode ocorrer em torno de qualquer um dos eixos x, y ou z ou de todos eles; *deformação linear*, na qual os lados da partícula esticam ou contraem; e *deformação angular*, na qual os ângulos entre os lados (que eram inicialmente 90° na partícula) variam.

Pode parecer difícil, por uma análise visual da Fig. 5.4, distinguir entre rotação e deformação angular da partícula infinitesimal de fluido. É importante reconhecer, então, que a rotação pura não envolve nenhuma deformação, ao contrário do que ocorre com a deformação angular e, conforme aprendemos no Capítulo 2, a deformação do fluido gera tensões de cisalhamento. A Figura 5.5 ilustra o movimento da partícula no plano xy decomposto nos quatro componentes descritos e, conforme examinamos separadamente cada um desses quatro componentes, concluímos que *podemos* distinguir entre rotação e deformação angular.

Translação de um Fluido: Aceleração de uma Partícula Fluida em um Campo de Velocidade

A translação de uma partícula fluida está obviamente conectada com o campo de velocidade $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$ que discutimos previamente na Seção 2-2. Necessitaremos da aceleração de uma partícula fluida para uso na segunda lei de Newton. A princípio, poderíamos ser tentados a calcular a aceleração simplesmente como $\vec{a} = \partial\vec{V}/\partial t$. Mas isto é incorreto, porque $\vec{V}$ é um *campo* de velocidade, ou seja, ele descreve o escoamento inteiro e não somente o movimento individual de uma partícula. (Podemos ver que esta forma de cálculo é incorreta examinando o Problema-Exemplo 5.4, no qual as partículas estão claramente acelerando e desacelerando, de modo que $\vec{a} \neq 0$, mas $\partial\vec{V}/\partial t = 0$.)

O problema consiste, então, em reter a descrição de campo para as propriedades do fluido e obter uma expressão para a aceleração de uma partícula à medida que ela se move num campo de escoamento. Simplificando, o enunciado do problema é:

> Dado o campo de velocidade, $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$, encontre a aceleração de uma partícula fluida, $\vec{a}_p$.

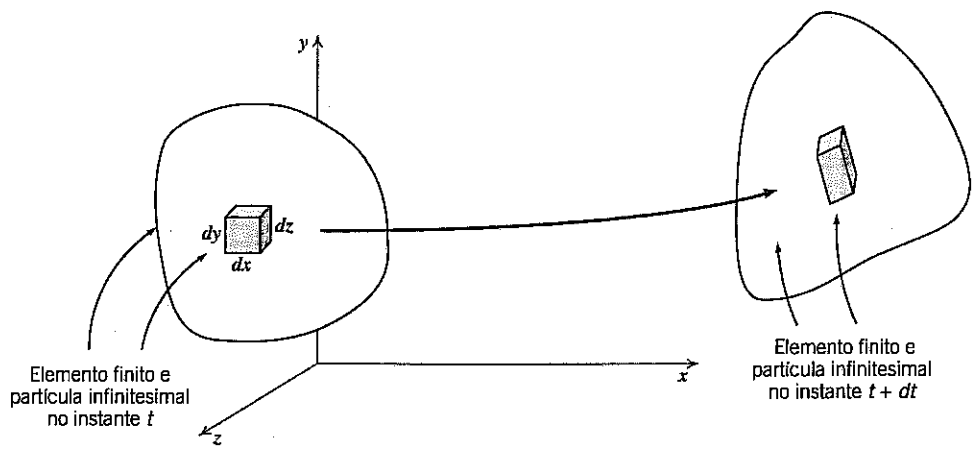


Fig. 5.4 Elemento de fluido finito e partícula infinitesimal nos instantes t e $t + dt$.

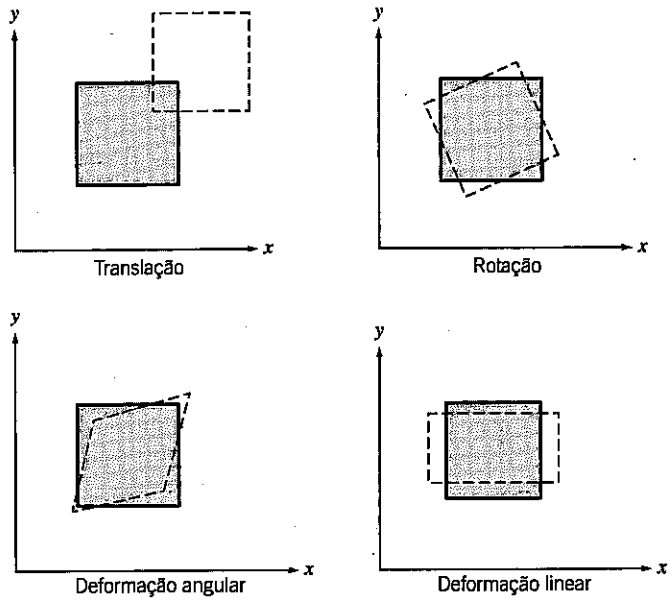


Fig. 5.5 Representação esquemática dos componentes do movimento de um fluido.

Considere uma partícula em movimento num campo de velocidade. No instante t, a partícula está na posição x, y, z e tem uma velocidade correspondente à velocidade naquele ponto no espaço, no tempo t,

$$\vec{V}_p]_t = \vec{V}(x, y, z, t)$$

Em $t + dt$, a partícula foi deslocada para uma nova posição, com as coordenadas $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, e tem uma velocidade dada por

$$\vec{V}_p]_{t+dt} = \vec{V}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$$

Isto é mostrado no esquema da Fig. 5.6.

A velocidade da partícula no tempo t (posição $\vec{r}$) é dada por $\vec{V}_p = \vec{V}(x, y, z, t)$. Se $d\vec{V}_p$, a variação na velocidade da partícula, no deslocamento da posição $\vec{r}$ para a posição $\vec{r} + d\vec{r}$, é dada pela regra da cadeia,

$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$

A aceleração total da partícula é dada por

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

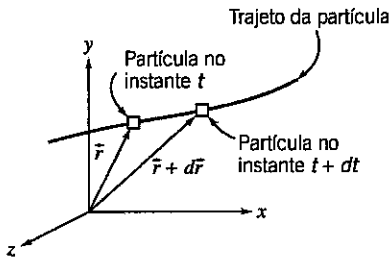


Fig. 5.6 Movimento de uma partícula em um campo de escoamento.

Como

$$\frac{dx_p}{dt} = u, \quad \frac{dy_p}{dt} = v, \quad \text{e} \quad \frac{dz_p}{dt} = w,$$

temos

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Para deixar bem claro que o cálculo da aceleração de uma partícula fluida num campo de velocidade requer uma derivada especial, ela recebe o símbolo $D\vec{V}/Dt$. Assim,

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \vec{a}_p = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \tag{5.9}$$

A derivada, $D\vec{V}/Dt$, definida pela Eq. 5.9, é comumente chamada de *derivada substancial*, para lembrar-nos de que é calculada para uma partícula de "substância". É também freqüentemente chamada de *derivada material* ou de *derivada de partícula.*

Da Eq. 5.9, reconhecemos que uma partícula fluida em movimento num campo de escoamento pode sofrer aceleração por duas razões. Como ilustração, vamos relembrar do Problema-Exemplo 5.4. Trata-se de um escoamento permanente no qual as partículas são conduzidas *por convecção* em direção à região de baixa velocidade (próxima do "canto") e, em seguida, para uma região de velocidade mais alta.[3] Se um campo de escoamento é não-permanente, uma partícula fluida estará submetida a uma aceleração adicional *local*, pois o campo de velocidade é função do tempo.

O significado físico dos termos na Eq. 5.9 é

$$\vec{a}_p = \underbrace{\frac{D\vec{V}}{Dt}}_{\substack{\text{aceleração}\\ \text{total da}\\ \text{partícula}}} = \underbrace{u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}}_{\substack{\text{aceleração}\\ \text{convectiva}}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\substack{\text{aceleração}\\ \text{local}}}$$

A aceleração convectiva pode ser escrita como uma única expressão vetorial com a utilização do operador gradiente ∇. Assim,

$$u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$$

(Sugerimos que você verifique esta igualdade expandindo o lado direito da equação, usando a operação familiar do produto escalar de vetores.) A Eq. 5.9 pode, então, ser escrita como

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \vec{a}_p = (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \tag{5.10}$$

Para um *escoamento bidimensional*, digamos $\vec{V} = \vec{V}(x, y, t)$, a Eq. 5.9 reduz-se a

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Para um *escoamento unidimensional*, digamos $\vec{V} = \vec{V}(x, t)$, a Eq. 5.9 reduz-se a

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

[3]Acelerações convectivas são demonstradas e o cálculo da aceleração total de uma partícula fluida é ilustrado no filme da NCFMF *Eulerian and Lagrangian Descriptions in Fluid Mechanics.*

Finalmente, para um *escoamento permanente em três dimensões*, a Eq. 5.9 torna-se

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

a qual, conforme já vimos, não é necessariamente igual a zero. Assim, uma partícula fluida pode estar submetida a uma aceleração convectiva devido a seu movimento, mesmo em um campo de velocidade permanente.

A Eq. 5.9 é uma equação vetorial. Assim como todas as equações vetoriais, ela pode ser escrita na forma de suas componentes escalares. Em relação a um sistema de coordenadas xyz, as componentes escalares da Eq. 5.9 são escritas

$$a_{x_p} = \frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.11a}$$

$$a_{y_p} = \frac{Dv}{Dt} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \tag{5.11b}$$

$$a_{z_p} = \frac{Dw}{Dt} = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \tag{5.11c}$$

As componentes da aceleração em coordenadas cilíndricas podem ser obtidas da Eq. 5.10 expressando a velocidade, $\vec{V}$, em coordenadas cilíndricas (Seção 5-1) e utilizando a expressão apropriada (Eq. 3.18) para o operador vetorial ∇. Deste modo[4],

$$a_{r_p} = V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_r}{\partial t} \tag{5.12a}$$

$$a_{\theta_p} = V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{\partial V_\theta}{\partial t} \tag{5.12b}$$

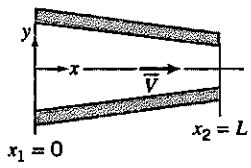
$$a_{z_p} = V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial t} \tag{5.12c}$$

As Eqs. 5.9, 5.11 e 5.12 são úteis para o cálculo da aceleração de uma partícula fluida em qualquer parte de um escoamento a partir de seu campo de velocidade (uma função de x, y, z, e t); este é o método de descrição *euleriana*, a abordagem mais utilizada em mecânica dos fluidos.

Como alternativa (p. ex., se desejarmos rastrear o movimento de uma partícula individual em estudos de poluição), podemos utilizar o método de descrição *lagrangiana* do movimento de uma partícula, no qual a posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula são especificadas apenas como funções do tempo. Ambas as descrições estão ilustradas no Problema-Exemplo 5.5.

EXEMPLO 5.5 Aceleração de Partícula nas Descrições Euleriana e Lagrangiana

Considere o escoamento bidimensional, permanente, incompressível, através do canal plano convergente mostrado. A velocidade sobre a linha de centro horizontal (eixo x) é dada por $\vec{V} = V_1[1 + (x/L)]\hat{i}$. Determine a aceleração para uma partícula movendo-se ao longo dessa linha de centro. Se utilizarmos o método de descrição da mecânica da partícula, a posição da partícula localizada em $x = 0$ no instante $t = 0$ será uma função do tempo, $x_p = f(t)$. Obtenha a expressão para $f(t)$ e, em seguida, tomando a derivada segunda da função com relação ao tempo, obtenha uma expressão para a componente x da aceleração da partícula.

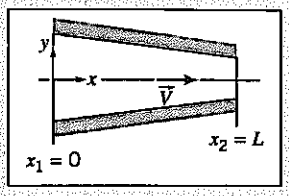


[4]Ao avaliar $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$, lembre-se de que $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$ são funções de θ (reveja a nota 1 de rodapé).

PROBLEMA-EXEMPLO 5.5

DADOS: Escoamento permanente, bidimensional, incompressível, através do canal convergente mostrado.

$$\vec{V} = V_1\left(1 + \frac{x}{L}\right)\hat{i} \quad \text{sobre o eixo } x$$



DETERMINAR: **(a)** A aceleração de uma partícula movendo-se ao longo do eixo x.
(b) Para a partícula localizada em $x = 0$ no instante $t = 0$, obtenha uma expressão para
(1) sua posição, x_p, como uma função do tempo.
(2) a componente x da aceleração, a_{x_p}, como uma função do tempo.

SOLUÇÃO:
A aceleração de uma partícula em movimento num campo de velocidade é dada por

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

A componente x da aceleração é dada por

$$\frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Para qualquer partícula sobre o eixo x, $v = w = 0$ e $u = V_1\left(1 + \frac{x}{L}\right)$.

Portanto,

$$\frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} = V_1\left(1 + \frac{x}{L}\right)\frac{V_1}{L} = \frac{V_1^2}{L}\left(1 + \frac{x}{L}\right) \longleftarrow \frac{Du}{Dt}$$

{ Para determinar a aceleração de uma partícula em qualquer ponto ao longo da linha de centro do canal, nós simplesmente substituímos nessa expressão a presente localização da partícula. }

Na segunda parte deste problema, estamos interessados em seguir uma determinada partícula, especificamente aquela localizada em $x = 0$ no instante $t = 0$, à medida que ela escoa ao longo da linha de centro do canal.

A coordenada x que localiza esta partícula será uma função do tempo, $x_p = f(t)$. Também, $u_p = df/dt$ será uma função do tempo. A partícula terá a velocidade correspondente à sua localização no campo de velocidade. Em $t = 0$, a partícula está em $x = 0$, e a sua velocidade é $u_p = V_1$. Em um instante posterior, t, a partícula alcançará a saída, $x = L$; nesse instante, ela terá a velocidade $u_p = 2V_1$. Para encontrar a expressão para $x_p = f(t)$, escrevemos

$$u_p = \frac{dx_p}{dt} = \frac{df}{dt} = V_1\left(1 + \frac{x}{L}\right) = V_1\left(1 + \frac{f}{L}\right)$$

Separando as variáveis, obtemos

$$\frac{df}{(1 + f/L)} = V_1\,dt$$

Uma vez que, em $t = 0$, a partícula em questão estava localizada em $x = 0$ e, em um tempo posterior, t, a partícula está em $x_p = f$,

$$\int_0^f \frac{df}{(1 + f/L)} = \int_0^t V_1\,dt \quad \text{e} \quad L\ln\left(1 + \frac{f}{L}\right) = V_1 t$$

Então,

$$\ln\left(1 + \frac{f}{L}\right) = \frac{V_1 t}{L}, \quad \text{ou} \quad 1 + \frac{f}{L} = e^{V_1 t/L}$$

e

$$f = L[e^{V_1 t/L} - 1]$$

Deste modo, a posição da partícula localizada em $x = 0$ no instante $t = 0$ é dada pela seguinte função do tempo:

$$x_p = f(t) = L[e^{V_1 t/L} - 1] \longleftarrow x_p$$

A componente x da aceleração desta partícula é dada por

$$a_{x_p} = \frac{d^2 x_p}{dt^2} = \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t/L} \longleftarrow a_{x_p}$$

Temos agora duas maneiras diferentes de expressar a aceleração da partícula que estava localizada em $x = 0$ no instante $t = 0$. Note que, embora o campo de escoamento seja permanente, quando seguimos uma partícula específica, a sua posição e aceleração (e velocidade) são funções do tempo.

Vamos verificar para ter certeza de que ambas as expressões para a aceleração levam ao mesmo resultado:

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t/L}$$

$$a_{x_p} = \frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L}\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

(a) Em $t = 0, x_p = 0$

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L} e^0 = \frac{V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(a)}$$

Em $t = 0$, a partícula está em $x = 0$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L}(1 + 0) = \frac{V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(a)}$$

Confere.

(b) Quando $x_p = \frac{L}{2}, t = t_1$,

$$x_p = \frac{L}{2} = L[e^{V_1 t_1/L} - 1]$$

Portanto, $e^{V_1 t_1/L} = 1{,}5$, e

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t_1/L}$$

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L}(1{,}5) = \frac{1{,}5 V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(b)}$$

Em $x = 0{,}5L$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L}(1 + 0{,}5)$$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{1{,}5 V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(b)}$$

Confere.

(c) Quando $x_p = L, t = t_2$,

$$x_p = L = L[e^{V_1 t_2/L} - 1]$$

Portanto, $e^{V_1 t_2/L} = 2$, e

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t_2/L}$$

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L}(2) = \frac{2V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(c)}$$

Em $x = L$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L}(1 + 1)$$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{2V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(c)}$$

Confere.

Este problema ilustra o uso dos métodos de descrição euleriana e lagrangiana do movimento de uma partícula de fluido.

Rotação de um Fluido

Uma partícula de fluido movendo-se em um campo de escoamento genérico tridimensional pode girar em relação a todos os três eixos de coordenadas. Portanto, a rotação de uma partícula é uma quantidade vetorial e, em geral,

$$\vec{\omega} = \hat{i}\,\omega_x + \hat{j}\,\omega_y + \hat{k}\,\omega_z$$

onde ω_x é a rotação sobre o eixo x, ω_y é a rotação sobre o eixo y e ω_z é a rotação sobre o eixo z. O sentido positivo da rotação é dado pela regra da mão direita.

Vamos ver agora como podem ser extraídas as componentes da rotação no movimento de uma partícula. Considere a vista no plano xy de uma partícula no tempo t. Os lados esquerdo e inferior da partícula são dados pelos dois segmentos de linha perpendiculares oa e ob de comprimentos Δx e Δy, respectivamente, mostrados na Fig. 5.7*a*. Em geral, após um intervalo de tempo Δt, a partícula terá transladado para uma nova posição e, também, girado e deformado. Uma possível orientação instantânea das linhas no instante $t + \Delta t$ é mostrada na Fig. 5.7*b*. A borda oa girou de um ângulo $\Delta\alpha$ no sentido anti-horário (p. ex., 6°) e a borda ob girou de um ângulo $\Delta\beta$ no sentido horário (p. ex., 4°). Estas rotações são causadas, em parte, pelo giro da partícula como um corpo rígido e, em parte, pelo fato de a partícula estar sendo submetida a uma deformação angular.

Faz sentido definir a *rotação* de uma partícula em relação ao eixo z como sendo a média dos movimentos angulares das bordas oa e ob. Calculando isto, obtemos $\frac{1}{2}(\Delta\alpha - \Delta\beta)$ (p. ex., $\frac{1}{2}(6° - 4°) = 1°$) no sentido *anti-horário*, conforme mostrado na Fig. 5.7*c* (o sentido anti-horário é considerado positivo devido à regra da mão direita). Isto significa que a *deformação angular* total da partícula deve ser dada pela soma das duas deformações angulares iguais $\frac{1}{2}(\Delta\alpha + \Delta\beta)$ (p. ex., $\frac{1}{2}(6° + 4°) = 5°$), conforme mostrado na Fig. 5.7*d*. Por que as duas deformações angulares *devem* ser iguais? A resposta é que quando a deformação da Fig. 5.7*d* é combinada com a rotação da Fig. 5.7*c* devemos obter o movimento original, Fig. 5.7*b*! Por exemplo, o movimento angular da borda oa, $\Delta\alpha$ (p. ex., 6° no sentido anti-horário) é obtido adicionando uma rotação pura $\frac{1}{2}(\Delta\alpha - \Delta\beta)$ (p. ex., 1°) a uma deformação $\frac{1}{2}(\Delta\alpha + \Delta\beta)$ (p. ex., 5°). (Como exercício, você pode verificar que o movimento da borda ob pode ser obtido de forma similar.)

Necessitamos converter estas medidas angulares em quantidades que possam ser extraídas do campo de escoamento. Para fazer isto, admitimos que (para pequenos ângulos) $\Delta\alpha = \Delta\eta/\Delta x$ e $\Delta\beta = \Delta\xi/\Delta y$. Porém, $\Delta\xi$ surge porque, se no intervalo Δt o ponto o desloca-se horizontalmente de uma distância $u\Delta t$, então o ponto b terá se deslocado de uma distância $\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t$ (usando uma expansão por série de Taylor). Do mesmo modo, $\Delta\eta$ surge porque, se no intervalo Δt o ponto o desloca-se verticalmente de uma distância $v\Delta t$, então o ponto a terá se deslocado de uma distância $\left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t$. Portanto,

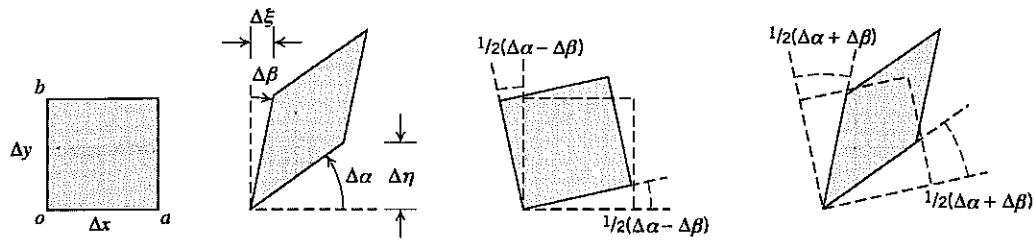
$$\Delta\xi = \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t - u\Delta t = \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\Delta t$$

e

$$\Delta\eta = \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t - v\Delta t = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\Delta t$$

Podemos agora calcular a velocidade angular da partícula sobre o eixo z, ω_z, pela combinação de todos estes resultados:

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}(\Delta\alpha - \Delta\beta)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\eta}{\Delta x} - \frac{\Delta\xi}{\Delta y}\right)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta x}\Delta t - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta y}\Delta t\right)}{\Delta t}$$



(*a*) Partícula original (*b*) Partícula após o tempo Δt (*c*) Componente rotacional (*d*) Componente de deformação angular

Fig. 5.7 Rotação e deformação angular de segmentos de linha perpendiculares em um escoamento bidimensional.

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Considerando a rotação dos pares de segmentos de linhas perpendiculares nos planos yz e xz, pode-se mostrar similarmente que:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad \text{e} \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Portanto, $\vec{\omega} = \hat{i}\,\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z$ torna-se

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\hat{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \tag{5.13}$$

O termo entre colchetes é reconhecido como

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V}$$

Então, em notação vetorial, podemos escrever

$$\vec{\omega} = \tfrac{1}{2}\nabla \times \vec{V} \tag{5.14}$$

É importante notar aqui que não devemos confundir rotação de uma partícula fluida com um escoamento consistindo em linhas de corrente circulares, ou escoamento de *vórtice*. Conforme veremos no Problema-Exemplo 5.6, em tais escoamentos as partículas *podem* girar à medida que elas escoam em um movimento circular, mas não precisam girar obrigatoriamente!

Quando devemos esperar que as partículas de fluido tenham rotação em um escoamento ($\vec{\omega} \neq 0$)? Uma primeira possibilidade é um escoamento no qual (por alguma razão) as partículas já possuam rotação. Por outro lado, se admitirmos que as partículas não estão inicialmente em rotação, elas só começarão a girar quando forem submetidas a um torque causado por tensões superficiais de cisalhamento; as forças de corpo e as forças normais (de pressão) da partícula podem acelerar e deformar a partícula, mas não podem gerar um torque. Podemos prever, então, que a rotação de partículas fluidas *sempre* ocorrerá em escoamentos nos quais temos tensões de cisalhamento. Já aprendemos no Capítulo 2 que tensões de cisalhamento estão presentes sempre que um fluido viscoso experimenta uma deformação angular (cisalhamento). Concluímos, então, que a rotação de partículas fluidas ocorrerá somente em escoamentos viscosos[5] (a menos que as partículas estejam inicialmente em rotação, como no Problema-Exemplo 3.10).

Escoamentos nos quais nenhuma rotação de partícula ocorre são chamados de *escoamentos irrotacionais*. Embora nenhum escoamento real seja verdadeiramente irrotacional (todos os fluidos possuem viscosidade), muitos escoamentos podem ser estudados com sucesso admitindo-se que sejam invíscidos (não-viscosos) e irrotacionais, porque os efeitos viscosos são freqüentemente desprezíveis[6]. Conforme discutido no Capítulo 1, e discutiremos novamente no Capítulo 6, boa parte da teoria aerodinâmica considera escoamento não-viscoso. É preciso ressaltar, no entanto, que em qualquer escoamento sempre existirão regiões (p. ex. , a camada limite do escoamento sobre uma asa) nas quais os efeitos viscosos não podem ser ignorados.

O fator $\frac{1}{2}$ pode ser eliminado da Eq. 5.14 por meio da definição de *vorticidade*, $\vec{\zeta}$, que é duas vezes a rotação,

$$\vec{\zeta} \equiv 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \tag{5.15}$$

[5]Uma prova rigorosa, utilizando as equações completas do movimento de uma partícula fluida, é dada em [1], pp. 142-145.
[6]Exemplos de escoamento rotacional e irrotacional são mostrados no filme da NCFMF *Vorticity*.

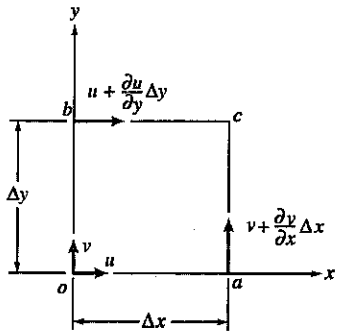


Fig. 5.8 Componentes de velocidade nas fronteiras de um elemento de fluido.

A vorticidade é uma medida da rotação de um elemento de fluido conforme ele se move no campo de escoamento. Em coordenadas cilíndricas, a vorticidade é[7]

$$\nabla\times\vec{V} = \hat{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \hat{e}_\theta\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \hat{k}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial_r V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right) \tag{5.16}$$

A *circulação*, Γ (que abordaremos no Problema-Exemplo 6.12), é definida como sendo a integral de linha da componente de velocidade tangencial sobre qualquer curva fechada delimitada no escoamento,

$$\Gamma = \oint_C \vec{V}\cdot d\vec{s} \tag{5.17}$$

onde $d\vec{s}$ é um elemento de vetor tangente à curva e que tem comprimento ds do elemento de arco; um sentido positivo corresponde a um caminho de integração no sentido anti-horário ao redor da curva. Podemos desenvolver uma relação entre a circulação e a vorticidade considerando o circuito retangular mostrado na Fig. 5.8, onde as componentes da velocidade em o são consideradas como (u, v) e as velocidades ao longo dos segmentos bc e ac podem ser deduzidas usando-se aproximações por série de Taylor.

Para a curva fechada $oacb$,

$$\Delta\Gamma = u\Delta x + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x - v\,\Delta y$$

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

$$\Delta\Gamma = 2\omega_z\Delta x\Delta y$$

Então,

$$\Gamma = \oint_C \vec{V}\cdot d\vec{s} = \int_A 2\omega_z\, dA = \int_A (\nabla\times\vec{V})_z\, dA \tag{5.18}$$

A Eq. 5.18 é um enunciado do Teorema de Stokes em duas dimensões. Dessa forma, a circulação sobre um contorno fechado é a soma da vorticidade encerrada pelo contorno.

EXEMPLO 5.6 Escoamentos de Vórtices Livre e Forçado

Considere campos de escoamento com movimento puramente tangencial (linhas de corrente circulares): $V_r = 0$ e $V_\theta = f(r)$. Avalie a rotação, vorticidade e circulação para rotação de corpo rígido, um

[7]Ao efetuar a operação do rotacional, lembre-se de que $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$ são funções de θ (reveja a nota 1 de rodapé).

vórtice forçado. Mostre que é possível escolher $f(r)$ de modo que o escoamento seja irrotacional, isto é, produz um *vórtice livre*.

PROBLEMA-EXEMPLO 5.6

DADOS: Campo de escoamento com movimento tangencial, $V_r = 0$ e $V_\theta = f(r)$.

DETERMINAR: (a) Rotação, vorticidade e circulação para movimento de corpo rígido (um *vórtice forçado*).
(b) $V_\theta = f(r)$ para movimento irrotacional (um *vórtice livre*).

SOLUÇÃO:

Equação básica:
$$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \tag{5.15}$$

Para movimento no plano $r\theta$, as únicas componentes de rotação e vorticidade estão na direção z,

$$\zeta_z = 2\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}$$

Posto que $V_r = 0$ em qualquer ponto destes campos, a expressão anterior reduz-se a $\zeta_z = 2\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r}$.

(a) Para rotação de corpo rígido, $V_\theta = \omega r$.

Então
$$\omega_z = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\omega r^2 = \frac{1}{2r}(2\omega r) = \omega \qquad \text{e} \qquad \zeta_z = 2\omega.$$

A circulação é
$$\Gamma = \oint_C \vec{V}\cdot d\vec{s} = \int_A 2\omega_z\, dA. \tag{5.18}$$

Como $\omega_z = \omega =$ constante, a circulação sobre qualquer contorno fechado é dada por $\Gamma = 2\omega A$, onde A é a área delimitada pelo contorno. Assim, para movimento de corpo rígido (um vórtice forçado), a rotação e a vorticidade são constantes; a circulação depende da área no interior do contorno.

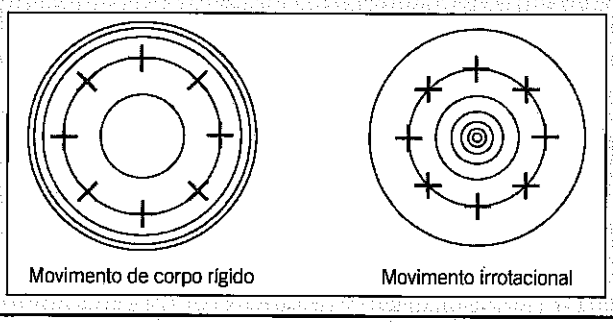
(b) Para escoamento irrotacional, $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r V_\theta = 0$. Integrando, encontramos

$$r V_\theta = \text{constante} \quad \text{ou} \quad V_\theta = f(r) = \frac{C}{r}$$

Para este escoamento, a origem é um ponto singular onde $V_\theta \to \infty$. A circulação para qualquer contorno envolvendo a origem é

$$\Gamma = \oint_C \vec{V}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r}\, r\, d\theta = 2\pi C$$

A circulação sobre qualquer contorno que *não* envolva o ponto singular na origem é igual a zero. Linhas de corrente para os dois escoamentos de vórtice são mostradas na figura a seguir, ilustrando a localização e a orientação em diferentes instantes de uma marca de cruz no fluido localizada, inicialmente, na posição de 12 horas de um relógio. Para o movimento de corpo rígido (que ocorre, por exemplo, no olho de um tornado, criando a região "morta" bem no centro), a cruz gira à medida que realiza um movimento circular; também as linhas de corrente estão mais próximas à medida que se afastam da origem. Para o movimento irrotacional (que ocorre, por exemplo, fora do olho de um tornado — em uma grande região onde os efeitos viscosos são desprezíveis), a cruz não gira ao realizar o movimento circular; também, as linhas de corrente estão mais distantes umas das outras à medida que se afastam da origem.



Deformação de um Fluido

a. Deformação Angular

Conforme discutido anteriormente (e conforme mostrado na Fig. 5.7*d*), a *deformação angular* de uma partícula é dada pela soma de duas deformações angulares ou, em outras palavras, por $(\Delta\alpha + \Delta\beta)$.

Relembramos, também, que $\Delta\alpha = \Delta\eta/\Delta x$, $\Delta\beta = \Delta\xi/\Delta y$, e $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$ são dados por

$$\Delta\xi = \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t - u\Delta t = \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\Delta t$$

e

$$\Delta\eta = \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t - v\Delta t = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\Delta t$$

Podemos agora calcular a taxa de deformação angular da partícula no plano xy por meio da combinação desses resultados,

$$\begin{matrix}\text{Taxa de deformação}\\ \text{angular no plano } xy\end{matrix} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta\alpha + \Delta\beta)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\dfrac{\Delta\eta}{\Delta x} + \dfrac{\Delta\xi}{\Delta y}\right)}{\Delta t}$$

$$\begin{matrix}\text{Taxa de deformação}\\ \text{angular no plano } xy\end{matrix} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}\Delta t + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\Delta y}{\Delta y}\Delta t\right)}{\Delta t} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{5.19a}$$

Expressões similares podem ser escritas para a taxa de deformação angular da partícula nos planos yz e zx,

$$\text{Taxa de deformação angular no plano } yz = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{5.19b}$$

$$\text{Taxa de deformação angular no plano } zx = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{5.19c}$$

Vimos no Capítulo 2 que, para um escoamento newtoniano unidimensional e laminar, a tensão de cisalhamento é dada pela taxa de deformação (du/dy) da partícula fluida,

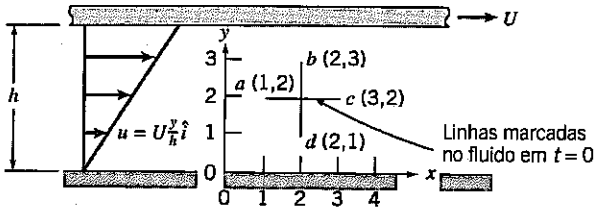
$$\tau_{yx} = \mu\frac{du}{dy} \tag{2.10}$$

Vamos ver, rapidamente, como podemos generalizar a Eq. 2.10 para o caso de um escoamento laminar tridimensional; isto conduzirá a expressões para tensões de cisalhamento tridimensionais envolvendo as três taxas de deformação angular dadas anteriormente. (Eq. 2.10 é um caso especial da Eq. 5.19a.)

Os conceitos de rotação e de deformação são tratados com detalhes no filme da NCFMF *Deformation of Continuous Media.* O cálculo de deformação angular está ilustrado no Problema-Exemplo 5.7 para um campo de escoamento simples.

EXEMPLO 5.7 Rotação em Escoamento Viscométrico

Um escoamento viscométrico no espaço estreito entre duas grandes placas paralelas é mostrado na figura que se segue. O campo de velocidade na folga estreita é dado por $\vec{V} = U(y/h)\hat{i}$, onde $U = 4$ mm/s e $h = 4$ mm. Em $t = 0$, os segmentos de linhas ac e bd são marcados no fluido para formar uma cruz conforme mostrado. Avalie as posições dos pontos marcados em $t = 1{,}5$ s e faça um esquema para comparação. Calcule a taxa de deformação angular e a taxa de rotação de uma partícula fluida neste campo de velocidade. Comente sobre os seus resultados.



PROBLEMA-EXEMPLO 5.7

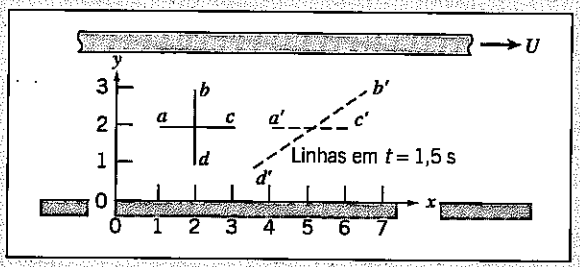
DADOS: Campo de velocidade, $\vec{V} = U\frac{y}{h}\hat{i}$; $U = 4$ mm/s e $h = 4$ mm. Partículas fluidas marcadas em $t = 0$, formando uma cruz como mostrado.

DETERMINAR:
(a) As posições dos pontos a', b', c' e d' em $t = 1{,}5$ s; traçar gráfico.
(b) A taxa de deformação angular.
(c) A taxa de rotação de uma partícula fluida.
(d) Significado destes resultados.

SOLUÇÃO:
Para o campo de escoamento dado $v = 0$, então não há movimento vertical. A velocidade de cada ponto permanece constante, logo $\Delta x = u\Delta t$ para cada ponto. No ponto b, $u = 3$ mm/s, então

$$\Delta x_b = \frac{3\ \text{mm}}{\text{s}} \times 1{,}5\ \text{s} = 4{,}5\ \text{mm}$$

Similarmente, os pontos a e c deslocam-se 3 mm cada um e o ponto d desloca-se 1,5 mm. O gráfico para $t = 1{,}5$ s é



A taxa de deformação angular é

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = U\frac{1}{h} + 0 = \frac{U}{h} = \frac{4\ \text{mm}}{s} \times \frac{1}{4\ \text{mm}} = 1\ \text{s}^{-1} \longleftarrow$$

A taxa de rotação é

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{U}{h}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{4\ \text{mm}}{\text{s}} \times \frac{1}{4\ \text{mm}} = -0{,}5\ \text{s}^{-1} \longleftarrow \omega_z$$

Neste problema, temos um escoamento viscoso e, portanto, esperar-se-ia tanto deformação angular quanto rotação de partícula.

b. Deformação Linear

Durante uma deformação linear, a forma de um elemento de fluido, descrita pelos ângulos em seus vértices, permanece imutável, visto que todos os ângulos retos continuam retos (veja a Fig. 5.5). O comprimento do elemento variará na direção x somente se $\partial u/\partial x$ for diferente de zero. Analogamente, uma mudança na dimensão y requer um valor diferente de zero para $\partial v/\partial y$, enquanto uma mudança

na dimensão z requer um valor diferente de zero para $\partial w/\partial z$. Estas quantidades representam as componentes das taxas longitudinais de deformação nas direções x, y e z, respectivamente.

Variações no comprimento dos lados podem produzir alterações no volume do elemento. A taxa de *dilatação volumétrica* local, instantânea, é dada por

$$\text{Taxa de dilatação volumétrica} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V} \tag{5.20}$$

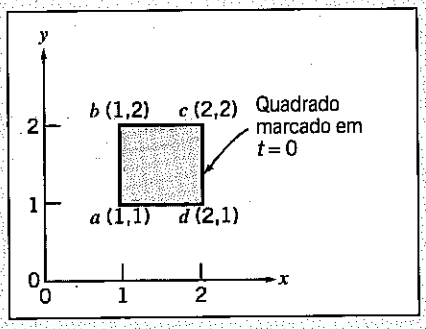
Para escoamento incompressível, a taxa de dilatação volumétrica é zero (Eq. 5.1c).

EXEMPLO 5.8 Taxas de Deformação para Escoamento Bidimensional

O campo de velocidade $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$ representa escoamento em um "canto", como mostrado no Problema-Exemplo 5.4, onde $A = 0{,}3\ \text{s}^{-1}$ e as coordenadas são medidas em metros. Um quadrado é marcado no fluido em $t = 0$, conforme mostrado na próxima figura. Avalie as novas posições dos quatro pontos dos vértices, quando o ponto a tiver se movido para $x = 3/2$ m após τ segundos. Avalie as taxas de deformação linear nas direções x e y. Compare a área $a'b'c'd'$ em $t = \tau$ com a área $abcd$ em $t = 0$. Comente sobre o significado dos resultados.

PROBLEMA-EXEMPLO 5.8

DADOS: $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$; $A = 0{,}3\ \text{s}^{-1}$, x e y em metros.



DETERMINAR:
(a) A posição do quadrado em $t = \tau$, quando a está em a' em $x = \frac{3}{2}$ m.
(b) Taxas de deformação linear.
(c) Comparar a área $a'b'c'd'$ com a área $abcd$.
(d) Comente sobre o significado dos resultados.

SOLUÇÃO:
Primeiro, devemos determinar τ, e, para isto, vamos seguir uma partícula fluida usando a descrição lagrangiana. Assim,

$$u = \frac{dx_p}{dt} = Ax_p, \quad \frac{dx}{x} = A\,dt, \text{logo} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^{\tau} A\,dt \quad \text{e} \quad \ln\frac{x}{x_0} = A\tau$$

$$\tau = \frac{\ln x/x_0}{A} = \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{0{,}3\ \text{s}^{-1}} = 1{,}35\ \text{s}$$

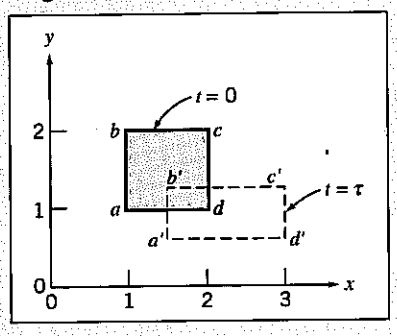
Na direção y

$$v = \frac{dy_p}{dt} = -Ay_p \qquad \frac{dy}{y} = -A\,dt \qquad \frac{y}{y_0} = e^{-A\tau}$$

As coordenadas do ponto em τ são:

Ponto	$t = 0$	$t = \tau$
a	(1, 1)	$(\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$
b	(1, 2)	$(\frac{3}{2}, \frac{4}{3})$
c	(2, 2)	$(3, \frac{4}{3})$
d	(2, 1)	$(3, \frac{2}{3})$

O gráfico é:



As taxas de deformação linear são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} Ax = A = 0{,}3\,\mathrm{s}^{-1} \quad \text{na direção } x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-Ay) = -A = -0{,}3\,\mathrm{s}^{-1} \quad \text{na direção } y$$

A taxa de dilatação volumétrica é:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = A - A = 0$$

A área $abcd = 1\ \mathrm{m}^2$ e a área $a'b'c'd' = (3 - \frac{3}{2})(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}) = 1\ \mathrm{m}^2$.

Notas:

- ✓ Planos paralelos permanecem paralelos; há deformação linear, mas não há deformação angular.
- ✓ O escoamento é irrotacional ($\partial v/\partial x + \partial u/\partial y = 0$).
- ✓ O volume é conservado, porque as duas taxas de deformação linear são iguais e opostas.
- ✓ O filme da NCFMF *Flow Visualization* usa bolhas de hidrogênio para marcar linhas de tempo e de emissão na demonstração experimental de que a área do quadrado marcado no fluido é conservada num escoamento bidimensional incompressível.

Há uma planilha *Excel* para este problema que mostra, em animação, este movimento.

Mostramos, nesta seção, que o campo de velocidade contém todas as informações necessárias para determinar a aceleração, a rotação e as deformações angular e linear de uma partícula em um campo de escoamento.

5-4 EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Uma equação dinâmica descrevendo o movimento de um fluido pode ser obtida aplicando a segunda lei de Newton a uma partícula. Para deduzir a forma diferencial da equação da quantidade de movimento, aplicaremos a segunda lei de Newton a uma partícula fluida infinitesimal de massa *dm*.

Já vimos que a segunda lei de Newton para um sistema é dada por

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.2a}$$

onde a quantidade de movimento, $\vec{P}$, do sistema é dada por

$$\vec{P}_{\text{sistema}} = \int_{\text{massa (sistema)}} \vec{V}\, dm \tag{4.2b}$$

Então, para um sistema infinitesimal de massa *dm*, a segunda lei de Newton pode ser escrita

$$d\vec{F} = dm \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{5.21}$$

Introduzindo a expressão obtida para a aceleração de um elemento de fluido de massa *dm* em movimento num campo de velocidade (Eq. 5.9), podemos escrever a segunda lei de Newton na seguinte forma vetorial

$$d\vec{F} = dm \frac{D\vec{V}}{Dt} = dm \left[u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right] \tag{5.22}$$

Necessitamos agora obter uma formulação adequada para a força, $d\vec{F}$, ou para suas componentes, dF_x, dF_y e dF_z, atuando sobre o elemento.

Forças Atuando sobre uma Partícula Fluida

Lembre-se de que as forças que atuam sobre um elemento de fluido podem ser classificadas como forças de corpo e forças de superfície; forças de superfície incluem tanto forças normais quanto forças tangenciais (de cisalhamento).

Consideremos a componente x da força atuando sobre um elemento diferencial de massa dm e volume $d\forall = dx\,dy\,dz$. Somente aquelas tensões que atuam na direção x darão origem a forças de superfície na direção x. Se as tensões no centro do elemento diferencial forem tomadas como σ_{xx}, τ_{yx} e τ_{zx}, então as tensões atuando na direção x em cada face do elemento (obtidas por uma expansão por série de Taylor em torno do centro do elemento) serão conforme mostrado na Fig. 5.9.

Para obter a força de superfície resultante na direção x, dF_{S_x}, devemos somar as forças nesta direção. Assim procedendo,

$$\begin{aligned} dF_{S_x} &= \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz \\ &+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz \\ &+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy \end{aligned}$$

Simplificando, obtemos

$$dF_{S_x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

Quando a força da gravidade é a única força de corpo atuante, a força de corpo por unidade de massa é igual $\vec{g}$. A força resultante na direção x, dF_x, é dada por

$$dF_x = dF_{B_x} + dF_{S_x} = \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \tag{5.23a}$$

Expressões semelhantes podem ser deduzidas para as componentes da força nas direções y e z:

$$dF_y = dF_{B_y} + dF_{S_y} = \left(\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \tag{5.23b}$$

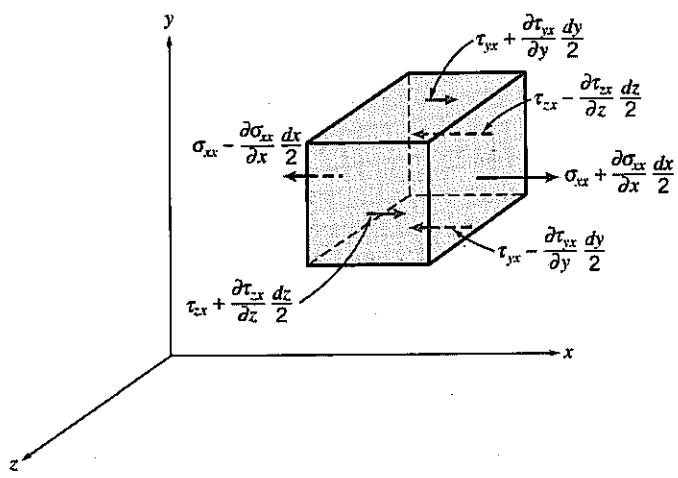


Fig. 5.9 Tensões sobre um elemento de fluido na direção x.

$$dF_z = dF_{B_z} + dF_{S_z} = \left(\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \tag{5.23c}$$

Equação Diferencial da Quantidade de Movimento

Acabamos de formular expressões para as componentes, dF_x, dF_y e dF_z, da força, $d\vec{F}$, atuando sobre o elemento de massa dm. Se substituirmos essas expressões (Eqs. 5.23) nas componentes x, y e z da força na Eq. 5.22, obteremos as equações diferenciais do movimento,

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{5.24a}$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{5.24b}$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{5.24c}$$

As Eqs. 5.24 são as equações diferenciais do movimento de qualquer partícula fluida satisfazendo a hipótese do contínuo. Antes que possam ser usadas na solução para u, v e w, expressões adequadas para as tensões devem ser obtidas em termos dos campos de velocidade e de pressão.

Fluidos Newtonianos: Equação de Navier-Stokes

Para um fluido newtoniano, a tensão viscosa é diretamente proporcional à taxa de deformação por cisalhamento (taxa de deformação angular). Vimos no Capítulo 2 que, para um escoamento newtoniano, unidimensional e laminar, a tensão de cisalhamento é proporcional à taxa de deformação angular: $\tau_{yx} = du/dy$ (Eq. 2.10). Para um escoamento tridimensional, a situação é um pouco mais complicada (entre outras coisas, necessitamos usar expressões mais complexas para a taxa de deformação angular, Eq. 5.19). As tensões podem ser expressas em termos de gradientes de velocidade e de propriedades dos fluidos em coordenadas retangulares, como segue:[8]

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{5.25a}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{5.25b}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{5.25c}$$

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{5.25d}$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{5.25e}$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \tag{5.25f}$$

onde p é a pressão termodinâmica local[9]. A pressão termodinâmica está relacionada com a massa específica e com a temperatura por meio de relações termodinâmicas usualmente chamadas de equações de estado.

[8] A dedução destes resultados transcende os objetivos deste livro. Deduções detalhadas podem ser encontradas nas Referências 2, 3 e 4.

[9] A referência 5 discute a relação entre a pressão termodinâmica e a pressão média definida como $p = -(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$.

Introduzindo estas expressões para as tensões nas equações diferenciais do movimento (Eqs. 5.24), obtemos:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \tag{5.26a}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] \tag{5.26b}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right] \tag{5.26c}$$

Estas equações do movimento são chamadas de equações de *Navier-Stokes*. São bastante simplificadas quando aplicadas ao *escoamento incompressível* com *viscosidade constante*. Sob estas condições, as equações reduzem-se a:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{5.27a}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{5.27b}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{5.27c}$$

Esta forma das equações de Navier-Stokes é provavelmente (junto com a equação de Bernoulli) o conjunto de equações mais famoso em mecânica dos fluidos, e tem sido largamente estudada. Estas equações, mais a equação da continuidade (Eq. 5.1c), formam um conjunto de quatro equações diferenciais parciais não-lineares acopladas para u, v, w e p. Soluções para estas equações têm sido obtidas para muitos casos especiais [3], mas somente para geometrias e condições iniciais ou de contorno mais simples, para as quais muitos dos termos nas equações podem ser considerados iguais a zero. Resolveremos as equações para um problema igualmente simples no Problema-Exemplo 5.9.

As equações de Navier-Stokes para massa específica e viscosidade constantes são dadas, em coordenadas cilíndricas, no Apêndice B; na referência [3], elas também podem ser obtidas em coordenadas esféricas. Aplicaremos a formulação em coordenadas cilíndricas na solução do Problema-Exemplo 5.10.

Nos últimos anos, programas de computador (tais como *Fluent* [6] e *STAR-CD* [7]) de aplicação em dinâmica dos fluidos computacional (DFC) têm sido desenvolvidos para análise das equações de Navier-Stokes em problemas mais complexos, ou seja, problemas do mundo real.

Para o caso de escoamento sem atrito ($\mu = 0$), as equações do movimento (Eqs. 5.26 ou Eqs. 5.27) reduzem-se à *equação de Euler*,

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p$$

Consideraremos o caso de escoamento sem atrito no Capítulo 6.

EXEMPLO 5.9 Análise de um Escoamento Completamente Desenvolvido para Baixo sobre um Plano Inclinado

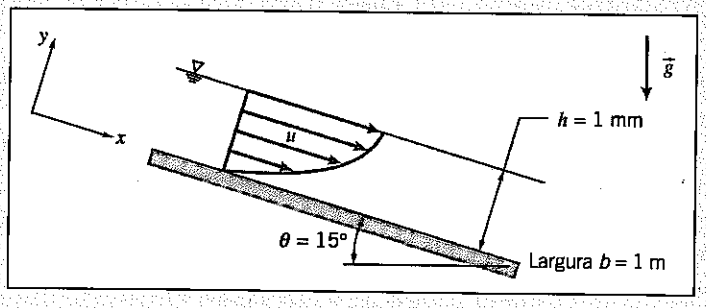
Um líquido escoa para baixo sobre uma superfície plana inclinada em um filme laminar, permanente, completamente desenvolvido e de espessura h. Simplifique as equações da continuidade e de Navier-Stokes para modelar este campo de escoamento. Obtenha expressões para o perfil de velocidades do líquido, a distribuição de tensões de cisalhamento, a vazão volumétrica e a velocidade média. Relacione a espessura do filme de líquido com a vazão volumétrica por unidade de profundidade da superfície normal ao escoamento. Calcule a vazão volumétrica em um filme d'água com espessura $h = 1$ mm, escoando sobre uma superfície com largura $b = 1$ m, inclinada de $\theta = 15°$ em relação à horizontal.

PROBLEMA-EXEMPLO 5.9

DADOS: Líquido escoando para baixo sobre uma superfície plana, inclinada, em um filme laminar, permanente, completamente desenvolvido e de espessura h.

DETERMINAR:
(a) As equações simplificadas da continuidade e de Navier-Stokes para modelar este campo de escoamento.
(b) O perfil de velocidades.
(c) A distribuição da tensão de cisalhamento.
(d) A vazão volumétrica por unidade de profundidade da superfície normal ao diagrama.
(e) A velocidade média de escoamento.
(f) A espessura do filme em termos da vazão volumétrica por unidade de profundidade da superfície normal ao diagrama.
(g) A vazão volumétrica em um filme d'água de 1 mm de espessura sobre uma superfície de 1 m de largura, inclinada de 15° em relação à horizontal.

SOLUÇÃO:
A geometria e o sistema de coordenadas usados para modelar o campo de escoamento são mostrados na figura que se segue. (É conveniente alinhar uma coordenada com a direção do escoamento para baixo sobre a superfície plana.)



As equações básicas escritas para um escoamento incompressível com viscosidade constante são

$$\cancelto{4}{\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial v}{\partial y} + \cancelto{3}{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0 \tag{5.1c}$$

$$\rho\left(\cancelto{1}{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\cancelto{4}{\frac{\partial u}{\partial x}} + v\cancelto{5}{\frac{\partial u}{\partial y}} + w\cancelto{3}{\frac{\partial u}{\partial z}}\right) = \rho g_x - \cancelto{4}{\frac{\partial p}{\partial x}} + \mu\left(\cancelto{4}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancelto{3}{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}\right) \tag{5.27a}$$

$$\rho\left(\cancelto{1}{\frac{\partial v}{\partial t}} + u\cancelto{4}{\frac{\partial v}{\partial x}} + v\cancelto{5}{\frac{\partial v}{\partial y}} + w\cancelto{3}{\frac{\partial v}{\partial z}}\right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\cancelto{4}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancelto{5}{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} + \cancelto{3}{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}\right) \tag{5.27b}$$

$$\rho\left(\cancelto{1}{\frac{\partial w}{\partial t}} + u\cancelto{3}{\frac{\partial w}{\partial x}} + v\cancelto{3}{\frac{\partial w}{\partial y}} + w\cancelto{3}{\frac{\partial w}{\partial z}}\right) = \cancelto{3}{\rho g_z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\cancelto{3}{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} + \cancelto{3}{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} + \cancelto{3}{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}\right) \tag{5.27c}$$

Os termos cancelados para simplificar as equações básicas estão referenciados por números às considerações listadas a seguir. As considerações são discutidas na ordem em que foram aplicadas para simplificar as equações.

Considerações: (1) Escoamento permanente (dado).
(2) Escoamento incompressível; ρ = constante.
(3) Nenhum escoamento ou variação das propriedades na direção z; $w = 0$ e $\partial/\partial z = 0$.
(4) Escoamento completamente desenvolvido, logo nenhuma propriedade varia na direção x, $\partial/\partial x = 0$.

A consideração (1) elimina variações do tempo em qualquer propriedade do fluido.

A consideração (2) elimina variações espaciais na massa específica.

A consideração (3) estabelece que não existe componente z da velocidade e que não existem variações das propriedades na direção z. Todos os termos na componente z da equação de Navier-Stokes se cancelam.

Após a aplicação da consideração (4), a equação da continuidade reduz-se a $\partial v/\partial y = 0$. As considerações (3) e (4) também indicam que $\partial v/\partial z = 0$ e $\partial v/\partial x = 0$. Portanto, v deve ser constante. Como v é igual a zero na superfície sólida, então v deve ser também igual a zero em qualquer lugar.

O fato de v ser igual a zero simplifica ainda mais a equação de Navier-Stokes, como indicado por (5). As equações finais simplificadas são

$$0 = \rho g_x + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$0 = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} \tag{2}$$

Como $\partial u/\partial z = 0$ (consideração 3) e $\partial u/\partial x = 0$ (consideração 4), então u é no máximo uma função de y, e $\partial^2 u/\partial y^2 = d^2u/dy^2$. Então, da Eq. 1 resulta

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{\rho g_x}{\mu} = -\rho g\frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}$$

Integrando,

$$\frac{du}{dy} = -\rho g\frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}y + c_1 \tag{3}$$

e integrando novamente,

$$u = -\rho g\frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}\frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2 \tag{4}$$

As condições de contorno necessárias para avaliar as constantes são as condições de não-deslizamento na superfície sólida ($u = 0$ e $y = 0$) e as condições de tensão de cisalhamento zero na superfície livre de líquido ($du/dy = 0$ em $y = h$).

Avaliando a Eq. 4 em $y = 0$, obtemos $c_2 = 0$. Da Eq. 3, em $y = h$,

$$0 = -\rho g\frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}h + c_1$$

ou

$$c_1 = \rho g\frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}h$$

Substituindo na Eq. 4, obtemos o perfil de velocidade

$$u = -\rho g\frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}\frac{y^2}{2} + \rho g\frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}hy$$

ou

$$u = \rho g \frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right) \longleftarrow u(y)$$

A distribuição da tensão de cisalhamento é (da Eq. 5.25a após fazer $\partial v/\partial x = 0$, ou, alternativamente, da Eq. 2.10 para um escoamento unidimensional)

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} = \rho g \operatorname{sen}\theta\,(h - y) \longleftarrow \tau_{yx}(y)$$

A tensão de cisalhamento no fluido atinge seu valor máximo na parede ($y = 0$); conforme esperado, ele é zero na superfície livre ($y = h$). Na parede, a tensão de cisalhamento τ_{yx} é positiva, porém a superfície normal *para o fluido* está na direção negativa de y; portanto, a força de cisalhamento age na direção negativa de x, e apenas contrabalança a componente x da força de corpo agindo sobre o fluido. A vazão volumétrica é

$$Q = \int_A u\,dA = \int_0^h u\,b\,dy$$

onde b é a largura da superfície na direção z. Substituindo,

$$Q = \int_0^h \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta}{\mu}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right) b\,dy = \rho g \frac{\operatorname{sen}\theta\, b}{\mu}\left[\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right]_0^h$$

$$Q = \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta\, b}{\mu}\frac{h^3}{3} \longleftarrow (5)\ Q$$

A velocidade média do escoamento é $\bar{V} = Q/A = Q/bh$. Então,

$$\bar{V} = \frac{Q}{bh} = \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta}{\mu}\frac{h^2}{3} \longleftarrow \bar{V}$$

Resolvendo para a espessura de filme, resulta em

$$h = \left[\frac{3\mu Q}{\rho g \operatorname{sen}\theta\, b}\right]^{1/3} \longleftarrow (6)\ h$$

Um filme d'água com $h = 1$ mm de espessura sobre um plano de largura $b = 1$ m, inclinado em $\theta = 15°$, transportaria

$$Q = 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \operatorname{sen}(15°) \times 1\,\text{m} \times \frac{\text{m}\cdot\text{s}}{1{,}00 \times 10^{-3}\,\text{kg}}$$

$$\times \frac{(0{,}001)^3\,\text{m}^3}{3} \times 1000\,\frac{1}{\text{m}^3}$$

$$Q = 0{,}846\ \text{L/s} \longleftarrow Q$$

Notas:

- ✓ Este problema ilustra como as equações completas de Navier-Stokes (Eqs. 5.27) podem, às vezes, ser reduzidas a um conjunto de equações de solução relativamente fácil (Eqs. 1 e 2 neste problema).
- ✓ Após a integração das equações simplificadas, condições de contorno (ou iniciais) são usadas para completar a solução.
- ✓ Uma vez obtido o campo de velocidade, outras quantidades úteis (p. ex., tensão de cisalhamento, taxa de vazão volumétrica etc.) podem ser determinadas.
- ✓ As equações (5) e (6) mostram que, mesmo para problemas relativamente simples, os resultados podem ser complicados: A profundidade do escoamento depende de forma não-linear da taxa de vazão ($h \propto Q^{1/3}$).

EXEMPLO 5.10 Análise de um Escoamento Laminar Viscométrico entre Cilindros Coaxiais

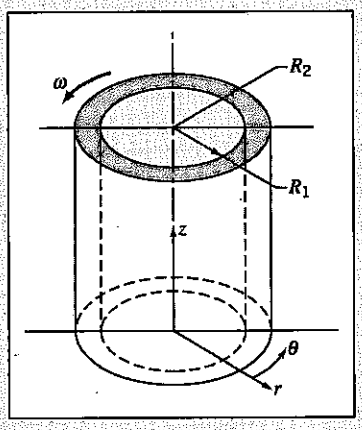
Um líquido viscoso enche o espaço anular entre dois cilindros concêntricos verticais. O cilindro interno é estacionário e o cilindro externo gira com velocidade constante. O escoamento é laminar. Simplifique as equações da continuidade, de Navier-Stokes e da tensão de cisalhamento tangencial para modelar este campo de escoamento. Obtenha expressões para o perfil de velocidades do líquido e para a distribuição de tensões de cisalhamento. Compare a tensão de cisalhamento na superfície do cilindro interior com aquela calculada por meio de uma aproximação obtida pelo "desdobramento" do espaço anular em um plano e com a consideração de um perfil de velocidade linear através da folga. Determine a razão entre os raios dos cilindros para a qual a aproximação "planar" prediz a tensão de cisalhamento na superfície do cilindro interno com incerteza máxima de 1%.

PROBLEMA-EXEMPLO 5.10

DADOS: Escoamento viscométrico laminar de um líquido no espaço anular entre dois cilindros verticais concêntricos. O cilindro interno é estacionário e o externo gira com velocidade constante.

DETERMINAR:
(a) As equações da continuidade e de Navier-Stokes simplificadas para modelar este campo de escoamento.
(b) O perfil de velocidades na folga anular.
(c) A distribuição da tensão de cisalhamento na folga anular.
(d) A tensão de cisalhamento na superfície do cilindro interno.
(e) Comparação com uma aproximação "planar" para tensão de cisalhamento constante na folga estreita entre os cilindros.
(f) A razão entre os raios dos cilindros para a qual a aproximação planar prediz a tensão de cisalhamento com incerteza máxima de 1% em relação ao valor correto.

SOLUÇÃO:
A geometria e o sistema de coordenadas utilizados para modelar o campo de escoamento são mostrados na próxima figura. (A coordenada z está direcionada verticalmente para cima; como conseqüência, $g_r = g_\theta = 0$ e $g_z = -g$.)



As equações da continuidade, de Navier-Stokes e da tensão de cisalhamento tangencial (do Apêndice B) escritas para um escoamento incompressível com viscosidade constante são

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \cancelto{4}{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)} + \cancelto{3}{\frac{\partial}{\partial z}(v_z)} = 0 \qquad \text{(B.1)}$$

componente r:

$$\rho\left(\cancelto{1}{\frac{\partial v_r}{\partial t}} + \cancelto{5}{v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}} + \cancelto{4}{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}} - \frac{v_\theta^2}{r} + \cancelto{3}{v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}}\right)$$

$$= \cancelto{0}{\rho g_r} - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\cancelto{5}{[rv_r]}\right) + \cancelto{4}{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}} - \cancelto{4}{\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \cancelto{3}{\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}}\right\} \qquad \text{(B.3a)}$$

componente θ:

$$\rho\left(\cancelto{1}{\frac{\partial v_\theta}{\partial t}} + \cancelto{5}{v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r}\cancelto{4}{\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \cancelto{5}{\frac{v_r v_\theta}{r}} + v_z\cancelto{3}{\frac{\partial v_\theta}{\partial z}}\right)$$

$$= \cancelto{0}{\rho g_\theta} - \frac{1}{r}\cancelto{4}{\frac{\partial p}{\partial \theta}} + \mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rv_\theta]\right) + \frac{1}{r^2}\cancelto{4}{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}} + \frac{2}{r^2}\cancelto{4}{\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \cancelto{3}{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}}\right\} \tag{B.3b}$$

componente z:

$$\rho\left(\cancelto{1}{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + \cancelto{5}{v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r}\cancelto{4}{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}} + v_z\cancelto{3}{\frac{\partial v_z}{\partial z}}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancelto{3}{r\frac{\partial v_z}{\partial r}}\right) + \frac{1}{r^2}\cancelto{3}{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}} + \cancelto{3}{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}\right\} \tag{B.3c}$$

$$\tau_{r\theta} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\cancelto{4}{\frac{\partial v_r}{\partial \theta}}\right] \tag{B.2}$$

Os termos cancelados para simplificar as equações básicas são referenciados por números às considerações listadas a seguir. As considerações são discutidas na ordem em que são aplicadas para simplificar as equações.

Considerações: (1) Escoamento permanente: a velocidade angular do cilindro externo é constante.
(2) Escoamento incompressível; ρ = constante.
(3) Nenhum fluxo ou variação das propriedades na direção z; $v_z = 0$ e $\partial/\partial z = 0$.
(4) Escoamento axissimétrico, logo as propriedades não variam com θ e $\partial/\partial_\theta = 0$.

A consideração (1) elimina variações temporais nas propriedades do fluido.

A consideração (2) elimina variações espaciais na massa específica.

A consideração (3) causa o cancelamento de todos os termos na componente z da equação de Navier-Stokes, exceto para a distribuição de pressão hidrostática.

Após a aplicação das considerações (3) e (4), a equação da continuidade fica reduzida a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0$$

Como $\partial/\partial_\theta = 0$ e $\partial/\partial z = 0$ pelas considerações (3) e (4), segue que

$$rv_r = \text{constante}$$

Como $v_r = 0$ na superfície sólida de cada cilindro, então v_r deve ser zero em qualquer lugar.

O fato de v_r ser igual a zero simplifica ainda mais as equações de Navier-Stokes, conforme indicado pelos cancelamentos (5). As equações finais ficam reduzidas a

$$-\rho\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$0 = \mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rv_\theta]\right)\right\}$$

Mas $\partial/\partial_\theta = 0$ e $\partial/\partial z = 0$ pelas considerações (3) e (4), logo v_θ é uma função somente do raio, e

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[rv_\theta]\right) = 0$$

Integrando uma vez,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[rv_\theta] = c_1$$

ou

$$\frac{d}{dr}[rv_\theta] = c_1 r$$

Integrando novamente,

$$rv_\theta = c_1\frac{r^2}{2} + c_2 \quad \text{ou} \quad v_\theta = c_1\frac{r}{2} + c_2\frac{1}{r}$$

Duas condições de contorno são necessárias para determinar as constantes c_1 e c_2. As condições de contorno são

$$v_\theta = \omega R_2 \qquad \text{em} \qquad r = R_2 \qquad \text{e}$$

$$v_\theta = 0 \qquad \text{em} \qquad r = R_1$$

Substituindo

$$\omega R_2 = c_1\frac{R_2}{2} + c_2\frac{1}{R_2}$$

$$0 = c_1\frac{R_1}{2} + c_2\frac{1}{R_1}$$

Após algumas operações algébricas

$$c_1 = \frac{2\omega}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{-\omega R_1^2}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}$$

Substituindo na expressão para v_θ,

$$v_\theta = \frac{\omega r}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} - \frac{\omega R_1^2/r}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} = \frac{\omega R_1}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}\left[\frac{r}{R_1} - \frac{R_1}{r}\right] \longleftarrow v_\theta(r)$$

A distribuição da tensão de cisalhamento é

$$\tau_{r\theta} = \mu r\frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = \mu r\frac{d}{dr}\left\{\frac{\omega R_1}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{R_1}{r^2}\right]\right\} = \mu r\frac{\omega R_1}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}(-2)\left(-\frac{R_1}{r^3}\right)$$

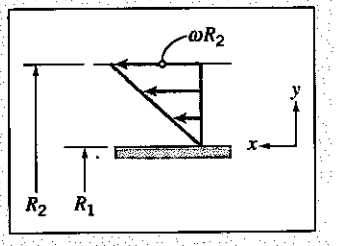
$$\tau_{r\theta} = \mu\frac{2\omega R_1^2}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}\frac{1}{r^2} \longleftarrow \tau_{r\theta}$$

Na superfície do cilindro interno, $r = R_1$, então

$$\tau_{\text{superfície}} = \mu\frac{2\omega}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \longleftarrow \tau_{\text{superfície}}$$

Para uma folga "planificada"

$$\tau_{\text{planificada}} = \mu\frac{\Delta v}{\Delta y} = \mu\frac{\omega R_2}{R_2 - R_1}$$



ou

$$\tau_{\text{planificada}} = \mu\frac{\omega}{1-\frac{R_1}{R_2}} \longleftarrow \tau_{\text{planificada}}$$

Fatorando o denominador da expressão exata para a tensão de cisalhamento na superfície, resulta em

$$\tau_{\text{superfície}} = \mu \frac{2\omega}{\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)} = \mu \frac{\omega}{1 - \frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{2}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

Portanto

$$\frac{\tau_{\text{superfície}}}{\tau_{\text{planificada}}} = \frac{2}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

Para uma precisão de 1%,

$$1{,}01 = \frac{2}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

ou

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{1{,}01}(2 - 1{,}01) = 0{,}980 \longleftarrow \frac{R_1}{R_2}$$

O critério de precisão é encontrado quando a largura da folga é menor que 2% do raio do cilindro.

Notas:

- ✓ Este problema ilustra como as equações completas de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas (Eqs. B.1 a B.3) podem, às vezes, ser reduzidas a um conjunto de equações de solução relativamente fácil.
- ✓ Como no Problema-Exemplo 5.9, após a integração das equações simplificadas, as condições de contorno (ou iniciais) são usadas para completar a solução.
- ✓ Uma vez obtido o campo de velocidade, outras quantidades úteis (neste problema, a tensão de cisalhamento) podem ser determinadas.

A planilha *Excel* para este problema compara os perfis de velocidade linear e viscométrico. Permite, também, que seja determinado um valor adequado do raio externo que atenda a uma exigência de precisão prescrita para o resultado da aproximação planar. Discutiremos novamente a aproximação cilindros concêntricos–placas planas paralelas no Capítulo 8.

5-5 RESUMO

Neste capítulo, nós:

- ✓ Deduzimos a formulação diferencial da equação de conservação da massa (continuidade), na forma vetorial e em coordenadas cilíndricas e retangulares.
- ✓ *Definimos a função de corrente ψ para um escoamento bidimensional, incompressível, e aprendemos como deduzir as componentes da velocidade a partir desta função, bem como a determinar ψ a partir do campo de velocidade.
- ✓ Aprendemos como obter as acelerações, total, local e convectiva de uma partícula fluida a partir do campo de velocidade.
- ✓ Apresentamos exemplos da translação e rotação de uma partícula fluida e das deformações angular e linear.
- ✓ Definimos vorticidade e circulação de um escoamento.

*Estes tópicos aplicam-se a uma seção que pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

✓ Deduzimos e resolvemos para casos simples as equações de Navier-Stokes, e discutimos o significado físico de cada termo.

Nós também exploramos idéias do tipo como determinar se um escoamento é incompressível usando o campo de velocidade e, dada uma componente da velocidade de um campo de escoamento incompressível e bidimensional, como deduzir as outras componentes da velocidade.

Neste capítulo, estudamos os efeitos das tensões viscosas sobre a deformação e a rotação de uma partícula fluida; no próximo capítulo, examinaremos escoamentos para os quais os efeitos viscosos são desprezíveis.

REFERÊNCIAS

1. Li, W. H., and S. H. Lam, *Principles of Fluid Mechanics*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1964.
2. Daily, J. W., and D. R. F. Harleman, *Fluid Dynamics*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1966.
3. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, 7th ed. New York: McGraw-Hill, 1979.
4. White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991.
5. Sabersky, R. H., A. J. Acosta, E. G. Hauptmann, and E. M. Gates, *Fluid Flow—A First Course in Fluid Mechanics*, 4th ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999.
6. *Fluent*. Fluent Incorporated, Centerra Resources Park, 10 Cavendish Court, Lebanon, NH 03766 (www.fluent.com).
7. *STAR-CD*. Adapco, 60 Broadhollow Road, Melville, NY 11747 (www.cd-adapco.com).

PROBLEMAS

5.1 Quais dos seguintes conjuntos de equações representam possíveis casos de escoamento bidimensional incompressível?

(a) $u = 2x^2 + y^2 - x^2y$
$v = x^3 + x(y^2 - 2y)$

(b) $u = 2xy - x^2 + y$
$v = 2xy - y^2 + x^2)$

(c) $u = xt + 2y$; $v = xt^2 - yt$

(d) $u = (x + 2y)xt$; $v = -(2x + y)yt$

5.2 Quais dos seguintes conjuntos de equações representam possíveis casos de escoamento bidimensional incompressível?

(a) $u = -x + y$; $v = x - y^2$

(b) $u = x + 2y$; $v = x^2 - y$

(c) $u = 4x^2 - y$; $v = x - y^2$

(d) $u = xt + 2y$; $v = x^2 - yt$

(e) $u = xt^2$; $v = xyt + y^2$

5.3 As três componentes da velocidade em um campo de velocidade são dadas por $u = Ax + By + Cz$, $v = Dx + Ey + Fz$, e $w = Gx + Hy + Jz$. Determine a relação entre os coeficientes de A a J necessária para que este seja um possível campo de escoamento incompressível.

5.4 Quais dos seguintes conjuntos de equações representam possíveis casos de escoamento tridimensional incompressível?

(a) $u = x + y + z^2$; $v = x - y + z$; $w = 2xy + y^2 + 4$

(b) $u = xyzt$; $v = -xyzt^2$; $w = (z^2/2)(xt^2 - yt)$

(c) $u = y^2 + 2xz$; $v = -2yz + x^2yz$; $w = \frac{1}{2}x^2z^2 + x^3y^4$

5.5 Para um escoamento no plano xy, a componente x da velocidade é dada por $u = Ax(y - B)$, onde $A = 3$ $m^{-1} \cdot s^{-1}$, $B = 2$ m, e x e y são medidos em metros. Encontre uma possível componente y para escoamento permanente e incompressível. Ela também é válida para escoamento incompressível não-permanente? Por quê? Quantas são as possíveis componentes y?

5.6 Para um escoamento no plano xy, a componente y da velocidade é dada por $v = y^2 - 2x + 2y$. Encontre uma possível componente x para escoamento permanente e incompressível. Ela também é válida para escoamento incompressível não-permanente? Por quê? Quantas são as possíveis componentes y?

5.7 A componente x da velocidade em um campo de escoamento permanente e incompressível, no plano xy, é $u = A/x$, onde $A = 2$ m²/s, e x é medido em metros. Determine a mais simples componente y da velocidade para este campo de escoamento.

5.8 A componente y da velocidade em um campo de escoamento permanente e incompressível, no plano xy, é $v = Ay^2/x^2$, onde $A = 2$ m/s e x e y são medidos em metros. Determine a mais simples componente x da velocidade para este campo de escoamento.

5.9 A componente x da velocidade em um campo de escoamento permanente e incompressível, no plano xy, é $u = Ax/(x^2 + y^2)$, onde A = 10 m²/s e x e y são medidos em metros. Determine a mais simples componente y da velocidade para este campo de escoamento.

5.10 Uma aproximação grosseira para a componente x da velocidade numa camada-limite laminar, incompressível, é uma variação linear de $u = 0$ na superfície ($y = 0$) até a velocidade de corrente livre, U, na borda da camada-limite ($y = \delta$). A equação do perfil é $u = Uy/\delta$, onde $\delta = cx^{1/2}$ e c é uma constante. Mostre que a expressão mais simples para a componente y da velocidade é $v = uy/4x$. Avalie o valor máximo da razão v/U num local onde $x = 0{,}5$ m e $\delta = 5$ mm.

5.11 Uma aproximação útil para a componente x da velocidade em um escoamento laminar, incompressível, de camada-limite, é uma variação senoidal de $u = 0$ na superfície ($y = 0$) até a velocidade de corrente livre, U, na borda da camada-limite ($y = \delta$). A equação do perfil é $u = U\,\text{sen}(\pi y/2\delta)$, onde $\delta = cx^{1/2}$ e c é uma constante. Mostre que a expressão mais simples para a componente y da velocidade é

$$\frac{v}{U} = \frac{1}{\pi}\frac{\delta}{x}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right) - 1\right]$$

Trace u/U e v/U em função de y/δ, e determine o local do máximo valor da razão v/U. Determine a razão onde $x = 0{,}5$ m e $\delta = 5$ mm.

5.12 Uma aproximação útil para a componente x da velocidade em um escoamento laminar, incompressível, de camada-limite, é uma variação parabólica de $u = 0$ na superfície ($y = 0$) até a velocidade de corrente livre, U, na borda da camada-limite ($y = \delta$). A equação do perfil é $u/U = 2(y/\delta) - (y/\delta)^2$, onde $\delta = cx^{1/2}$ e c é uma constante. Mostre que a expressão mais simples para a componente y da velocidade é

$$\frac{v}{U} = \frac{\delta}{x}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]$$

Trace v/U em função de y/δ e determine o local do máximo valor da razão v/U. Determine a razão onde $\delta = 5$ mm e $x = 0{,}5$ m.

5.13 Uma aproximação útil para a componente x da velocidade num escoamento laminar, incompressível, de camada-limite, é uma variação cúbica de $u = 0$ na superfície ($y = 0$) até a velocidade de corrente livre, U, na borda da camada-limite ($y = \delta$). A equação do perfil é $u/U = \frac{3}{2}(y/\delta) - \frac{1}{2}(y/\delta)^3$, onde $\delta = cx^{1/2}$ e c é uma constante. Deduza a expressão mais simples para v/U, a componente y da razão de velocidade. Trace u/U e v/U em função de y/δ, e determine o local do máximo valor da razão v/U. Determine a razão onde $\delta = 5$ mm e $x = 0{,}5$ m.

5.14 A componente y da velocidade em um campo de escoamento permanente e incompressível, no plano xy, é $v = -Bxy^3$, onde $B = 0{,}2\ \text{m}^{-3}\,.\,\text{s}^{-1}$, e x e y são medidos em metros. Encontre a mais simples componente x da velocidade para este campo de escoamento. Determine a equação da linha de corrente para este escoamento. Trace as linhas de corrente que passam pelos pontos (1,4) e (2,4).

5.15 Para um escoamento no plano xy, a componente da velocidade em x é dada por $u = Ax^2y^2$, onde $A = 0{,}3\ \text{m}^{-3}\,.\,\text{s}^{-1}$, e x e y são medidos em metros. Determine uma possível componente y para escoamento permanente e incompressível. Ela é válida também para um escoamento não-permanente incompressível? Por quê? Quantas possíveis componentes y existem? Determine a equação da linha de corrente para a mais simples componente y da velocidade. Trace as linhas de corrente que passam pelos pontos (1,4) e (2,4).

5.16 Deduza a forma diferencial da conservação da massa em coordenadas retangulares por expansão em série de Taylor em torno do ponto O dos *produtos*, ρu, ρv e ρw, da massa específica pelas componentes da velocidade. Mostre que o resultado é idêntico à Eq. 5.1a.

5.17 Considere um jato d'água saindo de um irrigador oscilatório de gramados. Descreva as trajetórias e as linhas de emissão correspondentes.

5.18 Considere a corrente d'água saindo de um bocal acoplado a um irrigador rotatório de gramados. Descreva as trajetórias e as linhas de emissão correspondentes.

5.19 Quais dos seguintes conjuntos de equações representam possíveis casos de escoamento incompressível?

(a) $V_r = U\cos\theta$; $V_\theta = -U\,\text{sen}\,\theta$
(b) $V_r = -q/2\pi r$; $V_\theta = K/2\pi r$
(c) $V_r = U\cos\theta\,[1 - (a/r)^2]$; $V_\theta = -U\,\text{sen}\,\theta\,[1 + (a/r)^2]$

5.20 Para um escoamento incompressível no plano $r\theta$, a componente θ da velocidade é dada por $V_\theta = -\Lambda$ sen θ/r^2. Determine uma possível componente r da velocidade. Quantas possíveis componentes r existem?

5.21 Um líquido viscoso é submetido a cisalhamento entre dois discos paralelos de raio R, um dos quais gira enquanto o outro permanece fixo. O campo de velocidade é puramente tangencial, e a velocidade varia linearmente com z, de $V_\theta = 0$ em $z = 0$ (o disco fixo) até a velocidade do disco rotativo na sua superfície ($z = h$). Deduza uma expressão para o campo de velocidade entre os discos.

5.22 Um campo de velocidade em coordenadas cilíndricas é dado por $\vec{V} = \hat{e}_r A/r + \hat{e}_\theta B/r$, onde A e B são constantes com dimensões de m²/s. Isto representa um possível escoamento incompressível? Trace a linha de corrente que passa pelo ponto $r_0 = 1$ m, $\theta = 90°$, se $A = B = 1$ m²/s, se $A = 1$ m²/s e $B = 0$, e se $B = 1$ m²/s e $A = 0$.

5.23 Avalie $\nabla \cdot \rho\vec{V}$ em coordenadas cilíndricas. Use a definição de ∇ em coordenadas cilíndricas. Substitua o vetor velocidade e aplique o operador gradiente, usando a informação da nota 1 de rodapé. Agrupe termos e simplifique; mostre que o resultado é idêntico à Eq. 5.2c.

***5.24** O campo de velocidade para o escoamento viscométrico do Problema-Exemplo 5.7 é $\vec{V} = U(y/h)\hat{i}$. Determine a função de corrente para este escoamento. Localize a linha de corrente que divide a vazão em volume total em duas partes iguais.

***5.25** Determine a família de funções de corrente ψ que resultará do campo de velocidade $\vec{V} = (x + 2y)\hat{i} + (x^2 - y)\hat{j}$.

***5.26** O campo de velocidade do Problema 5.22 representa um possível caso de escoamento incompressível? Se afirmativo, avalie e trace a função de corrente para o escoamento. Se negativo, avalie a taxa de variação da massa específica no campo de escoamento.

***5.27** A função de corrente para um certo campo de escoamento incompressível é dada pela expressão $\psi = -Ur$ sen $\theta + q\theta/2\pi$. Obtenha uma expressão para o campo de velocidade. Encontre o(s) ponto(s) de estagnação onde $|\vec{V}| = 0$, e mostre que ali $\psi = 0$.

***5.28** Considere um escoamento com as componentes da velocidade $u = 0$, $v = -y^3 - 4z$, e $w = 3y^2z$.

(a) Este escoamento é uni, bi ou tridimensional?
(b) Demonstre se este é um escoamento incompressível ou compressível.
(c) Se possível, deduza uma função de corrente para este escoamento.

***5.29** Um campo de escoamento incompressível, sem atrito, é especificado pela função de corrente $\psi = -2Ax - 5Ay$, onde $A = 1$ m/s, e x e y são coordenadas em metros. Esboce as linhas de corrente $\psi = 0$ e $\psi = 5$ e trace o vetor velocidade no ponto (0, 0). Determine a magnitude da vazão em volume entre as linhas de corrente que passam pelos pontos (2, 2) e (4, 1).

***5.30** Num escoamento unidimensional, paralelo e no sentido positivo do eixo x, a velocidade varia linearmente de zero em $y = 0$ a 100 ft/s em $y = 5$ ft. Determine uma expressão para a função de corrente, ψ. Determine também a coordenada y acima da qual a vazão em volume é metade da vazão total entre $y = 0$ e $y = 5$ ft.

***5.31** Um perfil de velocidade linear foi usado para modelar o escoamento em uma camada limite laminar, incompressível, no Problema 5.10. Deduza a função de corrente para este campo de escoamento. Localize as linhas de corrente a um quarto e um meio da vazão em volume total na camada limite.

***5.32** Deduza a função de corrente que representa a aproximação senoidal usada para modelar a componente x da velocidade na camada limite do Problema 5.11. Localize as linhas de corrente a um quarto e um meio da vazão em volume total na camada limite.

***5.33** Um perfil de velocidade parabólico foi usado para modelar o escoamento em uma camada limite laminar, incompressível, no Problema 5.12. Deduza a função de corrente para este campo de escoamento. Localize as linhas de corrente a um quarto e um meio da vazão em volume total na camada limite.

5.34 Um perfil de velocidade cúbico foi usado para modelar o escoamento em uma camada limite laminar, incompressível, no Problema 5.13. Deduza a função de corrente para este campo de escoamento. Localize as linhas de corrente a um quarto e um meio da vazão em volume total na camada limite.

***5.35** O Problema-Exemplo 5.6 mostrou que o campo de velocidade para um vórtice livre no plano $r\theta$ é $\vec{V} = \hat{e}_\theta C/r$. Determine a função de corrente para este escoamento. Avalie a vazão em volume por uni-

* Estes problemas requerem material de seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

dade de profundidade entre $r_1 = 0{,}10$ m e $r_2 = 0{,}12$ m, se $C = 0{,}5$ m²/s. Esboce o perfil de velocidade ao longo de uma linha de θ constante. Confira a vazão calculada a partir da função de corrente, integrando o perfil de velocidade ao longo dessa linha.

***5.36** Um movimento de corpo rígido foi modelado no Problema-Exemplo 5.6 pelo campo de velocidade $\vec{V} = r\omega\hat{e}_\theta$. Determine a função de corrente para este escoamento. Avalie a vazão em volume por unidade de profundidade entre $r_1 = 0{,}10$ m e $r_2 = 0{,}12$ m, se $\omega = 0{,}5$ rad/s. Esboce o perfil de velocidade ao longo de uma linha de θ constante. Confira a vazão em volume calculada a partir da função de corrente, integrando o perfil de velocidade ao longo dessa linha.

5.37 Considere o campo de velocidade no plano xy dado por $\vec{V} = A(x^2 + 2xy)\hat{i} - A(2xy + y^2)\hat{j}$, onde A = 0,25 m⁻¹ . s⁻¹ e as coordenadas são medidas em metros. Este é um possível campo de escoamento incompressível? Calcule a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x,y) = (2,1)$.

5.38 Considere o campo de escoamento dado por $\vec{V} = xy^2\hat{i} - \frac{1}{3}y^3\hat{j} + xy\hat{k}$. Determine (a) o número de dimensões do escoamento, (b) se ele é um possível escoamento incompressível, e (c) a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x,y,z) = (1,2,3)$.

5.39 Considere o campo de escoamento dado por $\vec{V} = ax^2y\hat{i} - by\hat{j} + cz^2\hat{k}$, onde $a = 1$ m⁻² . s⁻¹, $b = 3$ s⁻¹ e $c = 2$ m⁻¹ . s⁻¹. Determine (a) o número de dimensões do escoamento, (b) se ele é um possível escoamento incompressível, e (c) a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x,y,z) = (3,1,2)$.

5.40 O campo de velocidade em uma camada limite laminar é dado pela expressão

$$\vec{V} = \frac{AUy}{x^{1/2}}\hat{i} + \frac{AUy^2}{4x^{3/2}}\hat{j}$$

Nesta expressão, $A = 141$ m$^{-1/2}$ e $U = 0{,}240$ m/s é a velocidade da corrente livre. Mostre que este campo de velocidade representa um possível escoamento incompressível. Calcule a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x,y) = (0{,}5$ m, 5 mm). Calcule a inclinação da linha de corrente até o ponto.

5.41 A componente x da velocidade num campo de escoamento permanente, incompressível, no plano xy, é $u = A/x^2$, onde $A = 2$ m³/s e x é medido em metros. Encontre a mais simples componente y da velocidade deste campo de escoamento. Avalie a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x,y) = (1,3)$.

5.42 A componente y da velocidade em um campo de escoamento bidimensional, incompressível, é dada por $v = -Axy$, onde v é em m/s, x e y são em metros, e A é uma constante dimensional. Não há componente ou variação de velocidade na direção z. Determine as dimensões da constante, A. Encontre a mais simples componente x da velocidade neste campo de escoamento. Calcule a aceleração de uma partícula fluida no ponto $(x,y) = (1,2)$.

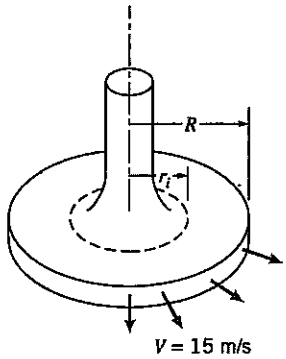
5.43 Considere o campo de velocidade no plano y dado por $\vec{V} = Ax/(x^2 + y^2)\hat{i} + Ay/(x^2 + y^2)\hat{j}$, onde A = 10 m²/s, e x e y são medidos em metros. Este é um possível campo de escoamento incompressível? Deduza uma expressão para a aceleração do fluido. Avalie a velocidade e a aceleração ao longo do eixo x, do eixo y e da linha definida por $y = x$. O que você pode concluir sobre este escoamento?

5.44 Um líquido incompressível, com viscosidade desprezível, escoa em regime permanente no interior de um tubo horizontal de diâmetro constante. Em uma seção porosa de comprimento $L = 0{,}3$ m, o líquido é removido a uma taxa constante por unidade de comprimento, de modo que a velocidade axial no tubo é $u(x) = U(1 - x/2L)$, onde $U = 5$ m/s. Desenvolva uma expressão para a aceleração de uma partícula fluida ao longo da linha de centro da seção porosa.

5.45 Resolva o Problema 4.103 para mostrar que a velocidade radial na folga estreita é $V_r = Q/2\pi rh$. Deduza uma expressão para a aceleração de uma partícula fluida na folga.

5.46 Considere o escoamento de ar de baixa velocidade entre dois discos paralelos, conforme mostrado. Admita que o escoamento é incompressível e não-viscoso, e que a velocidade é puramente radial e uniforme em qualquer seção. A velocidade do escoamento é $V = 15$ m/s em $R = 75$ mm. Simplifique a equação da continuidade para uma forma aplicável a este campo de escoamento. Mostre que uma expressão geral para o campo de velocidade é $\vec{V} = V(R/r)\hat{e}_r$ para $r_i \le r \le R$. Calcule a aceleração de uma partícula fluida em $r = r_i$ e $r = R$.

* Este problema requer material de seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.



P 5.46

5.47 A temperatura, T, em um longo túnel varia aproximadamente como $T = T_0 - \alpha e^{-x/L}\,\text{sen}(2\pi t/\tau)$, onde T_0, α, L e τ são constantes, e x é medido a partir da entrada. Uma partícula move-se para dentro do túnel com velocidade constante, U. Obtenha uma expressão para a taxa de variação na temperatura da partícula. Quais são as dimensões desta expressão?

5.48 Quando um avião voa através de uma frente fria, um instrumento de bordo indica que a temperatura ambiente cai à taxa de 0,5°F por minuto. Outros instrumentos mostram uma velocidade no ar de 300 knots e uma taxa de subida de 3500 ft/min. A frente fria é estacionária e verticalmente uniforme. Calcule a taxa de variação da temperatura com respeito à distância horizontal através da frente fria.

5.49 Um avião voa para o norte a 300 mph em relação ao solo. Sua taxa de subida é 3000 ft/min. O gradiente vertical de temperatura é –3°F por 1000 ft de altitude. A temperatura do solo varia com a posição através de uma frente fria, caindo a uma razão de 1°F por milha. Calcule a taxa de variação da temperatura mostrada por um registrador a bordo da aeronave.

5.50 Após uma chuva, a concentração de sedimentos num certo ponto de um rio aumenta à taxa de 100 partes por milhão (ppm) por hora. Além disso, a concentração de sedimentos aumenta com a distância rio abaixo como resultado do recebimento de correntes tributárias; este aumento é de 50 ppm por milha. Neste ponto, a corrente d'água flui a 0,5 mph. Um barco é usado para inspecionar a concentração de sedimentos. O operador fica surpreso ao descobrir três taxas aparentes de variação de sedimentos ao subir o rio, deixar-se levar pela corrente ou descer o rio. Explique fisicamente por que as diferentes taxas são observadas. Se a velocidade do barco é de 2,5 mph, calcule as três taxas de variação.

5.51 Expanda $(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$ em coordenadas retangulares pela substituição direta do vetor velocidade para obter a aceleração convectiva de uma partícula fluida. Verifique os resultados dados nas Eqs. 5.11.

5.52 Um campo de velocidade bidimensional permanente é dado por $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, onde $A = 1\ \text{s}^{-1}$. Mostre que as linhas de corrente para este escoamento são hipérboles retangulares, $xy = C$. Obtenha uma expressão geral para a aceleração da partícula neste campo de velocidade. Calcule a aceleração das partículas fluidas nos pontos $(x, y) = (\frac{1}{2}, 2), (1, 1)$, e $(2, \frac{1}{2})$, onde x e y são medidos em metros. Trace as linhas de corrente que correspondem a $C = 0{,}1$ e $2\ \text{m}^2$ e mostre os vetores aceleração sobre o gráfico das linhas de corrente.

5.53 Um campo de velocidade é representado pela expressão $\vec{V} = (Ax - B)\hat{i} + Cy\hat{j} + Dt\hat{k}$, onde $A = 2\ \text{s}^{-1}$, $B = 4\ \text{m}\,.\,\text{s}^{-1}$, $D = 5\ \text{m}\,.\,\text{s}^{-2}$ e as coordenadas são medidas em metros. Determine o valor apropriado de C para que o escoamento seja incompressível. Calcule a aceleração de uma partícula fluida localizada no ponto $(x, y) = (3,2)$. Trace algumas linhas de corrente do escoamento no plano xy.

5.54 Um campo de velocidade é representado pela expressão $\vec{V} = (Ax - B)\hat{i} - Ay\hat{j}$, onde $A = 0{,}2\ \text{s}^{-1}$, $B = 0{,}6\ \text{m}\,.\,\text{s}^{-1}$ e as coordenadas são medidas em metros. Obtenha uma expressão geral para a aceleração da partícula neste campo de velocidade. Calcule a aceleração das partículas fluidas nos pontos $(x, y) = (0, \frac{4}{3})$, $(1, 2)$, e $(2, 4)$. Trace algumas linhas de corrente no plano xy. Mostre os vetores aceleração sobre o gráfico das linhas de corrente.

5.55 Mostre que o campo de velocidade do Problema 2.12 representa um possível campo de escoamento incompressível. Determine e trace a linha de corrente passando pelo ponto $(x, y) = (2,4)$ em $t = 1{,}5$ s. Para a partícula no mesmo ponto e instante, mostre, sobre o gráfico, o vetor velocidade e os vetores representando as acelerações total, local e convectiva.

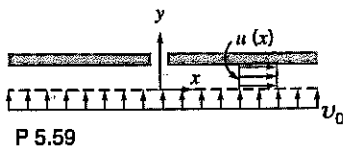
5.56 Um perfil de velocidade linear, aproximado, foi usado no Problema 5.10 para modelar uma camada limite laminar, incompressível, sobre uma placa plana. Para este perfil, obtenha expressões para as

componentes x e y da aceleração de uma partícula fluida na camada limite. Localize as componentes x e y da aceleração de máximas magnitudes. Calcule a razão entre a magnitude máxima da aceleração em x e a magnitude máxima da aceleração em y, para as condições de escoamento do Problema 5.10.

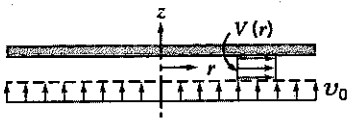
5.57 Um perfil de velocidade senoidal, aproximado, foi usado no Problema 5.11 para modelar o escoamento em uma camada limite laminar, incompressível, sobre uma placa plana. Para este perfil, obtenha expressões para as componentes x e y da aceleração de uma partícula fluida na camada limite. Trace a_x e a_y para a posição $x = 1$ m, onde $\delta = 1$ mm, para um escoamento com $U = 5$ m/s. Encontre os máximos de a_x e a_y nesta posição de x.

5.58 Um perfil de velocidade parabólico, aproximado, foi usado no Problema 5.12 para modelar o escoamento em uma camada limite laminar, incompressível, sobre uma placa plana. Para este perfil, encontre a componente x da aceleração, a_x, de uma partícula fluida dentro da camada limite. Trace a_x para a posição $x = 1$ m, onde $\delta = 1$ mm, para um escoamento com $U = 5$ m/s. Determine o máximo valor de a_x nesta posição de x.

5.59 Ar escoa numa folga estreita, de altura h, entre duas placas paralelas muito próximas, através de uma superfície porosa, conforme mostrado. Use um volume de controle, com superfície externa localizada na posição x, para mostrar que a velocidade uniforme na direção x é $u = v_0x/h$. Encontre uma expressão para a componente da velocidade na direção y. Avalie a aceleração de uma partícula fluida na folga.



P 5.59



P 5.60

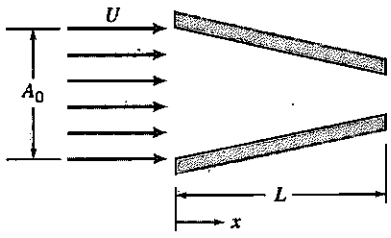
5.60 Ar escoa numa folga estreita, de altura h, entre dois discos paralelos muito próximos, através de uma superfície porosa, conforme mostrado. Use um volume de controle, com superfície externa localizada na posição r, para mostrar que a velocidade uniforme na direção r é $V = v_0r/2h$. Encontre uma expressão para a componente da velocidade na direção z ($v_0 << V$). Avalie as componentes da aceleração de uma partícula fluida na folga.

5.61 O campo de velocidade para um escoamento permanente, não-viscoso, da esquerda para a direita sobre um cilindro circular de raio R, é dado por

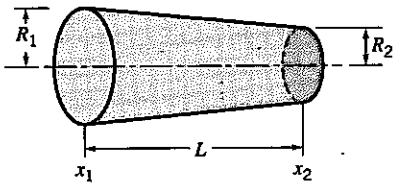
$$\vec{V} = U\cos\theta\left[1-\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\hat{e}_r - U\,\text{sen}\,\theta\left[1+\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\hat{e}_\theta$$

Obtenha expressões para a aceleração de uma partícula fluida movendo-se ao longo da linha de corrente de estagnação ($\theta = \pi$) e para a aceleração ao longo da superfície do cilindro ($r = R$). Trace a_r como uma função de r/R para $\theta = \pi$ e como função de θ para $r = R$; trace a_θ como uma função de θ para $r = R$. Comente sobre os gráficos. Determine os locais em que estas acelerações atingem valores máximo e mínimo.

5.62 Considere o escoamento incompressível de um fluido através de um bocal, conforme mostrado. A área do bocal é dada por $A = A_0(1 - bx)$ e a velocidade de entrada varia de acordo com $U = U_0(1 - e^{-\lambda t})$, onde $A_0 = 0{,}5$ m^2, $L = 5$ m, $b = 0{,}1$ m^{-1}, $\lambda = 0{,}2$ s^{-1}, e $U_0 = 5$ m/s. Determine e trace a aceleração a partir da linha de centro, com o tempo como parâmetro.



P 5.62



P 5.63

5.63 Considere o escoamento unidimensional, incompressível, através do duto circular mostrado. A velocidade na seção ① é dada por $U = U_0 + U_1 \text{ sen } \omega t$, onde $U_0 = 20$ m/s, $U_1 = 2$ m/s, e $\omega = 0{,}3$ rad/s. As dimensões do duto são $L = 1$ m, $R_1 = 0{,}2$ m, e $R_2 = 0{,}1$ m. Determine a aceleração da partícula na saída do duto. Trace um gráfico dos resultados como uma função do tempo, para um ciclo completo. Sobre o mesmo gráfico, mostre a aceleração na saída do duto, se este tiver área constante em vez de convergente, e explique a diferença entre as curvas.

5.64 Considere novamente o campo de velocidade bidimensional permanente do Problema 5.52. Obtenha expressões para as coordenadas de partícula, $x_p = f_1(t)$ e $y_p = f_2(t)$, como funções do tempo e da posição inicial da partícula, (x_0, y_0) em $t = 0$. Determine o tempo requerido para a partícula se deslocar de sua posição inicial $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, 2)$ para as posições $(x, y) = (1,1)$ e $(2, \frac{1}{2})$. Compare as acelerações da partícula determinadas pela derivação de $f_1(t)$ e $f_2(t)$ com aquelas obtidas no Problema 5.52.

5.65 Expanda $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$ em coordenadas cilíndricas pela substituição direta do vetor velocidade para obter a aceleração convectiva de uma partícula fluida. (Lembre-se de reler a nota 1 de rodapé.) Compare os resultados obtidos nas Eqs. 5.12.

5.66 Um escoamento é representado pelo campo de velocidade $\vec{V} = 10x\hat{i} - 10y\hat{j} + 30\hat{k}$. Determine se o campo é (a) um possível escoamento incompressível e (b) irrotacional.

5.67 Quais, entre os campos de escoamento do Problema 5.2, são irrotacionais?

5.68 Considere novamente o perfil de velocidade senoidal usado para modelar a componente x da velocidade para a camada limite no Problema 5.11. Despreze a componente vertical da velocidade. Avalie a circulação sobre o contorno limitado por $x = 0{,}4$ m, $x = 0{,}6$ m, $y = 0$, e $y = 8$ mm. Quais seriam os resultados desta avaliação, se ela fosse feita 0,2 m mais a jusante? Considere $U = 0{,}5$ m/s.

5.69 Considere o campo de velocidade para escoamento em um "canto", $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, com $A = 0{,}3\ \text{s}^{-1}$, como no Problema-Exemplo 5.8. Avalie a circulação sobre o quadrado unitário do Problema-Exemplo 5.8.

5.70 Considere o campo de escoamento bidimensional no qual $u = Axy$ e $v = By^2$, onde $A = 1\ \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $B = -0{,}5\ \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, e as coordenadas são medidas em metros. Mostre que este campo de velocidade representa um possível escoamento incompressível. Determine a rotação no ponto $(x, y) = (1, 1)$. Avalie a circulação sobre a "curva" delimitada por $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ e $x = 0$.

***5.71** Considere o campo de escoamento representado pela função de corrente $\psi = (q/2\pi) \tan^{-1}(y/x)$, onde q = constante. Trata-se de um possível escoamento bidimensional incompressível? O escoamento é irrotacional?

***5.72** Considere o campo de escoamento representado pela função de corrente $\psi = -A/2(x^2 + y^2)$, onde A = constante. Trata-se de um possível escoamento bidimensional incompressível? O escoamento é irrotacional?

***5.73** Considere um campo de velocidade para movimento paralelo ao eixo x com cisalhamento constante. A taxa de cisalhamento é $du/dy = A$, onde $A = 0{,}1\ \text{s}^{-1}$. Obtenha uma expressão para o campo de velocidade, $\vec{V}$. Calcule a taxa de rotação. Avalie a função de corrente para este campo de escoamento.

***5.74** Considere o campo de velocidade dado por $\vec{V} = Axy\hat{i} + By^2\hat{j}$, onde $A = 4\ \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $B = -2\ \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ e as coordenadas são medidas em metros. Determine a rotação do fluido. Avalie a circulação sobre a "curva" delimitada por $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ e $x = 0$. Obtenha uma expressão para a função de corrente. Trace diversas linhas de corrente no primeiro quadrante.

***5.75** Um campo de escoamento é representado pela função de corrente $\psi = x^2 - y^2$. Determine o campo de velocidade correspondente. Mostre que este campo de escoamento é irrotacional. Trace diversas linhas de corrente e ilustre o campo de velocidade.

***5.76** Considere o escoamento representado pelo campo de velocidade $\vec{V} = (Ay + B)\hat{i} + Ax\hat{j}$, onde $A = 6\ \text{s}^{-1}$, $B = 3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ e as coordenadas são medidas em metros. Obtenha uma expressão para a função de corrente. Trace algumas linhas de corrente (incluindo a linha de corrente de estagnação) no primeiro quadrante. Avalie a circulação sobre a "curva" delimitada por $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ e $x = 0$.

***5.77** Considere o campo de escoamento representado pela função de corrente $\psi = Axy + Ay^2$, onde $A = 1\ \text{s}^{-1}$. Mostre que este campo de velocidade representa um possível escoamento incompressível. Avalie a rotação do escoamento. Trace algumas linhas de corrente no semiplano superior.

* Estes problemas requerem material de seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

BIBLIOTECA - FACULDADE PITÁGORAS

5.78 Considere novamente o escoamento viscométrico do Problema-Exemplo 5.7. Avalie a taxa média de rotação de um par de segmentos de linha perpendiculares, orientados a ±45° em relação ao eixo x. Mostre que os resultados são os mesmos do exemplo.

***5.79** O campo de velocidade perto do núcleo de um furacão pode ser aproximado por

$$\vec{V} = -\frac{q}{2\pi r}\hat{e}_r + \frac{K}{2\pi r}\hat{e}_\theta$$

Este é um campo de escoamento irrotacional? Obtenha a função de corrente para este escoamento.

5.80 Considere o escoamento induzido por pressão entre placas paralelas, estacionárias, separadas pela distância b. A coordenada y é medida a partir da placa inferior. O campo de velocidade é dado por $u = U(y/b)[1 - (y/b)]$. Obtenha uma expressão para a circulação sobre o contorno fechado de altura h e comprimento L. Avalie para $h = b/2$ e para $h = b$. Mostre que o mesmo resultado é obtido a partir da integral de área do Teorema de Stokes (Eq. 5.18).

5.81 O perfil de velocidade para o escoamento inteiramente desenvolvido num tubo circular é $V_z = V_{máx}[1 - (r/R)^2]$. Avalie as taxas de deformação linear e angular para este escoamento. Obtenha uma expressão para o vetor vorticidade, $\vec{\zeta}$.

5.82 Considere o escoamento induzido por pressão entre placas paralelas, estacionárias, separadas pela distância $2b$. A coordenada y é medida a partir da linha de centro do canal entre as placas. O campo de velocidade é dado por $u = u_{máx}[1 - (y/b)^2]$. Avalie as taxas de deformação linear e angular. Obtenha uma expressão para o vetor vorticidade, $\vec{\zeta}$. Determine o local onde a vorticidade é máxima.

5.83 Um perfil de velocidade linear foi usado para modelar o escoamento em uma camada limite laminar, incompressível, no Problema 5.10. Expresse a rotação de uma partícula fluida. Localize a taxa máxima de rotação. Expresse a taxa de deformação angular de uma partícula fluida. Localize a taxa máxima de deformação angular. Expresse as taxas de deformação linear de uma partícula fluida. Localize as taxas máximas de deformação linear. Expresse a força de cisalhamento por unidade de volume na direção x. Localize a força de cisalhamento máxima por unidade de volume; interprete este resultado.

5.84 A componente x da velocidade em uma camada limite laminar na água é aproximada por $u = U \operatorname{sen}(\pi y/2\delta)$, onde $U = 3$ m/s e $\delta = 2$ mm. A componente y da velocidade é muito menor que u. Obtenha uma expressão para a força de cisalhamento resultante sobre um elemento fluido por unidade de volume na direção x. Calcule o seu valor máximo para este escoamento.

5.85 O Problema 4.23 deu o perfil de velocidade para um escoamento laminar inteiramente desenvolvido num tubo circular como $u = u_{máx}[1-(r/R)^2]$. Obtenha uma expressão para a força de cisalhamento por unidade de volume na direção x. Avalie o seu máximo valor para as condições do Problema 4.23.

* Este problema requer material de seções que podem ser omitidas sem perda de continuidade no material do texto.

Capítulo 6

ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL DE FLUIDOS NÃO-VISCOSOS

No Capítulo 5, trabalhamos muito na dedução das equações diferenciais (Eqs. 5.24) que descrevem o comportamento de qualquer fluido satisfazendo a hipótese de contínuo. Vimos, também, como essas equações podem ser reduzidas para várias formas particulares — as mais conhecidas sendo as equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível, com viscosidade constante (Eqs. 5.27). Embora as Eqs. 5.27 descrevam o comportamento de fluidos comuns (isto é, água, ar, óleo lubrificante) para uma larga faixa de problemas, conforme discutido no Capítulo 5, elas não possuem solução analítica exceto para geometrias e escoamentos mais simples. A aplicação dessas equações para modelar, por exemplo, o movimento do café numa xícara, após ser agitado com uma colher, necessitaria de ferramentas computacionais avançadas de mecânica dos fluidos. Neste capítulo, em vez das equações de Navier-Stokes, vamos estudar a equação de Euler, que se aplica a um fluido sem viscosidade. Embora não existam fluidos reais sem viscosidade, muitos problemas de escoamento (especialmente em aerodinâmica) podem ser analisados com sucesso pela aproximação de $\mu = 0$.

6-1 EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO PARA ESCOAMENTO SEM ATRITO: AS EQUAÇÕES DE EULER

As equações de Euler (obtidas das Eqs. 5.27 após desconsiderar os termos viscosos) são

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p \tag{6.1}$$

Esta equação estabelece que, para um fluido não-viscoso (invíscido), a variação na quantidade de movimento de uma partícula fluida é causada pela força de corpo (considerada ser somente a gravidade) e pela força líquida de pressão. Por conveniência, vamos relembrar a definição de derivada material

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \tag{5.10}$$

Neste capítulo, aplicaremos a Eq. 6.1 na solução de problemas de escoamentos incompressíveis e sem viscosidade. Além da Eq. 6.1, vamos usar também a formulação diferencial da equação da conservação de massa para escoamentos incompressíveis,

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \tag{5.1c}$$

A Eq. 6.1, expressa em coordenadas retangulares, é

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{6.2a}$$

Capítulo 6

ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL DE FLUIDOS NÃO-VISCOSOS

No Capítulo 5, trabalhamos muito na dedução das equações diferenciais (Eqs. 5.24) que descrevem o comportamento de qualquer fluido satisfazendo a hipótese de contínuo. Vimos, também, como essas equações podem ser reduzidas para várias formas particulares — as mais conhecidas sendo as equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível, com viscosidade constante (Eqs. 5.27). Embora as Eqs. 5.27 descrevam o comportamento de fluidos comuns (isto é, água, ar, óleo lubrificante) para uma larga faixa de problemas, conforme discutido no Capítulo 5, elas não possuem solução analítica exceto para geometrias e escoamentos mais simples. A aplicação dessas equações para modelar, por exemplo, o movimento do café numa xícara, após ser agitado com uma colher, necessitaria de ferramentas computacionais avançadas de mecânica dos fluidos. Neste capítulo, em vez das equações de Navier-Stokes, vamos estudar a equação de Euler, que se aplica a um fluido sem viscosidade. Embora não existam fluidos reais sem viscosidade, muitos problemas de escoamento (especialmente em aerodinâmica) podem ser analisados com sucesso pela aproximação de $\mu = 0$.

6-1 EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO PARA ESCOAMENTO SEM ATRITO: AS EQUAÇÕES DE EULER

As equações de Euler (obtidas das Eqs. 5.27 após desconsiderar os termos viscosos) são

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p \tag{6.1}$$

Esta equação estabelece que, para um fluido não-viscoso (invíscido), a variação na quantidade de movimento de uma partícula fluida é causada pela força de corpo (considerada ser somente a gravidade) e pela força líquida de pressão. Por conveniência, vamos relembrar a definição de derivada material

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \tag{5.10}$$

Neste capítulo, aplicaremos a Eq. 6.1 na solução de problemas de escoamentos incompressíveis e sem viscosidade. Além da Eq. 6.1, vamos usar também a formulação diferencial da equação da conservação de massa para escoamentos incompressíveis,

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \tag{5.1c}$$

A Eq. 6.1, expressa em coordenadas retangulares, é

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{6.2a}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y} \tag{6.2b}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z} \tag{6.2c}$$

Se o eixo z for admitido vertical e orientado para cima, então $g_x = 0$, $g_y = 0$ e $g_z = -g$, de modo que $\vec{g} = -\rho g\hat{k}$.

Em coordenadas cilíndricas, tendo apenas a gravidade como força de corpo, as equações componentes são

$$\rho a_r=\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{V_\theta^2}{r}\right)=\rho g_r-\frac{\partial p}{\partial r} \tag{6.3a}$$

$$\rho a_\theta=\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}+\frac{V_rV_\theta}{r}\right)=\rho g_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} \tag{6.3b}$$

$$\rho a_z=\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z} \tag{6.3c}$$

Se o eixo z for orientado verticalmente para cima, então $g_r = g_\theta = 0$ e $g_z = -g$.

As Eqs 6.1, 6.2 e 6.3 aplicam-se a problemas nos quais não existem tensões viscosas. Antes de continuar com o tópico principal deste capítulo (escoamento invíscido), vamos considerar quando é que não temos tensões viscosas, diferentemente de quando $\mu = 0$. Em nossas discussões anteriores, concluímos que, em geral, tensões viscosas estão presentes quando há deformação do fluido (de fato, foi com isto que definimos inicialmente um fluido); quando não existe deformação do fluido, isto é, quando lidamos com um movimento de *corpo rígido*, nenhuma tensão viscosa estará presente, mesmo se $\mu \neq 0$. Deste modo, as equações de Euler aplicam-se tanto aos movimentos de corpo rígido, quanto aos escoamentos sem viscosidade. Discutimos o movimento de corpo rígido detalhadamente na Seção 3-7 como um caso especial da estática dos fluidos. Como exercício, seria interessante que você mostrasse que as equações de Euler podem ser utilizadas para resolver os Problemas-Exemplos 3.9 e 3.10.

6-2 EQUAÇÕES DE EULER EM COORDENADAS DE LINHAS DE CORRENTE

Nos Capítulos 1 e 2, assinalamos que as linhas de corrente, desenhadas tangentes aos vetores velocidade em cada ponto do campo de escoamento, fornecem uma representação gráfica conveniente do escoamento. No escoamento permanente, uma partícula fluida move-se ao longo de uma linha de corrente porque, para esse tipo de escoamento, as trajetórias e as linhas de corrente coincidem. Assim, na descrição do movimento de uma partícula fluida num escoamento permanente, a distância ao longo de uma linha de corrente é uma coordenada lógica para se usar na formulação das equações do movimento. As "coordenadas de linha de corrente" também podem ser usadas para descrever um escoamento não-permanente. As linhas de corrente no escoamento transiente dão uma representação gráfica do campo de velocidade instantâneo.

Considere, então, o escoamento no plano yz mostrado na Fig. 6.1. Queremos escrever as equações do movimento em termos da coordenada s, a distância ao longo de uma linha de corrente, e da coordenada n, a distância normal à linha de corrente. A pressão no centro do elemento fluido é p. Aplicando a segunda lei de Newton na direção da linha de corrente (direção s) ao elemento fluido de volume $ds\,dn\,dz$, desprezando forças viscosas, obtemos

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right)dn\,dx-\left(p+\frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right)dn\,dx-\rho g\,\mathrm{sen}\,\beta\,ds\,dn\,dx=\rho a_s\,ds\,dn\,dx$$

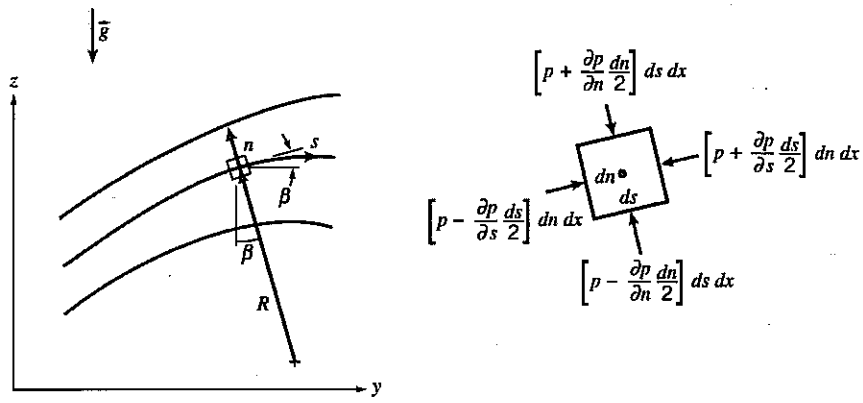


Fig. 6.1 Partícula fluida movendo-se ao longo de uma linha de corrente.

onde β é o ângulo entre a tangente à linha de corrente e a horizontal, e a_s é a aceleração da partícula de fluido ao longo da linha de corrente. Simplificando a equação, obtemos

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \operatorname{sen}\beta = \rho a_s$$

Como sen $\beta = \partial z/\partial s$, podemos escrever

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s} = a_s$$

Ao longo de qualquer linha de corrente $V = V(s,t)$, e a aceleração material ou total de uma partícula fluida na direção da linha de corrente é dada por

$$a_s = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}$$

A equação de Euler na direção da linha de corrente, com o eixo z dirigido verticalmente para cima é, então,

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s} \tag{6.4a}$$

Para escoamento permanente e desprezando forças de corpo, a equação de Euler na direção da linha de corrente reduz-se a

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = -V\frac{\partial V}{\partial s} \tag{6.4b}$$

a qual indica que *uma diminuição na velocidade é acompanhada de um aumento na pressão*, e vice-versa.[1] Isto faz sentido: a única força experimentada pela partícula é a força líquida de pressão, de forma que a partícula é acelerada em direção das regiões de baixa pressão e desacelerada quando se aproxima das regiões de alta pressão.

Para obter a equação de Euler em uma direção normal às linhas de corrente, aplicamos a segunda lei de Newton na direção n ao elemento fluido. Novamente, desprezando forças viscosas, obtemos

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right) ds\,dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right) ds\,dx - \rho g \cos\beta\, dn\,dx\,ds = \rho a_n\, dn\,dx\,ds$$

[1]A relação entre variações na pressão e velocidade na direção da linha de corrente para escoamento permanente, incompressível e não-viscoso é ilustrada no filme da NCFMF, *Pressure Fields and Fluid Acceleration.*

onde β é o angulo entre a direção n e a vertical, e a_n é a aceleração da partícula fluida na direção n. Simplificando a equação, obtemos

$$-\frac{\partial p}{\partial n} - \rho g \cos\beta = \rho a_n$$

Como $\cos\beta = \partial z/\partial n$, escrevemos

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} - g\frac{\partial z}{\partial n} = a_n$$

A aceleração normal do elemento fluido é dirigida para o centro de curvatura da linha de corrente, ou seja, no sentido negativo de n; assim, no sistema de coordenadas da Fig. 6.1, a familiar aceleração centrípeta é escrita

$$a_n = \frac{-V^2}{R}$$

para escoamento permanente, onde R é o raio de curvatura da linha de corrente. Então, a equação de Euler normal à linha de corrente é escrita para escoamento permanente como

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + g\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{V^2}{R} \tag{6.5a}$$

Para escoamento permanente em um plano horizontal, a equação de Euler normal a uma linha de corrente torna-se

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V^2}{R} \tag{6.5b}$$

A Eq. 6.5b indica que a *pressão aumenta para fora na direção normal às linhas de corrente a partir do centro de curvatura dessas linhas*[2]. Isto também faz sentido: posto que a única força agindo sobre a partícula é a força líquida de pressão, o campo de pressão é que cria a aceleração centrípeta. Em regiões onde as linhas de corrente são retas, e o raio de curvatura, R, é infinito, então *não há variação de pressão numa direção normal às linhas de corrente.*

EXEMPLO 6.1 Escoamento em uma Curva

A vazão de ar na condição padrão, num duto horizontal, deve ser determinada pela instalação de tomadas de pressão em uma curva. O duto tem 0,3 m de profundidade por 0,1 m de largura. O raio interno da curva é 0,25 m. Se a diferença de pressão medida entre as tomadas é de 40 mmH_2O, estime a vazão em volume.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.1

DADOS: Escoamento através de um duto curvo, conforme mostrado.

$$p_2 - p_1 = \rho_{H_2O} g \Delta h$$

onde $\Delta h = 40$ mmH_2O. O ar está na condição padrão.

DETERMINAR: A vazão volumétrica aproximada, Q.

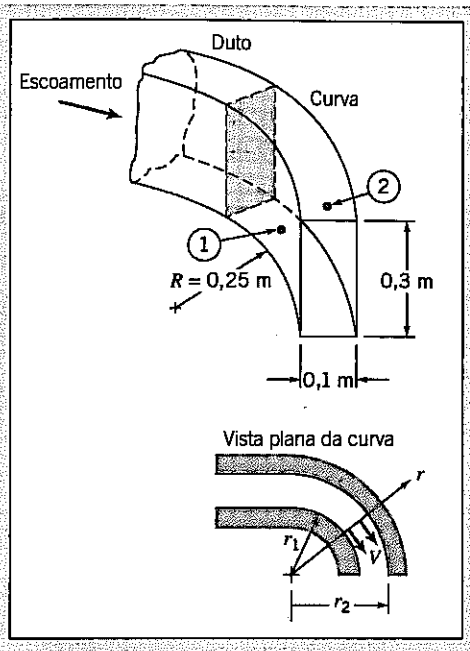
SOLUÇÃO:

Aplique a componente n da equação de Euler através das linhas de corrente do escoamento.

[2]O efeito de curvatura da linha de corrente sobre o gradiente de pressão normal à linha de corrente é ilustrado no filme da NCFMF, *Pressure Fields and Fluid Acceleration.*

Equação básica: $\dfrac{\partial p}{\partial r} = \dfrac{\rho V^2}{r}$

Considerações: (1) Escoamento sem atrito.
(2) Escoamento incompressível.
(3) Escoamento uniforme na seção de medição.



Para este escoamento, $p = p(r)$, então

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dr} = \frac{\rho V^2}{r}$$

ou

$$dp = \rho V^2 \frac{dr}{r}$$

Integrando, obtemos

$$p_2 - p_1 = \rho V^2 \ln r \Big]_{r_1}^{r_2} = \rho V^2 \ln \frac{r_2}{r_1}$$

E, assim,

$$V = \left[\frac{p_2 - p_1}{\rho \ln(r_2/r_1)}\right]^{1/2}$$

Mas, $\Delta p = p_2 - p_1 = \rho_{H_2O} g\, \Delta h$, logo $V = \left[\dfrac{\rho_{H_2O} g \Delta h}{\rho \ln(r_2/r_1)}\right]^{1/2}$

Substituindo os valores numéricos,

$$V = \left[999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0{,}04\ \text{m} \times \frac{\text{m}^3}{1{,}23\ \text{kg}} \times \frac{1}{\ln(0{,}35\ \text{m}/0{,}25\ \text{m})}\right]^{1/2} = 30{,}8\ \text{m/s}$$

Para escoamento uniforme,

$$Q = VA = 30{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}1\ \text{m} \times 0{,}3\ \text{m}$$

$$Q = 0{,}924\ \text{m}^3/\text{s} \longleftarrow \underline{Q}$$

Neste problema, foi admitido que a velocidade é uniforme através da seção. De fato, o perfil de velocidade na curva aproxima-se mais daquele de um vórtice livre (irrotacional), no qual $V \propto 1/r$ (onde r é o raio) em vez de V = constante. Assim, um instrumento de medição de fluxo como esse pode ser usado apenas para obter valores aproximados da vazão.

6.3 A EQUAÇÃO DE BERNOULLI — INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE EULER AO LONGO DE UMA LINHA DE CORRENTE PARA ESCOAMENTO EM REGIME PERMANENTE

Comparada com as equações de escoamentos viscosos equivalentes, a equação da quantidade de movimento ou de Euler para um escoamento incompressível e sem viscosidade (Eqs. 6.1) é matematicamente mais simples, mas a sua solução (em conjunto com a equação da conservação de massa, Eq. 5.1c) ainda apresenta dificuldades consideráveis, exceção feita aos problemas mais básicos de escoamento. Uma aproximação conveniente para um problema de escoamento em regime permanente é

integrar a equação de Euler ao longo de uma linha de corrente. Faremos isto, em seguida, utilizando duas metodologias matemáticas diferentes que resultarão na mesma equação: *a equação de Bernoulli.* Lembre-se de que, na Seção 4-4, deduzimos a equação de Bernoulli a partir de um volume de controle diferencial; essas duas deduções alternativas nos proporcionarão uma maior compreensão das restrições inerentes ao uso dessa equação.

Dedução Usando Coordenadas de Linha de Corrente

A equação de Euler para escoamento permanente ao longo de uma linha de corrente (da Eq. 6.4a) é

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s} = V\frac{\partial V}{\partial s} \tag{6.6}$$

Se uma partícula fluida desloca-se de uma distância, ds, ao longo de uma linha de corrente, então

$$\frac{\partial p}{\partial s}ds = dp \qquad \text{(a variação de pressão ao longo de } s\text{)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}ds = dz \qquad \text{(a variação de elevação ao longo de } s\text{)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s}ds = dV \qquad \text{(a variação de velocidade ao longo de } s\text{)}$$

Assim, após multiplicar a Eq. 6.6 por ds, escrevemos

$$-\frac{dp}{\rho} - g\,dz = V\,dV \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{\rho} + V\,dV + g\,dz = 0 \quad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

A integração desta equação fornece

$$\int\frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \qquad \text{(ao longo de } s\text{)} \tag{6.7}$$

Para aplicar a Eq. 6.7, devemos conhecer a relação entre a pressão e a massa específica. Para o caso especial de escoamento incompressível, ρ = constante, e a Eq. 6.7 torna-se a equação de Bernoulli,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \tag{6.8}$$

Restrições:
(1) Escoamento permanente.
(2) Escoamento incompressível.
(3) Escoamento sem atrito.
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente.

A equação de Bernoulli é uma equação útil e poderosa, pois relaciona as variações de pressão com aquelas de velocidade e de elevação ao longo de uma linha de corrente. Entretanto, ela fornece resultados corretos apenas quando aplicada a uma situação de escoamento onde todas as quatro restrições são razoáveis. Mantenha-as em mente sempre que considerar a utilização da equação de Bernoulli. (Em geral, a constante de Bernoulli na Eq. 6.8 tem valores diferentes ao longo de linhas de corrente diferentes.[3])

*Dedução Usando Coordenadas Retangulares

A forma vetorial da Equação de Euler, Eq. 6.1, também pode ser integrada ao longo de uma linha de corrente. Restringiremos a dedução ao escoamento permanente; deste modo, o resultado final do nosso esforço será a Eq. 6.7.

[3]Para o caso de escoamento irrotacional, a constante tem valor único para todo o campo de escoamento (Seção 6-7).
*Esta seção pode ser omitida sem perda de continuidade no material do texto.

Para escoamento permanente, a equação de Euler em coordenadas retangulares pode ser expressa como

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\hat{k} \tag{6.9}$$

Para escoamento permanente, o campo de velocidade é dado por $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$. As linhas de corrente são linhas traçadas no campo de escoamento tangentes ao vetor velocidade em cada ponto. Lembre-se novamente de que, para escoamento permanente, as linhas de corrente, de trajetória e de emissão coincidem. O movimento de uma partícula ao longo de uma linha de corrente é governado pela Eq. 6.9. No intervalo de tempo dt, a partícula tem um vetor deslocamento $d\vec{s}$ ao longo da linha de corrente.

Se tomarmos o produto escalar dos termos da Eq. 6.9 pela distância, $d\vec{s}$, ao longo da linha de corrente, obteremos uma equação escalar relacionando a pressão, a velocidade e a elevação ao longo da linha de corrente. Assim fazendo, obtemos

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\cdot d\vec{s} = -\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\vec{s} - g\hat{k}\cdot d\vec{s} \tag{6.10}$$

onde

$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \qquad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

Agora avaliamos cada um dos três termos na Eq. 6.10, começando com aqueles à direita do sinal de igualdade,

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\vec{s} = -\frac{1}{\rho}\left[\hat{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right]\cdot[dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}]$$

$$= -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right] \qquad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\vec{s} = -\frac{1}{\rho}dp \qquad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

e

$$-g\hat{k}\cdot d\vec{s} = -g\hat{k}\cdot[dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}]$$
$$= -g\,dz \qquad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

Usando uma identidade vetorial,[4] podemos escrever o terceiro termo como

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\cdot d\vec{s} = \left[\tfrac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V}) - \vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})\right]\cdot d\vec{s}$$
$$= \left\{\tfrac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})\right\}\cdot d\vec{s} - \left\{\vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})\right\}\cdot d\vec{s}$$

O último termo à direita nesta equação é zero, pois $\vec{V}$ é paralelo a $d\vec{s}$. Assim,

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\cdot d\vec{s} = \tfrac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})\cdot d\vec{s} = \tfrac{1}{2}\nabla(V^2)\cdot d\vec{s} \quad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{i}\frac{\partial V^2}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial V^2}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V^2}{\partial z}\right]\cdot[dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V^2}{\partial x}dx + \frac{\partial V^2}{\partial y}dy + \frac{\partial V^2}{\partial z}dz\right]$$

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}d(V^2) \quad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

---

[4]A identidade vetorial

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = \tfrac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V}) - \vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})$$

pode ser verificada expandindo cada lado em suas componentes.

Substituindo esses três termos na Eq. 6.10, obtemos

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}d(V^2) + g\,dz = 0 \quad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

Integrando esta equação, resulta em

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \qquad \text{(ao longo de } s\text{)}$$

Para o caso de massa específica constante, obtemos a equação de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$$

Conforme esperado, vemos que as duas últimas equações são idênticas às Eqs. 6.7 e 6.8, deduzidas anteriormente usando coordenadas de linha de corrente. A equação de Bernoulli, deduzida com o uso de coordenadas retangulares, continua sujeita às restrições: (1) escoamento permanente, (2) escoamento incompressível, (3) escoamento sem atrito e (4) escoamento ao longo de uma linha de corrente.

Pressões Estática, de Estagnação e Dinâmica

A pressão, p, que utilizamos na dedução da equação de Bernoulli, Eq. 6.8, é a pressão termodinâmica; é comumente chamada de *pressão estática*. A pressão estática é a pressão "sentida" pela partícula fluida em movimento (portanto, é de certa forma uma designação incorreta!) — temos também as pressões dinâmica e de estagnação, que serão definidas resumidamente mais adiante. Como medimos a pressão em um fluido em movimento?

Na Seção 6-2, mostramos que não há variação de pressão numa direção normal a linhas de corrente retilíneas. Este fato torna possível medir a pressão estática em um fluido em movimento usando uma "tomada" de pressão instalada na parede do duto em uma região onde as linhas de corrente são retilíneas, conforme mostrado na Fig. 6.2*a*. A tomada de pressão é um pequeno orifício cuidadosamente perfurado na parede, de modo a ter o seu eixo perpendicular à superfície. Se o orifício for perpendicular à parede do duto e isento de rebarbas, medições precisas da pressão estática poderão ser feitas por um instrumento de medição adequadamente conectado à tomada de pressão [1].

Numa corrente de fluido afastada da parede, ou onde as linhas de corrente são curvas, medições precisas da pressão estática podem ser feitas com o emprego criterioso de uma sonda de pressão estática, mostrada na Fig. 6.2*b*. Tais sondas devem ser projetadas de modo que os pequenos orifícios de medição sejam posicionados corretamente com relação à ponta e à haste da sonda, a fim de evitar resultados errôneos [2]. Em uso, a seção de medição deve estar alinhada com a direção do escoamento local.

Sondas de pressão estática, tais como a mostrada na Fig. 6.2*b* e em uma variedade de outras formas, encontram-se disponíveis no comércio em tamanhos tão pequenos quanto 1,5 mm (1/16 in) de diâmetro [3].

A *pressão de estagnação* é obtida quando um fluido em escoamento é desacelerado até a velocidade zero por meio de um processo sem atrito. Para escoamento incompressível, a equação de Bernoulli

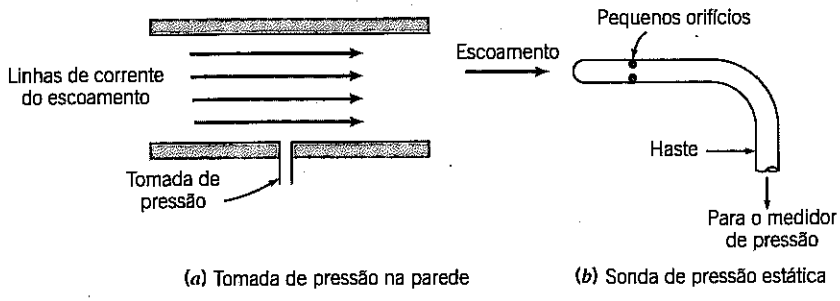


Fig. 6.2 Medição de pressão estática.

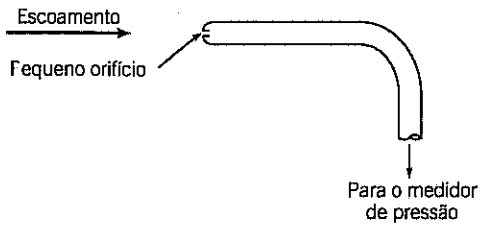


Fig. 6.3 Medição de pressão de estagnação.

pode ser usada para relacionar variações na velocidade e na pressão ao longo de uma linha de corrente nesse processo. Desprezando diferenças de elevação, a Eq. 6.8 torna-se

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{constante}$$

Se a pressão estática é p em um ponto do escoamento no qual a velocidade é V, então a pressão de estagnação, p_0, onde a velocidade de estagnação, V_0, é zero, pode ser obtida a partir de

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{\overset{=0}{V_0^2}}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$$

ou

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{6.11}$$

A Eq. 6.11 é um enunciado matemático da definição de pressão de estagnação, válido para escoamento incompressível. O termo $\frac{1}{2}\rho V^2$ é usualmente chamado de *pressão dinâmica*. A Eq. 6.11 estabelece que a pressão de estagnação (ou *total*) é igual à pressão estática mais a pressão dinâmica. Uma maneira de descrever as três pressões é imaginar o vento batendo contra a palma de sua mão em regime permanente: a pressão estática será a pressão atmosférica; a pressão maior que você sente no centro da palma de sua mão será a pressão de estagnação; e o acréscimo de pressão (em relação à pressão atmosférica) será a pressão dinâmica.

Resolvendo a Eq. 6.11 para a velocidade,

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \tag{6.12}$$

Assim, se a pressão de estagnação e a pressão estática puderem ser medidas em um ponto, a Eq. 6.12 dará a velocidade local do escoamento.

A pressão de estagnação é medida no laboratório por meio de uma sonda com orifício posicionada na direção do escoamento principal e em sentido oposto a ele, conforme mostrado na Fig. 6.3. Tal instrumento é chamado de sonda de pressão total (ou de estagnação) ou tubo pitot (ou, ainda, tubo de Pitot). De novo, a seção de medição deve ficar alinhada com a direção do escoamento local.

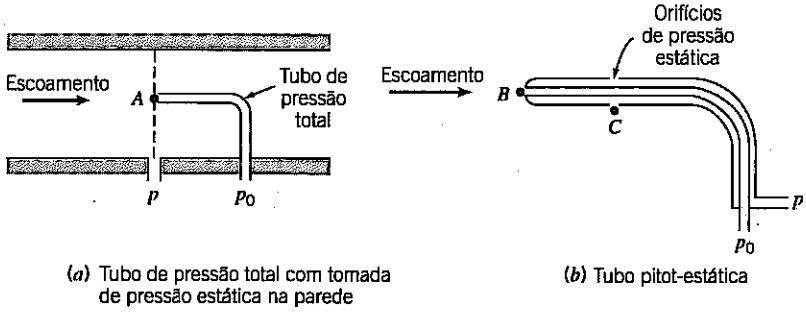


Fig. 6.4 Medição simultânea das pressões estática e de estagnação.

Vimos que a pressão estática num ponto pode ser medida com uma sonda ou uma tomada de pressão estática (Fig. 6.2). Se conhecermos a pressão de estagnação no mesmo ponto, então a velocidade do escoamento poderá ser calculada com a Eq. 6.12. Duas possíveis configurações experimentais são mostradas na Fig. 6.4.

Na Fig. 6.4*a*, a pressão estática correspondente ao ponto *A* é lida a partir da tomada na parede. A pressão de estagnação é medida diretamente em *A* pelo tubo de pressão total, conforme mostrado. (A haste do tubo de pressão total é posicionada a jusante do ponto de medição, a fim de minimizar a perturbação do escoamento local.)

Com freqüência, as duas sondas são combinadas, como no tubo pitot-estática mostrado na Fig. 6.4b. O tubo interno é usado para medir a pressão de estagnação no ponto *B*, enquanto a pressão estática em *C* é captada pelos pequenos orifícios no tubo externo. Em escoamentos onde a variação da pressão estática no sentido do escoamento é pequena, o dispositivo mostrado pode ser empregado para avaliar a velocidade no ponto *B* do escoamento, admitindo que $p_B = p_C$ e usando a Eq. 6.12. (Note que, quando $p_B \neq p_C$, esse procedimento fornecerá resultados errôneos.)

Lembre-se de que a equação de Bernoulli aplica-se somente a escoamento incompressível (número de Mach $M \leq 0{,}3$). A definição e o cálculo da pressão de estagnação para escoamento compressível serão discutidos na Seção 11-3.

EXEMPLO 6.2 Tubo Pitot

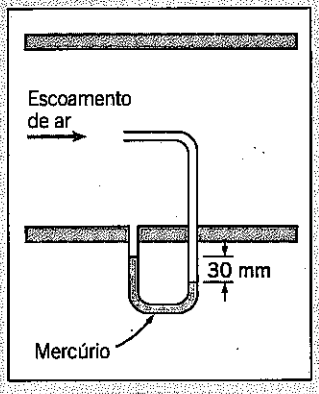
Um tubo pitot é inserido em um escoamento de ar (na condição padrão) para medir a velocidade do escoamento. O tubo é inserido apontando para montante dentro do escoamento, de modo que a pressão captada pela sonda é a pressão de estagnação. A pressão estática é medida no mesmo local do escoamento com uma tomada de pressão na parede. Se a diferença de pressão é de 30 mm de mercúrio, determine a velocidade do escoamento.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.2

DADOS: Um tubo pitot inserido num escoamento, conforme mostrado. O fluido é ar e o líquido do manômetro é mercúrio.

DETERMINAR: A velocidade do escoamento.

SOLUÇÃO:



Equação básica: $\dfrac{p}{\rho} + \dfrac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$

Considerações: (1) Escoamento permanente.
(2) Escoamento incompressível.
(3) Escoamento ao longo de uma linha de corrente.
(4) Desaceleração sem atrito ao longo da linha de corrente de estagnação.

Escrevendo a equação de Bernoulli para a linha de corrente de estagnação (com $\Delta z = 0$), obtemos

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$$

p_0 é a pressão de estagnação na ponta do tubo pitot, onde a velocidade foi reduzida a zero, sem atrito. Resolvendo para V, temos

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho_{ar}}}$$

Do diagrama,

$$p_0 - p = \rho_{Hg}\, gh = \rho_{H_2O}\, g\, h(SG_{Hg})$$

e

$$V = \sqrt{\frac{2\rho_{H_2O} g h (SG_{Hg})}{\rho_{ar}}}$$

$$= \sqrt{2 \times 1000\,\frac{kg}{m^3} \times 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \times 30\,mm \times 13{,}6 \times \frac{m^3}{1{,}23\,kg} \times \frac{m}{1000\,mm}}$$

$$V = 80{,}8\ m/s \longleftarrow V$$

Para $T = 20°C$, a velocidade do som no ar é 343 m/s. Portanto, $M = 0{,}236$ e a hipótese de escoamento incompressível é válida.

> Este problema ilustra o uso do tubo pitot para determinar velocidade de escoamento. Tubos pitot (ou pitot-estática) são usualmente posicionados no exterior de aeronaves para indicar a velocidade do ar em relação ao avião e, daí, a velocidade do avião em relação ao ar.

Aplicações

A equação de Bernoulli pode ser aplicada entre dois pontos quaisquer numa linha de corrente, desde que as outras três restrições sejam atendidas. O resultado é

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \tag{6.13}$$

onde os índices 1 e 2 representam dois pontos quaisquer numa linha de corrente. Aplicações das Eqs. 6.8 e 6.13 a problemas típicos de escoamento são ilustradas nos Problemas-Exemplos 6.3 a 6.5.

Em algumas situações, o escoamento aparenta ser transiente se observado de um sistema de referência, porém permanente se observado de outro que translada com o escoamento. Como a equação de Bernoulli foi deduzida por integração da segunda lei de Newton para uma partícula fluida, ela pode ser aplicada em qualquer sistema de referência inercial (veja a discussão sobre sistemas de referência em translação na Seção 4-4). O procedimento é ilustrado no Problema-Exemplo 6.6.

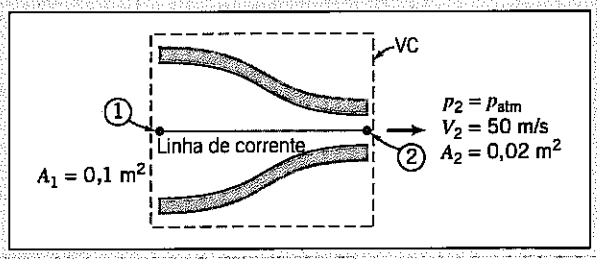
EXEMPLO 6.3 Escoamento em um Bocal

Ar escoa em regime permanente e com baixa velocidade através de um *bocal* horizontal (por definição, um equipamento para acelerar um escoamento) que o descarrega para a atmosfera. Na entrada do bocal, a área é 0,1 m² e, na saída, 0,02 m². Determine a pressão manométrica necessária na entrada do bocal para produzir uma velocidade de saída de 50 m/s.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.3

DADOS: Escoamento através de um bocal, conforme mostrado.

DETERMINAR: $p_1 - p_{atm}$.



SOLUÇÃO:

Equações básicas:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

$$= 0(1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Considerações: (1) Escoamento permanente.
(2) Escoamento incompressível.
(3) Escoamento sem atrito.
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente.
(5) $z_1 = z_2$.
(6) Escoamento uniforme nas seções ① e ②.

A velocidade máxima de 50 m/s está bem abaixo do valor de 100 m/s, que corresponde a um número de Mach $M \approx 0{,}3$ no ar padrão. Portanto, o escoamento pode ser considerado incompressível.

Aplique a equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente entre os pontos ① e ② para avaliar p_1. Assim,

$$p_1 - p_{atm} = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

Aplique a equação da continuidade para determinar V_1,

$$(-\rho V_1 A_1) + (\rho V_2 A_2) = 0 \quad \text{ou} \quad V_1 A_1 = V_2 A_2$$

de modo que

$$V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = 50\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{0{,}02\,\text{m}^2}{0{,}1\,\text{m}^2} = 10\,\text{m/s}$$

Para o ar na condição padrão, $\rho = 1{,}23\ \text{kg/m}^3$. Então,

$$p_1 - p_{atm} = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1{,}23\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left[(50)^2\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - (10)^2\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$p_1 - p_{atm} = 1{,}48\ \text{kPa} \longleftarrow \underline{p_1 - p_{atm}}$$

Notas:

✓ Este problema ilustra uma aplicação típica da equação de Bernoulli.

✓ As linhas de corrente devem ser retas na entrada e na saída, para que se tenha pressão uniforme nestas seções.

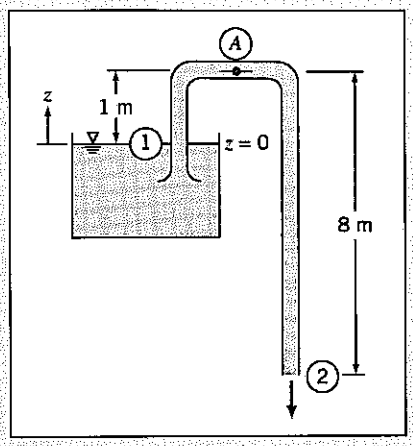
EXEMPLO 6.4 Escoamento através de um Sifão

Um tubo em U atua como um sifão d'água. A curvatura no tubo está 1 m acima da superfície da água; a saída do tubo está 7 m abaixo da superfície da água. A água sai pela extremidade inferior do sifão como um jato livre para a atmosfera. Determine (após listar as considerações necessárias) a velocidade do jato livre e a pressão absoluta mínima da água na curvatura.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.4

DADOS: Água escoando através de um sifão, conforme mostrado.

DETERMINAR: (a) A velocidade da água saindo como um jato livre.
(b) A pressão no ponto Ⓐ do escoamento.



SOLUÇÃO:

Equação básica: $\dfrac{p}{\rho} + \dfrac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$

Considerações:
(1) Atrito desprezível.
(2) Escoamento permanente.
(3) Escoamento incompressível.
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente.
(5) O reservatório é grande comparado com o tubo.

Aplique a equação de Bernoulli entre os pontos ① e ②.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

Visto que a área do reservatório é muito maior que a área do tubo, então $V_1 \approx 0$. Também $p_1 = p_2 = p_{atm}$, logo

$$gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \qquad \text{e} \qquad V_2^2 = 2g(z_1 - z_2)$$

$$V_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{2 \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 7\,\text{m}} = 11{,}7\,\text{m/s} \longleftarrow V_2$$

Para determinar a pressão no ponto Ⓐ, escrevemos a equação de Bernoulli entre ① e Ⓐ.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + gz_A$$

Novamente, $V_1 \approx 0$ e, da conservação da massa, $V_A = V_2$. Então,

$$\frac{p_A}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + gz_1 - \frac{V_2^2}{2} - gz_A = \frac{p_1}{\rho} + g(z_1 - z_A) - \frac{V_2^2}{2}$$

$$p_A = p_1 + \rho g(z_1 - z_A) - \rho\frac{V_2^2}{2}$$

$$= 1{,}01 \times 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^3} + 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times (-1\,\text{m})\,\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$-\frac{1}{2} \times 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (11{,}7)^2\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$p_A = 22{,}8\ \text{kPa (abs) ou } -78{,}5\ \text{kPa (manométrica)} \longleftarrow p_A$$

Notas:
- ✓ Este problema ilustra uma aplicação da equação de Bernoulli que inclui mudança de elevação.
- ✓ Tome cuidado sempre que desprezar atrito em um escoamento interno. Neste problema, desprezar atrito é razoável se o tubo for de parede lisa e relativamente curto. No Capítulo 8, estudaremos efeitos de atrito em escoamentos internos.

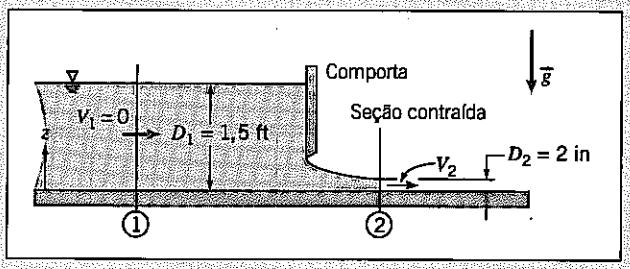
EXEMPLO 6.5 Escoamento sob uma Comporta

Água escoa sob uma comporta, num leito horizontal na entrada de um canal. A montante da comporta, a profundidade da água é 1,5 ft e a velocidade é desprezível. Na seção contraída (*vena contracta*) a jusante da comporta, as linhas de corrente são retilíneas e a profundidade é 2 in. Determine a velocidade do escoamento a jusante da comporta e a vazão em pés cúbicos por segundo por pé de largura.

PROBLEMA-EXEMPLO 6.5

DADOS: Escoamento de água sob uma comporta, conforme mostrado.

DETERMINAR: (a) V_2.
(b) Q em ft³/s/ft de largura.



SOLUÇÃO:
Com as considerações listadas a seguir, o escoamento satisfaz todas as condições necessárias para a aplicação da equação de Bernoulli. A questão é: Que linha de corrente utilizar?

Equação básica: $$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

Considerações:
(1) Escoamento permanente.
(2) Escoamento incompressível.
(3) Escoamento sem atrito.
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente.
(5) Escoamento uniforme em cada seção.
(6) Distribuição hidrostática de pressão.

Se considerarmos a linha de corrente que passa ao longo do chão do canal ($z = 0$) devido à consideração 6, as pressões em ① e ② são

$$p_1 = p_{atm} + \rho g D_1 \quad \text{e} \quad p_2 = p_{atm} + \rho g D_2$$

de forma que a equação de Bernoulli para essa linha de corrente é

$$\frac{(p_{atm} + \rho g D_1)}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{(p_{atm} + \rho g D_2)}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}$$

ou

$$\frac{V_1^2}{2} + gD_1 = \frac{V_2^2}{2} + gD_2 \qquad (1)$$

Por outro lado, considere a linha de corrente que passa ao longo da superfície livre em ambos os lados da comporta. Para esta linha de corrente,

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gD_1 = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gD_2$$

ou

$$\frac{V_1^2}{2} + gD_1 = \frac{V_2^2}{2} + gD_2 \qquad (1)$$

Nós chegamos à mesma equação (Eq. 1) para a linha de corrente no chão e a linha de corrente na superfície livre, implicando a constante da equação de Bernoulli ser igual para ambas as linhas de corrente. Na Seção 6-6 (no CD) veremos que esse escoamento pertence a uma família de escoamentos que abrange este caso. Resolvendo para V_2, obtemos

$$V_2 = \sqrt{2g(D_1 - D_2) + V_1^2}$$