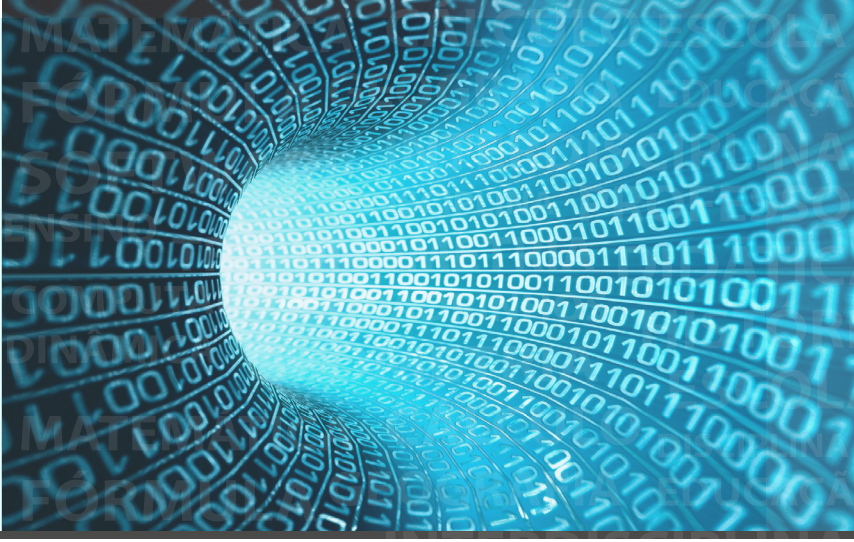


EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: DIFERENTES CONTEXTOS, DIFERENTES ABORDAGENS

Ana Carolina Costa Pereira
Wellington Lima Cedro
Organizadores

EdUECE

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: DIFERENTES CONTEXTOS, DIFERENTES ABORDAGENS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

Reitor
José Jackson Coelho Sampaio

Vice-Reitor
Hidelbrando dos Santos Soares

Editora da UECE
Erasmo Miessa Ruiz

Conselho Editorial
Antônio Luciano Pontes
Eduardo Diatahy Bezerra de Menezes
Emanuel Ângelo da Rocha Fragoso
Francisco Horácio da Silva Frota
Francisco Josênio Camelo Parente
Gisafran Nazareno Mota Jucá
José Ferreira Nunes
Liduina Farias Almeida da Costa
Lucili Grangeiro Cortez
Luiz Cruz Lima
Manfredo Ramos
Marcelo Gurgel Carlos da Silva
Marcony Silva Cunha
Maria do Socorro Ferreira Osterne
Maria Salete Bessa Jorge
Silvia Maria Nóbrega-Therrien

Conselho Consultivo
Antônio Torres Montenegro (UFPE)
Eliane P. Zamith Brito (FGV)
Homero Santiago (USP)
Ieda Maria Alves (USP)
Manuel Domingos Neto (UFF)
Maria do Socorro Silva Aragão (UFC)
Maria Lírida Callou de Araújo e Mendonça (UNIFOR)
Pierre Salama (Universidade de Paris VIII)
Romeu Gomes (FIOCRUZ)
Túlio Batista Franco (UFF)

Ana Carolina Costa Pereira
Wellington Lima Cedro
Organizadores

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: DIFERENTES CONTEXTOS, DIFERENTES ABORDAGENS

1ª Edição
Fortaleza - CE
2015

EdUECE

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:
DIFERENTES CONTEXTOS, DIFERENTES ABORDAGENS

© 2015 *Copyright by* Ana Carolina Costa Pereira e Wellington Lima Cedro

Impresso no Brasil / Printed in Brazil
Efetuado depósito legal na Biblioteca Nacional

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS

Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará
CEP: 60714-903 – Tel: (085) 3101-9893
www.uece.br/eduece – E-mail: eduece@uece.br

Editora filiada à

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA
DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Coordenação Editorial
Erasmo Miessa Ruiz

Diagramação e Capa
Narcelio de Sousa Lopes

Revisão de Texto
EdUECE

Ficha Catalográfica
Vanessa Cavalcante Lima - CRB 3/1166

E 21 Educação matemática: diferentes contextos, diferentes abordagens / Ana Carolina Costa Pereira, Wellington Lima Cedro (orgs). – Fortaleza: EdUECE, 2015.

214 p.
ISBN: 978-85-7826-215-0

1. Ensino aprendizagem - Matemática. 2. Material didático. 3. Interdisciplinaridade. I. Título.

CDD: 510

APRESENTAÇÃO

Qual a concepção que temos da Matemática? Trata-se de uma ciência a-histórica, baseada na Lógica e na Teoria dos Conjuntos? Um conjunto de conhecimentos extraídos do mundo físico por meio dos sentidos? Ou é melhor defini-la como uma ciência viva, dinâmica, totalmente integrada na sociedade e com a qual pode-se melhorar a qualidade de vida da população?

Acreditamos que as respostas a essas perguntas podem nos ajudar a identificar o que nós conhecemos atualmente como Educação Matemática. De um modo geral concordamos com D`Ambrósio (1996)[1], que concebe a Educação Matemática como um ramo da Educação em que se procura estudar e desenvolver modos mais eficientes de se ensinar Matemática, ou seja, a Educação Matemática, acreditamos, representar, sim, uma substanciosa oportunidade de se fazer face às dificuldades e desafios inerentes aos processos de ensino e aprendizagem em Matemática.

Com essas características, trata-se, portanto de uma área eminentemente multidisciplinar que segundo D`Ambrósio (1986, p. 35)[2], "se pratica com um objetivo geral bem específico - transmitir conhecimentos e habilidades matemáticas - através dos sistemas educativos (formal, não-formal e informal)". Esse caráter multidisciplinar, inequivocamente, é o principal responsável pela vitalidade da Educação Matemática, uma vez que favorece o progresso dessa área em várias frentes de pesquisa.

1 D´AMBROSIO, U. *Educação Matemática*: da teoria à prática. 10. ed. Campinas, SP: Papirus, 1996 (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

2 D´AMBROSIO, U. *Da realidade à ação*: reflexões sobre Educação e Matemática. 4. ed. São Paulo: Summus, 1986.

Contudo, mesmo guarnecida com tantos aspectos positivos e avanços, a Educação Matemática deve, ainda assim, ser, prudentemente, considerada um campo científico em formação. Há muito o que se definir, reestruturar e fundamentar nessa área, e compete a nós, estudiosos e pesquisadores, imergir em nossas reflexões e investigações de modo que possamos assistir produtivamente o processo de consolidação da Educação Matemática.

Neste contexto, é que dedicamos este livro a apresentar uma série de estudos e investigações no campo da Educação Matemática com o propósito principal de ajudar o leitor no movimento de reflexão teórica sobre o processo de constituição de identidade de uma área tão diversa como a Educação Matemática. Assim, este trabalho é um dos inúmeros passos necessários na delimitação e desenvolvimento do conhecimento inerente ao educador matemático.

Os sete capítulos que compõem essa coletânea tratam de quatro temáticas principais inerentes à Educação Matemática, a saber: o uso das TIC´s; o emprego das histórias em quadrinhos; a história da matemática e a formação de professores. Os dois primeiros capítulos do livro tratam das tecnologias da informação e da comunicação (TIC) e têm em comum o uso de *softwares* e a abordagem sobre o ensino da geometria. Em seguida, apresentamos mais dois capítulos que, apesar de terem focos diferentes (formação de professores e o ensino). Compartilham entre si o destaque dado ao uso das histórias em quadrinhos, como um elemento necessário tanto à formação do professor que ensina matemática como nos processos de ensino dos conhecimentos matemáticos. Um terceiro momento desta obra destaca nos dois capítulos apresentados a importância da história da matemática, que permite tanto a compreensão dos caminhos trilhados pelos

sujeitos como a possibilidade de elaboração de novas práticas educativas. A última temática abordada neste livro é a formação do professor de matemática, que é discutida aqui, em um capítulo, no contexto do estágio supervisionado na educação escolar indígena. Passemos agora a apresentar isoladamente cada um dos capítulos que nos ajudam a compreender a Educação Matemática nos diferentes contextos e nas diferentes abordagens.

O capítulo inicial desta obra foi escrito por Nilton José Neves Cordeiro e Márcio Nascimento da Silva; intitulado "Matemática e Geografia de maneira interdisciplinar: a Geometria esférica com suporte do *software* R". O texto pretende apontar meios para integrar a Matemática e a Geografia de um modo que seja atraente para professores e alunos. Nesta perspectiva, os autores apresentam uma consistente e robusta proposta de ensino interdisciplinar que utiliza *software* R como ferramenta para o estabelecimento das conexões entre as duas disciplinas.

O segundo capítulo, chamado "a geometria do compasso de Mascheroni via atividades com *software* de matemática dinâmica", apresenta um conjunto de atividades que tem como objetivo a compreensão de aspectos da Geometria, particularmente das construções geométricas apresentadas na obra A Geometria do Compasso de Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800), com apoio do *software* de matemática dinâmica, GeoGebra. Os autores neste capítulo transitam entre tendências da Educação Matemática, a saber o uso pedagógico da História da Matemática e as TIC´s, tudo isso permeado pela proposta teórica da "Investigação Matemática".

O capítulo três deste livro se propõe a debater a formação do professor que ensina matemática. Luis Adolfo de Oliveira

Cavalcante e Wellington Lima Cedro, apresentam os resultados de uma pesquisa realizada durante o mestrado, do autor principal, na qual eles analisaram a relevância e pertinência da inserção do uso das histórias em quadrinhos nos processos formativos dos docentes, por meio do desenvolvimento de um curso de formação continuada. O objetivo principal deste capítulo é enfocar como os professores se preocuparam em abordar o conhecimento matemático nas histórias em quadrinhos produzidas durante o curso de formação oferecido a eles.

No quarto capítulo, temos novamente as luzes direcionadas as histórias em quadrinhos. No capítulo escrito por Ana Carolina Costa Pereira, Laura Andrade Santiago e Wendy Mesquita de Morais, intitulado "o uso de episódios históricos no ensino de matemática: uma sequência didática utilizando quadrinhos", é apresentada uma sequência de atividades de ensino construídas por meio do episódio histórico e dos quadrinhos, que tem como objetivo a promoção da aprendizagem significativa e autônoma dos estudantes de matemática. Vinculando o conteúdo da história da matemática e das ciências com as histórias em quadrinhos, as autoras apresentam reflexões interessantes para o desenvolvimento deste foco de pesquisas dentro da educação matemática.

"Obstáculos e dificuldades na aprendizagem dos números inteiros: uma análise dos estudos de Georges Glaeser" é o título do quinto capítulo desta obra. Em seu capítulo Joelma Nogueira dos Santos apresenta uma pesquisa, baseada nos estudos de Georges Glaeser, na qual ela analisa os obstáculos epistemológicos citados por ele, estabelecendo as relações entre as dificuldades dos matemáticos para entender os números relativos com os obstáculos dos alunos na visão de professores.

O sexto capítulo de autoria de Maria Gilvanise de Oliveira Pontes, tem foco na história da Sociedade Brasileira de Educação Matemática no Estado do Ceará. O relato apresentado pela autora narra os eventos marcantes e decisivos no desenvolvimento da Educação Matemática em terras cearenses.

Por fim, o último capítulo denominado "Educação indígena: o futuro professor de matemática atuando na disciplina de estágio supervisionado" se propõe a mostrar como vem se efetivando a formação do professor indígena Tremembé na área de Matemática no Curso Magistério Indígena. O debate é apresentado por Sheyla Silva Thé Freitas, Valmiro de Santiago Lima e Ana Carolina Costa Pereira. Tem como pano de fundo a disciplina de estágio supervisionado e tem como um dos seus objetivos possibilitar ao leitor o entendimento da realidade da educação indígena vivenciada no Ceará.

Para encerrar enfatizamos que deixamos para o leitor o julgamento da relevância das reflexões que aqui são apresentadas e a validade das elaborações teóricas propostas.

Organizadores.

SUMÁRIO

MATEMÁTICA E GEOGRAFIA DE MANEIRA INTERDISCIPLINAR: A GEOMETRIA ESFÉRICA COM SUPORTE DO *SOFTWARE* R
Nilton José Neves Cordeiro
Márcio Nascimento da Silva *13*

A GEOMETRIA DO COMPASSO DE MASCHERONI VIA ATIVIDADES COM *SOFTWARE* DE MATEMÁTICA DINÂMICA
Giselle Costa de Sousa
José Damião Souza de Oliveira 49

HISTÓRIAS EM QUADRINHOS E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: UMA RELAÇÃO POSSÍVEL
Luis Adolfo de Oliveira Cavalcante
Wellington Lima Cedro *85*

O USO DE EPISÓDIOS HISTÓRICOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO QUADRINHOS
Ana Carolina Costa Pereira
Laura Andrade Santiago
Wendy Mesquita de Morais *108*

OBSTÁCULOS E DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS INTEIROS: UMA ANÁLISE DOS ESTUDOS DE GEORGES GLAESER
Joelma Nogueira dos Santos *132*

A HISTÓRIA DA SBEM NO CEARÁ: DESAFIOS E PERSPECTIVAS
Maria Gilvanise de Oliveira Pontes 160

EDUCAÇÃO INDÍGENA: O FUTURO PROFESSOR DE MATEMÁTICA ATUANDO NA DISCIPLINA DE ESTÁGIO SUPERVISIONADO
Sheyla Silva Thé Freitas
Valmiro de Santiago Lima
Ana Carolina Costa Pereira *180*

AUTORES 208

CAPÍTULO 01

MATEMÁTICA E GEOGRAFIA DE MANEIRA INTERDISCIPLINAR: A GEOMETRIA ESFÉRICA COM SUPORTE DO *SOFTWARE* R

Nilton José Neves Cordeiro
Márcio Nascimento da Silva

Introdução

Mesmo nos dias de hoje não é difícil encontrar alunos – quer seja na educação básica ou superior – que se questionam e/ou indagam seus professores sobre a utilidade de alguns conteúdos de matemática. Aulas conduzidas de maneira pouco diversificadas, sem estímulos e a falta de habilidade por parte de alguns professores em articular a Matemática com outras áreas do conhecimento, parecem contribuir para este quadro. A busca pelo significado dos conteúdos estudados pode ser o caminho.

Partindo dessas premissas, deve-se fazer com que o ensino esteja diretamente ligado, também, ao interesse e a necessidade dos alunos. A reflexão e a busca por estratégias que articulem o conteúdo com ferramentas e temáticas diversas, inclusive as do cotidiano, podem ser de grande valia, tornando o ensino/aprendizagem mais atraente.

> No caso específico da matemática, uma reflexão crítica sobre o papel que ela deve desempenhar na configuração curricular é imprescindível e inadiável. Em todas as sistematizações filosóficas, constatamos a importância do papel que lhe é destinado, bem como a influência que dele se irradia para todos os relacionamentos disciplinares. (MACHADO, 1993, p. 33)

Desta forma, pretende-se aqui apontar meios para integrar Matemática e Geografia de um modo que seja atraente para professores e alunos: uma proposta interdisciplinar com o uso do *software* R.

Interdisciplinaridade e o ensino de Matemática

A Matemática pode facilmente ser articulada com outras áreas, como por exemplo a Biologia, na análise do crescimento de bactérias, a Física, com modelos para as órbitas dos planetas ou a Geologia, com a datação de fósseis. Já a localização, distribuição e representação do espaço geográfico é um exemplo de articulação entre Matemática e Geografia.

Trabalhar várias áreas em um mesmo assunto é o que pode ser chamado de interdisciplinaridade, que de acordo com Silva (2010), é

> [...] o processo que envolve a integração e engajamento de educadores num trabalho conjunto de interação das disciplinas do currículo escolar entre si e com a realidade de modo a superar a

> fragmentação do ensino. A interdisciplinaridade é, portanto, a articulação que existe entre as disciplinas para que o conhecimento do aluno seja global, e não fragmentado. (2010, p.3)

Ainda neste artigo, Silva diz que a interdisciplinaridade no contexto escolar é a oportunidade do estudante se tornar protagonista de suas próprias ações na busca do saber tendo o professor como mediador dessa aprendizagem, o responsável por conduzir e dar possibilidades para que esse desenvolvimento estudantil venha acontecer.

No que tange o ensino superior, segundo Santos & Viera (2011), os professores de centros universitários e institutos de ensino superior não dão muita importância à interdisciplinaridade e nem mesmo à pesquisa. Ainda, afirmam que:

> Nessas instituições, os professores são horistas, isto é, são pagos por hora-aula, para "darem aulas" e não ensinarem. Isso significa que esses professores têm compromisso com o ensino, mas não necessariamente, com a aprendizagem e com a interdisciplinaridade. Muitos desses profissionais não têm tempo para pesquisar, ler e, especialmente preparar a aula. Com frequência, verifica-se que chegam na sala de aula e não sabem, sequer onde foram que pararam com a matéria na aula passada. (SANTOS & VIEIRA, 2011, p. 2)

As metodologias de ensino voltadas para o Ensino Superior não diferem em muito daquelas voltadas para o Ensino

Médio. Em vários casos, o professor é reconhecido apenas pela sua área de investigação, uma vez que este, em geral, se limita a trabalhar apenas a disciplina que lhe é direcionada. Nas universidades, em sua grande maioria, os cursos são trabalhados de maneira isolada com relação aos demais e a técnica da aprendizagem se restringe exclusivamente à teoria e prática (quando esta existe no curso).

Vale lembrar que a abordagem interdisciplinar no ensino superior é um princípio recente de organização do trabalho pedagógico, no qual se busca a interação de conceitos e métodos. Assim, é necessário um avanço na postura de ensinar e aprender dos professores.

Portanto, a Matemática ensinada hoje, seja na educação básica ou no ensino superior, já não pode ser apresentada de maneira isolada com relação às demais disciplinas presentes no processo educacional e nem pode estar acomodada com as questões que envolvem o ambiente relacionado, embora seja comum encontrar professores que ainda trabalham dessa forma. E quando o aluno, por sua vez, passa a se preocupar apenas com o atual conteúdo abordado, deixando de lado os demais assuntos já estudados até então, pode provocar a fragmentação do conhecimento e o "isolamento" da Matemática como disciplina e, por consequência, o desinteresse do estudante por esta. Segundo Sampaio & Silva (2012, p. 7), trabalhar disciplinas de forma interdisciplinar é muito importante e, ainda,

> Esta integralização de disciplinas é fundamental para o desenvolvimento cognitivo dos discentes, fazer relação com outras ciências e com o cotidiano cha-

> ma a atenção deles, traz interesse e, com o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) como principal porta de entrada para o ensino superior, torna-os mais aptos a passar num vestibular.

Importante ressaltar que a interdisciplinaridade pode ser considerada como uma forma de integração da Matemática como linguagem, onde essa serve as demais áreas como ferramenta. Portanto, a interdisciplinaridade contribui de modo a despertar no aluno o interesse por esta, cabendo ao professor procurar caminhos novos e melhores para concretizar o conhecimento, de maneira responsável e conjunta.

Geometria Esférica: possibilidades na educação básica

A Geometria Esférica aparece de forma implícita no Ensino Básico e em diversas situações do cotidiano. Quando o Globo Terrestre é apresentado em uma aula de Geografia, sua forma esférica e os padrões de linhas e ângulos parecem necessitar de uma compreensão além da Geometria Euclidiana: a Geometria Esférica. Aplicativos para *smartphones* e *tablets,* automóveis e até relógios fazem uso do Sistema de Posicionamento Global (ou *Global Positioning System* – GPS), que se baseia na Geometria Esférica.

Vê-se, então, um entrelaçamento entre a Matemática e a Geografia. Isso sugere que promover o conhecimento matemático de maneira contextualizada e interdisciplinar associado a outras áreas, em nível escolar ou superior, pode proporcionar resultados satisfatórios, como será visto através dos relatos de alguns autores a seguir.

Alves (2004) estudou a esfera e seus elementos, associando-a com o Globo Terrestre. Abordou, em sua atividade, tópicos como "A Superfície Esférica e seus Elementos", "As Coordenadas Geográficas", "Os Fusos Horários", "A Superfície Esférica em Coordenadas Cartesianas", "A Matemática do GPS" e "A Distância numa Superfície Esférica".

> Conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes e fusos horários estão baseados em importantes ideias geométricas que, quando trabalhadas neste contexto, conduzem o aluno a uma melhor compreensão e aprendizagem do tema. (ALVES, 2004, p. 1)

Prestes (2006) elaborou seu trabalho a partir de uma sequência de ensino com questões relacionando elementos de Geometria Esférica com conceitos utilizados para o estudo do Globo Terrestre. Para isso, utilizou a metodologia da Engenharia Didática, embasada em conceitos das teorias de Vergnaud e Vygotsky, buscando responder a questão "*Uma Introdução à Geometria Esférica pode favorecer o estudo da Geografia do Globo Terrestre e em particular o estudo de mapas?"*.

A sequência de ensino teve como sujeitos alunos da 8ª. série do Ensino Fundamental, com a autora finalizando seu trabalho dizendo:

> [...] pode-se concluir que um trabalho com a Geometria Esférica, tal como foi proposto neste estudo, em face dos resultados verificados duran-

> te o desenvolvimento da sequência de ensino, contribui para o processo de compreensão de conteúdos específicos de Geografia, em especial, o estudo do Globo Terrestre e dos mapas. (PRESTES, 2006, p. 153)

Mesmo ausente neste nível de ensino, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Fundamental sugerem a importância da Geometria não Euclidiana, dizendo:

> Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento foi amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma **pluralidade de modelos geométricos**, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (BRASIL, 1998, p. 25, grifo nosso)

Brum & Schuhmacher (2013a) afirmam que nas duas últimas décadas houve grande preocupação por parte de membros de associações de profissionais de Matemática para

incluir conteúdos de Geometria não Euclidiana, como a Geometria Esférica, já mesmo nas escolas, considerados adequados à formação de estudantes em consequência dos avanços teóricos da Matemática e Computação.

Segundo estes pesquisadores, a partir dessa preocupação surgiram questões como:

- O ensino da Geometria não Euclidiana é um tema distante da realidade dos estudantes?;
- O modelo geométrico para representar o planeta Terra abordado nas aulas de Geografia e Matemática é um plano, uma folha retangular ou uma superfície quase esférica?;
- Se um dos pontos de discussão é a reformulação do ensino no Brasil, por quê as Geometrias não Euclidianas ainda não são consideradas um ramo importante da Matemática por parte dos professores?;
- Será que o ensino de Geometrias não Euclidianas, como a Esférica e Hiperbólica, vem causando inquietações em professores de Matemática por ser um assunto novo e ainda desconhecido?

Estes autores ressaltam a importância de se explorar Geometria não Euclidiana, em nível escolar, inclusive embasados em passagens dos PCN de Matemática. Salientam que entre os objetivos do ensino de Matemática, encontra-se o desenvolvimento do pensamento geométrico, com a recomendação de se explorar situações de aprendizagem que levem o estudante a resolver situações problema de localização e des-

locamento de pontos e espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias. Ainda, esclarecem que para estabelecer diferenças entre objetos geométricos, conforme orienta os PCN, é preciso identificar uma pluralidade de modelos geométricos na natureza, o que pode ser feito através do estudo das navegações com uso do sistema de localização por GPS nas aulas de Geografia, por exemplo.

Finalizando seu trabalho, Brum & Schuhmacher (2013a) questionam "*Como explorar os conceitos de Geometria Esférica e Hiperbólica no Ensino Médio, a fim de desenvolver a compreensão nos estudantes para a pluralidade de modelos geométricos no espaço em que vivem?*".

Buscando responder esta pergunta, adotaram como recurso a composição de uma sequência didática abordando temas de Geometria Esférica e Hiperbólica, aplicada a uma turma de 2º ano do Ensino Médio. Em algumas das atividades propostas os autores utilizaram temas relacionados à Geografia como "distâncias entre os polos Norte e Sul", "Meridianos", "Latitude e Longitude" para a cristalização do conhecimento geométrico. Assim, os autores acreditam que contribuíram com estratégias didáticas, objetivando o processo de ensino e aprendizagem dessas Geometrias.

Em outro trabalho, Brum & Schuhmacher (2013b) apresentam um relato de experiência também com alunos do 2º ano do Ensino Médio no qual sinalizaram que a assimilação de conteúdos de Geometria Esférica fora facilitada devido ao uso de metodologia que seguia os princípios da Engenharia Didática.

> A sequência didática buscou contribuir junto aos estudantes para a percepção da existência de problemas que necessitam ser tratados por conhecimentos da Geometria Esférica, descartando as noções comuns da Geometria Euclidiana (BRUM & SCHUHMACHER, 2013b, p. 77)

Em uma das atividades propostas pelos autores, a qual implicou em variáveis didáticas tais como noção de reta e relação entre distância percorrida e o formato do trajeto, na análise de um tipo de resposta dada pelos estudantes eles concluíram:

> É possível que a escolha por esta solução esteja condicionada à obrigatoriedade dos estudantes encontrarem geralmente uma resposta característica do ensino de Matemática, e também por desconsiderarem as noções de pontos cardeais, conteúdos trabalhados no ensino de Geografia desde o nível fundamental. (BRUM & SCHUHMACHER, 2013b, p. 72)

Segundo os autores, os resultados do trabalho apontam uma facilitação na compreensão de conceitos de Geometria Esférica por parte dos estudantes, permitindo o desenvolvimento de competências para sua utilização nos problemas do cotidiano, sem desconsiderar, dito pelos mesmos, que ainda há a necessidade de aprofundamento das questões por eles levantadas.

Em outro trabalho, Dueli (2013) elaborou uma sequência de atividades interdisciplinares entre Matemática e Geografia no intuito de contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Esférica para alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Uma das estratégias do autor foi utilizar materiais manipuláveis pelos os alunos:

> Ao trabalharem com materiais manipuláveis, como o globo terrestre e o mapa-mundi, verificou-se uma maior assimilação dos conteúdos envolvendo a Geografia e uma maior facilidade nos cálculos matemáticos envolvidos. (DUELI, 2013, p. 93)

Dueli (2013) conclui que, ao se articular teoria e prática, embasado na Engenharia Didática, foi possível atingir seus objetivos, pois com a viabilidade de inter-relacionar a Matemática com a Geografia e a História, atestou-se que é interessante trabalhar conceitos elementares de Geometria Esférica numa proposta interdisciplinar e contextualizada.

Mesmo a Geometria Esférica estando ausente no Ensino Médio, percebe-se nos PCN-Ensino Médio, o quanto é dada importância à Matemática e às inter-relações que a mesma pode tomar, inclusive com a Geografia:

> No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que

> a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade na vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à **cartografia**, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, **coordenadas**, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. (BRASIL, 2000, parte III, p. 9, grifo nosso)

Noel Filho (2012) realizou um desenvolvimento histórico evidenciando as relações entre a Cartografia e a Matemática, mais especificamente a Geometria Diferencial. Tratou questões de como na antiguidade os gregos construíram os primeiros fundamentos da Geografia (a esfericidade da Terra, seus polos, equador e trópicos, sistema de latitude e longitude), passando pelo Renascimento com a contribuição de cartógrafos e matemáticos tais como Pedro Nunes, Gerard Mercator e Edward Wright. Ainda, descreve a Matemática nas contribuições cartográficas de autores estudados e finaliza apontando fatos que evidenciam que trabalhos cartográficos marcam o nascimento da Geometria Diferencial como área autônoma.

Devido aos resultados positivos apontados por Noel Filho (2012) e Dueli (2013) que sinalizam favoravelmente quanto a inter-relação da Matemática inclusive com História/História da Matemática, considera-se relevante, em nível superior, citar Pereira (2013), que faz algumas considerações acerca da Trigonometria Esférica no Brasil, afirmando que já

no início do século XIX esse assunto fazia parte do currículo da Academia Real Militar e que neste mesmo século ela estava também no currículo do Colégio Dom Pedro II como parte inicial do estudo de Astronomia.

Pereira (2013) acredita que a Trigonometria Esférica está perdendo espaço no ensino de Matemática, pois, atualmente, ela está presente no ensino superior fundamentalmente em cursos técnicos ou de engenharia. Em cursos de bacharelado em matemática, este assunto é visto na disciplina de Geometria não Euclidiana.

A autora relata, ainda, que uma pesquisa feita em 2005 apontou apenas 5 (cinco) de 47 (quarenta e sete) Instituições de Ensino Superior abordando a temática.

Por fim, sugere atrelar Trigonometria Esférica com História da Matemática, propondo que isto seja feito através de cursos de extensão universitária, oficinas, seminários temáticos ou mesmos *workshops*.

O *Software* R

De acordo com o seu próprio *website*, o *Software* R é uma linguagem e ambiente para computação estatística e gráficos (www.r-project.org). Porém, em Cordeiro, Sousa & Silva (2011) é dito que a gama de áreas que o R aborda atualmente ultrapassou e muito o escopo da Estatística. Hoje, pode-se trabalhar dentre outras áreas, Ecologia, Matemática e Geografia, sendo estes dois últimos campos explorados neste trabalho.

Atualmente o R está na versão 3.1.3 (de março de 2015) e vale observar que:

- É um *software* absolutamente gratuito e de livre distribuição;
- É usado nas plataformas *Windows*, *Linux* e *Macintosh*;
- A sua implementação pode ser estendida através de pacotes adicionais que são continuamente disponibilizados por colaboradores do mundo inteiro;
- É permitida a criação e modificação de funções;
- Engloba várias áreas de conhecimento, como Estatística, Matemática, Economia, Geografia, etc.;
- Há um vasto conteúdo em manuais oficias e gratuitos.

Conforme Cordeiro, Sousa & Silva (2011) um dos grandes objetivos ao utilizar o R em Matemática é o de gastar o menor tempo possível com tecnicidades e direcionar o seu uso para os conceitos abordados em sala de aula, com uma aplicação dentro do planejamento do professor, na criação de exercícios dinâmicos e diferenciados.

Assim, pretende-se apresentar aqui o *Software* R como uma ferramenta didática eficiente no auxílio do ensino interdisciplinar de conteúdos relevantes da Matemática, especificamente apoiados com temas da Geografia.

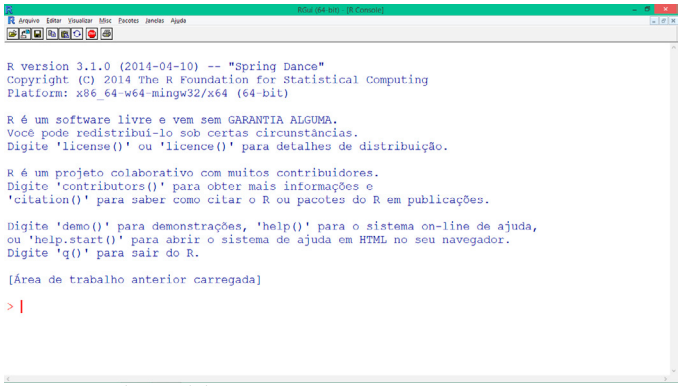


Figura 1 – Tela inicial do R.
Fonte: Elaborada pelos autores.

O pacote Geosphere

O pacote Geosphere foi criado para implementar funções de Trigonometria Esférica para aplicações geográficas. Atualmente ele se encontra na versão 1.3-13, de abril de 2015. Neste *package* há quase 40 (quarenta) funções disponíveis. Dentre elas:

1. antipode – Determina uma antípoda ou verifica se dois pontos são antípodas.
2. areaPolygon - Calcula a área de um polígono em uma esfera.
3. centroid - Calcula o centroide de polígonos esféricos.
4. distCosine – Calcula a menor distância entre dois pontos (ou seja, a 'distância-grande-círculo' ou 'em

linha reta') de acordo com a Lei dos cossenos em sua versão esférica.

5. gcIntermediate – Determina, sobre um grande círculo, pontos intermediários, entre dois pontos quando estes determinam o grande círculo.
6. gcIntersect – Calcula os dois pontos onde dois Grandes Círculos se interceptam.
7. gcLat – Mostra a latitude em que um grande círculo atravessa/passa uma longitude.
8. gcLon – Mostra as longitudes em que um grande círculo atravessa/passa uma latitude (paralelo).
9. makePoly - Faz um polígono ou linha adicionando pontos intermediários (vértices) sobre os grandes círculos entre os pontos fornecidos.
10. mercator - Transforma pontos definidos por longitude/latitude em pontos na Projeção de Mercator.
11. onGreatCircle - Testa se um ponto está em um grande círculo definido por dois outros pontos.
12. perimeter - Calcula o perímetro de um polígono (ou o comprimento de uma linha) em uma esfera.

Um recurso muito interessante e útil disponibilizado pelo Geosphere é a facilidade em se desenhar o Mapa Mundi. Isso possibilita ilustrar e contextualizar, sobremaneira, várias situações práticas ao se empregar Geometria Esférica.

Dentro ainda deste pacote, podem ser trabalhados os seguintes assuntos: cálculo da duração do dia em uma determinada latitude, cálculo da menor distância entre dois pontos

considerando o método de Meeus (a Terra é considerada um elipsoide e não uma esfera), projeção de Mercator; cálculo da direção, em graus, saindo de um ponto a outro ao longo de um Grande Círculo, dentre outras.

A interdisciplinaridade Matemática/Geografia com o recurso do *Software* R

Ensinar Matemática através do *Software* R pode ser bastante eficiente para o desenvolvimento da aprendizagem, bem como algumas vantagens podem ser enumeradas: a elevação do nível de aprendizagem (uma melhor visão de conteúdos abstratos), a junção entre conhecimento e uso da tecnologia e a relação entre conteúdo e prática. Desta forma, apresenta-se a seguir o *Software* R através dos recursos do *package* Geosphere, na solução e/ou abordagem de alguns problemas/questões que envolvem conceitos de Geografia e Matemática. Será mostrada a potencialidade do R/Geosphere tanto para questões contextualizadas em nível escolar básico quanto em nível superior.

Alves (2004, p. 1) afirma:

> A utilização do globo terrestre, com suas consequentes questões envolvendo, por exemplo, cálculo de distância e ângulos sobre a esfera, ou ainda, a confecção de mapas por meio de diversas projeções, abre caminho para um interessante trabalho interdisciplinar entre a Matemática e a Geografia.

As motivações/exemplos aqui apresentados dão continuidade/aprimoramento aos trabalhos de Sales *et al.* (2013)

e Santos *et al*. (2013), que germinaram nos Laboratórios do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú.

Há questões extraídas de trabalhos de Brum & Schuhmacher (2013b), de vestibulares, do ENEM e, em algumas outras situações, adaptações são utilizadas para uma melhor conexão da abordagem de conceitos de Matemática com a Geografia.

Observem-se os seis exemplos a seguir.

Exemplo 1 – Este exemplo foi extraído de Brum & Schuhmacher (2013b) como parte da montagem da sequência didática para o ensino de Geometria Esférica (adaptado por questões didáticas):

O piloto de um avião comercial avisa a seus passageiros que sairá de São Paulo com destino a New York às 14 h e que o tempo de duração da viagem está estimado em 6 horas, com o trajeto inclinado à direita. O copiloto se aproveita da situação e comenta com o piloto, sem saber que seu microfone está aberto, que irão fazer uma trajetória retilínea, mostrando, assim, o caminho utilizado a todos os passageiros.

(a) Você concorda ou discorda do copiloto? _____

Explique, embasando seus argumentos em algum comentário ou cálculo matemático, que exemplifique a posição assumida por você.

Nesta atividade os autores identificaram estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução tais como tentativa e erro, ensaio de várias possibilidades para a busca de possíveis trajetórias utilizando representações simbólicas e textuais, e a utilização do conceito de geodésica (que são as curvas que minimizam distância na superfície considerada) para compreensão da trajetória formada pelo avião.

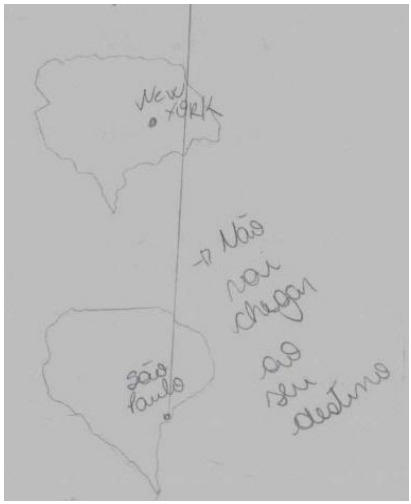


Figura 2 – Concepção apresentada por um estudante sobre a atividade descrita no exemplo 1 em Brum & Schuhmacher (2013b).
Fonte: Brum & Schuhmacher (2013b).

Resultados interessantes foram revelados por Brum & Schuhmacher (2013b), como por exemplo, 21,42% dos estudantes que realizaram tal atividade compreenderam que o avião chegaria sem problemas ao destino caso a trajetória fosse uma reta (Figura 2). Outros 21,42%, responderam que

o avião chegaria ao destino caso sua trajetória fosse constituída por curvas.

Com o auxílio do R, o professor poderia enriquecer a experiência mostrando a solução sugerida pelo estudante e a correta trajetória descrita pelo avião, para análise e discussão das estratégias de pensamento/desenvolvimento, bem como abordar a diferença entre as geodésicas do plano e da esfera. Para ilustrar, foram consideradas as coordenadas - latitude e longitude - das cidades de São Paulo e New York e com o uso do *package* Geosphere, reproduz-se uma parte do Mapa Mundi que as contém, com a localização de cada uma delas indicada por asteriscos, conforme a Figura 3.

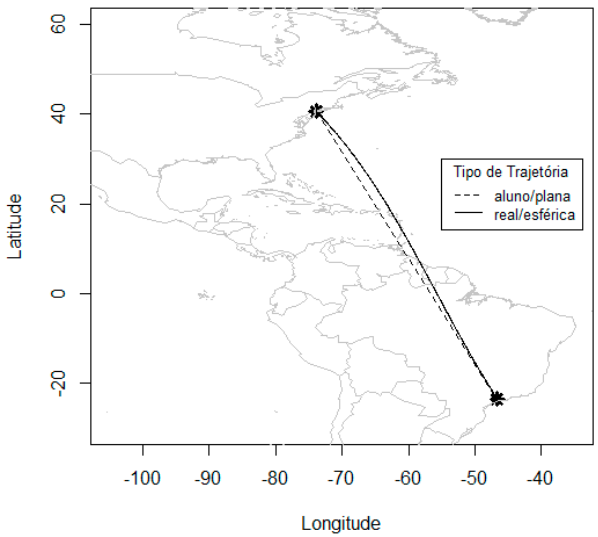


Figura 3 – Trajetórias plana e esférica – atividade em Brum & Schuhmacher (2013b).
Fonte: Elaborada pelos autores.

Exemplo 2 – Nesta questão pode ser explorado um conceito bem simples que é o perímetro de um polígono, especificamente o de um triângulo. Contudo, o contexto implica em um assunto mais elaborado: o perímetro de um polígono sobre uma esfera:

Suponha que uma pessoa saia da cidade de São Francisco, nos Estados Unidos, com destino a São Paulo, no Brasil, e em seguida siga para Berlim, na Alemanha, de onde retorna para São Francisco. Pergunta-se, qual foi a distância percorrida por esta pessoa?

Para perceber a diferença entre polígonos planos e esféricos, são consideradas as coordenadas de três cidades: São Francisco, São Paulo e Berlim. Novamente reproduz-se parte do Mapa Mundi, e as cidades são indicadas por asteriscos, como mostra a Figura 4.

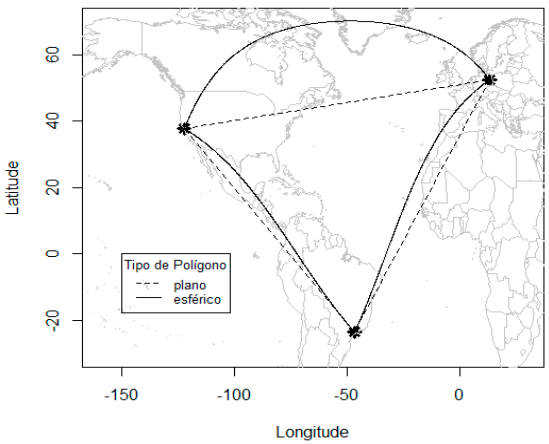


Figura 4 – Exemplo de triângulo plano e esférico.
Fonte: Elaborada pelos autores.

Considerando que estas cidades estão situadas numa superfície esférica e que as coordenadas das mesmas são vértices do triângulo esférico resultante da ligação desses vértices por geodésicas (círculos máximos da esfera, isto é, círculos cujos centros coincidem com o centro da esfera) tem-se o polígono esférico delimitado pela linha cheia na Figura 4. Se, por outro lado, considerássemos o triângulo sobre uma superfície plana, teríamos o polígono representado pela linha tracejada, também chamada de Projeção de Mercator, cuja a ideia de sua elaboração até pode ser repassada para alunos do ensino básico, sem as tecnicidades inerentes a mesma.

Neste momento, podem-se explorar conceitos como vértices, lados e ângulos de polígonos sobre um plano ou sobre uma esfera. Também pode-se trabalhar intuitivamente questões relacionadas a aproximação, uma vez que a Figura 4 sugere uma diferença de perímetros considerando-se o triângulo plano e o esférico. A partir daí, tópicos como Lei dos Senos e Lei dos Cossenos, tanto no plano quanto na esfera, podem ser discutidos.

Voltando à distância percorrida, basta usar o comando *perimeter* do *package* Geosphere, como mostrado abaixo, e o perímetro do triângulo esférico será calculado.

```
>sf=c(-122.42,37.78); sp=c(-46.64,-23.55); be=c(13.39,52.52)
>pol=(rbind(sf,sp,be,sf))
>perimeter(pol)
[1] 29823313
```

São fornecidas as coordenadas geográficas das cidades e informado que tais pontos são vértices de um polígono. A resposta é o perímetro do triângulo esférico dado em metros, que corresponde a aproximadamente 29.823,31 km.

Aqui cabem algumas ressalvas, as quais são: no R o símbolo de separação da parte inteira da não inteira dos números é o ponto e não a vírgula; as localizações no *package* Geosphere devem ser especificadas através de latitude e longitude, em graus e nessa ordem; as localizações em graus são em notação decimal; as coordenadas de pontos nos hemisférios Sul (abaixo do equador) e Ocidental (à esquerda de Greenwich) têm sinais negativos.

Já o triângulo plano, isto é, o polígono obtido a partir da transformação de cada uma das localizações geográficas das cidades (através da longitude e latitude) para pontos da Projeção de Mercator, tem perímetro de 38.111,94 km. Por exemplo, a transformação da localização geográfica da cidade de São Paulo para a Projeção de Mercator é:

```
>mercator(sp)
              x         y
[1,] -5191941 -2698669
```

Exemplo 3 – Neste problema explora-se a área de triângulos planos e esféricos:

Dado o exemplo anterior, considerando que as coordenadas geográficas de cada um dos três lugares, São Francisco, São Paulo e Berlim, são vértices de um triângulo esférico, calcule a área do mesmo.

Para tal cálculo, basta usar o comando *areaPolygon:*

>areaPolygon(pol)

[1] 6.193994e+13

e 6,193994 x 10^{13} km^2 é a área procurada.

Novamente, pode-se buscar o paralelo entre triângulos planos (usando a Fórmula de Heron) e esféricos, levando os alunos a refletirem sobre a diferença que seria observada nas áreas.

Exemplo 4 – Esta é uma adaptação de uma questão do vestibular de 2004-Verão da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS). Foram substituídos os valores de longitude 150 por 70. Nota-se, sem dificuldades, que a mesma tem o objetivo de abordar conhecimentos acerca de Latitude e Longitude, bem como de localização geográfica no Globo. Entretanto, pode-se ir além da Geometria Euclidiana trabalhando-se o comprimento de um segmento de curva que liga dois pontos sobre uma superfície esférica:

Se duas cidades, A e B, estiverem sobre a Linha do Equador, nas longitudes 70 Oeste e 70 Leste, elas terão, em relação a outras duas cidades, C e D, localizadas nas mesmas longitudes, porém sobre o Círculo Polar Ártico.

A) a mesma distância em metros, pois as latitudes são iguais.

B) a distância, em metros, maior, pois os meridianos convergem para os pólos.

C) a distância, em graus, diferente, pois nos polos não há paralelos.

D) a distância, em metros, menor, pois a Terra é *achatada ao longo da linha do Equador.*

E) a distância, em graus, diferente, pois as longitudes são as mesmas

O Mapa Mundi é utilizado agora completo (Figura 5) para ilustrar a situação, mostrando o posicionamento das quatro cidades. A menor distância entre as cidades A e B é indicada pela linha contínua, uma vez que ambas estão situadas no Equador (paralelo de latitude 0). Já a menor distância entre as cidades C e D – que estão sobre o paralelo de latitude 66°33'44" – é indicada através da linha contínua que as liga, que é a forma planificada sobre o mapa Mundi de um grande círculo do Globo terrestre contendo as cidades C e D. Utilizando o comando *distCosine*, que calcula a menor distância entre dois pontos num Grande Círculo, tem-se, em metros:

```
> a=c(-70,0); b=c(70,0); c=c(-70, 66.56); d=c(70, 66.56)
> distCosine(a,b)
[1] 15584729
> distCosine(c,d)
[1] 4886948
```

Assim, vê-se que a distância entre as cidades A e B – que estão no Equador – é maior que a distância entre as cidades C e D, embora as coordenadas geográficas pareçam dizer que a distância entre A e B e a distância entre C e D, em graus, são iguais.

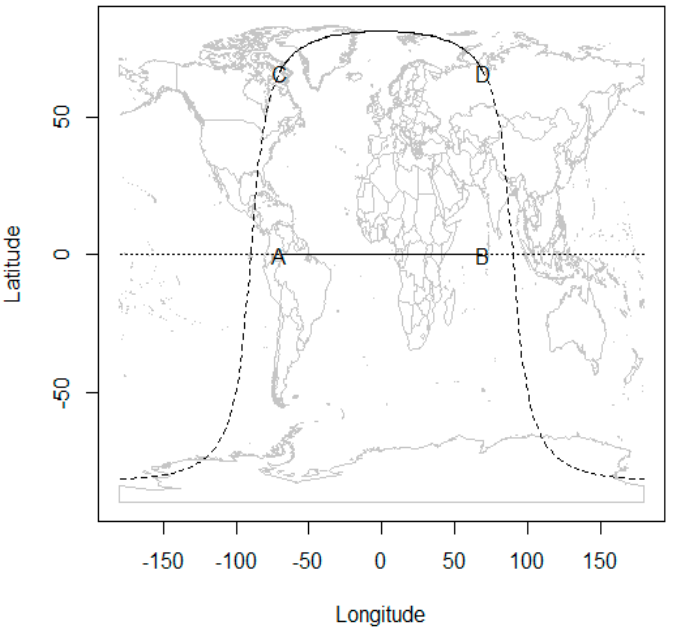


Figura 5 – Esboço da situação descrita no Exemplo 4.
Fonte: Elaborada pelos autores.

Exemplo 5 – Aqui o *software* R pode auxiliar os estudantes numa melhor visão espacial, visto que o mapa, planificação aproximada, restringe essa noção:

Duas pessoas encontram-se em um aeroporto na cidade de São Paulo cujas coordenadas são -23,55° de latitude e -46,64° de longitude. Uma pega um avião que passará pela cidade de São Francisco nos Estados Unidos, cujas coordenadas são 37,78° de latitude e -122,42° de longitude. A outra pessoa pega um avião que passará pela cidade de Berlim, na Alemanha, cujas coordenadas são 52,52° de latitude e 13,39° de longitude. Supondo que os aviões seguirão sempre a mesma direção e que ambos pousaram em um mesmo aeroporto (sabendo que este não é *o aeroporto de partida), calcule as coordenadas geográficas deste aeroporto.*

Mais uma vez o Mapa Mundi é usado para posicionar as cidades em questão: São Paulo (SP), São Francisco (SF) e Berlim (BE). Através do comando *greatCircleBearing*, constrói-se o Grande Círculo tracejado que contém as cidades de São Paulo e São Francisco e o Grande Círculo pontilhado ao qual as cidades de São Paulo e Berlim são pertencentes (obviamente por se tratar de uma planificação, não vemos, de fato, círculos). Visualmente percebe-se a intersecção desses dois grandes círculos na região asiática, perto do Japão, indicado por um asterisco (Figura 6). Através do comando *gcIntersect* com parâmetros dados pelas coordenadas geográficas das cidades, calculam-se as coordenadas dos dois pontos onde os grandes círculos se interceptam:

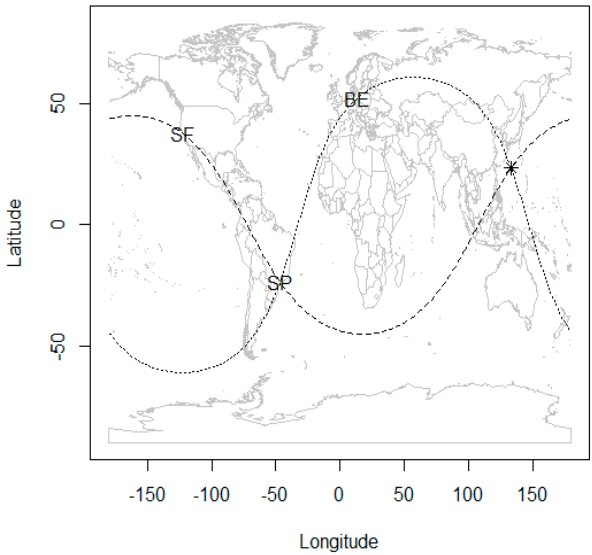


Figura 6 – Um exemplo de intersecção de Grandes Círculos
Fonte: Elaborada pelos autores.

```
> gcIntersect(c(-46.64,-23.55),c(-122.42,37.78),c(-46.64,
-23.55),c(13.39,52.52))
      lon1    lat1    lon2   lat2
[1,] -46.64 -23.55 133.36 23.55
```

Assim, as coordenadas do aeroporto serão 23,55° de latitude e 133,36° de longitude (as primeiras coordenadas são relativas à cidade de São Paulo, ponto de partida).

Exemplo 6 – Questão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2008 com o qual pode-se trabalhar o conceito de programação de função no R. Atividade voltada para alunos do ensino superior:

O sistema de fusos horários foi proposto na Conferência Internacional do Meridiano, realizada em Washington, em 1884. Cada fuso corresponde a uma faixa de 15º entre dois meridianos. O meridiano de Greenwich foi escolhido para ser a linha mediana do fuso zero. Passando-se um meridiano pela linha mediana de cada fuso, enumeram-se 12 fusos para leste e 12 fusos para oeste do fuso zero, obtendo-se, assim, os 24 fusos e o sistema de zonas de horas. Para cada fuso a leste do fuso zero, soma-se 1 hora, e, para cada fuso a oeste do fuso zero, subtrai-se 1 hora. A partir da Lei n.° 11.662/2008, o Brasil, que fica a oeste de Greenwich e tinha quatro fusos, passa a ter somente 3 fusos horários. Em relação ao fuso zero, o Brasil abrange os fusos 2, 3 e 4. Por exemplo, Fernando de Noronha está no fuso 2, o estado do Amapá está no fuso 3 e o Acre, no fuso 4. A cidade de Pequim, que sediou os XXIX Jogos Olímpicos de Verão, fica a leste de Greenwich, no fuso 8. Considerando-se que a cerimônia de abertura dos jogos tenha ocorrido às 20h 8 min, no horário de Pequim, do dia 8 de agosto de 2008, a que horas os brasileiros que moram no estado do Amapá devem ter ligado seus televisores para assistir ao início da cerimônia de abertura?

Aqui foi utilizada como estratégia principal a criação de um algoritmo com a linguagem do R, para resolver problemas, ou seja, teve-se o propósito de estimular o raciocínio lógico do estudante e ao mesmo tempo aproximá-lo de uma "linguagem de programação", até mesmo porque a linguagem do R se assemelha às linguagens C e C++.

Criou-se a função *fuso*, que com o uso do *package* Geosphere, desenha o Mapa Mundi, faz as marcações dos meridianos respeitando a Conferência Internacional do Meridiano, plota dois pontos referentes a duas localizações distintas (duas cidades, por exemplo), bem como calcula a diferença de horas entre estes dois locais. Esta função está mostrada abaixo:

```
fuso=function(lat1,lon1,lat2,lon2){
library(geosphere)
data(wrld)
temp1=matrix(seq(7.5,180,by=15),nrow=12,ncol=1)
temp2=matrix(seq(-7.5,-180,by=-15),nrow=12,ncol=1)
temp3=matrix(rep(90,12),nrow=12,ncol=1)
temp4=matrix(rep(-90,12),nrow=12,ncol=1)
grafico=plot(wrld, type="l",col="grey")
green=c(0,90)
green_neg=c(0,-90)
gci= gcIntermediate(green,green_neg)
lines(gci,col="grey")
k=as.integer(abs(lat1-lat2)/15)
for(i in 1:12)
{
points(temp1[i,],temp3[i,],pch=3)
points(temp1[i,],temp4[i,],pch=3)
gci= gcIntermediate(c(temp1[i,],temp3[i,]), c(temp1[i,],temp4[i,]))
```

```
lines(gci,col="grey")
points(temp2[i,],temp3[i,],pch=3)
points(temp2[i,],temp4[i,],pch=3)
gci= gcIntermediate(c(temp2[i,],temp3[i,]), c(temp2[i,],temp4[i,]))
lines(gci,col="grey")
}
points(lat1,lon1,pch=8,cex=1.1)
points(lat2,lon2,pch=8, cex=1.1)
return(k)
}
```

Utilizando a função acima com as coordenadas aproximadas das cidades, tem-se Pequim com latitude de 116,39 leste e longitude 39,91 norte. Já Macapá (resolveu-se tomá-la como referência por ser a capital do Amapá) tem latitude -51,07 oeste e longitude 0,04 norte. Alimentando a função *fuso* com estas informações tem-se:

```
>fuso(116.39,39.91,-51.07,.04)
[1] 11
```

Bem como a confecção da Figura 7 abaixo:

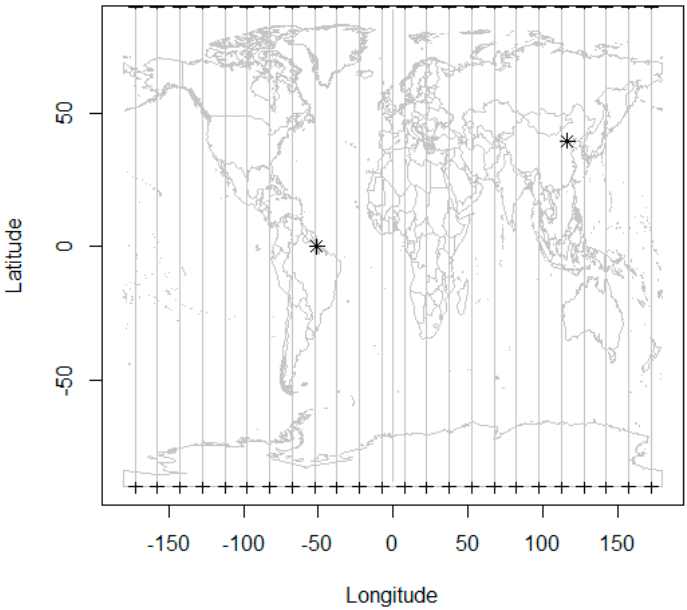


Figura 7 – Criação dos fusos horários através de algoritmo.
Fonte: Elaborada pelos autores.

Além de ser verificada a ilustração através do mapa para a resolução do problema proposto, no *prompt* de comando do R vê-se a resposta, isto é, uma diferença de 11 horas entre as duas cidades. Desta forma, como Pequim está mais ao leste que a cidade de Macapá, aquela está 11 horas à frente, ou seja, no Amapá, os televisores devem ter sidos ligados às 9h 8min, do dia 8 de agosto de 2008.

Considerações Finais

Não é difícil encontrar na docência de Matemática, em nível básico e superior, a pura tecnicidade muito presente e uma pequena preocupação do professor em aprimorar sua prática docente para que ela fique mais acessível aos estudantes. A interdisciplinaridade parece um caminho bom a ser trilhado para minimizar esta problemática.

Assim, entendendo que as metodologias de ensino voltadas para o ensino superior não diferem em muito, em vários aspectos, daquelas voltadas para o ensino médio, ainda que reconhecendo a diferença entre disciplina científica e disciplina escolar e, consequentemente, a Interdisciplinaridade científica e Interdisciplinaridade escolar, conforme Furlanetto (2014), acredita-se que se há um pouco de dedicação e interesse é possível construir metodologias, independentemente do nível de ensino, que capturem e despertem a atenção e o prazer em aprender.

Como visto neste trabalho, há uma preocupação, relativamente recente, em incentivar/resgatar o ensino de Geometria Esférica nos ensinos básico e superior. Vários trabalhos estão surgindo neste sentido, produções de mestrado, doutorado, artigos, etc. Fundamentalmente o que fora visto é que esta associação é feita de forma "direta", do diálogo entre Matemática e Geografia, mas também há relatos positivos e exitosos do diálogo da Geometria Esférica com História e História da Matemática.

Buscou-se mostrar aqui, também, que um suporte tecnológico de alta qualidade, neste caso o *Software* R, pode ser um bom recurso e um facilitador para a concretização de uma

proposta interdisciplinar, traçando um caminho eficaz que pode auxiliar o professor a desenvolver sua prática docente de forma mais eficiente e enriquecedora.

É possível ensinar Matemática de forma interdisciplinar com outras áreas (mais especificamente, com a Geografia) e, com o auxílio do Software R, essa proposta não só é viável, como também pode ser uma atividade bastante prazerosa e que permita aprimoramento da prática do professor, no âmbito da Educação Matemática.

Enfim, pode-se então concluir neste trabalho que a seleção adequada de temas de Geometria Esférica imersos em situações práticas e vivenciadas em Geografia, fundamentalmente, com suporte do *Software* R, criam um ambiente favorável para o ensino de matemática, dando a oportunidade de se aprender interagindo e refletindo, evitando uma aprendizagem mecânica, repetitiva, sem saber o quê e o porquê se está fazendo.

Referências

ALVES, S. A Geometria do Globo Terrestre. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004, Salvador: Universidade Federal da Bahia - UFBA. **Mini Cursos...** Disponível em: <www.bienasbm.ufba.br/M29.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** (3º. e 4º. Ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) – Parte III e Parte IV**. Brasília: MEC, 2000.

CORDEIRO, N. J. N.; SOUSA, R. T. de; SILVA, M. N. da. R: um recurso para o ensino de matemática. In: Encontro Sergipano de Educação Básica, 5, 2011, Aracajú. **Anais...** Aracajú: UFS, 2011. 1 CD-ROM.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E. Aprendizagem de Conceitos de Geometria Esférica e Hiperbólica no Ensino Médio sob a Perspectiva da Teoria da Aprendizagem Significativa Usando uma Sequência Didática. 2013-b - **Aprendizagem Significativa em Revista** – v.3(2), pp. 1-21, 2013a.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E. A Engenharia Didática Como Campo Metodológico Para o Planejamento de Aula de Matemática: Análise de uma Experiência Didática para o Estudo de Geometria Esférica. **JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**- v.6(2), 2013b.

DUELI, L. J. **Geometria Esférica: Propostas de Sequencias Didáticas Interdisciplinares.** 2013. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora (MG), 2013.

FURLANETTO, E. C. Interdisciplinaridade: Uma Epistemologia de Fronteiras. **In:** (Org.) BERKENBROCK, M. M., HAAS, C. M. **Interdisciplinaridade e Transdisciplinaridade – políticas e práticas de formação de professores.** Rio de Janeiro, Wak Editora, 2014.

MACHADO. N. J. Interdisciplinaridade e Matemática. **Pro-Posições** – v. 4, n. 1[10]. 1993.

NOEL FILHO, A. **A Relação Cartografia e Geometria Diferencial de Mercator a Gauss.** 2012. Dissertação de Doutorado – Universidade Estadual Paulista, UNESP, Rio Claro (SP), 2012.

PEREIRA, A. C. C. **A Trigonometria Esférica presente na obra De Triangulis de Regiomontanus**. In: X Seminário Nacional de História da Matemática, 2013, Campinas: Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

PRESTES, I. C. R. **Geometria Esférica: Uma Conexão com a Geografia**. 2006. Dissertação de Mestrado – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo (SP), 2006.

SALES, L. S et al. **R: Uma Ferramenta para Explorar a Interdisciplinaridade entre a Matemática e a Geografia.** In: I ENLECE – Encontro da Linha de Educação, Currículo e Ensino, 2013, Fortaleza: Universidade Federal do Ceará-UFC.

SAMPAIO, C. F.; SILVA, A. G. **Uma Introdução à Biomatemática: A importância da Transdisciplinaridade entre Biologia e Matemática**. In: VI Colóquio Internacional "Educação e Contemporaneidade", 2012, São Cristóvão-SE.

SANTOS, D. R.; VIEIRA, L. C. A importância da interdisciplinaridade no ensino superior. **Revista Faculdade Montes Belos** – v. 4, n. 2, nov. 2011.

SANTOS, M. D. et al. **Explorando Interdisciplinaridade entre a Matemática e a Geografia através do R.** In: XV Encontro de Iniciação Científica, 2013, Sobral: Universidade Estadual Vale do Acaraú-UVA.

SILVA, F. S. O ENEM e a Interdisciplinaridade no Ensino da Matemática**. Revista Episteme Transversalis** – v.1, n. 1, 2010.

CAPÍTULO 02

A GEOMETRIA DO COMPASSO DE MASCHERONI VIA ATIVIDADES COM *SOFTWARE* DE MATEMÁTICA DINÂMICA

Giselle Costa de Sousa
José Damião Souza de Oliveira

Introdução: Apresentação, problemática e referencial teórico

Transitando entre tendências da Educação Matemática, o uso pedagógico da História da Matemática e o uso de TIC[1], e pautando no processo de Investigação Matemática[2] apresentado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), o presente capítulo é dividido em uma apresentação da 1) problemática e referencial teórico seguida do anúncio do resto do texto; e ainda da exposição do 2) contexto histórico; do item que aborda os 3) blocos de atividades e; por fim, algumas 4) recomendações e notas informativas.

O uso da História da Matemática em sala de aula é defendido e difundido por pesquisadores da Educação Mate-

1 Tecnologia da Informação e Comunicação.

2 Em nosso trabalho utilizamos a Investigação Matemática como metodologia, seguindo os seguintes momentos de realização: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulação; e justificativas e avaliação. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009).

mática que a apoiam e a teorizam como uma fonte de recursos didáticos para o ensino, para Miguel e Miorim (2008), a história pode atuar como um elemento que venha a proporcionar uma aprendizagem significativa aos alunos, fornecendo métodos aos professores, de modo a levar os discentes a uma compreensão da matemática escolar de uma forma atrativa, com base em alguns episódios ou problemas matemáticos históricos que venham a ser trabalhados em aulas. Aliada a este recurso trazemos a tendência de uso das TIC, que consiste de uma área da Educação Matemática que nas últimas décadas vem possibilitando uma maior dinâmica nas aulas desta disciplina, pois traz em seu seio diversas mídias como *softwares* que nos propiciam utilizar atividades que permitem fazer uso do dinamismo e de outros recursos para estimularmos os alunos a realizarem investigações matemáticas em atividades que podem ser elaboradas tomando como fonte os problemas presentes na História da Matemática. A este respeito, Borba (2010) apresenta que:

> Os *softwares* educacionais têm a capacidade de realçar o componente visual da matemática atribuindo um papel importante à visualização na educação matemática, pois ela alcança uma nova dimensão se for considerado o ambiente de aprendizagem com computadores como um particular coletivo pensante [...] (BORBA, 2010, p. 03, grifo do autor).

Além disso, processo da Investigação Matemática proposto por Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 13) a define

como sendo a descoberta de "[...] relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades [...]". Nesta perspectiva, defendemos uso de atividades pautadas na História da Matemática via TIC e Investigação Matemática.

Com base nestes argumentos e a fim de melhor compreender aspectos da Geometria, particularmente de construções geométricas, esse capítulo traz dois blocos de atividades – com apoio do *software* de matemática dinâmica, *GeoGebra* – que abordam o ensino da Geometria. Em tais atividades trabalhamos problemas de construções geométricas apresentados na obra *A Geometria do Compasso* de Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800). O objetivo desses blocos é apresentar a Geometria Euclidiana envolta por problemas históricos relacionados às construções geométricas, que foram executadas por Mascheroni apenas com auxílio do compasso e aqui são abordados com o apoio do *Software* GeoGebra para potencializar (melhor compreender) seu ensino e da própria Matemática. Assim, as atividades do primeiro bloco (composto por 3 atividades) abordam conteúdos diversos, a saber: na primeira atividade, dentre os conceitos que podem ser tratados, podemos destacar o conceito de triângulo equilátero; já a segunda atividade contém passos e reflexões da construção realizada na primeira, podendo ser abordados os conteúdos de triângulo retângulo, teorema de Pitágoras, congruência e semelhança de triângulos. Nas atividades do segundo bloco (composto por 4 atividades), o professor poderá abordar, além dos conceitos citados anteriormente, as propriedades de círculo, circunferência, arcos e corda.

Ainda com relação aos blocos enfatizamos que o primeiro bloco possui duas atividades que abordam conhecimentos básicos de Geometria que Mascheroni considera necessários para um bom desenvolvimento dos estudantes que tenham interesse em caminhar dentro da *Geometria do Compasso*. Assim, as atividades deste primeiro bloco servem para embasar os alunos dando o suporte necessário para um bom desempenho nas atividades dos blocos seguintes. O segundo bloco de atividades possui quatro atividades, referentes à divisão da circunferência em partes iguais. A partir das divisões da circunferência em partes iguais, podemos construir polígonos e verificarmos em quais situações estes serão regulares ou não. Tais atividades são estruturadas com os seguintes itens: título, tipo de atividade, conhecimentos prévios, objetivos, procedimentos e reflexão. Estas são as características gerais das atividades que compõem o produto educacional fruto da dissertação intitulada *A Geometria do Compasso (1797) de Mascheroni (1750 – 1800) em atividade com o GeoGebra*, além disso, enfatizamos que há atividades deste produto em que nos depararemos com recortes históricos que surgem em momentos específicos (quando necessário) para que possamos fornecer subsídios aos discentes.

Isto posto ressaltamos que, para atingir os anseios almejados com a realização de atividades pautadas na História da Matemática com apoio computacional (TIC) via Investigação Matemática, é necessário mergulharmos e estudarmos a fundo a própria história e, por este motivo, segue a apresentação do contexto histórico deste trabalho.

Contexto histórico

Figura 1 – Lorenzo Mascheroni
Fonte: Eves (2004, p. 589)

Lorenzo Mascheroni foi um matemático e poeta que nasceu em Castagenta, um vilarejo da cidade de Bérgamo, ao norte da península itálica, em 13 de Maio de 1750. Seus pais eram um jovem casal de fazendeiros, Maria Ceribelli e Paolo Mascheroni dell'Omo, que o levaram para estudar no seminário de Bérgamo, no qual foi ordenado sacerdote aos 18 anos de idade. Em seguida passou a ensinar Retórica em uma das escolas do mesmo seminário, no entanto, Mascheroni não ficaria preso a esta disciplina por muito tempo, pois por volta de seus 26 anos de idade destina-se a estudar as Ciências Exatas e Filosofia. Com suas publicações nesta área assume as cadeiras de Lógica, Metafísica, Física, Matemática Elementar e em seguida a cadeira de Cálculo Diferencial e Integral no referido seminário. Posteriormente, o reconhecimento por suas produções lhe concedeu uma cadeira na Universidade de Pavia, onde também lecionou Elementos de Álgebra e Geometria, sendo lhe acrescentado depois a cadeira de Matemática Apli-

cada. Alguns anos mais tarde, em 1789, Mascheroni assume o cargo de reitor da Universidade de Pavia, onde permaneceu por dois mandatos. Com a invasão das tropas francesas à Itália, Mascheroni teve a oportunidade de conhecer Bonaparte (1769 – 1821), que divulgou na França a obra de Mascheroni intitulada *A Geometria do Compasso*, dando bastante reconhecimento ao referido matemático e poeta. Vale ressaltar que suas obras literárias (poemas) também tiveram boas repercussões, tanto que podemos encontrar poemas de sua autoria em coleções de clássicos italianos do século XVIII.

No que se refere à obra *A Geometria do Compasso* esclarecemos que é composta por 12 livros e que foi publicada pela primeira vez por Mascheroni em 1797. No ano seguinte, foi traduzida para o francês por A. M. Carette, com uma segunda edição publicada em 1828, por A. M. Carette. No ano de 1901 veio a público uma segunda edição italiana, editada por Gaetano Fazzari[3]. Há também uma edição alemã, publicada em 1825, em Berlim, por A. M. Carette.

É válido destacar que, dentre as edições listadas anteriormente, para o presente trabalho fizemos uso das edições italianas e da primeira edição francesa, pois, na primeira edição italiana tínhamos que as imagens das construções estavam com uma melhor qualidade, porém os textos escritos têm páginas cortadas, fato que nos impossibilitaria estudar corretamente os problemas, sendo solucionado com a segunda edição que, por este motivo, também foi usada. A primeira edição francesa foi usada para análise do prefácio e também para comparação dos problemas e demonstrações com as demais edições, de modo

3 Gaetano Fazzari foi professor de Matemática e passou maior parte de sua vida profissional lecionando no Liceu Umberto I (disponível em: http://www.tropeamagazine.it/gaetanofazzari/annuario.htm/).

que pudéssemos verificar se existia alguma contradição entre elas e ainda para melhor compor nossas traduções.

A tese perseguida por Mascheroni na obra supracitada é que toda construção geométrica euclidiana pode ser feita apenas com o auxílio do compasso ao invés da régua e compasso, tendo em vista que os objetos a serem construídos podem, todos, serem reduzidos a pontos (obtidos pela interseção de arcos/aberturas de compassos). Neste sentido, Mascheroni define a *Geometria do Compasso* da seguinte forma: "Chamo Geometria do Compasso aquela que, através só do compasso, sem a régua, determina a posição dos pontos" (DELL' OMO, 1901, p. 11, tradução nossa).

O uso exclusivo do compasso é proposto por tal autor em função de uma maior necessidade de precisão nas construções, justificada pelo fato da régua ser menos precisa que o compasso euclidiano (que possui abertura fixa não sofrendo alterações ao ser manuseado). A este respeito Mascheroni diz:

> Eu não direi aqui em detalhes as razões pelas quais a régua foi excluída disso, as razões serão facilmente conhecidas por aqueles que têm conhecimento em trabalhos desta mesma natureza. Para mencionar em geral as vantagens que o uso do compasso tem sobre a régua quando se trata de uma descrição precisa de reta, que não deve temer o exame do microscópio, basta advertir que se tratando especialmente de uma régua o quanto longa se queira, é quase impossível que ela seja tão direta que

> garanta por todo o seu traçado da posição ao longo de pontos que estão nela. (DELL' OMO, 1901, p. 4, tradução nossa)

Além disso, a precisão almejada emerge da busca de construções de instrumentos náuticos e astronômicos mais rigorosos e com menos erro nas rotas dos navios, por exemplo, com a construção do quadrante. Portanto, com o pensamento de construir algo útil, Mascheroni busca primeiramente o problema para o qual sua ideia da *Geometria do Compasso* conduzisse a uma solução. Deste modo enxergou, dentro da Astronomia, mais especificamente na construção de instrumentos astronômicos, a necessidade de poder dividir um círculo em partes iguais de forma que tivesse uma precisão geométrica muito rebuscada, que não era possível de se obter através do uso da régua, pois segundo Mascheroni, este instrumento traz em si imprecisões inerentes a sua construção.

Logo, a fim de comprovar sua tese Mascheroni, por mais que esteja com seus estudos voltados para construções geométricas, não abandona em um só momento o rigor matemático que lhe permite a garantia da veracidade das construções, sobretudo, o rigor axiomático herdado dos gregos. Deste modo, faz uso, sem modesta, de demonstrações puramente algébricas, sem perder a beleza e a naturalidade de tais construções. De fato, dentro da *Geometria do Compasso* de Mascheroni poderemos evidenciar que todas as propriedades que são válidas e que foram provadas na Geometria Euclidiana serão aceitas na Geometria do Compasso. O diferencial consiste em reduzir o instrumento de construção de dois para um. Isso mostra que Mascheroni não apresentava interesse em refutar

o que Euclides (300 A.C – -) tinha proposto em seus *Elementos*, mas sim produzir uma obra que apresente contribuições para a Geometria que já era conhecida esperando, com isto, que seus novos passos pudessem lhe conduzir a resultados que culminassem em aplicações práticas.

Na referida obra, Mascheroni inicia o primeiro livro falando das noções preliminares, em que aborda algumas proposições e lemas para reforçar os conhecimentos básicos de Geometria.

No segundo livro, Mascheroni já adentra mais nos novos conceitos da Geometria do Compasso, tratando de problemas sobre a divisão de circunferências e arcos de círculos em partes iguais, fazendo uso somente do compasso.

No terceiro livro, são discutidos problemas a respeito da divisão e multiplicação de segmentos de retas, multiplicações inteiras, divisões fracionárias sucessivas, dentre outras abordagens.

O quarto livro trata da resolução de problemas em que se necessita adicionar ou subtrair distâncias num segmento dado, de modo que, quando somamos dois ou mais segmentos, o resultado seja um novo segmento de reta, de forma que possamos garantir que passe uma reta por este novo segmento. Também são abordados problemas em que deve ser encontrado uma paralela ou perpendicular a um segmento dado.

O quinto livro trata de problemas sobre distâncias proporcionais. Nele, são abordados problemas em que devemos encontrar distâncias proporcionais a duas ou mais distâncias dadas, assim como problemas de como dividir um segmento em partes proporcionais a segmentos dados.

O sexto livro discute alguns métodos para encontrar raízes de números racionais.

Já no sétimo livro, são abordados problemas a respeito das interseções de circunferências; circunferências e retas; e entre retas.

No oitavo livro, são tratadas situações sobre a construção, multiplicação e divisão de ângulos utilizando apenas o compasso, bem como alguns problemas envolvendo as razões trigonométricas: seno, cosseno, tangente e secante.

No nono livro, são discutidas as construções de figuras semelhantes e polígonos regulares.

No décimo livro, são abordados problemas em que temos de circunscrever e inscrever círculos em polígonos regulares e/ou qualquer.

O décimo primeiro livro trata de uma coleção de problemas resolvidos – retirados de outros autores (por exemplo, Pappo e Ozanam, dentre outros) – envolvendo área de figuras dadas; a determinação de figuras semelhantes a figuras dadas; construção de elipse; e espirais partindo de arcos de círculos.

Por fim, no décimo segundo livro é apresentada uma lista de problemas diversos os quais Geometria do Compasso sozinha não é capaz de resolver, sendo então necessário o uso da régua. Tais problemas são resolvidos apenas por aproximação. Este é o único livro em que não há só Geometria do Compasso, no entanto, mesmo dispondo de tais situações problemas apresentados na obra de Mascheroni, trabalhamos em nosso produto educacional (blocos de atividades) com os três primeiros livros e neste capítulo de livro trazemos dois.

Levando em consideração o cerne da obra, o conhecimento de Mascheroni e suas motivações, juntamente com o contexto de sua produção, apresentamos a seguir algumas atividades que foram elaboradas como fruto de uma pesquisa de mestrado supracitada.

Nestas atividades temos o interesse mostrar uma interação entre o trabalho com a História da Matemática e as TIC, levando-os a enxergarem que o trabalho com mais de uma tendência da Educação Matemática faz com que a interação de uma com a outra possa enriquecer o ensino da Matemática, mostrando que algo do passado pode servir ao presente e pode ser envolto por recursos computacionais, estimulando assim professores a diversificarem suas aulas dando ainda mais significado.

Blocos de atividades

Considerações gerais sobre os blocos e Software Geogebra

Apresentamos aqui dois blocos de atividades pautadas na *Geometria do Compasso* de Mascheroni via *Software* Geogebra e Investigação Matemática. O primeiro deles possui 2 atividades e o segundo um total de 4 atividades. Por este motivo, sugere-se que sua aplicação ocorra em quatro encontros com duração média de duas horas aula, sendo um encontro destinado ao primeiro bloco e dois ao segundo bloco. Além disso, recomenda-se que exista um encontro (duração de 100 minutos aproximadamente), preliminar às atividades, destinado ao estudo de aspectos relevantes da *Geometria do Compasso* e Mascheroni (via slides, exposição dialogada e pesquisas), as-

sim como, um momento de sondagem com relação aos conhecimentos do GeoGebra. Havendo ou não conhecimento do mesmo, o professor pode optar ou não por fazer uma breve apresentação do *software* e suas ferramentas, contudo, é imprescindível que seja feita a atividade preliminar, que segue, de familiarização das principais ferramentas usadas nas atividades dos blocos (construções da *Geometria do Compasso*).

1. Atividades de familiarização com o Geogebra e apresentação algumas de ferramentas

Em nossos estudos da *Geometria do Compasso* estaremos trabalhando com o *Software* GeoGebra, pois trata-se de um *software* de matemática dinâmica que possui, dentro de seu conjunto de ferramentas, uma que nos possibilita realizar as mesmas ações que o compasso euclidiano (abertura fixa) favoreceu a Mascheroni. Esta ferramenta, do *software*, também é chamada de *Compasso*.

a) Conhecendo a Compasso

Figura 2 – Ferramenta Compasso
Fonte: Arquivo pessoal

A ferramenta *Compasso* possibilita que, a partir de dois pontos quaisquer, possamos construir uma circunferência e movê-la para centrá-la em qualquer outro ponto situado na janela de visualização do GeoGebra. Este fato nos permite transpor medidas sem que seja necessário o uso da régua, ou seja, ao construir uma circunferência, com este passo, na ver-

dade estamos tomando uma abertura de compasso para obtermos um raio.

Para testar tal ferramenta, acione seu ícone e construa uma circunferência[4] de abertura qualquer clicando em dois pontos quaisquer na janela de visualização. Em seguida, escolha um ponto para centrar a circunferência construída. Estes pontos mencionados não obrigatoriamente precisam ser determinados anteriormente a construção da circunferência.

b) Conhecendo a ferramenta Interseção de Dois Objetos

Para marcar a interseção de dois objetos construídos, construa uma reta e uma circunferência que se cruzam (interceptam) em um ou dois pontos.

Agora, para marcarmos os pontos de interseção, teremos que selecionar a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*. Para isto, clique na seta do segundo ícone na barra de ferramentas e clique na quarta ferramenta para habilitá-la. Posteriormente, clique em cada um dos objetos construídos (reta e circunferência). Observe que o(s) ponto(s) de interseção(ões) foi(ram) marcado(s).

Realize a construção de outros objetos (exemplo, segmentos de reta, semirretas, circunferências, dentre outros) e determine seus pontos de interseção. Discuta com seus colegas o que está ocorrendo com suas construções com relação às interseções:

4 No *software* as aberturas de compassos, registradas pela ferramenta *Compasso*, aparecem como uma circunferência, como se tivéssemos feito toda a volta em torno de um dos pontos do arco ficando outro ponto obtido pela interseção da circunferência com outro objeto. Contudo, há também a ferramenta *Circunferência* que se diferencia da *Compasso* pelo fato de variar com o raio, enquanto que a *Compasso* tem abertura fixa.

Observe que, ao marcarmos as interseções entre as circunferências, a ordem em que clicamos para selecionar as circunferências altera a ordem em que os pontos são nomeados, por exemplo, se tivermos duas circunferências de raio AB com centros A e B respectivamente. Se clicarmos na circunferência de centro A e em seguida na circunferência de centro B os pontos de interseção superior e inferior, serão marcados C e D, respectivamente. Se selecionarmos as circunferências na ordem contrária, as interseções, superior e inferior, serão marcadas D e C, respectivamente.

c) Verificando como fazer Destaque

Construa uma circunferência. Agora você pode se perguntar, como poderemos destacar a circunferência construída? O GeoGebra oferece ferramentas para destacarmos as figuras. Uma das formas de destacar uma construção no GeoGebra é através da mudança de cor. Vejamos como realizar esta ação. Para isso, note que na *Janela de Visualização* podemos exibir a *Barra de Estilo*. Esta barra nos oferece o *menu* de ferramentas que nos permite destacarmos as figuras construídas alterando a cor, a espessura e o preenchimento. Então, para alterarmos as configurações das figuras basta clicarmos na figura que desejamos destacar e em seguida irmos à *Barra de Estilo* e fazer-mos as alterações necessárias. Outro detalhe é que todas essas configura-

ções podem ser escolhidas antes de realizarmos as construções. Se desejarmos fazer isso devemos proceder da seguinte forma: após termos selecionada a ferramenta, devemos ir à *Barra de Estilo* e alterarmos as configurações, assim quando realizarmos a construção, ela já estará com os destaques que queremos. Para testar, faça isto com as construções do item anterior. Caso a janela de visualização esteja com muitas construções, abra uma nova janela de visualização e realize novas construções.

d) Medição de Ângulo *e Exibição de Objeto*

Vejamos agora duas outras ferramentas que serão úteis no decorrer da realização das atividades, são elas: Ângulo e *Exibir Objeto*.

Vamos construir duas retas concorrentes e marcar o ponto de interseção entre elas. A primeira reta passa pelos pontos A e B, a segunda passa por C e D, o ponto de interseção será o ponto E, habilite a ferramenta Ângulo e meça o ângulo AÊC. Poderemos agora, esconder as retas deixando, na janela de visualização, apenas os pontos e o ângulo medido. Para isso, basta clicar com o botão direito do mouse sobre as retas (uma de cada vez) e em seguida clicar na opção *Exibir Objeto*, assim teremos na tela somente os pontos e o ângulo.

Tendo conhecido um pouco sobre os blocos e as principais ferramentas, do *Software* Geogebra, que usaremos nas atividades, apresentamos a seguir os dois blocos iniciando com o Bloco I intitulado *Preliminares para Geometria do Compasso* e inspirado no livro I nomeado por *Preliminares* da obra de Mascheroni.

Bloco I: Preliminares para Geometria do Compasso

Neste bloco, temos três atividades preparatórias para os demais blocos de atividades.

Os objetivos deste bloco de atividades:

1. Levar o participante a aprender a manusear, de forma correta, as ferramentas do *Software* Geogebra que estaremos utilizando com alta frequência nas atividades dos demais blocos.
2. Realizar construções geométricas básicas com o *software*.
3. Trabalhar com as preliminares para a Geometria do Compasso.

Atividade 1: Encontrar um terceiro ponto equidistante de dois pontos dados.

Tipo de atividade: Atividade individual.

Conhecimentos prévios: Conhecer o sistema operacional Windows, Linux ou qualquer outro que tenha o *Software* GeoGebra instalado; conhecer a janela inicial do GeoGebra e as ferramentas apresentadas anteriormente.

Objetivo da atividade: Encontrar um ponto equidistante a dois pontos dados e familiariza-se com as ferramentas, *Compasso* e *Interseção de Dois Objetos*, do *software* GeoGebra.

Procedimentos:

1. Esconda os eixos. Para isto, clique com o botão direito do mouse na janela de visualização, em seguida clique na opção *Eixos*.

2. Na barra de ferramentas, no 2º ícone, selecione a ferramenta, *Ponto* e marque os pontos *A* e *B*. Para isto, clique na janela de visualização, marcando o ponto *A*, em seguida clique a direita de *A* (com certa distância), marcando o ponto *B*.

3. Na barra de ferramentas, no 6º ícone, selecione a ferramenta, C*ompasso* . Em seguida, clique nos pontos *A* e *B* para abrir o arco desejado e depois no ponto *A*, para marcar o centro. Assim terá construindo a circunferência com centro *A* e raio *AB*.

4. Na barra de ferramentas, no 6º ícone, selecione a ferramenta *Compasso* . Em seguida clique nos pontos *A* e *B*, depois no ponto *B*. (Você construiu uma circunferência de raio *AB* com centro em *B*).

5. Na barra de ferramentas, no 2º ícone, selecione a ferramenta I*nterseção de Dois Objetos* , clique na circunferência de centro *A* e em seguida na circunferência de centro *B*, nomeie os pontos das interseções superior e inferior com as letras *C* e *c*[5] respectivamente. Para isso, clique com o botão direito do mouse no ponto *D* e em seguida clique na opção renomear para *c*.

Reflexões/Investigando:

a) Como podemos utilizar as ferramentas do GeoGebra para verificar que o ponto *C* é equidistante dos pontos *A* e *B*? Que ou quais ferramenta(s)

5 Mascheroni, em suas construções, não utiliza a nomenclatura atual para marcação de pontos, com apenas letras maiúsculas. Em suas construções são utilizadas letras maiúsculas e minúsculas para nomear pontos.

pode(m)-se usar? Que conteúdo matemático está relacionado a esta garantia?

b) Qual a justificativa matemática para o ponto *C* ser equidistante dos pontos *A* e *B*?

c) Mova o ponto *A* ou *B* e verifique se esta propriedade de igualdade não se altera. Por quê?

d) Há outro ponto equidistante a *A* e *B*? Por quê?

Atividade 2: Encontrar um ponto *D* pertencente a uma circunferência de raio com uma unidade *AB*[6] e centro *A* de modo que a medida de *BD* seja igual a .

6 Mascheroni usa $\overline{AB}AB$ para segmento diferente da usual $\overline{AB}$.

Tipo de atividade: Atividade individual

Conhecimentos prévios: Conhecer o sistema operacional Windows, Linux ou qualquer outro que tenha o *Software* GeoGebra instalado e conhecer a janela inicial do GeoGebra.

Objetivo da atividade: Encontrar uma corda de medida , na circunferência, bem como, familiarizar-se com as ferramentas, *Compasso* e *Interseção de Dois Objetos*, do *software*.

Procedimentos:

1. Esconda os eixos. Para isto, clique com o botão direito do mouse na janela de visualização, em seguida clique na opção *Eixos*.
2. Na barra de ferramentas, no 2º ícone, selecione a ferramenta, *Ponto* e marque os pontos *A* e *B*. Para isto, clique na janela de visualização, marcando o ponto *A*, em seguida clique a direita de *A*, marcando o ponto *B*.
3. Na barra de ferramentas, no 6º ícone, selecione a ferramenta C*ompasso* e altere a cor da ferramenta. Para isto, na barra de estilo da janela de visualização, clique na opção, Cor e Transparência, e selecione a cor Cíano. Em seguida, clique nos pontos *A* e *B* (para abrir o arco), depois no ponto *A* (assim terá construindo a circunferência com centro *A* e raio *AB*).
4. Na barra de ferramentas, no 6º ícone, selecione a ferramenta *Compasso* . Como antes, altere a cor

da ferramenta para preto. Em seguida clique nos pontos *A* e *B* (abertura do compasso), depois no ponto *B*. (Você construiu uma circunferência de raio *AB* com centro em *B*).

5. Na barra de ferramentas, no 2º ícone, selecione a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* , clique na interseção superior entre a circunferência de centro *A* e a circunferência de centro *B*, marcando o ponto da interseção com a letra *C*. (geralmente automático).

6. Na barra de ferramentas, no 6º ícone, selecione a ferramenta *Compasso* . Clique novamente nos pontos *A* e *B*, em seguida clique no ponto *C*. (Você construiu uma circunferência de raio *AB* com centro em *C*).

7. Na barra de ferramentas, no 2º ícone, selecione a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* , clique na interseção (que está à esquerda, que é a que não está marcada) entre a circunferência de centro *A* e a circunferência de centro *C*, obtendo o ponto *D*.

8. Na barra de ferramentas, no 6º ícone, selecione a ferramenta *Compasso* . Clique novamente nos pontos *A* e *B,* em seguida clique no ponto *D*. (Você construiu uma circunferência de raio *AB* com centro em *D*).

9. Na barra de ferramentas, no 2º ícone, selecione a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* , clique na interseção (que está à esquerda, que é a que não está marcada) entre a circunferência de centro *A*, e a circunferência de centro *D*, obtendo o ponto *E*.

Reflexões/Investigando:

a) Como podemos garantir, com o GeoGebra, que *BE* é diâmetro da circunferência de centro *A*?

_____
_____
_____
_____

b) Agora, acione conteúdos matemáticos que permitam mostrar isso sem o Geogebra.

_____
_____
_____
_____

c) Com o GeoGebra, prove que o segmento *BD* tem medida e descreva suas conclusões.

_____
_____
_____
_____

O Bloco II que segue é intitulado *Divisões da circunferência* e inspirado no livro II nomeado por *Da divisão da circunferência e de arcos de círculo* da obra de Mascheroni.

Bloco II: Divisões da circunferência

Este bloco é composto por 4 atividades que inicializam o estudo dos problemas da *Geometria do Compasso*.

Objetivos deste bloco de atividades:

1. Verificar que é possível dividir uma circunferência em partes iguais, utilizando apenas as ferramentas, *Compasso* e *Interseção de Dois Objetos*, do *Software* GeoGebra.
2. Identificar a necessidade da construção de circunferências de mesmo raio para garantir a divisão de uma circunferência em partes iguais.

Atividade 1: Divisão de uma circunferência em seis partes iguais.

Tipo de atividade: Atividade individual

Conhecimentos prévios: Saber manusear as ferramentas *Compasso* e *Interseção de Dois Objetos*, do *Software* GeoGebra. Conhecer a definição: "polígono regular, polígono cujas medidas dos lados entre si, e as medidas dos ângulos também são iguais entre si" (RIBEIRO, 2009, p. 277).

Objetivos da atividade:

1. Verificar que é possível dividir uma circunferência em partes iguais, utilizando apenas as ferramentas *Compasso* e *Interseção de Dois Objetos*, do *Software* GeoGebra.
2. Identificar a necessidade da construção de circunferências de mesmo raio, para garantir a divisão de uma circunferência em partes iguais.

3. Construir e dividir uma circunferência de raio *AB* em seis partes iguais.

Procedimentos: Com o *Software* GeoGebra e com as ferramentas indicadas a seguir execute os seguintes passos.

1. Esconda os eixos da janela de visualização.
2. Construa duas circunferências de raio *AB* com centro em *A* e *B*.
3. Destaque a circunferência de centro *A* com a cor Cíano. Para isto, clique na circunferência de centro *A*, em seguida clique, no 3º ícone, da barra de estilo, *Cor e Transparência*, selecione a cor Cíano.
4. Marque as interseções superior e inferior entre as circunferências de centro *A* e centro *B*, nomeie com as letras *C* e *c*, respectivamente.
5. Construa uma circunferência de raio *AB* com centro em *C*.
6. Marque a interseção (que está à esquerda, que é a que não está marcada) entre as circunferências de centro *A* e centro *C* e nomeie com a letra *D*.
7. Construa uma circunferência de raio *AB* com centro em *D*.
8. Marque a interseção (que está à esquerda, que é a que não está marcada) entre as circunferências de centro *A* e centro *D* e nomeie com a letra *E*.

Atenção: Observe que nosso objetivo é chegar à divisão da circunferência em seis partes. Já dividimos a circunferência de raio *AB* e centro *A* em 6 partes iguais? Caso sim, justifique e, caso não, pelo que já foi realizado nesta construção, o que pode ser feito para isso ocorrer?

_____
_____
_____
_____

1. Construa uma circunferência de raio *AB* com centro em *E*.
2. Marque a interseção (que está a inferior, pois é a que não está marcada), entre as circunferências de centro *A* e centro *E*. Depois, nomeie-a com a letra *d*.

Reflexões/Investigando:

a) O que são polígonos regulares? Com os pontos encontrados na construção anterior é possível construir polígonos regulares? Se possível, indique qual(is) verificando com o Geogebra. Caso não, justifique.

_____
_____
_____
_____

b) Quais subdivisões da circunferência estão presentes na construção realizada?

_____
_____
_____
_____

Atividade 2: Divisão da circunferência em quatro partes iguais.

Tipo de atividade: Atividade individual

Conhecimentos prévios: Saber manusear as ferramentas *Compasso* e *Interseção de Dois Objetos*, do *Software* GeoGebra.

Objetivo da atividade: Dividir uma dada circunferência em quatro partes iguais.

Procedimentos: Retornemos a construção realizada anteriormente. (com o mesmo arquivo anterior).

1. Usando a ferramenta *Exibir Objeto*, esconda as circunferências que foram construídas para executar a divisão em seis partes iguais. (Sugestão: utilize a janela de álgebra ou o botão direito do mouse).
2. Construa duas circunferências de raio *BD*, centradas nos pontos *B* e *E*. (destaque as circunferências construídas com esta abertura, com a cor azul).
3. Tome o ponto de interseção superior entre as novas circunferências. Nomeie a interseção com letra *a*.

4. Construa uma circunferência centrada em *B* com raio *Aa*. (destaque a circunferência construída com esta abertura, com a cor vermelha).

5. Marque os pontos de interseção entre esta nova circunferência e a circunferência centrada em *A*. Nomeie as interseções com letras *F* e *f*.

Reflexões/Investigando:

a) Temos 4 pontos que dividem a circunferência centrada em *A* em 4 partes iguais? Caso sim, quais são esses pontos? Caso não, justifique.

_____

_____

_____

_____

Recorte Histórico:

Problema: Dividir a circunferência do circulo em quatro partes iguais (fig. 9).

Solução: Na mesma circunferência se faça para o raio com o primeiro compasso (§ 10, 8). Será (15, liv. 4). Se faça para com o segundo compasso; e com o terceiro compasso. A circunferência terá sido dividida em quatro partes iguais .

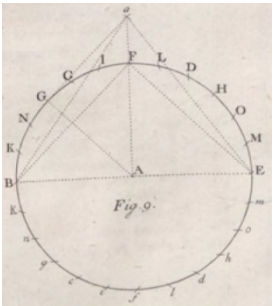


Figura 3 – fig. 9 da primeira edição de 1797.
Fonte: Mascheroni Dell'Omo (1797, p. 265)

Demonstração. Sendo um diâmetro (15, liv. 4); e tendo os triângulos , todos os lados iguais, (e já que são iguais os ângulos) mas ângulos iguais a, (8, liv. 1); eles serão retos (13, liv. 1). Portanto (47, liv. 1); e subtraindo (de ambos os lados tem-se). Você pode fazer isso por causa do fato de que; assim (§ 2). Será, portanto , e, portanto, também . Assim, no triângulo o ângulo será reto (48, liv. 1), e daí também (uma consequência) o ângulo (13, liv. 1). Serão, portanto, os arcos , iguais entre eles, e cada um deles será um quarto de círculo, bem como os arcos.

a) De posse da construção e da obra de Mascheroni (observe o trecho anterior), redija uma justificativa utilizando conceitos matemáticos que respaldam a veracidade da mesma, ou seja, que garantem que dividimos a circunferência em quatro partes iguais.

_____
_____
_____
_____

b) Na construção de seu argumento, o teorema de Pitágoras lhe dá contribuições para fazer alguma afirmação? Se sim, quais?

_____
_____
_____
_____

c) Estudando a demonstração do Mascheroni, quais conceitos e resultados da Geometria Plana podem ser localizados?

_____
_____
_____
_____

Atividade 3: Divisão de uma circunferência em doze partes iguais.

Tipo de atividade: Atividade individual.

Conhecimentos prévios: Saber manusear as ferramentas *Compasso* e *Interseção de Dois Objetos*, do *Software* GeoGebra.

Objetivo da atividade: Dividir uma dada circunferência em doze partes iguais.

Procedimentos: Retornemos a construção realizada anteriormente para divisão da circunferência em quatro partes iguais. Daremos os novos passos para executarmos a divisão da mesma circunferência em doze partes iguais. Primeiro, utilizemos um artifício de esconder objetos no GeoGebra para deixarmos a construção anterior apenas com a circunferência de centro A e os pontos *B* , *C*, *D*, *E*, *F*, *c*, *d*, *f* e *a* que foram determinados pelas interseções das circunferências na construção anterior.

1. Usando a ferramenta *Exibir Objeto*, esconda as circunferências que foram construídas para executar a divisão em quatro partes iguais. (Sugestão: utilize a janela de álgebra ou o botão direito do mouse).

Reflexões/Investigando:

a) Antes de prosseguirmos com a nova construção, será que na atual construção já existe algum arco que tenha medida de $\frac{1}{12}$ do comprimento da circunferência? Caso sim ou não, justifique.

_____

_____

_____

_____

1. Com o primeiro compasso de medida *AB*, construa uma circunferência centrada no ponto *a*.
2. Marque as interseções entre a nova circunferência e a circunferência centrada em *A*. Nomeie os pontos com as letras *G* e *H*. (De modo que *G* fique a direita de *H*).

3. Com o terceiro compasso de medida *Aa*, (alterando a cor da ferramenta para vermelha) construa duas circunferências centrando-as nos pontos *G* e *H*.

4. Marque as interseções (não marcadas) destas duas novas circunferências com a circunferência centrada em *A*. Nomeie os pontos com as letras *g* e *h*. (De modo que *g* fique a direita de *h*).

5. Com o primeiro compasso, de medida *AB*, construa uma circunferência e centre-a no ponto *F*.

6. Marque as interseções entre a nova circunferência e a circunferência de centro *A*. Nomeie os novos pontos de interseção com os pontos *N* e *O*. (De modo que *N* fique a direita de *O*).

7. Com o primeiro compasso, de medida *AB*, construa duas circunferências centradas em *N* e *O*.

8. Marque as interseções (não marcadas) entre as duas novas circunferências e a circunferência de centro *A*. Nomeie os pontos de interseção com *n* e *o*.

Recorte Histórico:

Problema: Dividir a circunferência em doze partes iguais.

Solução: Nestas circunstâncias, como no § 27 fig. 9, (ver imagem 3) fazer $AB = FN = Nn = FO = Oo$. A circunferência estará dividida em doze partes iguais nos pontos *B, N, C, F, D, O, E, o, d, f, c, n*.

Demonstração: Sendo retirados os arcos *BC, DE* dos arcos arcos *BF, FE;* que permanecem CF, FD serão iguais. Sendo então *CD* a sexta parte da circunferência (§ 29); será *CF* sua

metade, ou seja $\frac{1}{12}$. Será ainda $CF = CN$ por causa de $FN = CD$; assim também $CN = NB$ por causa de $FN = CB$. E, do mesmo modo se demonstrara que todas as outras partes da circunferência são a décima segunda parte.

Reflexões/Investigando:

a) Elabore uma justificativa para a subdivisão em doze partes presente na atual construção, observando a demonstração dada por Mascheroni para tal construção.

_____

_____

_____

_____

b) Na construção podemos destacar alguma outra divisão em partes iguais da circunferência de centro *A*? Caso sim, quais são os pontos desta outra divisão? Caso não, por quê?

_____

_____

_____

_____

Atividade 4: Divisão de uma circunferência em cinco partes iguais.

Tipo de atividade: Atividade individual.

Conhecimentos prévios: Saber manusear as ferramentas *Compasso* e *Interseção de Dois Objetos*, do *Software* GeoGebra.

Objetivo da atividade: Dividir uma dada circunferência em cinco partes iguais.

Procedimentos: Para realização desta atividade tomaremos a construção da divisão da circunferência em doze partes iguais. (ver arquivo anterior).

1. Usando a ferramenta *Exibir Objeto*, esconda as circunferências que foram construídas para executar a divisão em doze partes iguais. (Sugestão: utilize a janela de álgebra ou o botão direito do mouse).
2. Com o terceiro compasso de medida *Aa*, (cor vermelha) construa duas circunferências centrando-as nos pontos *N* e *O*.
3. Marque o ponto de interseção inferior entre as duas novas circunferências, que está interno a circunferência de centro *A*. Nomeie este ponto de interseção com a letra *b*.
4. Com a ferramenta *Compasso*, construa uma nova circunferência de raio *Bb*, que representará nosso *quarto compasso* (cor verde). Centre esta circunferência no ponto *B*.
5. Marque os pontos de interseção, superior e inferior, entre a nova circunferência e a circunferência de centro *A*. Nomeie os pontos de interseção, superior e inferior, com as letras *Q* e *q*, respectivamente.
6. Com o quarto compasso de medida *Bb*, (cor verde) construa uma nova circunferência e centre-a no ponto *Q*.

7. Marque a interseção (que está à esquerda, que é a que não está marcada) entre a nova circunferência e a circunferência de centro *A*. Nomeie a interseção com a letra *S*.

8. Com o quarto compasso de medida *Bb*, (cor verde) construa uma circunferência e centre-a em *S*.

9. Marque a interseção inferior entre a nova circunferência e a circunferência de centro *A*. Nomeie o ponto de interseção com a letra *s*.

Reflexões/Investigando:

a) Notemos que a circunferência de centro A encontra-se dividida em cinco partes iguais nos pontos *B, Q, S, s e q*. De que maneira podemos verificar, através do GeoGebra, a veracidade desta construção? Justifique?

_____
_____
_____
_____

b) Que outras divisões da circunferência podem ser deduzidas com os pontos encontrados até esta construção?

_____
_____
_____
_____

Recomendações e notas informativas

No que diz respeito ao Bloco II de atividades temos que atentar para o detalhe de que, na Geometria do Compasso, não utilizamos a régua e, por este motivo, estamos impedidos de a traçarmos. Contudo, segundo Mascheroni, para ter/definir uma reta não é necessário que tenhamos que traçá-la, mas apenas conhecermos dois de seus pontos, que poderão ser determinados apenas com o auxílio do compasso. De fato, com dois pontos, por exemplo, definimos uma reta que passa por eles. Vale esclarecer que um segmento de reta também é determinado a partir de seus dois pontos extremos, sem que seja necessário traçá-lo. Assim, para Mascheroni dois pontos definem uma reta e um segmento de reta, mas a diferença está no fato que a primeira passa por eles e a segunda inicia e termina neles.

Outro detalhe relevante é que a *Geometria do Compasso* apresenta conceitos diferentes da Geometria Euclidiana para polígonos. Assim, enquanto que na Euclidiana um polígono é definido como sendo uma figura formada pelos seus lados e seus ângulos, na Geometria de Mascheroni, o polígono estará determinado quando forem conhecidos todos os pontos de seus vértices. Por exemplo, para Euclides o triângulo é um polígono fechado formado por três lados e três ângulos, para Mascheroni basta conhecermos os três vértices (três pontos não colineares), para que possamos dizer que temos um triângulo.

De modo geral, estas diferenças surgem pelo fato de que em tal Geometria, tudo se resume a pontos (em função do uso exclusivo do compasso).

Outro ponto importante neste segundo bloco consiste no fato que, ao realizarmos as construções deste bloco, no-

tamos que Mascheroni não segue as regras de notações para denominação de pontos, pois ele utiliza letras minúsculas para denominar pontos, enquanto que nos dias atuais é recomendado que se utilize letras maiúsculas, porém devemos levar em consideração o fato de que no século XVIII não se existiam tais regras de normatização.

Na atividade 2 do Bloco II, verificamos a inserção de um recorte histórico que apresenta um trecho da obra de Mascheroni, usado como auxílio nas investigações propostas isto porque consideramos que um dos pontos de destaque da *Geometria do Compasso* está evidenciado quando estudamos suas demonstrações. De fato, neste momento Mascheroni faz uso de todo e qualquer resultado (que lhe seja necessário para garantir a veracidade de suas construções em demonstrações que seguem um fino rigor algébrico) presente em *Os Elementos* de Euclides.

Por fim, destacamos que Mascheroni, em sua obra, não apresenta todas as divisões possíveis de frações unitárias de arcos de circunferência e que, ao final da atividade 4 do segundo Bloco, os alunos são levados a fazer descobertas de resultados não contidos na obra pois podem identificar alguns arcos que possibilitam realizar divisões da circunferência em outras partes iguais diferentes das que são indicadas na obra, por exemplo, a divisão da circunferência em 30 partes iguais. Aludimos isto ao fato do *software* potencializar as descobertas/investigações em função da não necessidade de repetir os passos já executados em atividades anteriores, mas em maior quantidade, e, além disso, ser possível observar uma construção já pronta sendo reproduzida passo a passo e não apenas o resultado final, dando tempo para levantamento de inferências juntamente com aprofundamento da obra e aspectos da

própria Matemática. Aliás, vale observar que desejamos neste trabalho ir além do conhecimento da *Geometria o Compasso* e apresentar mais sobre a própria Matemática, particularmente no tocante a realização de construções geométricas e a Matemática envolta germinada especialmente pela restrição do instrumento, que implica em construções mais delongadas, contudo, com mais aspectos matemáticos acionados para sua garantia e que vão além da própria Geometria.

Referências

BORBA, Marcelo de Carvalho. **Softwares e internet na sala de aula de matemática**. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10., 2010, Salvador. Anais... Salvador: Universidade Católica do Salvador, 2010.

DELL'OMO, Lorenzo Mascheroni. **La Geometria del Compasso.** 2 ed. Palermo: era nova, 1901.

_____. **La Geometria del Compasso.** ed. Pavia ano V della Repubblica Francesa, 1797.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria A. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PONTE, João Pedro da; BROCADO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

RIBEIRO, Jackson da Silva. **Projeto radix:** matemática, 9º ano. São Paulo: Scipione, 2009.

CAPÍTULO 03

HISTÓRIAS EM QUADRINHOS E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: UMA RELAÇÃO POSSÍVEL

Luis Adolfo de Oliveira Cavalcante
Wellington Lima Cedro

Fundamentados nas ideias da Teoria Histórico Cultural (THC) emergente do Materialismo Histórico Dialético (MHD) proposto por Marx, acreditamos que o conhecimento é o resultado social e histórico das relações que o homem estabelece com/sobre a natureza. Nesta perspectiva, a aprendizagem se dá em uma dimensão social, na qual, o sujeito apreende mediado pelas ferramentas criadas pelos seus antepassados.

No meio educacional não é diferente. São inúmeras as possibilidades de ferramentas pedagógicas que o professor pode fazer uso para contribuir para a aprendizagem dos estudantes. Uma destas ferramentas são as histórias em quadrinhos (HQ).

Diversos autores têm dedicado suas pesquisas a compreender as contribuições das HQ ao processo educacional. Autores como Acevedo (1990), Araújo; Costa e Costa (2008), Cirne (1970), Luyten (1985a, 1985b, 1985c, 2000) e Vergueiro (2012), têm, ao longo dos anos, demonstrado possibi-

lidades interessantes para o uso das histórias em quadrinhos com fins educacionais. Estas possibilidades perpassam por elementos como o aumento da motivação do estudante (TONON, 2009) e, um pouco mais específico ao conhecimento matemático, estimular o raciocínio lógico e imaginação do leitor (ARAUJO; COSTA; COSTA, 2008).

Contudo, apesar das pesquisas sobre a utilização das HQ em âmbito educacional crescerem ao longo dos anos, isto não se reflete em um processo de formação de professores que possibilite aos docentes trabalharem com esta ferramenta. Nesta perspectiva, torna-se de grande importância oferecer ao professor a possibilidade de apropriar-se deste instrumento, proporcionando-lhe os conhecimentos tanto teóricos quanto práticos para a implementação de uma proposta pedagógica que faça uso dos elementos dos quadrinhos.

Visando possibilitar a professores a utilização de histórias em quadrinhos em sala de aula, realizamos um curso de formação com educadores matemáticos da Educação Básica do município de Goiânia. Este curso foi realizado durante uma investigação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, tendo como produto a dissertação intitulada "No dia mais claro: um estudo sobre o sentido atribuído às histórias em quadrinhos por professores que ensinam matemática em formação"[1].

Nesta perspectiva, este capítulo tem por objetivo, relatar parte das experiências vividas durante este curso de formação. Mais especificamente, focaremos em como os professores

1 CAVALCANTE, L. A. de O. No dia mais claro: um estudo sobre o sentido atribuído às histórias em quadrinhos por professores que ensinam matemática em formação. Dissertação – Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

se preocuparam em abordar o conhecimento matemático nas histórias em quadrinhos produzidas durante o curso.

Uma problemática emergente: a formação de professores

Percebendo a carência que o professor tem em sua formação inicial em trabalhar com as HQ, organizamos e planejamos um curso que possibilitasse a um grupo de 12 professores que ensinam matemática[2], participantes de um projeto intitulado "Observatório de Educação (OBEDUC)", as condições necessárias para incorporar as HQ à sua prática pedagógica. Escolhemos este grupo de professores, pois eles têm como foco de estudo semanal textos que corroborem com as ideias da THC. Isso não implica que os encontros do grupo têm como objetivo o aprofundamento nas teorias vygotskya (nem tão pouco marxistas), mas que, na condução de suas atividades, são realizados recortes que vão ao encontro destas teorias.

Assim, acreditamos que por estes professores estarem estudando frequentemente sobre a THC, e elaborando atividades segundo os ideais de processo educacional abordados dentro desta teoria, nosso trabalho seria pautado em como inserir as HQ neste processo. A escolha de outros sujeitos para a pesquisa poderia até comprometer a pesquisa, ao passo que o tempo que gastamos na discussão de "como se inserir as HQ no processo educacional?", poderia repousar primeiro em "de que processo educacional estamos falando?" ou "quais são os objetivos do processo educacional?".

2 O termo "professores que ensinam matemática" vem do fato de que nem todos os professores eram formados em matemática. Alguns dos professores eram pedagogos e o grupo ainda contava com um professor de física. No entanto, todos trabalham com matemática no contexto escolar.

Deste modo, o curso foi construído para estes participantes, que estudam sobre a THC, que discutem uma educação matemática voltada para a humanização e que oportunize ao sujeito se inserir e intervir criticamente na sociedade na qual estão inseridos.

Analisando as competências e reflexões necessárias para a construção de uma HQ que trate do conhecimento matemático, estimamos oito encontros (um encontro por semana) com duração de duas horas cada um. Entretanto, na estruturação do curso, percebemos que haviam eixos temáticos que se complementavam. Optamos então por condensar os encontros dois a dois, com exceção dos dois últimos encontros, sendo os oito encontros realizados em cinco semanas. O curso, para os professores participantes, teve como objetivo a produção de HQ para uso em suas práticas educacionais.

Para isso, o curso foi baseado tanto em atividades teóricas quanto práticas. Dessa forma, julgamos ser importante a discussão e a reflexão do processo educacional que queremos e sobre os elementos das Histórias em Quadrinhos, suas particularidades, potencialidades e limitações, tanto quanto sua produção segundo a visão de educação/matemática discutida.

Para atingirmos estes objetivos, ao longo do curso foi solicitado que os 12 participantes se dividissem em 4 grupos, cada um com 3 integrantes. Ao final do curso, pelo menos um dos participantes de cada grupo deveria aplicar a HQ produzida em suas práticas educacionais. Para ser possível a produção destas HQ, organizamos o curso da seguinte forma:

1ª semana – 1º e 2º encontro: Foi realizada uma discussão sobre como o conhecimento matemático é tratado nas HQ. Buscávamos uma conscientização no tocante da superação de uma produção de HQ em que uma personagem aparecesse apenas falando sobre um determinado conceito matemático, sem a preocupação de construir uma história, trabalhar a personalidade e o contexto das personagens. Sob este aspecto, refletimos com os professores sobre o que as histórias em quadrinhos podem acrescentar a mais do que os livros didáticos e as aulas conceituais.

2ª semana – 3º e 4º encontro: Propomos aos professores uma reflexão sobre os elementos que compõem as HQ. Nas concepções deles, percebemos dois tipos de elementos (os pré-textuais e os gráficos). Assim, nesta 2ª semana, conceituamos os elementos pré-textuais – roteiro, argumento e *storyboard*. Foi solicitado que os professores organizassem os grupos, e cada grupo produzisse um roteiro de uma HQ que envolvesse o conhecimento matemático.

3ª semana – 5º e 6º encontro: Nesta semana foi debatido sobre os elementos gráficos – requadro, calha, desenho, balão e recordatório e letras. Foram criadas conceituações para cada um destes elementos. Nesta semana os professores começaram a produzir suas histórias em quadrinhos.

4ª semana – 7º encontro: Esta semana foi separada para que os professores produzissem suas HQ, com base no roteiro elaborado na 2ª semana. Assim, os grupos se reuniram para discussão de suas histórias e produção das HQ.

5ª semana – 8º encontro: O último encontro foi realizado para que houvesse uma apresentação das HQ produzidas pelos grupos. Tínhamos o intuito de discutir se cada história conseguiria atingir seu objetivo educacional, servindo para reflexão dos alunos e aprendizagem significativa do conhecimento matemático.

Com esta formatação, os participantes realizaram atividades que os levaram a refletir sobre a importância dos elementos pré-textuais e gráficos das HQ. Planejamos atividades em que os participantes sentiam a necessidade destes elementos, para, posteriormente, formalizá-los. Esta ideia de elaboração do curso está pautada nos conceitos de desenvolvimento humano segundo a THC. Isso se deve ao fato de que acreditamos que quando uma determinada situação é criada por meio de uma necessidade, faz-se emergir um sentido para a realização de ações para a solução desta situação.

A necessidade, neste caso, era trabalhar o conhecimento matemático de forma significativa. Assim, durante o curso, percebemos que um dos sentidos apresentados pelos professores foi como tratar o conhecimento matemático nas HQ, ou seja, como trabalhar o conhecimento matemático em suas histórias de forma que pudesse contribuir para reflexões por parte do aluno, proporcionando um conhecimento realmente

significativo. Estudamos este sentido atribuído pelos professores como: o conhecimento matemático nas HQ. A seguir apresentamos como o conhecimento matemático surgiu nos discursos dos professores, e como foi tratado nas HQ produzidas por cada grupo.

O conhecimento matemático nas HQ

O professor tem como papel social possibilitar ao aluno o aprendizado da cultura e formas de intervir, ressignificar e transformar o mundo que o cerca. Assim, o docente deve fornecer as ferramentas necessárias para que os estudantes tenham um aprendizado significativo, desenvolvendo modos de pensar criticamente, sendo capazes de desenvolver competências como argumentar, resolver problemas e relacionar os conceitos trabalhados em sala de aula a uma realidade concreta (LIBÂNEO, 2004; NUNES, 2000).

Estas concepções de como trabalhar em prol de um aprendizado realmente significativo permeou os discursos dos participantes ao longo do curso. Logo no primeiro encontro, disponibilizamos aos participantes histórias em quadrinhos diversas que pudessem ser utilizadas em contexto educacional. Nesta perspectiva, tentamos fazer com que os participantes do curso refletissem sobre a forma como os conceitos escolares são tratados nas histórias em quadrinhos, e se esta forma de tratamento poderia contribuir para o aprendizado de qualidade dos estudantes. Além disso, julgamos importante também que eles já tivessem uma ideia de como abordar o conhecimento matemático nas HQ, de forma que corroborassem com os ideais de educação debatidos e defendidos pelo grupo.

Com a dinâmica proposta neste primeiro encontro, alguns participantes passaram a acreditar que seja significativo que os próprios professores construam suas HQ, pois ele já tem em mente os seus objetivos de ensino, podendo construir suas histórias baseadas nestes objetivos. Além disso, o professor ainda pode escolher como trabalhar os conceitos dentro da história, ou seja, se apresenta os conceitos para os estudantes de forma pronta ou se faz com que o aluno reflita na construção deste conceito.

Com base nessa concepção, emergiram também a ideia de que da forma como as histórias em quadrinhos vêm sendo utilizadas por livros didáticos, provas e demais elementos educacionais não há uma conexão entre a história e os conteúdos da matéria. Dessa forma, é importante salientar que sem um trabalho de triagem adequado por parte do professor, é possível que o aluno receba o material e acredite em certas falácias contidas nas histórias, tomando uma visão de Ciência estereotipada e equivocada (PIZARRO, 2009).

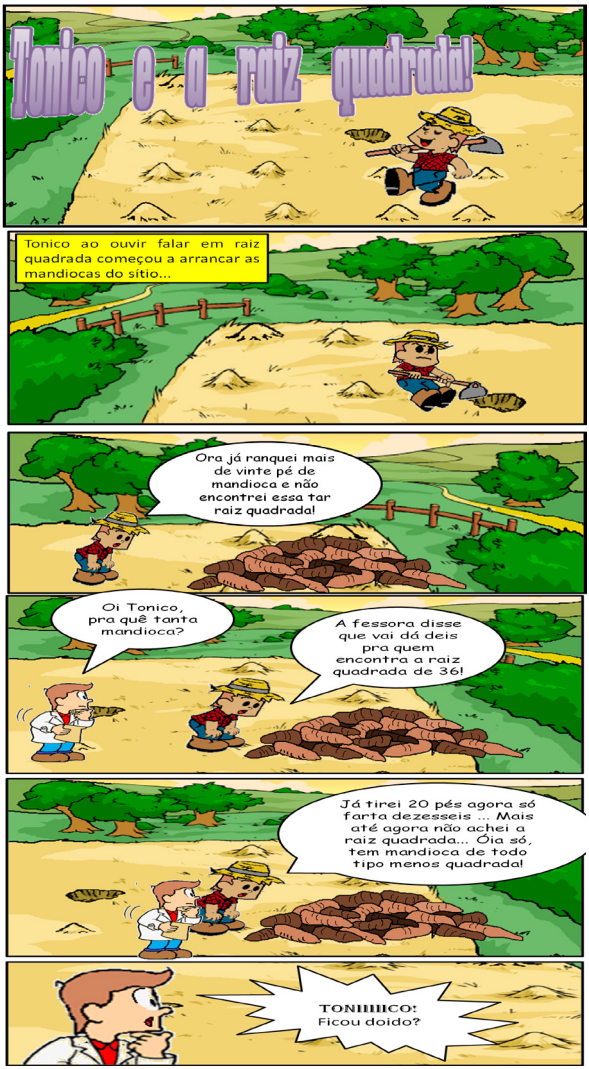
Assim, as histórias em quadrinhos colaboram para que os estudantes se relacionem com os conhecimentos tratados em ambiente escolar, podendo contribuir para construção, ampliação ou ressignificação de conceitos. Estas ideias estão em consonância com as ideias de Sforni (2003) que argumenta que os conhecimentos que o sujeito se depara em ambiente escolar devem oferecer novos significados sobre o mundo, ampliando sua percepção e modificando sua forma de agir e de pensar, contribuindo para sua humanização.

Dessa forma, as HQ´s podem contribuir positivamente para o processo de humanização dos sujeitos. Entretanto,

qualquer ferramenta de ensino deve ser bem planejada, pois se utilizadas sem o devido cuidado e triagem por parte do professor podem atrapalhar os alunos, passando-lhes determinadas visões que não refletem a realidade (chamaremos estas formas de utilização que podem atrapalhar o aluno de *utilização de forma equivocada*).

Esta utilização de forma equivocada pode reforçar uma série de hábitos ou concepções que não refletem a realidade. Podem ser passadas, por exemplo, visões deturpadas de ciência (como cientistas só aparecendo de jaleco, trabalhando sozinhos e sendo os detentores absolutos da verdade) ou visões estereotipadas de personagens (como sujeitos que usam óculos são mais inteligentes que os outros).

Durante o curso, uma das histórias em quadrinhos produzidas reforça figuras estereotipadas e alguns hábitos errôneos. Apesar de encontrarmos no discurso de todos os professores uma concepção de Educação Matemática que possa realmente contribuir para a formação integral do aluno, esta HQ não corresponde completamente a este ideário de educação. Na história em questão uma das personagens está estudando raiz quadrada na escola (figura 1). A professora passa uma tarefa, afirmando dar dez pontos para quem conseguir achar a raiz quadrada de 36. Tonico, um menino que vive na roça, vai para casa e arranca os pés de mandioca, em busca das 36 raízes quadradas. Eis que surge um amigo seu que sabe um pouco mais de matemática do que ele.


Tonico e a raiz quadrada!
Tonico ao ouvir falar em raiz quadrada começou a arrancar as mandiocas do sítio...
Ora já ranquei mais de vinte pé de mandioca e não encontrei essa tar raiz quadrada!
Oi Tonico, pra quê tanta mandioca?
A fessora disse que vai dá deis pra quem encontra a raiz quadrada de 36!
Já tirei 20 pés agora só farta dezesseis ... Mais até agora não achei a raiz quadrada... Óia só, tem mandioca de todo tipo menos quadrada!
TONIIIIICO! Ficou doido?

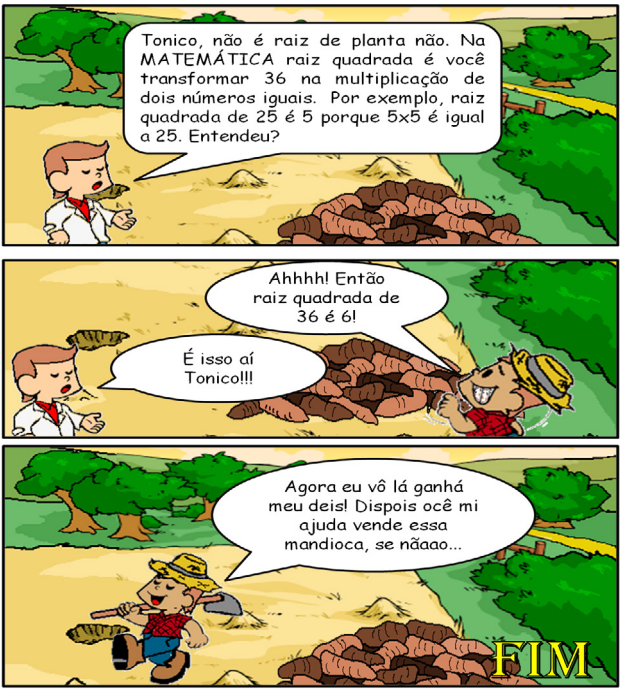


Figura 1: Tonico e a raiz quadrada.
Fonte: Os autores

O quadrinho "Tonico e a raiz quadrada" foi produzido por um grupo composto de duas professoras formadas em matemática e uma professora formada em pedagogia. Durante o curso, chamamos este grupo de Grupo 4. Os desenhos utilizados para a produção da história foram feitos pelo pesquisador, bastando apenas que os participantes compusessem cada quadrinho por meio de sobreposição de imagem.

Apesar de definir bem um contexto e dar uma interpretação para o conhecimento matemático, esta história não corrobora tanto com as teorias educacionais dentro THC, discutidas pelo grupo do OBEDUC. Isto ocorre pelo fato de não contribuir para a reflexão, pois apresenta uma ideia pronta, que é "passada" para o aluno, sobre raiz quadrada. A utilização em sala de aula fica restrita às aulas sobre este conteúdo.

Dessa forma, "Tonico e a raiz quadrada" reforça alguns hábitos errôneos. A transposição de um texto matemático (definição do conceito de raiz quadrada) para um balão de fala (na última página) fortalece nos estudantes algumas concepções de que para aprender matemática deve-se decorar e memorizar um conceito. Esta memorização garante que o aluno resolva um problema (como na história a personagem resolveu a raiz quadrada de trinta e seis) e alcance média máxima.

Além deste hábito, a história destaca dois estereótipos: a da pessoa de jaleco branco, reforçando o estereótipo daquele que detém o conhecimento (no caso o cientista) e o menino que vive na roça, reforçando o estereótipo de que o roceiro não tem conhecimento científico. O quadrinho pode ser utilizado em sala de aula, entretanto, o professor deve tomar o devido cuidado, discutindo estes elementos estereotipados, para que não contribua para o desenvolvimento de preconceitos na criança.

Neste sentido, a história apresenta elementos que devemos trabalhar para superar, tanto para que possamos oportunizar um aprendizado significativo, quanto para que a ciência seja vista de forma melhor pela comunidade. Uma ciência que seja feita coletivamente, cooperativamente e de forma dinâmica que reforce o aprendizado e não somente o decorar.

Lutamos pela superação deste tipo de história, pois o que acompanhamos em alguns casos é a utilização de forma equivocada das HQ. Luyten (1985c) argumenta que algumas histórias em quadrinhos, principalmente naquelas presentes em livros didáticos, vêm sendo fortemente influenciadas pelo caráter comercial, ocorrendo diversas distorções. Segundo a pesquisadora de quadrinhos, alguns dos elementos mais comuns nestas obras didáticas que utilizam HQ são: quadrinhos com excesso de texto e imagens muito chamativas em detrimento do conteúdo.

A autora ainda discute que esta prática tem apenas dado uma nova roupagem para velhas imagens. Assim, é comum acontecer casos em que textos matemáticos são transportados para balões sem nenhuma adaptação. Alguns livros didáticos, por exemplo, utilizam-se de personagens e balões (um tipo de linguagem que remete às Histórias em Quadrinhos), mas o que se faz é transportar um texto matemático ou lançar perguntas que nada têm a ver com o contexto para o balão. Encontramos um exemplo disso na coleção *Matemática e Realidade*, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado[3] (Figura 2):

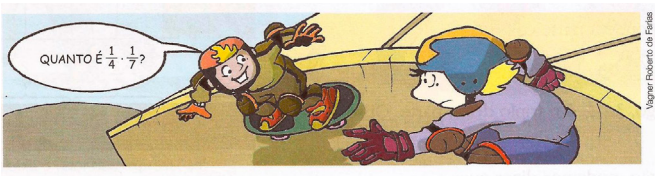


Figura 2 - Quadrinhos e livros didáticos.
Fonte: Iezzi; Dolce; Machado (Editora Atual. 2009, p. 184) 6º ano.

3 Não questionamos a forma como o conhecimento matemático é abordado no livro, pois os autores se esforçam bastante em contextualizar os conceitos. Questionamos apenas a forma de utilização da linguagem das HQ.

O livro em questão traz, a todo momento, referências às histórias em quadrinhos como na situação exposta anteriormente. Entretanto, não há um cuidado em tratar o conhecimento, apenas de deixar o conteúdo mais atrativo por meio dos desenhos. Percebemos, tomando-se por base este exemplo, que as histórias em quadrinhos, apesar de serem um elemento que pode contribuir positivamente para as aulas de matemática, e em âmbito mais geral na educação como um todo, utiliza-se este recurso se preocupando apenas em atribuir aos conceitos matemáticos um visual mais agradável ao aluno. Defendemos o uso de HQ como algo contribuinte para o desenvolvimento da imaginação, leitura, raciocínio lógico, criticidade e autonomia.

Sob esta ótica, Vergueiro (2012) argumenta que a utilização das HQ como forma de relaxar ou de descansar dos livros didáticos, quadro e giz, lista de exercícios e outros materiais vistos como mais nobres, aos olhos de alguns profissionais, pode levar a resultados opostos aos previstos inicialmente. A utilização como forma de descanso pode contribuir para a criação de uma barreira de leitura das HQ por parte dos alunos, na medida em que esta ferramenta vai ser compreendida como um elemento que não favorece o estudo, mas apenas o descanso.

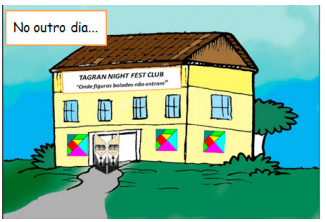
Esta postura adotada por nós foi compartilhada pelos participantes do curso. Assim, ao longo do curso discutimos que, segundo nossa visão de educação, as HQ construídas não deveriam apresentar conceitos matemáticos prontos, mas fazer o aluno refletir para construir estes conceitos, entendendo a necessidade de sua criação e em quais contextos podem ser aplicados.

Uma das HQ produzidas durante o curso, “A festa do Tangran” (figura 3), apresenta esta característica. Apesar das personagens serem entes geométricos, os textos da HQ não tratam de forma explícita de conceitos referentes à geometria. Entretanto, em uma aula de matemática, o professor pode utilizar esta história para introduzir polígonos, classificando as personagens da história quanto ao número de lados.

São diversas as possibilidades de utilização dessa história em contexto educacional. A forma de utilização e os conteúdos explorados ficam à escolha do professor, dependendo dos objetivos de ensino tratados inicialmente.

Olha! É o Quadruto. Aí Quadruto, vamos para a festa no Tangram Club?
Festa? Sei lá. Não tem algo mais útil pra fazer não?

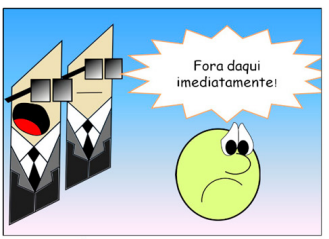
Como você é quadrado! É uma festa, diversão. Ou você não se diverte?
Tá legal! Então vamos para a festa amanhã!


No outro dia...
TAGRAN NIGHT FEST CLUB
"Onde figuras isósceles não entram"

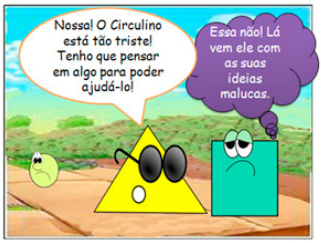
Olha lá galera! Tá rolando um som maneiro!
Beleza! Quero dançar muito!
Odeio essas músicas de festa!

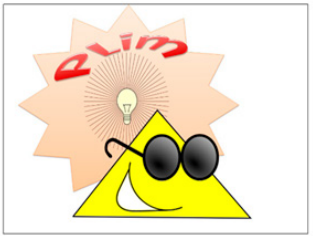
PARADO AÍ REDONDINHO!

Sabe ler não?! Aqui é festa pra quem pertence à família Tangram. Onde já viu figuras redondas no tangram?

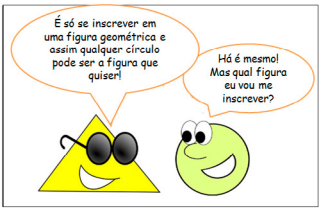

Fora daqui imediatamente!

Caramba! Nunca pensei que eu poderia ser excluído por ser redondo. Logo eu que fui adotado por uma família Tangram. Eu sempre quis ser uma figura como vocês!


Nossa! O Circulino está tão triste! Tenho que pensar em algo para poder ajudá-lo!
Essa não! Lá vem ele com as suas ideias malucas.


eUm

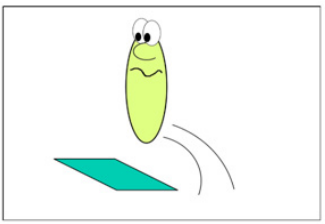
Espere Circulino. Eu tive uma ideia! Você pode sim ser uma figura como nós!
Como?! Não entendi.


É só se inscrever em uma figura geométrica e assim qualquer círculo pode ser a figura que quiser!
Há é mesmo! Mas qual figura eu vou me inscrever?

Que tal no nosso amigo Quadruto?!
Sobrou pra mim!
Vai cara... Dá uma ajuda!
Tá! Mas só dessa vez!

É só pular no Quadruto e coincidir o centro das duas figuras.
Como eu faço agora
Ixi. O gordinho vai pular em mim...

O que a gente não faz pelos amigos?!
Vamos Circulino! Pula logo!



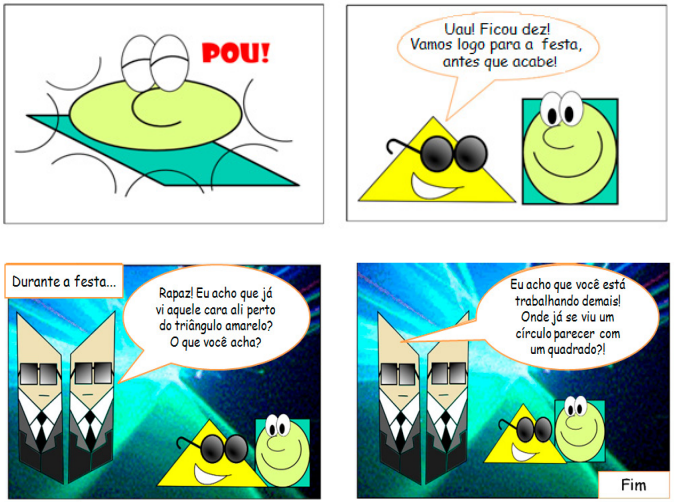


Figura 3: A festa do Tangram.
Fonte: Os autores

A história "A festa do Tangran" foi produzida por um grupo que chamamos de Grupo 2 que era composto de dois professores de matemática e um professor de física. Os participantes optaram por produzi-la tomando por base os seus próprios desenhos, sem nenhuma ajuda externa.

Graficamente, a HQ foi bem produzida, optando por traços mais básicos. Os textos nos balões, por outro lado, foram bem pensados, para que em nenhum momento atribuíssem respostas prontas para os estudantes, mas que fizesse com que eles refletissem sobre os conceitos matemáticos ao longo da história.

Além disto, o texto colabora para discussão de um tema que estava em voga na época de produção da história: o *bullying*. A discriminação por parte de uma maioria direcionada a uma minoria que não se encaixa nos padrões impostos pela sociedade é uma temática fortemente presente na história. "A Festa do Tangran"envolve alguns elementos presentes no cotidiano (como o *bullying*) e também estudos relativos à geometria, como por exemplo: propriedades de círculos, triângulos e quadriláteros; Tangran e suas possibilidades de montagem; inscrição e circunscrição, dentre outras.

É uma história que um professor de matemática pode utilizar em diversos momentos, no ensino fundamental, como na introdução dos polígonos (6º ano) trabalhando a ideia de plano, nas propriedades de figuras geométricas (7º ano) e no estudo da inscrição ou circunscrição (8º e 9º ano).

Dessa forma, a história tem um aspecto educativo que faz o aluno refletir sobre os conceitos matemáticos presentes nos balões e nos desenhos, mas sem perder sua beleza estética. Acreditamos que para uma primeira história em quadrinho construída pelos integrantes do grupo ficou um trabalho realmente notável.

A história apresenta um simbolismo bem trabalhado, em que as personagens, apesar de serem figuras geométricas, se assemelham aos humanos em seus costumes e relações sociais, bem como no mundo que habitam. Além disso, uma das personagens é descriminado por ser redondo, remetendo à exclusão social sofrida pelos obesos. Esta característica de "A festa do Tangran" é identificada por Mendonça (2008). A autora argumenta que a linguagem das histórias em quadrinhos,

tanto por meio do texto, quanto por meio dos desenhos, (re) cria as relações sociais em um contexto sociocomunicativo diferente. As relações e os papeis sociais são representados pelas personagens em suas interações no decorrer da trama.

Mesmo que as personagens sejam apenas figuras geométricas, com traços que fujam totalmente aos de um ser humano, eles têm semelhança com a realidade em seus comportamentos, elementos do meio social e dificuldades que os excluídos sociais passam cotidianamente. Estes temas recebem igual importância na produção da história, pois contribuem para uma reflexão que extrapola os conhecimentos escolares.

Esta história incorporou bem os ideais de educação matemática defendidos pelos professores participantes do OBEDUC. Diferentemente do grupo que produziu o quadrinho "Tonico e a raiz quadrada", que pouco contribuiria para trabalhar o conhecimento matemático de forma significativa. Entretanto, é importante ressaltar que esta foi a primeira produção de HQ que envolva o conhecimento matemático de cada um dos professores que participou do curso.

Assim, apesar de nem todas as HQ tratarem o conhecimento matemático de forma contextualizada e significativa, como defendido pelo grupo OBEDUC, acreditamos que boa parte dos professores teve a oportunidade de compreender os elementos das HQ. Antes do curso, poucos destes profissionais pensariam em utilizar as HQ em aulas de matemática. A maioria desmistificou muitas ideias simplistas ou precipitadas, incorporando os quadrinhos à sua prática, conseguindo construir suas próprias histórias.

O desfecho da história

Ao longo do curso, os professores se esforçaram em produzir histórias em quadrinhos que incorporassem estes elementos. A reflexão fez parte da história "A festa do Tangran", pois possibilitam a apreensão de conhecimentos matemáticos, não de forma passiva, mas com base na reflexão. A história de "Tonico e a raiz quadrada" não incorpora estes elementos, sendo necessário ainda a intervenção do professor para que o aluno não tome para si visões estereotipadas (discutidas anteriormente).

Acreditamos que a produção da HQ "A festa do Tangran" com estas características foi possível porque os professores participam do OBEDUC, que os auxiliam a construir atividades que façam o aluno refletir e perceber a importância do conhecimento matemático. Entretanto, é possível percebermos que apesar de os professores estarem imersos em um ambiente de discussões sobre um processo educacional pautado na THC, nem todos conseguiram produzir histórias com as características desta teoria.

Com base nestas histórias construídas acreditamos que é importante que além de proporcionar os meios necessários para o professor trabalhar com as HQ em contexto educacional, é necessário promover reflexões para que os quadrinhos produzidos possam realmente contribuir para um aprendizado significativo. As histórias em quadrinhos produzidas pelos professores devem informar, formar e promover reflexões sobre os conceitos estudados (CAMPOS; LOMBOGLIA, 1985b).

Todavia, para uma primeira criação de histórias em quadrinhos, que tratam do conhecimento matemático, de um

modo geral, os participantes se saíram bem, tendo produzido histórias que possam ser incorporadas à prática de cada um dos professores ali presentes, podendo gerar discussões em sala de aula que possam contribuir positivamente para o aprendizado dos estudantes.

Referências

ACEVEDO, J. **Como fazer histórias em quadrinhos**. São Paulo, Global, 1990.

ARAUJO, G.; COSTA, M.; COSTA, E. As histórias em quadrinhos na educação: possibilidades de um recurso didático-pedagógico. **A MARgem - Estudos**, Uberlândia - MG, ano 1, n. 2, p. 26-36, jul./dez. 2008.

CAMPOS, M. de F. H.; LOMBOGLIA, R. HQ: uma manifestação de arte. In: LUYTEN, Sonia M. Bibe (org.). **Histórias em quadrinhos:** leitura crítica. São Paulo: Paulinas, 1985, p. 10 – 17.

CIRNE, M. **A explosão criativa dos quadrinhos.** Petrópolis: Vozes, 1970.

IEZZI, G., DOLCE, O., MACHADO, A. **Matemática e realidade:** 6º ano, 6ª edição, São Paulo, Editora Atual, 2009.

LIBÂNEO, J. C. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-Cultural da Atividade e a contribuição de Vasili-Davydov. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, p. 5-27, 2004.

LUYTEN, S. M. B. **O que é História em Quadrinhos.** São Paulo: Brasiliense, 1985a.

LUYTEN, S. M. B. Por que uma leitura crítica das histórias em quadrinhos?. In. LUYTEN, S. M. B.(Organizadora). **História em Quadrinhos**: Leitura Crítica. 2ª ed. São Paulo: Paulinas,1985b. p. 7 – 9.

LUYTEN, S. M. B. HQ como prática pedagógica. In. LUYTEN, S. M. B.(Organizadora). **História em Quadrinhos**: Leitura Crítica. 2ª ed. São Paulo: Paulinas,1985c. p. 84 – 91.

_____. **Mangá**, o poder dos quadrinhos japoneses. São Paulo: editora. Hedra, 2000.

MENDONÇA, M. R. de S. **Ciência em quadrinhos:** recurso didático em cartilhas educativas. Tese de doutorado em Letras, Recife, UFPE, 2008.

NUNES, C. do S. C. **Os sentidos da formação contínua de professores:** o mundo do trabalho e a formação de professores no Brasil. 152 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 2000.

PIZARRO, M. V. **Histórias em quadrinhos e o ensino de ciências nas séries iniciais:** estabelecendo relações para o ensino de conteúdos curriculares procedimentais. Dissertação de mestrado em Educação, Bauru, UNESP, 2009.

SFORNI, M. S. de F. **Aprendizagem conceitual e organização do ensino:** contribuições da Teoria da Atividade. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2003.

TONON, S. As Histórias em Quadrinhos como recurso didático nas aulas de matemática. **EM EXTENSÃO**, Uberlândia, v. 8, n. 1, p. 72 - 81, jan./jul. 2009.

VERGUEIRO, W. Uso das HQs no ensino. In: RAMA, Â.; VERGUEIRO, W. (orgs.). **Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula**. 4ª. ed. 1ª reimpressão. São Paulo: Contexto, 2012, p. 7- 29.

CAPÍTULO 04

O USO DE EPISÓDIOS HISTÓRICOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO QUADRINHOS

Ana Carolina Costa Pereira
Laura Andrade Santiago
Wendy Mesquita de Morais

Principais motivações

Muito se tem discutido sobre a dificuldade da aprendizagem dos alunos no nível fundamental e médio. Pesquisas apontam que dentre as disciplinas escolares, a matemática é considerada a mais difícil. Um dos motivos por parte dos estudantes é que a matemática é estudada fora de um contexto real e está cheia de fórmulas para decorar. No ponto de vista do professor, essa dificuldade está relacionada à falta de interesse dos estudantes, principalmente em relação ao modo como a Matemática é apresentada em sala de aula. Segundo Mendes (2009) é através de um ensino mais prático e dinâmico por parte do professor e dos estudantes, relacionado com brincadeiras, atividades práticas e experimentais que o aprender da matemática se tornam mais eficaz.

Devido a esses motivos, cresce um movimento que busca inovações metodológicas de ensino para que o profes-

sor torne sua aula mais atrativa, denominado Movimento de Educação Matemática. Dentre essas metodologias, a história da matemática pode auxiliar na construção do conhecimento e na evolução de conceitos matemáticos. Segundo Groenwald (2004, p. 47):

> o enfoque histórico é uma proposta metodológica que permite ao aluno descobrir a gênese dos conceitos e métodos que aprenderá em aula. Em outras palavras este enfoque permitirá ao aluno fazer relação das ideias matemáticas desenvolvidas em sala de aula com suas origens. O conhecimento da história da matemática proporciona uma visão dinâmica da evolução dessa disciplina, buscando as idéias originais em toda sua essência.

A busca pelas origens dos conceitos pode levar o estudante a conhecer a matemática sob um ponto de vista diferente do que tradicionalmente lhe é ensinado, levando-o a perceber que a matemática não é uma ciência pronta e acabada, mas que sofre modificações ao longo de sua história.

Atualmente a história da matemática, na maioria das vezes, é utilizada em sala de aula apenas como elemento motivador ao desenvolvimento do conceito, principalmente na introdução de conteúdos resumindo-se a contar histórias "engraçadas" focado em fatos e datas decorrentes das biografias dos matemáticos.

No que se refere a inserção da história da matemática nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental,

percebemos que esse recurso inclui citações históricas no desenvolvimento de seus textos de maneira imprópria. Segundo Bianchi (2006, p. 03) "muitas vezes esta inserção se resume na apresentação de biografias de alguns matemáticos, de datas ou curiosidades históricas, sem a devida compreensão ou adequação desta abordagem". Notamos que, mais uma vez, o uso da história da matemática na sala de aula poderia agregar outros recursos e atingir objetivos que podem ir além de "contação de histórias".

Nesse sentido, a união entre esses "fatos" sobre a história da matemática e outros artifícios, como por exemplo, a confecção de quadrinhos, construção de instrumentos matemáticos, etc, podem fornecer uma ferramenta que pode ser utilizada no entendimento de conteúdos matemáticos. De acordo com D'Ambrósio (1996, p. 31):

> é muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas de então, de realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas. Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. Poderia ser tratada como um fato histórico.

Essa motivação contextualizada referida por D'Ambrósio (1996), não necessariamente deve vir de momentos no cotidiano do aluno, mas como ele mesmo menciona, pode ser "um fato histórico" que foi importante dentro do desenvolvimento de um conceito.

Esse fato histórico pode ser inserido, por exemplo, a partir de episódios históricos da matemática, verdades e/ou mentiras (ou interpretações errôneas), que estão em livros, textos de história da matemática e que chegam às salas de aula.

Segundo Nobre (2004, p. 531) "é tradição na história do conhecimento científico o batismo de determinadas teorias com o nome de seu descobridor, ou do cientista que teve a maior dose de contribuição para se chegar a determinado resultado". Muitas histórias são contadas sem provas concretas, como é o caso da história antiga da Matemática como, por exemplo, os feitos de Tales de Mileto, a autoria de Os Elementos por Euclides, e até o caso de Arquimedes, gritando nu pelas ruas: Eureca! Eureca!

Figura 1 - Cena de Arquimedes na banheira.
Fonte: http://www.ahistoria.com.br/arquimedes/.

Além de informações históricas, sem provas concretas, ainda existem informações históricas distorcidas (disputa acadêmica – Newton x Leibniz), informações históricas ocultas (Idade Média - Período das Trevas) que fazem parte do universo científico da história da matemática.

Todos esses fatos históricos que entram na sala de aula permitem ao aluno uma viagem ao passado, e, adicionando a ele outro recurso, permitirá ao professor abordar conteúdos empregando estratégias diferenciadas, atingindo os objetivos propostos. Atrelado a esses fatos ou episódios, nomenclatura que iremos adotar, pode-se propor uma sequência de ensino por meio de atividades ligadas a história preservando as experiências manipulativas e visuais do estudante.

Nesse sentido, iremos propor sequências de atividades construídas por meio do episódio histórico e do quadrinho, visando promover uma aprendizagem significativa e autônoma.

Entendendo o que é um episódio e sua utilização no ensino de matemática

Ao perguntar o que é um episódio, a primeira ação é ir a um dicionário, para entender seu conceito. No dicionário Aurélio Buarque de Holanda (2015), encontramos que um episódio é um "Incidente acessório, mas intimamente relacionado com a ação principal de uma produção literária. Cena acessória num quadro. Aventura; fato; passo; lance. Parte ou divisão de uma obra literária, de uma série de televisão, de um filme, etc".

No dicionário Michaelis (2015) um episódio é um "Incidente relacionado com a ação principal numa obra literária ou artística. Cena acessória que se junta à ação principal dum quadro. Variedade ou incidente no tema de alguma composição musical. Fato acessório".

Percebemos que em ambos os dicionários, episódio tem sua finalidade relacionada a aspectos culturais voltados para a ação. Dessa maneira, iremos adotar como episódio uma narrativa que apresente um acontecimento solto ou fato isolado, relacionado com uma série de outros fatos. Ele pode ser construído de diversas maneiras: na forma de um texto curto, num vídeo produzido, em uma peça teatral, em forma de uma paródia ou música, ou mesmo em uma história em quadrinhos.

Um episódio ocorrido na história da matemática é um fato que conta uma descoberta matemática em uma extensão menor, podendo ser uma história ou estória, verdade ou ficção, que mostre um momento em que a sociedade teve ideias que deram forma a nossa cultura e ao seu desenvolvimento.

Nesse sentido, um episódio de história da matemática pode estar presente na sala de aula de diversas formas. Ele pode ser apresentado de forma lúdica e com problemas curiosos, como uma fonte de pesquisa, como introdução de um conteúdo ou atividades. Também podemos apresentar a matemática de uma forma mais filosófica, com atividades diferenciadas que vão além de exercícios de memorização e fórmulas, que possibilita ser vista de uma forma mais contextualizada.

O uso do episódio ajuda a fazer uma integração entre conteúdos de matemática e outras disciplinas, uma vez que acompanha o desenvolvimento da sociedade, pois ele mostra a forma na qual os homens construíam suas ideias, devido uma necessidade prática, cultural, econômica, política ou social. Corroborando com D'Ambrósio (1999, p. 97), "acredito que um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular na Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas".

Essa relação entre episódios históricos e ensino de matemática pode contribuir para uma experiência docente e discente no sentido de possibilitar mais ferramentas (recursos) direcionadas ao ensino e a aprendizagem da matemática.

Assim sendo, vincular a Matemática com acontecimentos que foram importantes no decorrer de sua história pode torná-la mais viva, que não se limita a um sistema de regras e verdades rígidas, mas é algo humano e envolvente. A seguir, apresentaremos alguns episódios construídos com fatos ocorridos durante a história da matemática.

Episódios e Quadrinhos: conectando ideias

O uso de quadrinhos voltados para o ensino de Matemática embora um pouco incipiente, vem ganhando forças no cenário brasileiro, sobretudo com o aparecimento desse artifício em avaliações conhecidas nacionalmente: ENEM, SAEB, Prova Brasil e as próprias provas de vestibulares. Esse fato impulsionou o uso de quadrinhos na sala de aula, em particular nas aulas de matemática.

Antes conhecida apenas como forma de lazer, hoje estampadas em enunciados de provas. Muitas já conhecidas por nós leitores desse gênero literário, outras confeccionadas por amadores, direcionadas estritamente ao uso na educação. Mas utilizar o quadrinho se reduz a encontrá-lo apenas como elemento secundário em um texto? A resposta é não, pois a função do quadrinho na educação perfaz outras dimensões inerentes ao próprio saber, seja ele construído ou não.

Dentre as formas de inserção do uso de quadrinhos nas aulas de matemática podemos contabilizar pelo menos quatro delas: a construção de quadrinhos com os alunos, a própria confecção do quadrinho pelo professor, utilizar quadrinhos expostos nas mídias ou utilizar quadrinhos confeccionados para o fim educacional.[1]

Nas duas primeiras alternativas um elemento dificultador seria a técnica de construir o quadrinho. Embora existam vários vídeos disponibilizados na internet para ajudar a ultrapassar esse obstáculo, ainda assim é um fato que pode retrair o uso desse possível recurso metodológico.

Nossa experiência com a utilização do quadrinho no ensino de matemática voltado principalmente para a formação inicial de professores nos tem mostrado que já não é uma barreira o não saber desenhar. Dependendo do que será proposto um "bonequinho com a cabeça grande e com o corpo e pernas feitos de pauzinhos" já é o suficiente para empregar esse recurso. Na figura 2 apresentamos uma tirinha de traçado simples do renomado Luis Fernando Veríssimo:

Figura 2 - Exemplo de quadrinho com traçado simples.
Fonte: Veríssimo (2010).

1 Ver mais detalhes dessas inserções em Pereira (2014).

Entretanto, mesmo com a habilidade para o desenho ou com a falta dela, sem um roteiro bem elaborado, dificilmente obteremos êxito no produto desenvolvido. O roteiro de uma tirinha é uma ferramenta necessária para o desenvolvimento da história na qual irá ser apresentada, tendo ele a função de passar uma mensagem de forma clara e específica.

Ele é um guia no qual leva o criador da tirinha a não se perder do conteúdo que está sendo programado. Ele deve ser bem elaborado e seguir alguns passos, contendo pontos que jamais poderão ser esquecidos para a elaboração da tira. Um dos pontos que é essencial para um tirinha bem feita é a escolha da história.

Nesse sentido, podemos relacionar o roteiro da tirinha com o episódio discutido anteriormente. O episódio, já construído, facilita o processo de criação do quarinhos, pois entendemos que é a partir da uma história pronta que se define melhor as ideias e os detalhes da narrativa que se pretende criar. Dessa maneira é de extrema importância ter uma ideia geral da história e o episódio servirá como suporte para a criação de um material.

Episódios de história da matemática

Construir um episódio voltado para a história da matemática requer leitura e dedicação para quem está propondo esse recurso. Primeiramente, devemos escolher o conteúdo do qual o episódio irá tratar e a partir dele fazer um levantamento sobre sua história, sob um ponto de vista social/cultural, de aplicação ou mesmo puramente matemático. Nesse ponto é importante pesquisar em fontes "confiáveis", sejam em livros,

artigos, revistas científicas, *sites* ligados a universidades, ou outros. Em relação à narrativa, não deve conter uma linguagem "pesada", nem ser longa, porém deve chegar ao leitor de forma compreensível e direta.

Nossa sugestão é escolher temas que, no cotidiano escolar, apresentem dificuldade de aprendizagem para o aluno e favoreçam ultrapassar alguns obstáculos epistemológicos históricos. Outro ponto é o título do episódio que deve estar em consonância com o tema e o conceito desenvolvido.

Dessa maneira, construímos nossos primeiros episódios pautados nos seguintes conteúdos: introdução ao sistema de numeração, probabilidade, proporcionalidade, frações e introdução às potências. As fontes utilizadas foram os livros clássicos de história da matemática: Eves (2004), Katz (2010), Boyer e Merzbach (2012) e Cajori (2007); sites de história da matemática: *MacTutor History of Mathematics*[2]*;* vídeos produzidos pela *BBC - British Broadcasting Corporation* e traduzidos pela UNICAMP[3] e a M[3] - Matemática Multimídia[4] desenvolvido pela UNICAMP.

A seguir, apresentaremos dois exemplos de episódios construídos em conjunto com os quadrinhos confeccionados.

2 http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/.

3 Todos os vídeos estão disponíveis no canal do youtube da univesptv: https://www.youtube.com/user/univesptv.

4 O portal principal da coleção M³ Matemática Multimídia, que contém recursos educacionais multimídia em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp: http://m3.ime.unicamp.br/.

Pastor de ovelhas... em uma necessidade de contar!

Há muito tempo, um pastor sentiu a necessidade de controlar o seu rebanho. Ele percebeu que precisava saber a quantidade de ovelhas que voltavam do pasto, então pensou: "por que eu não utilizo pedrinhas para controlar o meu rebanho?" Ele soltou suas ovelhas no pasto e para cada uma que passava, ele colocava uma pedra dentro de um saquinho. Quando o pastor ia buscar suas ovelhas, ele retirava do saquinho uma pedra por ovelha que passava. Com esse processo, se sobrassem pedras, ele ficaria sabendo que havia perdido ovelhas. Caso contrário, se tivesse pedras a menos, o pastor ficaria feliz, pois teria ganhando mais ovelhas para o seu rebanho! Dessa forma ele conseguiu manter o controle.

Figura 3 - Pastor de ovelhas... em uma necessidade de contar!
Sem contar... Não dá!
Fonte: Elaborada pelas autoras.

Tales em... O desafio da pirâmide

Um famoso matemático e filósofo grego, também comerciante, chamado Tales de Mileto, era um homem cheio de contatos com outros povos. Por conta disso, decidiu viajar para o Egito e, nessa viagem, Tales foi desafiado. Deram-lhe

um problema: qual é a altura da grande pirâmide de *Quéops* construída por volta de 2500 a.C. Partindo do princípio de que existe uma razão entre a altura do objeto e o comprimento da sua sombra, Tales teve uma brilhante ideia. Ele fixou uma vara no extremo da sombra da pirâmide, surgindo assim, a sombra da vara, formando triângulos semelhantes. Tales pôde calcular a altura da pirâmide.

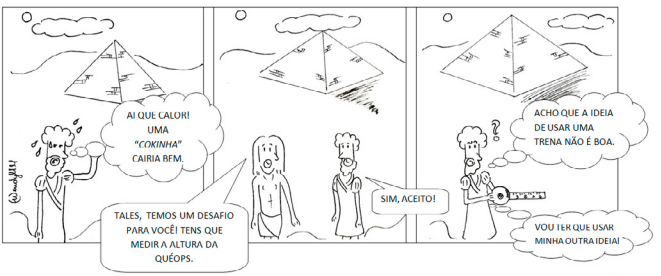


Figura 4 - Tales em... O desafio da pirâmide
O Desafio
Fonte: Elaborada pelas autoras.

A partir do episódio e do quadrinho é possível construir sequências didáticas para que esse material possa ser aplicado como um recurso didático nas aulas de matemática.

Construindo sequências didáticas

Uma sequência didática é o conjunto de atividades conectadas, delineadas para ensinar um determinado conteúdo, passo a passo, estruturada e ajustada com os objetivos que estão sendo propostos pelo professor de modo a alcançar a aprendizagem de seus alunos. É uma maneira de planejamen-

to e tornará as aulas do professor mais organizadas e alinhadas as diretrizes atuais. Segundo Zabala (2008, p. 18) uma sequência didática é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelo professor como pelos alunos".

Dentro do campo da pesquisa, a sequência didática pode ser encontrada na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986) e na segunda fase da Engenharia Didática de Michele Artigue (1988)[5] como elemento da análise a *priori*. Segundo Teixeira e Passo (2013, p. 162):

> uma sequência didática é uma série de situações que se estruturam ao longo de uma quantidade prefixada de aulas. Devidamente estruturadas, essas situações têm como objetivo tornar possível a aquisição de saberes bastante claros, sem esgotar o assunto trabalhado. Desse modo, uma sequência didática não pode, a priori, ter seu tempo de duração estipulado de acordo com o programado, pois o seu cumprimento leva em conta as necessidades e as dificuldades dos alunos durante o processo.

Nesse sentido, estruturar sequências didáticas pode propiciar uma melhoria no ensino e na aprendizagem da matemática, pois necessariamente envolve os três eixos base da educação: o professor, o aluno e o saber – o conhecimento do conteúdo matemático. Outro ponto é o caráter investigativo

5 Ressaltamos que a Teoria das Situações Didáticas é à base da metodologia da Engenharia Didática.

que a atividade pode possibilitar, estruturando a construção do conhecimento de modo a experimentar, a generalizar, a abstrair, e a formar significados a partir dos conceitos estudados.

Essas sequências, nesse estudo, elucidam uma escola de concepção de aprendizagem do professor, uma vez que ele reflete o modo de ver como os alunos se apropriam de um determinado conhecimento matemático, a partir de atividades organizadas e orientadas.

Partindo da elaboração dos episódios e da confecção das tirinhas, propomos a construção de uma sequência didática com o objetivo de posteriormente aplicá-la na educação básica. Utilizamos a estrutura de roteiro de atividade escolar para facilitar a padronização. Dessa maneira alguns elementos foram considerados: cabeçalho; objetivos do roteiro de atividade; providências para a realização das atividades; pré-requisitos; descrição dos procedimentos; observações; material utilizado; referências adicionais; descrição da atividade para o professor e para o aluno.

No cabeçalho, consideramos importante conter eixo temático, tema, tópico, título e ano. No que se refere ao eixo temático, iremos utilizar o que os Parâmetros Curriculares Nacionais definem como blocos de conteúdos: números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas; e tratamento da informação. O tema é o conteúdo geral da sequência didática, enquanto o tópico é um subtema. O título é o nome da atividade que deverá ser realizada e o ano é o nível escolar em que o aluno pode desenvolver as atividades.

As demais sessões serão: objetivos do roteiro de atividade; providências para a realização das atividades; pré-requisitos; descrição dos procedimentos; observações; material utilizado; e referências adicionais.

Para as atividades, orientamos que na estrutura tenha inicialmente um texto referindo-se ao professor, apresentando o objetivo central e um resumo da atividade. Em seguida, que seja apresentada a descrição da atividade para o professor e para o aluno.

Na produção das sequências didáticas para os episódios "Pastor de ovelhas... Em uma necessidade de contar" e "Tales em... O desafio da pirâmide", tivemos focos em segmentos educacionais diferenciados: ensino fundamental I e ensino fundamental II.

No primeiro episódio, "**Pastor de ovelhas... Em uma necessidade de contar**", tivemos como eixo temático: Números e Operações; tema: Sistemas de numeração; tópico: Introdução ao princípio de contagem; e ano: pode ser utilizado de 4º ao 6º ano. Os objetivos foram pautados em: Apresentar a história da origem dos números; Mostrar a ideia de número e numeral; Explorar diferentes representações para os números decimais; Decomposição dos algarismos de base decimal.

O professor poderá iniciar a aula perguntando aos alunos o que eles sabem sobre a história dos números, em seguida, entregará o episódio, Pastor de ovelhas... Em uma necessidade de contar!. Posteriormente, o professor fará uma leitura junto aos alunos e questionará que ideias eles extraíram. A seguir, fará uma leitura do quadrinho e iniciará uma discussão sobre a importância dos números para a sociedade. Após

as leituras e discussões, o professor entregará aos alunos uma atividade[6] utilizando o modo de contagem correspondente a esse episódio, no qual poderá usar pedrinhas ou outros itens disponíveis em sala de aula.

Em relação às atividades propostas, sugerimos quatro, mas iremos expor apenas uma delas.

Atividade

Após a reflexão da leitura do episódio e da tirinha, o professor pode dar a ideia do que é número e como é chamado e representado. Além de ficar ao seu critério mostrar aos seus alunos outras formas de representação. Em seguida, o professor pode aplicar o exercício abaixo:

Considere o grupo de dedos de uma mão e o grupo das vogais do alfabeto:

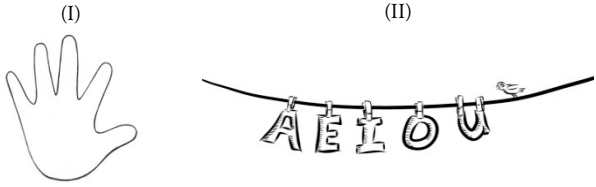


Figura 5 - Representação de números.
Fonte: Elaborada pelas autoras.

- Os dois grupos têm a mesma quantidade?
- Qual o nome e símbolos que associamos a quantidade dos elementos dos dois grupos?

6 Essa atividade foi confeccionada previamente, porém, devido a sua extensão, não iremos inserí-la no texto, citaremos apenas alguns exemplos.

Na tirinha *"sem contar... não dá!"* no primeiro quadro do quadrinho, podemos observar a quantidade de ovelhas que já estão no pasto. Em seguida, responda:

- Que nome você dá à quantidade de ovelhas do primeiro quadro?
- Qual símbolo que associamos a quantidade de ovelha?

No segundo episódio "**Tales em... O desafio da pirâmide**", tivemos como eixo temático: Grandezas e Medidas; tema: Semelhança; tópico: Semelhança de triângulos; e ano: pode ser utilizado de 9º ano. Os objetivos foram pautados em: Apresentar as contribuições de Tales para a matemática; Discutir a forma que historicamente foi estudado semelhança de triângulo; Estudar semelhança de triângulo; Fazer aplicações sobre semelhança de triângulo.

O professor iniciará a aula indagando aos alunos o que eles sabem sobre um objeto ser semelhante a outro, ou o que é semelhança. Nesse momento ele pode enfatizar a ideia de semelhança na vida real e fazer o questionamento: como sabemos qual é a altura no mastro da bandeira sem medi-la? Em seguida, ele entregará o episódio "Tales em... O desafio da pirâmide", e discutirá[7] com os alunos de qual forma Tales conseguiu resolver o problema. Será que tinha fita métrica na época? Será que ele subiu na pirâmide? Nesse momento o professor pode falar um pouco sobre a biografia de Tales e sua contribuição para a matemática.

7 Nesse momento o professor pode direcionar sua aula para a atividade 01 do roteiro.

Após a discussão, ele pode explicar o método pensado por Tales para resolver o problema e indicar algumas atividades teóricas, aplicada e experimental para os alunos realizarem em sala ou em casa.

Sugerimos três atividades a serem trabalhadas sobre o conteúdo, disponibilizamos também orientações para o professor e para o aluno.

Atividade 01

Após a leitura e discussão do episódio e da tirinha, o professor pode aprofundar mais um pouco sobre a história do desafio da pirâmide. Em seguida, ele pode aplicar a atividade abaixo:

1. De acordo com a tirinha, Tales teve outra ideia. Que ideia foi essa? Como ele a executou? Com ela, Tales conseguiu vencer o desafio? Em seguida o professor poderá dar início à parte teórica do conteúdo.
2. Considerado que Tales foi desafiado a medir a pirâmide de Quéops e que hoje já sabemos que sua medida original é de 149,9m de altura e sua base tinha aresta 230,28m, desafio você agora a medir o comprimento da sombra "Y" relativa à altura da pirâmide, partindo do pressuposto de que a vara tinha 2m e a sombra da vara tinha 3m.

Utilize como recurso a representação a seguir (Figura 6):

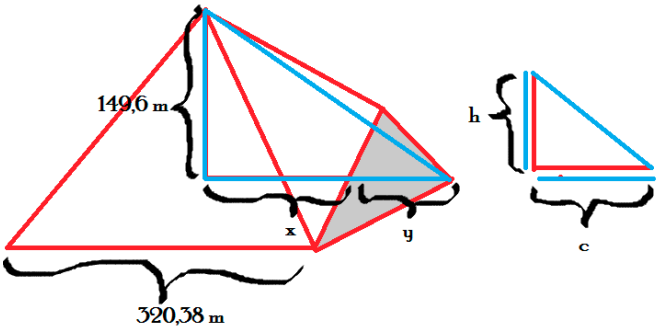


Figura 6 - Esquema de semelhança da pirâmide de Quéops.
Fonte: Elaborada pelas autoras.

3. Tales foi desafiado, agora será você! Logo, desafio a calcular a altura da estátua de Iracema que se encontra na Praia de Iracema, com as seguintes condições:

- Você irá imaginar que, assim como Tales, terá uma vara de 3 metros.
- Você irá fixar a vara e ir se distanciando dela até dois metros.
- Você já sabe que sua distância até a estátua é de 8 metros.

Agora resolva o desafio que foi lhe dado, podendo usar como recurso a figura a seguir (Figura 7):

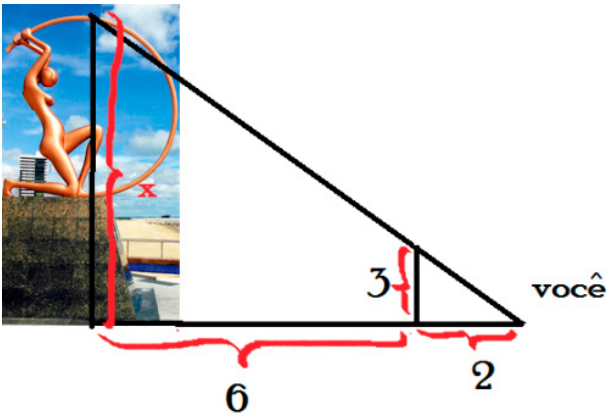


Figura 7 - Esquema de semelhança da estátua de Iracema.
Fonte: Elaborada pelas autoras.

Atividade 02

Após a leitura do episódio "Tales em... O desafio da pirâmide", realize uma experiência prática com os alunos, pedindo para eles calcularem a altura do mastro da bandeira ou posto da escola. Realize a atividade em um dia ensolarado, pois é necessário ter a sombra dos objetos. Iremos precisar de um bastão de madeira (cabo de vassoura e fita métrica).

Problema a resolver: Calcule a altura do mastro da bandeira ou posto da escola. Para isso vocês podem utilizar esse bastão de madeira e uma fita métrica, sem subir no poste. Remonte os passos feito por Tales, personagem do episódio e do quadrinho para resolver esse problema.

Ao final, o professor deve discutir as possíveis soluções encontradas pelos alunos.

Atividade 03

Após a leitura e discussão do episódio "Tales em... O desafio da pirâmide", leve os alunos ao laboratório de informática da escola e apresente o objeto de aprendizagem: Medindo Objetos através de Semelhança de Triângulos, disponível na página http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/medindo_objetos/. Desenvolva com eles as etapas do objeto, escolhendo como opção a cidade do Egito para realizar as medições. Relembre com eles o episódio e a tirinha discutida na aula e deixe-os resolverem as perguntas, orientando as dúvidas quando surgirem. Essa atividade pode ser realizada em duplas.

Percebam que as atividades são, na maioria das vezes, de forma questionadora e discursiva, direcionando a perspectiva de educação atual, que mobilize o aluno a ser agente ativo nesse processo, assim como questionador da sua própria aprendizagem. Nossa intenção é suscitar uma iniciativa nessa potencialidade didática e possibilitar ao professor a construção de outras atividades em forma de vídeos, textos, histórias em quadrinhos, entre outros.

Considerações Finais

A junção do estudo de episódios da história da matemática com quadrinhos ainda é embrionário. Nossos primeiros estudos nos levaram a uma aplicação por meio de um curso de extensão universitária ofertado no primeiro semestre de 2015 na Universidade Estadual do Ceará – UECE, intitulado: "Utilizando a interfase dos quadrinhos para estudar história da matemática" que objetivava propor roteiros de atividades com quadrinhos confeccionados exclusivamente para inserir o

estudo da história da matemática, marcando assim nosso primeiro contato com o assunto. A partir disso, buscamos fundamentações mais estruturadas que pudessem embasar pesquisas futuras.

Percebemos que existe uma grande potencialidade nessa proposta, porém precisamos ampliar o uso desse o material e aplicar empiricamente com professores que estão atuando em sala de aula e com seus alunos. Ressaltamos que o professor deve apreender a proposta e assumir uma postura inovadora ao trabalhar com o uso de episódios da história da matemática com quadrinhos no ensino.

Dessa maneira, o professor pode confeccionar seus próprios episódios e consequentemente seus quadrinhos para qualquer conteúdo desejado e aplicar em algum momento de sua aula: introdução, discussão, ou finalização de conteúdo estudado; enunciado de exercícios ou provas; ou mesmo como proposta de trabalhos interdisciplinar, feiras culturais, seminários, etc.

Nossa pretensão é explorar mais esse assunto e fazer chegar esse tipo de pesquisa às mãos dos professores, principalmente para que proporcione diferentes recursos metodológicos para o uso na sala de aula.

Almejamos que se torne mais frequente o uso dos quadrinhos nas aulas de matemática, não só como um elemento motivador, mas como uma ferramenta didática que articule diferentes domínios da Matemática, assim como expor interrelações entre a Matemática e outras disciplinas.

Referências

BIANCHI, Maria Isabel Zanutto. **Uma reflexão sobre a presença da história da matemática nos livros didáticos.** 2006. 103 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro-sp, 2006.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C.. **História da Matemática.** São Paulo: Blucher, 2012.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **A história da matemática: questões historiográficas e política e reflexos na Educação Matemática.** In: BICUDO, M. A. V.(org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação matemática da teoria à prática.** Campinas, SP: Papirus, 1996. 31 p.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; SILVA, Carmen Kaiber; MORA, Castor David. Perspectivas em Educação Matemática. **Acta Scientiae,** Canoas, v. 6, n. 1, p.37-55, 1 jan. 2004, jan./jun. 2004.

KATZ, Victor. **História da Matemática.** Lisboa: Fundação Calouste-Gulbenkian, 2010.

MENDES, Iran Abreu. Atividades históricas para o ensino da Trigonometria. In: MIGUEL, Antônio et al. **História da Matemática em Atividades Didáticas.** 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 105-178.

NOBRE, Sergio. Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. **Ciência & Educação,** Bauru-sp, v. 10, n. 3, p. 531-543, 2004.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. A utilização de quadrinhos no ensino da matemática. In: PEREIRA, Ana Carolina Costa (Org.). **Educação Matemática no Ceará:** os caminhos trilhados e as perspectivas. Fortaleza: Premius, 2014, p. 28-39.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau.** Zetetiké – FE/Unicamp – v. 21, n. 39 – jan/jun 2013, p. 155 – 168.

VERÍSSIMO, L.F. **As cobras:** Antologia Definitiva. Rio de Janeiro: Objetiva, 2010, p. 197.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

CAPÍTULO 05

OBSTÁCULOS E DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS INTEIROS: UMA ANÁLISE DOS ESTUDOS DE GEORGES GLAESER

Joelma Nogueira dos Santos

> *Não existem números absurdos, irracionais, irregulares, inexplicáveis, ou surdos; e, sim, que, entre eles (os números), há uma tal excelência e coerência, que temos meios de medir a noite e o dia, em sua admirável perfeição (Simon Stevin).*

A história à luz de Carl Benjamim Boyer: como os matemáticos encararam os números negativos?

Os números inteiros negativos levaram cerca de 1600 anos para serem conceituados e compreendidos. Do início de seu desenvolvimento até sua finalização, muitos matemáticos trabalhavam com esses números de maneira não formal e sem dominá-los totalmente por falta de uma compreensão epistemológica. Vamos agora fazer uma breve análise histórica dos fatos desde os séculos I e II a.C. aproximadamente até o século XIX d.C.

Os primeiros povos que aparecem historicamente manuseando a ideia de sobra e de falta foram os chineses. Embora a compreensão desses valores fosse ainda bem rudimentar, por

volta dos séc. I e II a.C. já manipulavam números inteiros por meio de um sistema de barras vermelhas e pretas para valores positivos e negativos, respectivamente, conforme se pode ler em Boyer (1974, p. 147):

> a idéia de números negativos parece não ter causado muitas dificuldades aos chineses pois estavam acostumados a calcular com duas coleções de barras – uma vermelha para coeficientes positivos ou números e uma preta para os negativos. No entanto não aceitavam a ideia de um número negativo poder ser solução de uma equação (BOYER, 1974, p. 147).

Diofante de Alexandria no final do séc. III d.C. foi considerado um dos principais estudiosos da época a fazer referência a regra dos sinais. Embora não atribuísse uma importância considerável aos números negativos, citava-os como aquilo que falta (Glaeser, 1985).

No séc. VII d.C, o trabalho dos hindus sobre conhecimento desses números ficou em evidência. Brahmagupta trabalhou com os negativos ao pesquisar resoluções de equações quadráticas, em que apareciam raízes negativas. Daí a citação dos mesmos em sua obra:

> As contribuições de Brahmagupta à álgebra são de ordem mais alta que suas regras de mensuração, pois aqui achamos soluções gerais de equações quadráticas, inclusive duas raízes mesmo quando uma delas é negativa. A

> aritmética sistematizada dos números negativos e do zero, na verdade, encontra-se pela primeira vez em sua obra. Equivalentes das regras sobre grandezas negativas eram já conhecidas através dos teoremas geométricos dos gregos sobre subtração, como por exemplo, $(a–b)\ (c – d) = ac + bd – ad – bc$, mas os hindus as converteram em regras numéricas sobre números negativos e positivos (BOYER, 1974, p.160).

Ainda sobre o conhecimento hindu, observou-se que Bháskara (1114-1185) apontou um número positivo, tendo duas raízes quadradas, uma positiva e outra negativa, mas deixou claramente mostrado em seus estudos a impossibilidade de se extrair raiz quadrada de um número negativo (GLAESER, 1985).

Os gregos já conheciam as regras de sinais referentes a esses números. Para tanto, valiam-se de observações geométricas, as mesmas apresentadas por Brahmagupta.

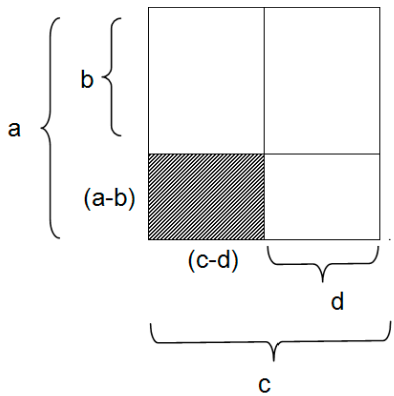


Figura 1 - representação geométrica para justificar as regras de sinais.
Fonte: Da autora.

Porém, foram os hindus que transformaram em regras numéricas de quantidades positivas e negativas e passaram o conhecimento para os árabes que compreendiam, mas não as aceitavam por completo. Boyer (1974, p. 169) afirma que embora "os árabes rejeitassem as raízes negativas e grandezas negativas, conheciam as regras que governavam o que chamamos de números com sinal"mostrando que os árabes também conheciam as regras geométricas. Entretanto, excluíam quaisquer cálculos envolvendo números negativos.

Na época renascentista, nos séculos XV e XVI, muitas operações eram feitas por comerciantes ao vender ou trocar mercadorias e essa prática fez com que os matemáticos se dispusessem a trabalhar com um novo tipo de número que indicava as perdas e as dívidas: os números negativos.Um comerciante, por exemplo, armazenava sacas com 10kg de arroz. Quando vendia 7kg colocava o restante em outra saca que já tinha 10kg, escrevia o número 3 com dois tracinhos na frente para lembrar que havia 3kg a mais na saca do que a quantidade inicial.Essa prática comercial foi o início da formalização do sinal indicativo.

> Percebendo que a notação era prática, os comerciantes passaram a usar o sinal de positivo (+) ou de negativo (-) na frente dos números para indicar ganho ou perda de quantidades. Os números com sinal – (menos) passaram a ser chamados de negativos e usados para representar as soluções de operações como 6–9, por exemplo, (PIRES, CURI E PIETROPAOLO, 2002, p. 103).

A primeira menção de um número negativo com quantidade isolada é feita por Nicolas Chuquet (séc. XV d.C.), em sua obra *Triparty* com equações do tipo $4x = -8$, mostrando forte influência dos estudos de Fibonacci.

Michel Stifel (1487–1567), em seus estudos sobre equações quadráticas, procurou trabalhar com raízes positivas, pois as negativas ele próprio recusava. Stifel chamava as quantidades negativas de números absurdos.

> Usando coeficientes negativos em equações, Stifel pôde reduzir a multiplicidade de casos de equações quadráticas ao que parecia como uma única forma; mas teve que explicar, por uma regra especial, quando usar + e quando -. Ainda mais, até ele recusou admitir números negativos como raízes de uma equação. Stifel, um ex-monge [...] foi um dos muitos autores a difundir os símbolos "alemães" + e – às custas da notação "italiana" p e m. Conhecia muitíssimo bem as propriedades dos números negativos, apesar de chamá-los *"numeri absurdi"* (BOYER, 1974, p. 206).

Gerônimo Cardano (1501–1576) em sua obra *Ars Magna* traz conhecimento sobre resolução não apenas de equações quadráticas, mas também cúbicas e quárticas a partir de informações adquiridas de NiccoloTartaglia (1500–1557) e de Ludovico Ferrari (1522–1565). Em suas contribuições considerava resultados negativos, mais complicados que os resultados irracionais e chamou os números negativos de núme-

ros fictícios. Como afirma Boyer (1974, p. 210): "Os números negativos causaram dificuldades maiores porque não são aproximáveis por números positivos, mas a noção de sentido sobre uma reta tornou-os plausíveis. Cardano usou-os embora chamando-os de *"numerificti"*". Mesmo com sua postura em relação aos valores negativos, a partir desse século e graças a ele que os inteiros relativos passaram a ser reconhecidos.

> A idéia de números negativos, porém, só foi plenamente aceita no séc. XVI, a partir da divulgação das idéias de Gerônimo Cardano (1501–1576), que demonstrou que os débitos podem ser associados a números negativos e que estes se aplicam regras matemáticas muito semelhantes às dos números positivos (PIRES, CURI E PIETROPAOLO, 2002, p. 73).

François Viète (1540–1603) e Albert Girard (1590–1633), figuras consagradas do período moderno da matemática já conheciam as raízes negativas e imaginárias em seus estudos sobre equações, porém, Viète, mesmo generalizando a resolução de equações, recusava-se a aceitar coeficientes ou raízes negativos. Diferente de Girard que compreendia e aceitava tanto valores positivos como negativos, contribuindo assim para o desenvolvimento das relações entre coeficientes e raízes de uma equação e, posteriormente, para o estudo dos números complexos.

> Coube a Girard em 1629, em *Invention nouvelle enl'algebre*, enunciar claramente as relações entre raízes e coeficientes, pois ele admitiu raízes negativas e ima-

> ginárias, ao passo que Viète reconhecia apenas as raízes positivas. De um modo geral Girard percebia que as raízes negativas são orientadas em sentido oposto ao dos números positivos, antecipando assim a idéia de reta numérica. "O negativo em geometria indica um retrocesso", ele disse, "ao passo que o positivo é um avanço". Parece que a ele também se deve a percepção de que uma equação pode ser tantas raízes quanto indica seu grau. Girard conservou as raízes imaginárias das equações porque elas exibem os princípios gerais na formação de uma equação a partir de suas raízes (BOYER, 1974, p. 224).

Thomas Harriot (1560–1621), contemporâneo de Viète, tinha noção das relações estudadas por Girard, mas não as utilizavam, pois não compreendia os números negativos. Sobre o assunto Boyer (1974, p. 224) afirma que "Harriot conhecia as relações entre raízes e coeficientes e entre raízes e fatores, mas como Viéte ele era prejudicado por não reconhecer raízes negativas e imaginárias".

Simon Stevin (1548–1620) utilizou a aritmética e a geometria para explicar a multiplicação de sinais: "mais multiplicado por mais, dá produto mais, e menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos ou menos multiplicado por mais, dá produto menos" (Glaeser, 1985, p. 48).

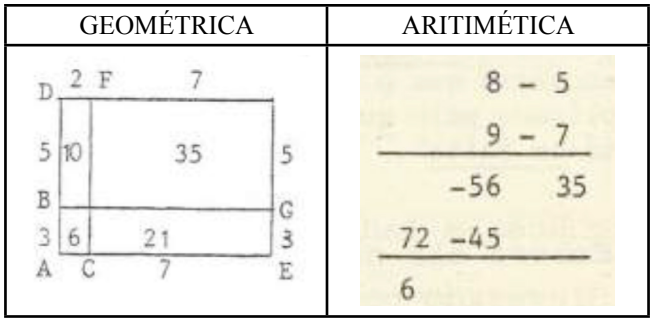


Figura 2 - Boletim GEPEM nº 17, ano 1985. pág. 48/9.

Nas demonstrações geométrica e aritmética apresentadas na figura 2, Stevin tentou convencer todos que há uma explicação lógica na regra de sinais. Porém, não se arriscava a justificar a mesma por meio de resolução de equações. A partir dessas demonstrações, os matemáticos passaram a utilizar a regra quando necessário, pois evitávamos uso de números negativos embora a fase de exploração do cálculo nesse período da história da humanidade os forçasse a utilizar as regras. A postura de Stevin diante dos números negativos é primeira manifestação clara do que Glaeser (1985) chama de 'sintoma de evitação', atitude dos matemáticos da época para utilizar apenas cálculos com números positivos.

René Descartes (1596–1650) foi um exemplo evidente do 'sintoma de evitação. Embora tenha desenvolvido a regra de sinais em sua obra *La géométrie*, fazia referência aos números negativos como números falsos. Descartes em seu sistema de coordenadas cartesianas procurou estabelecer relações apenas com coordenadas positivas (no primeiro quadrante). Com re-

lação ao sistema de eixos, mostrou sem detalhar as semirretas opostas que o formam, pois "nunca entendeu completamente o significado de coordenadas negativas" (BOYER, 1974, p. 251).

Pierre de Fermat (1601–1665), outro célebre exemplo de matemático que evitou trabalhar com números negativos, propôs um método diferente e, em alguns casos, os resultados com raízes falsas (negativas) fossem aceitáveis para a resolução de equações diofantinas. Isso porque "Fermat, como Descartes, não usava abscissas negativas" (BOYER, 1974, p. 254).

Ainda sobre o 'sintoma de evitação' podemos afirmar que Jaques Ozanam, ainda no séc. XVII d.C., publicou um dicionário de matemática, reservando um espaço para os tipos de números e não mencionou os negativos, mas ao destacar o assunto raiz, citou as raízes verdadeiras, falsas e imaginárias. A classificação de raiz falsa mostrou o quanto o valor negativo foi rejeitado e, embora os matemáticos o evitassem em seus cálculos, só confirmava cada vez mais sua importância diante da compreensão desse número (GLAESER, 1985).

Colin Maclaurin (1698–1746), em seu Tratado dos Fluxos afirmou que utilizar número negativo na álgebra era mais ou menos parecido com algo que não tinha fundamento real. Já no Tratado de Álgebra, Maclaurin mostrou que há duas espécies de quantidades, uma positiva e uma negativa e que esta última não está menos favorecida de regras que a primeira. Mas ao analisá-la como quantidade isolada, afirmou que não era possível conceber qualquer tipo de compreensão, mas no contexto algébrico era aceitável. De maneira simples ele tentou se explicar utilizando a igualdade $+a - a = 0$. Se multiplicarmos os dois membros da igualdade por uma quantidade n qualquer obteremos o valor zero ou, utilizando símbolos

+n.a - n.a = 0. Partindo da mesma ideia, no princípio multiplicativo com -n, tem-se (-n).(+a) = -n.a. Como os valores devem se anular então (-n).(-a), só poderia ser +n.a. Logo, -n.a + n.a = 0. Com isso Maclaurin quase entendeu os números negativos, se não fosse uma visão formalista que dele se apoderou por causa das regras de sinais, fugindo basicamente da compreensão ao finalizar sua explicação.

Leonard Euler (1707–1783) assim como os outros matemáticos, manipulava de maneira grandiosa os números relativos quando se tratava de cálculo, mas a compreensão pedagógica de Euler sobre o assunto ficou a desejar. Isso se evidenciou quando resolveu escrever uma obra mais didática e se viu na obrigação de justificar as regras de sinais (GLAESER, 1985).

Alexis Claude Clairout (1713–1765) em nada contribuiu para seu desenvolvimento dos números relativos. Utilizou um método de forma que passassem despercebidas todas as dúvidas sobre os negativos, mesmo não havendo documentação suficiente para mostrar sua omissão. Seu parecer sobre resultados negativos não era convincente, chegava a afirmar que às vezes quando essas respostas apareciam era pelo fato das questões estarem mal elaboradas. Essa falta de compreensão sobre os inteiros relativos era geral entre os matemáticos.

> A maior parte dos autores achava necessário demorar-se longamente sobre as regras que governavam a multiplicação de números negativos, e alguns rejeitavam categoricamente a possibilidade de multiplicar dois números negativos (BOYER, 1974, p. 337,338).

Enquanto alguns matemáticos rejeitavam a ideia de trabalhar com números relativos discriminando-os, outros aceitavam e declaravam publicamente sua incompreensão a respeito do assunto. Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783) foi um deles, não economizou motivos para justificar sua falta de entendimento sobre o número negativo. D'Alembert escreveu um artigo onde admitia o quanto era difícil fixar a ideia de quantidade negativa e que os próprios pesquisadores contribuíram para complicá-la.

Outra figura que se rendeu à incompreensão dos números negativos foi Lazare Carnot (1753–1823). Era o mais fiel leitor de d'Alembert e tinha grande prestígio entre os estudiosos da área. Embora com uma excelente imagem adquirida, teve que admitir sua falta de compreensão sobre os números negativos. Afirmava claramente que não entendia a existência de uma quantidade negativa: como seria possível subtrair uma quantidade maior de uma quantidade menor? Usou outro argumento, exemplificando dessa vez: se -2 é menor que 1, então $(-2)^2$ deveria ser menor que 1^2.

Essas questões levantadas por Carnot são de origem epistemológica comprovando mais uma vez que a incompreensão dos números inteiros relativos ainda predominava entre os matemáticos. A partir de dúvidas como essas levantadas por Carnot, foi produzido um desenvolvimento no estudo desse conjunto. Com essas interrogações outros matemáticos foram em busca de novos conceitos, inclusive na geometria.

Pierre Simon de Laplace (1749–1827) tinha uma concepção platônica a respeito desses números. Achava que a multiplicação dos relativos já existia na natureza, o trabalho

seria encontrá-la. Em suas palestras na Escola Normal Superior mostrara a dificuldade diante da regra de sinais.

> (A regra dos sinais) apresenta algumas dificuldades: custa conceber que o produto de -a por -b seja o mesmo que o de a por b. Para tornar sensível essa ideia observaremos que o produto de -a por +b é -ab (porque o produto nada mais é que -a repetido tantas vezes quantas são as unidades existentes em b). Observaremos, a seguir, que o produto de -a por (b-b) é nulo, pois o multiplicador é nulo; assim já que o produto de -a por +b é -ab, o produto de -a por -b deve ser de sinal contrário, ou igual a + ab para destruí-lo (LAPLACE *apud* GLAESER, 1985, p. 94).

O discurso de Laplace foi uma reafirmação da postura de Euler, no lugar de uma justificativa lógica e convincente pareceu mais uma imposição para a regra ser aceita, tendo como argumento a distributividade da multiplicação, sem contar com um modelo unificante para a regra, mas apenas um caráter formal.

Augustin Cauchy (1789–1857), ao lançar sua obra destinada à Escola Politécnica, diferencia números (reais positivos) de quantidades (números negativos). Ele tenta distinguir o caráter dinâmico que o número tem da quantidade indicada pelo sinal que representa um estado, utilizando para isso adjetivos. Os sinais (+) ou (-) precedendo o número designava quantidade positiva e quantidade negativa, respectivamente.

Essa convenção feita por Cauchy alertou os estudiosos para a diferenciação de sinais operatórios que indicam uma ação, aumentar ou diminuir, por exemplo, dos sinais predicativos que indica estado positivo ou negativo. Procurou mostrar em seu trabalho uma maneira razoável de compreender a regra de sinais da adição e da subtração e conseguiu facilitar o entendimento para operar com números inteiros relativos, mas para multiplicar, não teve êxito em seus argumentos. Na tentativa de encontrar outra maneira de justificar a regra de sinais para a multiplicação levou em consideração as noções de Maclaurin e Laplace sobre o assunto. Surgiu então a ideia de apresentar seu estudo de maneira formal trabalhando com símbolos e valor absoluto. Mas não seria tão fácil conseguir esse intento, pois de início, o próprio Cauchy acabou confundindo os dois tipos de sinais: o operatório e o predicativo. Utilizou argumentos que mostraram claramente sua incompreensão. Primeiramente ele representou por N um número qualquer fazendo $p=+N$ e $q=-N$ o qual podemos também escrever $+p=+N$ e +q=-N, sendo o oposto $-p=-N$ e $-q=+N$. Substituindo os valores ele justificou:

p=+p=+(+N)=+N
q=+q=+(-N)=-N
-p=-(+N)=-N
-q=-(-N)=+N

Dentro da perspectiva equivocada de Cauchy, o sinal do resultado é a multiplicação dos sinais anteriores. Posteriormente apresentou-se insatisfeito com seu trabalho, pois havia uma necessidade maior de operações com símbolos, pois os números complexos já eram estudados nessa época (GLAESER, 1985).

Foi quando Carl Friedrich Gauss (1777–1855) utilizou a ideia trabalhada na representação de números comple-

xos descoberta por CasparWessel (1745–1818) e que ficou durante trinta anos desconhecida. Desde a época de Girard os números reais de um modo geral, positivos, negativos e o zero, podiam ser representados por pontos em uma reta. Com esse conhecimento Gauss conseguiu entender os números relativos atribuindo-os o nome de inteiros gaussianos, trabalhando com raízes negativas e imaginárias (BOYER, 1974).

A estruturação e compreensão dos números inteiros começam a se fundamentar em meados do século XIX. Hermann Hankel (1839–1873), com sua teoria dos números complexos, mostrou um método viável de estruturar a aritmética de maneira geral, embora tenha utilizado ideias já desenvolvidas anteriormente por outros matemáticos. Este tratou do assunto de maneira formal já que estava mais do que comprovado a incompetência na compreensão e no ensino das regras de sinais. Karl Weierstrass (1815–1897) colaborou nos trabalhos de Hankel tentando "separar o cálculo da geometria e baseá-lo no conceito de número apenas". Essa tentativa pode ter contribuído para uma noção mais coerente para dos números negativos e para que a partir dali pudessem ser tratados com mais compreensão (BOYER, 1974, p. 410).

O fato dos números negativos levarem cerca de 1600 anos para serem compreendidos mostra claramente que os mesmos não partem de simples ideia filosófica de negação, mas que existe toda uma questão epistemológica por trás de sua construção. Esse breve relato histórico nos mostrou o quanto o domínio dos números inteiros foi instigado entre os matemáticos que os manipulavam muitas vezes sem compreendê-los. Embora a tentativa de entender esse campo numérico tenha durado um pouco mais que um século e meio, podemos observar que com ela deu-se também sua organização e sistematização.

Atualmente nossos alunos questionam de uma maneira ou de outra a aprendizagem dos números relativos, assim como nossos professores. Com essa pesquisa, baseada nos estudos de Georges Glaeser, realizamos uma análise dos obstáculos epistemológicos citados por ele, traçando um paralelo entre as dificuldades dos matemáticos para entender esses números com as dos alunos na visão de GLAESER (1985) e TEIXEIRA (1992).

Os obstáculos epistemológicos apontados por Georges Glaeser

A aprendizagem dos números inteiros tem como pressuposto o domínio dos números naturais e suas experiências no decorrer da vida escolar envolvendo situações de sobra e falta, de perdas e ganhos. As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão em $\mathbb{N}$ apresentam propriedades e deficiências[1]. Esse campo numérico se baseia na ideia de que sempre, associado a um elemento n, obtém-se $n+1$. A ideia de sucessor aparece como elemento forte para definir os números naturais a partir do axioma da Indução do matemático Giuseppe Peano (Santos, 2013).

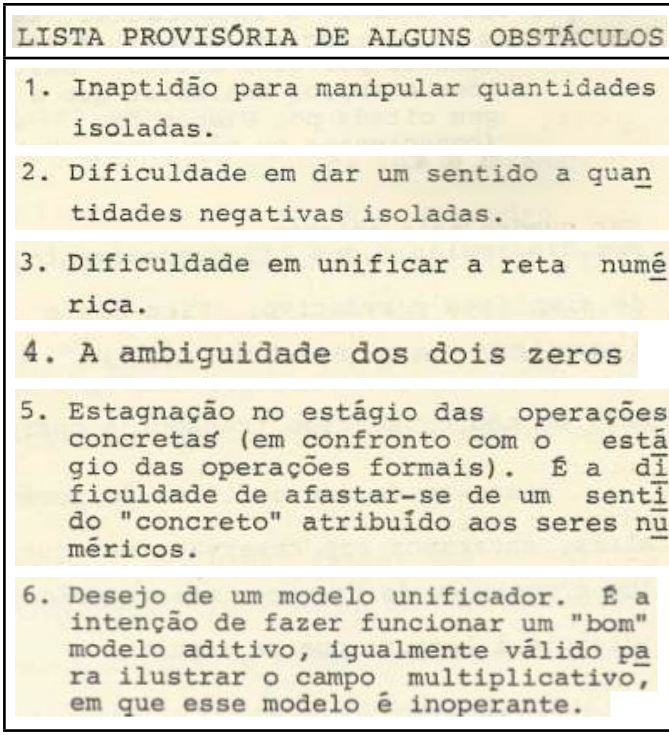
A dificuldade surge quando precisa abstrair a ideia de antecessor, pois sua limitação já foi estabelecida pelo elemento zero no campo dos naturais. Segundo Teixeira (1992, p. 94), o domínio de $\mathbb{N}$ mostra uma série de operações lógico-matemáticas como "conceituar, fazer correspondências, classificar, ordenar, compor, reverter, compensar" ligadas às propriedades

1 Quando nos referimos à deficiência estamos querendo dizer a impossibilidade de efetuá-las em algumas situações como, por exemplo, $(2\text{-}5) \notin \mathbb{N}$.

que regem esse conjunto. Elas servirão de base para a aprendizagem dos números inteiros. Para Piaget (2002) isso é possível porque a construção do conhecimento ocorre em níveis diferentes de estruturação, por meio de um processo em espiral. Ou seja, o conhecimento que foi elaborado passa a se projetar como conhecimento prévio para o conhecimento que será construído.

Na visão de Teixeira (1992, p. 92), a "construção do conceito de número inteiro, do ponto de vista do matemático, é uma ampliação dos naturais, sendo esta perspectiva necessária para demonstrar que as leis do sistema de numeração seguem sendo cumpridas".

A história dos números inteiros mostra que a 'obediência' das propriedades desse conjunto ao sistema de numeração teve uma evolução lenta e Glaeser (1985) em seus estudos analisa as dificuldades de compreensão que os matemáticos tiveram e compara com as dificuldades dos estudantes nos dias de hoje. Os obstáculos epistemológicos apontados por ele são resultado de um estudo que envolve uma investigação experimental e também histórica e mostram os números relativos no passado, na visão dos matemáticos. Em seu artigo aponta seis obstáculos epistemológicos apresentados pelos matemáticos na compreensão dos números inteiros relativos.



LISTA PROVISÓRIA DE ALGUNS OBSTÁCULOS

1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas.
2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.
3. Dificuldade em unificar a reta numérica.
4. A ambiguidade dos dois zeros
5. Estagnação no estágio das operações concretas (em confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos.
6. Desejo de um modelo unificador. É a intenção de fazer funcionar um "bom" modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, em que esse modelo é inoperante.

Figura 3 – Lista provisória dos obstáculos epistemológicos apontados por Georges Glaeser.
Fonte: Boletim GEPEM nº 17, ano 1985. pág. 39, 40.

No quadro a seguir, fez uma indicação com os sinais + ou – dos obstáculos transpostos por dez matemáticos que estudaram os números relativos. Os obstáculos que Glaeser (1985) não conseguiu identificar no quadro foram simbolizados pelo sinal de interrogação.

Assim, o símbolo + na coluna 01, por exemplo, na linha associada a Descartes, indica que este matemático em seu trabalho de compreensão dos números inteiros transpôs o obstáculo 1, enquanto que o sinal – na coluna 02 associada a D'Alembert indica que esse matemático não transpôs o obstáculo 2.

OBSTÁCULOS / AUTORES	1	2	3	4	5	6
DIOFANTES	—					
SIMON STEVIN	+	—	—	—	—	—
RENÉ DESCARTES	+	?	—	?		
COLIN MACLAURIN	+	+	—	—	+	+
LÉONARD EULER	+	+	+	?	—	—
JEAN D'ALEMBERT	+	-	—	—	—	—
LAZARE CARNOT	+	-	—	—	—	—
PIERRE DE LAPLACE	+	+	+	?	—	?
AUGUSTIN CAUCHY	+	+	—	—	+	?
HERMAN HANKEL	+	+	+	+	+	+

Figura 4 – Relação dos matemáticos e os obstáculos epistemológicos apresentados por eles.
Fonte: Boletim GEPEM nº 17, ano 1985, pág. 42.

Os números inteiros levaram mais de 1500 anos para serem conceituados e compreendidos definitivamente pelos matemáticos. Atualmente, as dificuldades de aprendizagem do conjunto $\mathbb{Z}$ continuam. Professores questionam ainda as causas dessas barreiras.

Piaget (2002) em seu estudo sobre epistemologia genética não deixou de lado uma análise sobre os números negativos. Para ele, considerar um número como algo estático e não

levar em conta seu caráter dinâmico já seria um obstáculo. Em sua teoria afirma que uma ação seja ela motora ou se dando por meio da intuição ou percepção é que gera uma operação. "Uma operação é então, psicologicamente, uma ação qualquer (reunir indivíduos ou unidades numéricas, deslocar, etc.), cuja origem é sempre motora, perceptiva ou intuitiva" (PIAGET, 2002, p. 48). A partir dessa ideia levanta uma questão: se todo conceito matemático passa por esse processo dinâmico, então o número negativo foge à regra? Há em sua compreensão, ausência de percepção ou intuição? Na visão piagetiana, não.

A aprendizagem significativa dos números inteiros deve ser considerada não apenas no sentido de entender suas propriedades, mas de aplicá-los num contexto mais amplo. Para isso, é necessária uma reestruturação do sujeito no que se refere ao conceito de número. Essa reestruturação exige alguns conceitos previamente estabelecidos para se confrontar com as novas situações referentes aos números relativos no intuito de transpor as barreiras epistemológicas que vão surgindo.

Os obstáculos 1 e 2 retratam bem essas modificações diante da subtração $a-b$ quando $b>a$, pois a experiência que o aluno tem dos números naturais faz com que tal situação gere um conflito do antigo com o novo conhecimento. Dessa forma, deve tomar consciência da existência de uma situação em que os números em questão, positivo ou negativo, não são mais quantidades apenas, mas fazem parte de todo um contexto situacional, realidades reversas. À medida que vai abstraindo ideia de sobra ou de falta, faz com que surjam novas integrações, toma consciência de que essas relações mostram um único universo para os números inteiros (TEIXEIRA, 1992).

A ideia de que um número negativo é menor que um número positivo faz com que o sujeito observe que há um ponto que separa esses dois gêneros. Nesse momento ela se defronta com o obstáculo 3: tentar entender que esse conjunto numérico é geometricamente, a unificação de duas semirretas opostas. Associado ao obstáculo 3 está o obstáculo 4, pois diferenciar o zero absoluto do zero origem é uma dificuldade apontada ao longo da história dos inteiros. Os obstáculos apontados por Glaeser (1985) na figura - 04 mostra claramente que alguns chegaram a superar os obstáculos 5 e 6 sem que o 3 e o 4 tivesse sido, como foi o caso de Colin Maclaurin (1698–1746).

Os obstáculos 3 e 4 mostram o quanto é difícil entender os inteiros relativos como ampliação do conjunto dos números naturais. Segundo Teixeira (1992), o confronto começa quando o zero origem aparece, pois este, em sua função já permite valores menores que ele. No conjunto $\mathbb{N}$ o elemento zero absoluto é visto como ausência de quantidade e a dificuldade que o aluno encontra é diferenciá-lo do zero como origem, pois até então, não existe nenhum valor abaixo dele. Na situação em que se apresenta é visto como ponto de referência convencionado, e não como uma representação de nenhuma quantidade. Vemos mais uma vez a necessidade de compreender os conceitos e propriedades dos números naturais para servir como base de entendimento dos números inteiros relativos.

O obstáculo 5 mostra a dificuldade de transição do operatório concreto para o operatório formal. Segundo Andreatta (1970), a criança no nível das operações concretas constrói e coordena o pensamento etapa por etapa, junta toda uma base

para definir ou decodificar um conceito, caminha lentamente nesse período e mesmo refletindo com base no empírico, amplia muito pouco o mundo real. Já no nível formal, o sujeito considera todas as combinações possíveis na elaboração de conceito ou ideia. Nesse período vai aos poucos formulando hipóteses, verificando-as, deduzindo-as, rejeitando-as quando não convém e chegando à descoberta de uma lei fundamentada na abstração.

Para Piaget (2002), o que é mais importante nesse período é a distinção feita entre o real e o possível, na qual o sujeito agora reflete sobre cada ação, abstraindo o necessário para a construção do conhecimento. Quando o sujeito passa a ter noção de número negativo ocorre uma reorganização de conceitos, observando uma reestruturação de conhecimento por meio de esquemas de ação que são a assimilação e a acomodação, havendo nesse processo equilíbrios e desequilíbrios.

> As operações formais fornecem ao pensamento um novo poder, que consiste em destacá-lo e libertá-lo do real, permitindo-lhe assim, construir a seu modo as reflexões e teorias [...]. Toda nova capacidade da vida mental começa por incorporar o mundo em uma assimilação egocêntrica, para só depois atingir o equilíbrio, através de uma acomodação ao real (PIAGET, 2002, p. 60).

Quando o indivíduo se depara com os números negativos, começa a assimilar esse conhecimento que vai de encontro ao conhecimento já existente, que são os números naturais. Ao se confrontarem ocorre o desequilíbrio seguido da acomodação e um novo equilíbrio surge, adequando e am-

pliando, nesse caso, conceitos e propriedades que venham a servir para os números relativos.

> O equilíbrio é atingido quando a reflexão compreende que sua função não é contradizer, mas, se adiantar e interpretar a experiência. Este equilíbrio, então, ultrapassa amplamente o do pensamento concreto, pois, além do mundo real, engloba as construções indefinidas da dedução racional e da vida interior (PIAGET, 2002, p. 60-61).

Um novo conceito se sobrepõe em harmonia com o antigo, no caso do número negativo há uma dificuldade maior visto que este dá ideia de negação ao positivo, ideia de contradição. Quando o sujeito supera o obstáculo 5 automaticamente supera o obstáculo 6, pois segundo Teixeira (1992) o número negativo só é compreendido no momento em que ocorre a transição do fazer como ato mecânico para o como fazer e por que fazer, esse fato é característica da passagem dos estágios de desenvolvimento concreto para o formal. As regras de sinais agora aparecem para justamente substituir as operações concretas, por meio de uma abstração reflexionante para apresentar os números inteiros mediante um aspecto mais dedutivo. Assim, como em $\mathbb{N}$ há operações com soma de quantidade ou subtração de quantidade, o número inteiro também tem caráter dinâmico, embora apresente um duplo sentido. Um sentido representa uma quantidade de sobra ou de falta quando aparece seguido de sinais indicativos (+) ou (-), respectivamente, indicando estado, o outro sentido é operatório.

Glaeser (1985) afirma que após as construções no conjunto $\mathbb{Z}$ é necessário compreender alguns aspectos centrais que

envolvem o número como operador e o porquê da operação. Com as propriedades já estabelecidas, as operações passam a ganhar novo significado e se ampliam.

Vejamos o caso da adição. Nos números naturais o sinal é de natureza exclusivamente operatória, nos inteiros a adição ou acresce ou decresce e o seu próprio conceito passa a ser ampliado. Teixeira (1992, p. 98) afirma que a "adição deixa de ser apenas acrescentar (um dos casos) para ter um novo significado, mais genérico, de associação ou composição". No caso da subtração também há o que considerar. Para compreendê-la precisamos do invariante da inversão, e não apenas do conceito de retirar. Devemos dar um sentido mais transformador, o que não é tão fácil. Embora o aluno desenvolva todas essas estruturas e passe a entendê-las, no momento em que são simplificadas, ocorre uma perda na compreensão das ideias e propriedades da operação, porque o próprio sinal indicativo acaba sendo confundido com um sinal operatório. Observemos os exemplos a seguir:

(+7)+(+2)=+7+2=+9
(-7)+(-2)=-7-2=-9
(+7)+(-2)=+7-2=+5
(-7)+(+2)=-7+2=-5

O aluno precisa saber que nos dois primeiros há uma adição enquanto que nos dois últimos, ao inverter um dos operadores, a subtração surge na transformação. Segundo Teixeira (1992, p. 99) a "subtração nada mais é que a composição entre operadores, ou seja, uma adição".

A multiplicação nos números inteiros relativos também sofre modificações. Nos naturais ela nos dá a ideia de adi-

ção de parcelas iguais. No conjunto dos números inteiros além dessa função o operador multiplicativo faz transformações de acréscimo ou decréscimo, principalmente quando se depara com a multiplicação de dois números negativos. (DANTE, 2009; IEZZI, DOLCE, MACHADO, 2009).

> Na multiplicação, portanto, é preciso compreender que há uma duplicidade de operações: as que multiplicam os conjuntos equivalentes, ao mesmo tempo em que há operações de transformação que se aplicam aos números, fazendo-os manter ou inverter sua posição na região a que pertenciam (TEIXEIRA, 1992, p. 100).

Portanto, o obstáculo 6 é um dos mais complexos e está intimamente ligado ao obstáculo 5. O aluno, ao sair do operatório concreto para o formal, consegue abstrair melhor essas relações de inversão e de transformação, se essa transição não for bem trabalhada será inevitável para ele criar, mesmo de maneira equivocada um modelo unificador de regras de sinais, surgindo, assim, os obstáculos 5 e 6 para a aprendizagem dos inteiros relativos. "Aprender o caráter dos números inteiros significa não só desenvolver os esquemas necessários no contexto de cada um dos modelos, mas, sobretudo abstrair desses esquemas a sua forma mais geral" (TEIXEIRA, 1992, p. 102).

Portanto, dentro desse processo de aprendizagem do conjunto $\mathbb{Z}$ há um conjunto de esquemas a serem aplicados na construção de conceitos e operações. Esse desenvolvimento não é tão simples, requer alguns mecanismos de abstração e de generalização que tornam possível a compreensão desse conjunto e a superação dos obstáculos e dificuldades.

O que podemos considerar sobre o ensino de números inteiros

Um aspecto importante para o ensino dos números inteiros é sua aplicação, ou seja, o aluno precisa transcender o processo mecanizado de conceituação e manipulação apenas para entender melhor esse campo numérico e, em seguida, conseguir com o domínio do conceito e da técnica, aplicá-lo. A variedade de situações facilita uma melhor compreensão desse conjunto, pois com ela o aluno pode adquirir habilidades para posteriormente contextualizar esses números.

Essa ideia confirma a visão de Lima, (1999, p. 77) quando afirma que "o ensino da Matemática deve abranger três componentes fundamentais que denomina de conceituação, manipulação e aplicações". Explica que a dosagem certa consegue estabelecer um ensino equilibrado e que garante a aprendizagem. A conceituação tem como objetivo estabelecer a ideia, formalizar o enunciado das proposições e definições.

A manipulação tem um caráter algébrico, facilitando a habilidade do aluno em seus cálculos. Já a aplicação é o aspecto em que o conceito é empregado com o domínio da manipulação, desde situações simples do dia a dia às mais complexas questões científicas, através de modelos matemáticos.

A aprendizagem operatória dos números inteiros implica no uso de algumas invariantes ou propriedades contidas no próprio conjunto $\mathbb{Z}$ como também a construção de alguns esquemas de aprendizagem. Para construir ações e trabalhar com os invariantes e os esquemas faz-se necessário abstrair um pouco a realidade dos inteiros relativos em contextos onde esses elementos estão inseridos. Esse processo, facilitando a

compreensão, ajuda também a facilitar a aprendizagem (PIAGET, 2002).

A diversidade de aplicações com as operações de números inteiros fazem com que os alunos assimilem melhor a aprendizagem desse conjunto desde que as situações analisadas, das mais simples às mais complexas, não sejam apenas reproduções mecânicas, mas consigam subsidiar um melhor desenvolvimento epistemológico. Os modelos matemáticos de inteiros relativos ligados ao dia a dia devem ser considerados como ponto de partida, ou seja, como sugestão, todo conteúdo precisa ser iniciado com uma situação-problema. No caso dos números negativos devem ser explorados com ênfase, pois sua compreensão vai além da ideia de ampliação dos naturais, mas abrange todo um conceito de negação ou de realidade reversível (LORENZATO, 2006).

O não entendimento da ideia do número negativo, de sua função e utilização; a falta de aplicação para mostrar claramente sua existência, para compreender subtração quando o primeiro termo é menor que o segundo; seu significado no desenvolvimento e na finalização de operações; como também a não compreensão da lógica dos inteiros na reta numérica foram pontos destacados pelos estudos de Glaeser (1985). A análise de seu artigo nos fez buscar interrogações consideráveis como: que outros obstáculos existem além dos epistemológicos em relação à aprendizagem de números inteiros? Que outras metodologias podem ser aplicadas para facilitar o ensino do conjunto $\mathbb{Z}$? Como o professor poderia buscar novas metodologias? Está o professor capacitado para fazer uma mediação necessária diante das dificuldades do processo de ensino e de

aprendizagem dos números negativos? A falta de uma contextualização histórica na sala de aula pode ser considerada como barreira no ensino do conjunto $\mathbb{Z}$? Espera-se que as questões aqui levantadas possam posteriormente, respondidas de modo que nos auxiliem com métodos adequados para melhor compreensão aprendizagem dos números inteiros.

Referências

ANDREATTA, Maria Carrilho Fernandes. **Exame de alguns esquemas mentais que caracterizam a transição do pensamento operatório concreto ao operatório formal, segundo Piaget, e seu significado pedagógico**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Departamento de Metodologia do Ensino e Educação Comparada da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1970.

BOYER, Carl Benjamin, **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática.** 6º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2009.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio. **Matemática e realidade.** 6º ano. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

GLAESER, Georges. Epistemologia dos números relativos. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n.17, p. 29-124, 1985.

LIMA, Elon Lages. Conceituação, manipulação e aplicações – Os três componentes do ensino da matemática. **Revista do professor de Matemática**. Rio de Janeiro, nº 41, 3º quadrimestre, p. 01-06, 1999.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática.** Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de professores).

PIAGET, Jean. **Seis estudos de Psicologia**. Tradução de Maria Alice Magalhães D'Amorim e Paulo Sérgio Lima Silva, 24. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2002.

PIRES, Célia Carolino; CURI Edda; PIETROPAOLO, Ruy. **Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 6ª série, 2002.

SANTOS, Joelma Nogueira. **A construção do conceito de número natural e o uso das operações fundamentais nas séries iniciais do ensino fundamental:** uma análise conceitual. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

TEIXEIRA, Leny Rodrigues Martins. **Aprendizagem escolar de números inteiros:** análise do processo na perspectiva construtivista piagetiana. Tese (Doutorado em Psicologia) – Centro de Pós-Graduação em Psicologia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1992.

CAPÍTULO 06

A HISTÓRIA DA SBEM NO CEARÁ: DESAFIOS E PERSPECTIVAS

Maria Gilvanise de Oliveira Pontes

Introdução

No Brasil, nos últimos vinte e sete anos, a Educação Matemática tem se destacado como um campo de ação, estudos e pesquisas. A cada ano, vem aumentando o número de eventos realizados nas diversas partes do país, com a finalidade de trocar ideias e socializar experiências desenvolvidas por grupos de matemáticos, educadores matemáticos, pedagogos e psicólogos, buscando melhorias e novas estratégias para o ensino de Matemática (PONTES, 1998).

Tais eventos têm servido para fortalecer e multiplicar os adeptos desse ramo de pesquisa. Com isso, a Educação Matemática vem adquirindo respeito e credibilidade no campo científico. No Brasil, esse movimento nasceu com a SBEM em 1988 e, no Ceará, em 2002, com a criação da Regional DR-CE pela sétima Diretora, Célia Maria Carolino Pires, cuja primeira diretora foi Maria Gilvanise de Oliveira Pontes, que atuou até 2013. A quantidade de pesquisadores e pesquisas em Educação Matemática é ainda muito restrita, mas cresce pouco a pouco.

As pesquisas em Educação Matemática têm contribuído para melhorar, de forma significativa, os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Observa-se que as reformas curriculares e o desenvolvimento de propostas pedagógicas estão cada vez mais presentes no ambiente escolar. Entretanto, ainda se percebe que, raramente, nas aulas de Matemática, o estudante testemunha a ação do profissional matemático na identificação e na solução do problema. O que ele nota, normalmente, é uma solução bonita, elegante, sem dúvidas, sem obstáculos e bastante eficiente, em que o professor espera que ele também consiga resolver problemas matemáticos com a mesma eficiência e rapidez, como afirma Caraça (1989). Desse modo, é necessário que o professor veja o ensino de Matemática como uma disciplina de investigação, que deve estar voltada para ajudar o aluno a compreender e explicar a sua realidade, como enfatiza D' Ambrosio (1993). No entanto, o que se verifica, até mesmo nos cursos de formação de professores, é que este ensino está voltado para memorização e aplicação de fórmulas, totalmente desvinculado da realidade e interesse do aluno. Segundo a referida autora (1993, p. 36),

> [...] infelizmente, o processo de transmissão de conhecimento utilizada na experiência matemática da maioria dos nossos alunos do terceiro grau, não deixa que os alunos analisem a Matemática como uma área de pesquisa e investigação. Assim como no processo de construção do conhecimento para cada aluno, a essência do processo tem que ser a pesquisa.

Refletir sobre a sua prática docente e inovar é dever do professor, com o intuito de investigar novas formas de ensino e de aprendizagem, mas isso exige profunda mudança de mentalidade, o que é difícil, principalmente para o professor de Matemática. Assim, na sua formação inicial e continuada, é fundamental que isso aconteça. Nessa perspectiva, faz-se necessário que o professor conheça os passos históricos por que o homem passou para a construção do conhecimento matemático e conheça as necessidades mentais e sociais que contribuíram para a construção do conhecimento matemático, a fim de que, na sua aplicação em sala de aula, o professor possa ajudar o aluno a recompor os seus conhecimentos matemáticos e utilizá-los da melhor forma possível, no meio social em que vive (BORGES NETO & DIAS, 1999).

Partindo dessas reflexões, em 1987, duas educadoras matemáticas cearenses, preocupadas com esta situação, participaram da semente de criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, na PUC-SP, por ocasião do I Encontro Nacional de Educação Matemática - I ENEM. As educadoras vêm acompanhando ativamente os trabalhos dessa comunidade científica, apresentando sua contribuição em congressos, encontros regionais, nacionais e internacionais. No plano de expansão da SBEM, está prevista a criação de Diretorias Regionais - DR, nas diversas unidades da federação. No Ceará, até junho do ano 2001, a SBEM contava com 66 associados, o que ensejava a criação da SBEM-CE.

Nesse sentido, o grupo de professores de Matemática do Núcleo de Educação Continuada e a Distância – NECAD da Universidade Estadual do Ceará- UECE, sob a nossa coordenação resolveu realizar a I Jornada Cearense de Educação

Matemática – I JCEM, com o tema Influência e Função da Educação Matemática nos Conhecimentos Humanos, com a finalidade de possibilitar intercâmbio entre os pesquisadores da Educação Matemática para incentivar a participação em eventos científicos nessa área, a criação e a manutenção de laços interpessoais e afinidades profissionais.

O referido evento teve como objetivo criar a Diretoria Regional da Sociedade Brasileira de Educação Matemática no Ceará - SBEM-CE, com o intuito de congregar educadores comprometidos com a Educação Matemática. Os objetivos específicos adotados para a realização desse evento foram: discutir sobre a trajetória da Educação Matemática e os seus atuais desafios; socializar experiências vivenciadas em sala de aula e atividades desenvolvidas por educadores matemáticos cearenses; e divulgar trabalhos científicos de pesquisadores em Educação Matemática.

A atuação da SBEM-CE, no período 2002 a 2013

A I Jornada Cearense de Educação Matemática – I JCEM objetivou a criação da SBEM-CE. O evento foi realizado nos dias 08 e 09 de agosto de 2002, nas dependências da UECE, na cidade de Fortaleza, com um público de 420 pessoas, composto por professores interessados em Educação Matemática, alunos de Licenciatura em Pedagogia e Matemática, educadores e pesquisadores em geral que atuam nas redes pública e privada do Ensino Fundamental, Médio e Superior. Na jornada, foram desenvolvidas várias atividades: uma conferência de abertura; 05 sessões de comunicação científica, 07 palestras e 21 oficinas, que ocorreram no campus da UECE, no Itaperi.

Iniciamos o evento no dia 08/07/2002, às 10h, com a apresentação de 19 trabalhos científicos distribuídos em cinco sessões. Percebeu-se uma grande participação do público, aproximadamente 110 pessoas, por meio dos seus questionamentos e reflexões. Além disso, houve alguns relatos de experiência dos participantes. Vale ressaltar que todos os trabalhos inscritos estavam ligados à temática da I Jornada Cearense de Educação Matemática e que muitos professores presentes nunca tinham participado desse tipo de atividade. Desse modo, os grupos apresentaram um grande entusiasmo nas discussões levantadas.

No período da tarde, às 14h, aconteceu a abertura oficial da jornada, com a fala da coordenadora do evento, professora Maria Gilvanise de Oliveira Pontes, seguida da palavra da VII presidente da SBEM Nacional, a professora Célia Maria Carolino Pires (MUNIZ, 2013), que proferiu a conferência A Trajetória da Educação Matemática e seus Atuais Desafios. Contou com um público em torno de 410 pessoas. Ao final da conferência, houve uma calorosa discussão acerca do tema em questão, em que os presentes apresentaram muitas dúvidas e buscavam alternativas viáveis para o ensino de Matemática. Logo em seguida, tomou posse a Diretoria provisória da SBEM/CE, composta por: secretário executivo – Maria Gilvanise de Oliveira Pontes; primeiro secretário – Maria Ivoneide Pinheiro de Lima; segundo secretário – Maria Ivonisa Alencar Moreno; terceiro secretário Francisco Martins de Souza; primeiro tesoureiro – Hipólito Peixoto de Oliveira; e segundo tesoureiro – Acácio Freitas.

Posteriormente, os participantes foram convidados a deslocar-se para as salas de aula, a fim de participarem das seguintes palestras, que aconteceriam simultaneamente:

- A Matemática Grega: de Tales e Euclides – Prof. Francisco Martins de Souza;
- Análise do Livro Didático - Prof. Cleiton B. Vasconcelos;
- Por onde anda a Matemática – Prof. Acácio Freitas
- Desenvolvimento do Raciocínio Matemático – Prof. Hermínio Borges Neto;
- Malba Tahan: um educador matemático – Prof. Gilberto Telmo S. Marques;
- Perspectivas Contemporâneas na Formação de Professores – Prof. João Batista Carvalho Nunes;
- Análise do Nível de Raciocínio Matemático e da Conceitualização de Conteúdos Aritméticos e Algébricos no Ensino Fundamental: considerações acerca do Telensino Cearense.

No dia seguinte, no período da tarde, foram realizadas 17 oficinas de Matemática:

- Geometria Dinâmica com o *Software* Cabri-Géomètre – Maria José de Araújo;
- Tangram – Profa. Mércia de Oliveira Pontes e Profa. Neuma Leandro Evangelista;
- Ábaco – Profa. Rosa Cristina Aires de Oliveira
- Números Decimais com Material Dourado – Profa. Sandra Maria Rodrigues;
- Dinâmica de Grupo – Profa. Marbênia Gonçalves;
- O Ensino de Cônicas na Sala de Aula – Prof. Eraldo;
- O Uso da Calculadora nas Aulas de Matemática – Prof. Alan Arraes S. de Alencar;

- Jogo de trocas com Sucatas – Profa. Yvone Franco;
- Dobraduras – Profa. Cristiane;
- Confecção de Paradidáticos de Matemática – Prof. Dimas Machado;
- Tratamento da Informação – Prof. Hipólito Peixoto;
- Jogos Matemáticos em Sala de Aula – Prof. José Euvaldo Bezerra Santos;
- Laboratório de Matemática: um recurso didático no ensino de PA na Sexta série – Profa. Ana Cláudia M. Pinheiro;
- Introdução ao estudo de medidas – Profa. Paula Sandra F. Monteiro;
- Blocos lógicos – Profa. Maria Ivonisa Alencar Moreno;
- Material Cuisenaire – Profa. Ivoneide Pinheiro Lima;
- Régua de Frações.

A realização das oficinas ocorreu simultaneamente e tinha como objetivo despertar o público para o uso de materiais concretos nas aulas de Matemática; resgatar o caráter investigativo do professor, ou seja, estimular a ação do professor como professor-pesquisador; e apresentar caminhos por meio de indicação de leituras para inovação do ensino da disciplina em questão.

Desse modo, as oficinas contaram com um grande público, aproximadamente 380 pessoas. Foi um momento de descontração e rico em aprendizagens. Os participantes demonstraram interesse em aprender a manipular os recursos pedagógicos apresentados e, principalmente, discutir a melhor maneira de trabalhar a Matemática, em sala de aula.

Dando prosseguimento às ações da SBEM-CE, em 2003, nos dias 06 a 08/06, foi realizada a II Jornada Cearense de Educação Matemática – II JCEM, com o tema: A Formação Pedagógica do Professor de Matemática, cuja Conferência de Abertura, intitulada Educação Matemática na Prática Educativa, teve como autor o Prof. Dr. Luiz Roberto Dante, da Unesp/Rio Claro-SP, contando com o aval da Editora Ática.

Figura 1 - Cerimônia de Abertura da II JCEM.
Fonte: Da autora.

No dia 07/06, de 8h às 12h e de 14h às 15h40, houve 14 minicursos simultâneos:

- A calculadora como ferramenta para o ensino de Matemática – Prof. Alan Arraes S. de Alencar;
- Algarismos romanos revisitados: uma contribuição ao estudo do sistema de numeração – Prof. Francisco Edison E. de Sousa;

- Álgebra interativa: desenvolvendo o pensamento algébrico com o uso de novas tecnologias – Prof. José Aires de Castro Filho;
- Análise do livro didático – Prof. Cleiton B. Vasconcelos;
- A resolução de problemas na aprendizagem matemática nas séries iniciais do ensino fundamental – Profa. Paula Sandra F. Monteiro;
- Fatoração algébrica com uso de material concreto – Profa. Ana Carolina C. Pereira e graduanda Andréa Maria F. Moura;
- Filosofia Matemática e Platonismo – Prof. Francisco Martins de Souza;
- Jogo de trocas como fundamentação para sistemas de numeração - Prof. Vagner Pinto Dieb;
- Laboratório de Geometria Plana e Espacial – Prof. Dr. Rômulo Marinho do Rego – UFPB;
- Matemática: uma ferramenta interdisciplinar – Profa. Rosa Cristina Aires de Oliveira e Profa. Sandra Maria Rodrigues;
- Materiais Didáticos e jogos no ensino de Matemática – Profa. Dra. Rogéria Gaudêncio do Rego -UFPB;
- O Construtivismo na Educação Matemática – Profa. Ivanice Montezuma de C. Pinheiro;
- Jogos Matemáticos com lápis e papel para uso em sala de aula – Prof. José Euvaldo Bezerra Santos;
- Uso da fita métrica nas aulas de Matemática: uma prática que estimula a autonomia do aluno – Profa. Elisabeth Matos Rocha.

Das 16h às 18h, aconteceram palestras simultâneas:

- As Novas Tecnologias e o Ensino de Matemática – Prof. Dr. José Aires de Castro Filho;
- História da Matemática no Ceará: o século XIX –Prof. Ms. George Pimentel – URCA/UFRN;
- Laboratório de Estudos e Pesquisa da Aprendizagem Científica – LEPAC – Profa. Dra. Rogéria Gaudêncio do Rego – UFPB;
- Malba Tahan, um precursor da Educação Matemática. Prof. Gilberto Telmo S. Marques;
- Sequência Fedathi – Prof. Dr. Hermínio Borges Neto – UFC;
- Uso da História da Matemática no ensino – Prof. Dr. Iran Abreu Mendes – UFC;
- As Políticas Públicas para o Ensino Médio na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Prof. Dr. Humberto Carmona – UECE/SEDUC.

No dia 08, de 8h às 10h, realizaram-se várias comunicações científicas.

O encerramento se deu às 10h30, com a Conferência do Prof. Dr. Francisco Martins de Souza – UECE, intitulada O Teorema de Godel e os fundamentos da Matemática.

Era intenção da SBEM-CE realizar, anualmente, a Jornada Cearense de Educação Matemática -.JCEM.

Dadas as circunstâncias, a III Jornada Cearense de Educação Matemática – III JCEM só foi realizada no perío-

do de 29 a 31 maio de 2008, no Instituto Federal do Ceará, àquela época, denominado de Centro de Educação Federal e Tecnológico – CEFET, com as seguintes atividades:

No dia 29/05/08:

- Cerimônia de Abertura com o Prof. Dr. Hermínio Borges Neto e composição da chapa para eleição da SBEM-CE a se realizar, por aclamação, por ocasião da cerimônia de encerramento;
- Conferência de Abertura com a Profa. Dra Nilza E. Bertoni sobre o tema A SBEM e a Educação Matemática.

No dia 30/05/08, no horário de 8h às 12h30, realizaram-se sessões de minicurso. Na parte da tarde, de 14h às 16h, duas Mesas Redondas simultâneas: MR1- Tecnologias e Modelagem Matemática, com a participação dos Prof. Aires, Hermínio e Júlio Wilson, e MR2 - Formação de Professores de Matemática, com as Profas. Dra Nilza Bertoni – UnB e Maria Lúcia Monteiro da Silva - UFAL.

Figura 2 - Cerimônia de Abertura da III JCEM.
Fonte: Da autora.

No horário de 16h às 18h, houve a apresentação de vários pôsteres, que vão aqui listados com seus respectivos autores:

- PO01 - Modelagem Matemática no ensino de Trigonometria – Odimógenes Soares Lopes;
- PO02 - O bom professor: características essenciais à docência em Matemática – Maria José Araújo e Hermínio Borges Neto;
- PO03 - Transversalidade: uma tendência no ensino de Matemática – Rodney Marcelo Braga dos Santos;
- PO04 - A ludicidade no desenvolvimento da aprendizagem da Tabuada – Elisângela, Camilo e outros;

- PO05 – A Construção do Origami como prática educativa no ensino de Geometria Plana – Daniele Luciano, Danilo Barros e outros;
- PO06 – Utilizando *software* matemático como mediador do ensino do gráfico de funções quadráticas – Marcos Monte Cruz e Luiza Santos Pontello;
- PO07 – Aprendizagem significativa de Matemática na 5ª série do ensino fundamental através de Resolução de Problemas;
- PO08 – A importância dos jogos no estágio das operações concretas no ensino fundamental;
- PO09 – Prática pedagógica dos professores de Ensino Superior – Benedita Marta G. Costa;
- PO10 – Análise das tensões térmicas em materiais cerâmicos – Reinaldo Rodrigo C. Gomes, orient. Francisco Camilo da Silva;
- PO11 – Gangorra Interativa: aprendizagem conceitual de grandezas – Maria Lavor S. de Melo, Francisco Herbert, Castro Filho e Mauro Pequeno;
- PO12 – Estudo da perda da biodiversidade com uma abordagem da educação ambiental no ensino de Matemática - Antônia;
- PO13 – Vida, Filosofia e obra de Tales de Mileto: algumas indicações para o ensino de Matemática – Fabrício Bandeira Silva, Francisco Regis V. Alves e Aluísio Cabral de Lima;
- Exposição de Poliedros – Prof. Dr. João de Deus Lima - UERN.

Figura 3: Exposição de Poliedros da III JCEM.
Fonte: Da autora.

No dia 31/05/08, no horário de 8h às 10h, aconteceram simultaneamente três Mesas Redondas: MR1 - Licenciaturas em Matemática no Ceará, com a participação da Profa. Luiza Pontello – IFCE, Luciano – UECE e Plácido – UFC, e MR4 – As sociedades científicas: SBM, SBEM e SBHMat, com a participação do Prof. Dr. João Lucas Barbosa, Prof. Dr. Paulo Figueiredo e Jonh A. Fossa, respectivamente, membros de cada sociedade.

Das 10h30 às 11h30, o Prof. Dr. Paulo Figueiredo, da UFPE, e presidente em exercício da SBEM proferiu a conferência de encerramento, após a qual a nova diretoria composta foi eleita por aclamação, cujos membros são:

Diretora - Maria Gilvanise de Oliveira Pontes –CED/UECE.

Vice: Dalci de Sousa Araújo – UFS/Cefet-Pirambu.

1º Secretário: Hermínio Borges Neto – UFC.

2º Secretário: Maria José Araújo Sousa – UVA.

3º Secretário: Francisco Edisom E. de Sousa - UECE/Feclesc.

1º Tesoureiro: Luciana de Lima – UAB/Cefet.

2º Tesoureiro: Flávio Alexandre Falcão do Nascimento-UECE/Fafidam.

3º Tesoureiro: Zelalber – URCA e CEFET Juazeiro do Norte.

Nesse momento, foram criados 6 polos e escolhidos seus representantes:

- Zona Norte: Benedita Marta G. Costa – UVA.
- Zona Sul: Bárbara Paula Bezerra Leite – URCA.
- Centro-Sul: Francisco Camilo da Silva – CEFET-CE/UNED/Cedro.
- Inhamuns: Maria Ivoneide Pinheiro do Lima – FECLIN.
- Sertão Central: Francisco Edisom Eugenio de Sousa – FECLESC.
- Zona Jaguaribana: Acácio Lima de Freitas – FA-FIDAM.

Essa diretoria, cuja gestão deveria durar para o triênio 2008 a 2011, atuou precariamente, tendo em vista que a diretora e a vice, na condição de aposentadas, não contavam com a participação dos outros membros que estavam na ati-

va, trabalhando, em geral, três experientes. Desse modo, isso perdurou até 2013, quando se realizou eleição para a nova diretoria da SBEM-CE, sendo eleitos os seguintes membros, para atuarem no triênio 2013 a 2016.

O diretor, Cleiton Batista Vasconcelos, foi violentamente tirado do nosso meio no dia 21/04/2014, deixando uma lacuna irreparável na SBEM e na comunidade de Educadores Matemáticos do Brasil. A nova diretoria foi formada por:

- Diretor Regional: Cleiton Batista Vasconcelos (UECE).
- Vice-Diretora Regional: Ana Carolina Costa Pereira (UECE).
- Primeira Secretária: Jeanne D'arc de Oliveira Passos (UECE).
- Segundo Secretário: Miguel Jocélio Alves da Silva (UVA).
- Primeiro Tesoureiro: Eugeniano Brito Martins (SEDUC-CE).
- Segundo Tesoureiro: Rodrigo Lacerda Carvalho (UECE).
- Suplente: Luiza Pontello (IFCE).

Figura 04: Diretoria da SBEM (2013-2016).
Fonte: Da autora.

Dificuldades apresentadas na três jornadas e sucessos obtidos

Um dos obstáculos encontrados foi o número reduzido de professores que trabalharam para a realização dos eventos, ficando um pequeno grupo sobrecarregado. Foram vários os motivos para que esse fato acontecesse, como falta de tempo, pois a grande maioria dos professores trabalha diariamente nos três turnos, além de terem outros compromissos já agendados.

O fato de os eventos terem sido realizados em fins de semana, ou seja, na sexta, no sábado e no domingo, por isso se tornaram bastante cansativos, principalmente no período final da tarde, já que os participantes, na sua grande maioria, têm no decorrer da semana um ritmo de trabalho e de estudo muito exaustivo.

Outro fator que dificultou bastante a abertura da I JCEM foi a realização do jogo do Brasil na copa 2002, que aconteceu no sábado, às 8h30. Isso nos obrigou a mudar a programação do evento para o turno da tarde, tendo a conferência da Professora Célia Maria Carolina Pires, prevista para este horário, de ser transferida para a tarde.

O atraso dos materiais de apoio, nas salas de comunicações científicas e o não comparecimento de um dos coordenadores foram outras dificuldades encontradas, pois atrasou o início das atividades.

O cancelamento de algumas oficinas, por diversos motivos, foi outro obstáculo encontrado, tendo em vista a decepção dos participantes dessas oficinas e o trabalho que a equipe de coordenação teve para distribuir as pessoas para outras salas.

As três jornadas, embora tenham tido dificuldades, foram plenas de sucesso tendo em vista o envolvimento de alunos de Cursos de Licenciatura em Matemática, dos cursos de Especialização em Ensino de Matemática, de professores da Educação Básica e do Ensino Superior, conforme consta na descrição dos três eventos.

Considerações finais

Consideramos que as três Jornadas Cearenses de Educação Matemática foram bastante relevantes, pois possibilitaram a implantação da regional da Sociedade Brasileira de Matemática no Estado do Ceará, que será um dos meios de intercâmbio entre os profissionais de Matemática e as pesqui-

sas, além de proporcionar aos professores e alunos levantar questões acerca do ensino de Matemática.

Para uma completa mudança positiva no atual ensino de Matemática, são necessárias mais discussões e encontros dessa natureza, pois o ensino dessa disciplina tem como objetivo proporcionar aos alunos legítimas experiências matemáticas. Em outras palavras, esse ensino deve possibilitar ao educando experiências semelhantes às dos matemáticos. Tais experiências, conforme D'Ambrosio (1993; p. 36), devem se caracterizar "[...] pela identificação de problemas, solução desses problemas e negociação entre o grupo de alunos sobre a legitimidade das soluções propostas".

Desse modo, é fundamental que o professor esteja capacitado tecnicamente para trabalhar nestas perspectivas, ou seja, a formação investigativa do professor de Matemática é um grande desafio para o momento atual, na busca de identificar e contornar os obstáculos e as dificuldades encontradas pelos alunos no processo de aprendizagem, tanto no seu processo histórico do conhecimento como em situações de aprendizagem. Acreditamos que esse poderá ser um dos passos para alavancar a Educação Matemática no Brasil.

Referência

AMBROSIO D' Beatriz S. Formação de Professores de Matemática para o Século XXI: o grande desafio. **Revista Pro-Posições**. São Paulo: Unicamp, 1993. v. 4, nº 1[10].

CARAÇA, Bento. de Jesus. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989.

BORGES NETO, H. & DIAS, A.M I. Desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático no 1º Grau e Pré-Escola. **Cadernos da Pós-Graduação em Educação:** Inteligência – enfoques construtivistas para o ensino da leitura e da matemática. Fortaleza, UFC, 1999, v. 2.

MUNIZ, Nancy Campos. **Relatos de memórias**: a trajetória histórica de 25 anos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (1988-2013) – São Paulo: Livraria da Física, 2013.

PONTES, Maria Gilvanise de Oliveira. Tendências da Educação Matemática no Ceará. **XII Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste - EPEN - Educação Matemática**. Natal: EDUFRN, 1998.

CAPÍTULO 07

EDUCAÇÃO INDÍGENA: O FUTURO PROFESSOR DE MATEMÁTICA ATUANDO NA DISCIPLINA DE ESTÁGIO SUPERVISIONADO

Sheyla Silva Thé Freitas
Valmiro de Santiago Lima
Ana Carolina Costa Pereira

Introdução

Para sobreviver e preservar sua cultura, o índio precisou camuflar-se por um período longo na história do Brasil, uma vez que eram tidos como incapazes pelas leis brasileiras. Esse quadro reverteu-se com a Constituição Federal de 1988, na qual passaram a ser reconhecidos e respeitados em suas práticas culturais próprias. A partir de então os índios começaram a ter vez e voz na sociedade brasileira, passando a exercer seus direitos de cidadãos reconhecidos pela constituição.

Com o Decreto Presidencial nº 26, de 1991, a educação escolar indígena passa a integrar o sistema de ensino regular em todos os níveis e modalidades de ensino, conforme as normas do MEC (Ministério da Educação e Cultura).

Os direitos educacionais específicos dos povos indígenas passaram a ser reconhecidos e reafirmados com o Decreto nº 1.904/96, que criou o Programa Nacional de Direitos Humanos que assegurou "às sociedades indígenas uma educação escolar diferenciada, respeitando seu universo sociocultural".

A promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB (1996) reconhece as necessidades sociais e culturais identificadas pelo conjunto da sociedade brasileira e respaldadas pela comunidade acadêmica, visando à formação de um cidadão crítico e atuante. As necessidades e exigências tecnológicas cada vez mais prementes da sociedade globalizada forjam as nações a buscarem adequação às várias transformações na área da educação, visto que têm que ofertar aos cidadãos um ensino de qualidade dentro dos padrões exigidos pelas constantes transformações que passa o planeta.

Com isso, a partir da implantação dos PCN's na educação básica, a missão da escola passou a ser a de identificar, analisar, avaliar e definir de forma criteriosa qual a proposta pedagógica que contempla estratégias e metodologias de ensino mais adequadas à realidade de seus professores e alunos, tendo em vista a diversidade de contextos socioculturais e econômicos em que se encontram inseridos.

No tocante à questão da escolarização dos povos indígenas, conforme Aguiar (2003, p.150-151) a Nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) estabeleceu em seu Art. 78, que:

> O Sistema de Ensino da União, com a colaboração das agências federais de fomento à cultura e de assistência aos índios, desenvolverá programas integrados de ensino e pesquisa, para oferta de educação bilíngue e intercultural aos povos indígenas, com os seguintes objetivos: I – proporcionar aos índios, suas comunidades e povos, a recupera-

> ção de suas memórias históricas; a reafirmação de suas identidades étnicas; a valorização de suas línguas e ciências; II- garantir aos índios, suas comunidades e povos, o acesso às informações, conhecimentos técnicos e científicos da sociedade nacional e demais sociedades indígenas e não indígenas.

Nesse sentido, com a tarefa desafiadora de interconectar indivíduos pertencentes a diferentes contextos sociais, todas as instituições de ensino, de modo particular, as universidades, passaram a pensar o seu projeto pedagógico tendo como foco a universalidade do ensino e a integração das culturas. Isso leva à necessidade de um projeto de educação voltado para as diversas nações indígenas que habitam vários recantos do Brasil, com o objetivo de manter suas raízes étnicas, seus costumes, suas línguas, suas culturas e identidades.

A escola, segundo o Referencial Curricular Nacional para Educação Indígena - RCNEI, instrumento surgido a partir dos PCN's deve estar em consonância com esse objetivo:

> [...] deve reconhecer e manter a diversidade cultural e linguística; promover uma situação de comunicação entre experiências socioculturais, linguísticas e históricas diferentes, não considerando uma cultura superior à outra; estimular o entendimento e o respeito entre seres humanos de identidades étnicas diferentes, ainda que se reconheça que tais relações vêm ocorrendo historicamente em contextos de desigualdade social e política (BRASIL, 2005, p. 24).

Ainda conforme esse documento, para que a escola possa se adequar à diretriz pedagógica é mister que se valorize e se respeite a língua de cada povo indígena, pois:

> [...] as tradições culturais, os conhecimentos acumulados, a educação das gerações mais novas, as crenças, os pensamentos e as práticas religiosas, as representações simbólicas, a organização política, os projetos de futuro, enfim, a reprodução sociocultural das sociedades indígenas é na maioria dos casos, manifestada através do uso de mais de uma língua (*idem*, p. 25).

A preconizada valorização e o respeito à língua materna dos povos indígenas, pressupõe que a educação escolar indígena se efetive dentro do processo de ensino e aprendizagem na sala de aula.

A Secretaria de Educação do Estado do Ceará - SEDUC passa a ser um interlocutor na mediação da formação dos professores indígenas no Ceará. Tendo como objetivo habilitar professores indígenas para a docência nos anos iniciais do ensino fundamental. Essa formação tenciona que os docentes venham a atuar como agentes transformadores dentro de suas próprias comunidades.

Diante do exposto, visando ao entendimento da realidade da educação indígena, este trabalho se propõe mostrar como vem se efetivando a formação do professor indígena Tremembé na área de Matemática no Curso Magistério Indí-

gena[1], referente à disciplina de estágio supervisionado, promovido pela SEDUC-CE (2008-2014).

Educação indígena diferenciada

A educação indígena diferenciada vem perpetuar a cultura deste povo. Fazendo com que seus conhecimentos sejam passados e transmitidos de geração para geração. Mas, o que vem a ser educação diferenciada? Segundo o RCNEI (2005, p. 22),

> é uma educação que envolve a multietnicidade, a pluralidade e a diversidade onde agrega complexos sistemas de pensamentos e modos próprios, armazenar, expressar, transmitir, avaliar e reelaborar seus conhecimentos e suas concepções sobre o mundo, o homem e o sobrenatural.

Contudo as escolas indígenas possuem um currículo amplo, além das disciplinas básicas, comuns estabelecidas pelo MEC, conta também com outras atividades paralelas, nas quais a comunidade participa, entre elas: o Torém (ritual sagrado para o povo Tremembé), oração do povo Tremembé (diferenciada); resgate da cultura com as lideranças (na qual os mais velhos resgatam da memória acontecimentos significativos para a aldeia); pajé (tem a função de cuidar da saúde mental e física do seu povo, repassa conhecimentos tradicionais das plantas para a comunidade); entre outras, essas atividades

1 Magistério Indígena – Nível médio, direcionado para o magistério, promovido pela SEDUC-CE. A segunda turma iniciou em 2007, devido a burocracia reiniciou o curso em 2008.

são vivenciadas no ambiente escolar e os alunos participam ativamente de todas.

Conforme o RCNEI (*idem*, p. 23) "a comunidade possui sua sabedoria para ser comunicada, transmitida e distribuída por seus membros; são valores e mecanismos da educação tradicional dos povos indígenas", são experiências que se somam e aprimoram os conhecimentos de cada povo indígena.

As comunidades indígenas socializam seus conhecimentos mutuamente, aprendem com os mais velhos e, principalmente, com os mais novos. Juntos aprendem e ensinam ao mesmo tempo; todos da comunidade são importantes. A educação diferenciada indígena agrega valores, reconhece e mantém a diversidade intercultural e linguística de seu povo, respeitando os demais.

Maher (2006, p. 17) menciona que na Educação Indígena,

> o ensino e a aprendizagem ocorrem de forma continuada, sem que haja cortes abruptos nas atividades do cotidiano. [...] o ensinar e o aprender são ações mescladas, incorporadas à rotina do dia a dia, ao trabalho e ao lazer e não estão restritas a nenhum espaço específico. A escola é todo o espaço físico da comunidade.

O Magistério Indígena no Estado do Ceará

O Magistério Indígena II – Nível Médio na Modalidade Normal é promovido pela Secretaria de Educação do Estado do Ceará e tem como objetivo habilitar professores indígenas para a docência nos anos iniciais do ensino fundamental, que atuam nas escolas indígenas da rede pública do Ceará, qualificando-os para o exercício do magistério. Sua missão é formar professores indígenas como meio de garantir um maior e melhor desempenho nos processos de ensino e aprendizagem dos alunos atendidos nessas escolas.

Os encontros de estudo foram realizados em etapas intensivas e intermediárias. A etapa intensiva compreendia os meses de janeiro e julho, e as etapas intermediárias ocorreram em conformidade com os cronogramas e acordos entre a coordenação do curso e as lideranças indígenas que determinavam as datas para a realização dos estudos.

Para um melhor aproveitamento do processo ensino e aprendizagem, a turma foi desmembrada em três Polos, a saber: Polo I – Fortaleza: abrange os municípios de Aquiraz, Aratuba, Canindé, Caucaia, Maracanaú e Pacatuba. Polo II – Acaraú: contempla os municípios de Acaraú, Itapipoca e Itarema. Polo III – Crateús: engloba os municípios de Crateús, Monsenhor Tabosa, Novo Oriente, Poranga, Quiterianópolis e Tamboril. O Magistério Indígena II – Nível Médio contabilizou uma carga horária de 3240h/a.

Maher (2006, p. 25) corrobora explicando o porquê desta carga horária extensa:

> Os programas para o Magistério Indígena destinam-se a formar um tipo de professor que, na maior parte dos casos, já atua na escola de sua comunidade e tem pouca experiência de escolarização formal: ele sempre traz em sua bagagem um amplo domínio dos conhecimentos acumulados por seu povo, mas seu conhecimento sobre os nossos saberes acadêmicos é restrito. [...]. Sendo assim, os currículos dos Cursos de Formação para o Magistério Indígena são bastante extensos.

De fato, a maioria dos professores indígenas que estavam atuando em sala de aula, não tinha se quer terminado o ensino fundamental, questão essa que impulsionou as coordenadoras juntamente com alguns alunos liderança a refletirem essa formação e estabelecerem algumas regras para os alunos/professores indígenas continuarem essa formação.

Ressaltamos que os professores indígenas para participar desse curso precisavam ter cursado no mínimo o 6º ano do ensino fundamental, exigência da coordenação do curso com aprovação dos participantes. Essa exigência foi necessária, devido o curso conter a base no ensino fundamental II. Sendo assim, eles precisavam compreender o que estava sendo abordado em nível de conteúdo programático.

Outro ponto que estimulou a participação desses alunos foi o fato de que o curso passaria a ser pré-requisito para os docentes indígenas ao exercício do magistério, como também um passaporte para o ingresso em concurso público a ser realizado, visto que até o presente momento eles compõem apenas o quadro funcional referente aos contratos temporários.

Essa formação contemplou as seguintes etnias[2] do Estado do Ceará: Tapeba, Tremembé, Pitaguary, Jenipapo, Kanindé, Potyguara, Tabajara, Kalabaça, Kariri, Anacé, Gavião e Tubiba-Tapuia. Como mostra a figura 01:

Figura 01: Mapa do Ceará delimitando os municípios com suas respectivas etnias.
Fonte: Povos Indígenas no Ceará: organização, memória e luta, 2007.

A disciplina de Matemática foi ministrada para as 12 etnias, entretanto, no estágio supervisionado, foram contempladas as comunidades Tremembé, notadamente a de Itapipoca.

2 Ressaltamos que atualmente existem 14 etnias no Ceará. Mencionamos 12 etnias por termos trabalhado ativamente com elas. As etnias de Jucá (Parambu) e Tupinambá (Crateús) não foram contempladas.

Como afirmamos anteriormente esse curso compreende uma carga horária de 3240h/a que foram distribuídas em três componentes curriculares: Base Nacional Comum (880h/a), Formação Especifica (640h/a) e Formação Pedagógica (1720h/a), dessas 800h/a, são destinadas ao Estágio Supervisionado.

No que se refere à Base Nacional Comum, o curso contempla as disciplinas básicas do currículo vigente nas escolas regulares: Língua Portuguesa, Matemática, História, Geografia, Ciências Físicas e Biológicas e arte. Essas disciplinas são consideradas básicas porque os aprendizes irão desenvolver suas competências e habilidades no que se referem aos conteúdos formativos.

Na Formação Específica contemplam disciplinas que levarão os alunos a refletirem suas condições, identidade, cultura, etc. Os discentes irão estudar: Políticas Indigenistas, Introdução à Antropologia, História da Educação Escolar Indígena, Atividades Individuais e Coletivas, Intercâmbio Cultural. Essas disciplinas irão resgatar fatos históricos vivenciados por antepassados indígenas, ofertando-lhes a oportunidade de construírem um futuro fundamentado na valorização do seu povo, da sua cultura, da sua identidade e da sua vida.

A Formação Pedagógica é a mais extensa dos componentes curriculares devido à necessidade de dialogar com outros saberes e contempla as seguintes disciplinas: Didática, Estrutura e Funcionamento; Fundamentos Sociológicos, Psicológicos, Históricos e Filosóficos; além de algumas modalidades de ensino: Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação e Estágio.

No tópico que se refere à Formação Pedagógica estão contempladas as disciplinas de Estágio Supervisionado, perfazendo um total de 800h/a. Essa disciplina foi organizada em três momentos distintos e significativos: 1. O primeiro momento (60h/a) foi direcionado aos estudos teóricos, metodológicos e encaminhamentos das atividades práticas de estágio, como também reflexões sobre a identidade do professor indígena da educação básica do estado do Ceará; a importância do Estágio como instrumento de diálogo entre teoria e prática e o memorial como recurso formativo; 2. O segundo momento (220h/a) contemplou o memorial reflexivo, a escrita e a produção de conhecimento do professor indígena do Ceará; memorial de Formação: quando as memórias narram a história da formação; ofício de escrever a vida: memória (auto) biográfica e história da educação; memorial: fazendo-me professor(a). Momento marcante, no qual os aprendizes recorreram as suas memórias vivas e adormecidas para resgatar sua verdadeira história de vida. 3. O terceiro e último momento (520h/a) foi dirigido à organização e acompanhamento do processo de ensino-aprendizagem nas escolas indígenas; análise do trabalho pedagógico do estagiário na escola indígena; reflexão sobre o cotidiano de uma escola indígena e elaboração de estratégias de intervenção; orientação das atividades a serem desenvolvidas no exercício da docência de forma articulada com a prática profissional e o registro formal de todo o processo em um relatório reflexivo. O intuito é proporcionar ao professor estagiário uma reflexão de sua prática pedagógica com base no conhecimento desenvolvido no curso de Magistério Indígena II, buscando a articulação, teoria e prática de acordo com a realidade da escola indígena.

Segundo Pimenta e Lima (2010) o estágio supervisionado corresponde ao momento em que o aluno entra em contato com o universo da educação, em seu contexto inicial de formação e compreende o espaço onde irá desenvolver seus conhecimentos junto às instituições públicas e privadas, correlacionando a teoria e a prática.

Como podemos observar o Estágio Supervisionado proporciona ao professor estagiário uma reflexão sobre sua prática pedagógica, propiciando uma articulação entre a teoria e a prática de acordo com a realidade da escola indígena. Essa qualificação contribui para a formação do professor indígena que atua na disciplina de Matemática, levando-o a diversificar suas aulas, tornando-as mais dinâmicas e prazerosas, dando-nos a oportunidade de observarmos esses profissionais desempenhando o papel de educador de forma exemplar.

As discussões estão condizentes com os estágios supervisionados da formação dos professores dos cursos superiores, em conformidade com o pensamento de Buriolla (1999, p. 10) *apud* Pimenta e Lima (2010, p. 62) "o estágio é o lócus onde a identidade profissional é gerada, construída e referida; volta-se para o desenvolvimento de uma ação vivenciada, reflexiva e crítica e, por isso, deve ser planejado gradativa e sistematicamente com essa finalidade".

O estágio propicia ao discente vivenciar a realidade, experimentar as emoções e os desafios de uma sala de aula. Momento ímpar no qual o discente aplicará as teorias e práticas estudadas. De fato, construirá sua identidade profissional e ao mesmo tempo facilitará o processo ensino e aprendizagem na interação com seus alunos. É o momento de prática, no

qual os conhecimentos técnicos e teóricos adquiridos durante a graduação passam a ser aproveitados e adquirem outros significados diante da realidade escolar. A escola é o campo de estágio. Portanto, a disciplina de Estágio Supervisionado é de suma importância para o desenvolvimento profissional do futuro docente seja ele indígena ou não.

Diante do que foi exposto, nosso estudo será direcionado à disciplina de estágio supervisionado, no qual iremos dirigir nosso olhar sensivelmente à disciplina de Matemática nas escolas indígenas Tremembé, situada em Itapipoca/CE.

Conhecendo a etnia Tremembé

De acordo com o Marco Referencial dos Povos Indígenas do Estado do Ceará, a SEDUC e o Instituto de Pesquisa e Estratégia Econômica do Ceará – IPECE afirmam que deste o período colonial, o povo Tremembé vem sendo citado em documentos, relatos de missionários, viajantes e cronistas como Trammambé ou Tarammambé. Nos séculos XIX e XX eram tratados como caboclos remanescentes ou descendentes de índios. Essa configuração mudou com a constituição de 1988, na qual o indígena passa a ser valorizado e respeitado pela carta Magna e, consequentemente, pela população.

O povo indígena Tremembé do Ceará habita atualmente os municípios de Itapipoca, Itarema e Acaraú. Está situado na Região Norte do Estado do Ceará. Segundo o Pajé Luiz Caboclo (2007, p. 45), "o nome Tremembé vem dos 'tremedaú', espécie de córrego de lama movediça, coberto por escassa água", no qual os nativos utilizavam esses tremedaú para

escapar de capangas e soldados. De acordo com a figura 02, podemos observar os três municípios onde estão localizadas as aldeias Tremembé.

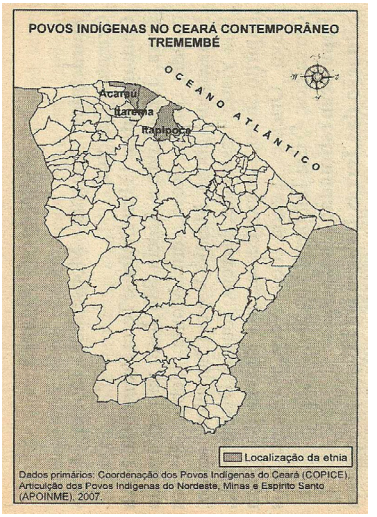


Figura 02: Mapa do Ceará delimitando os municípios onde estão situados o Povo Tremembé.
Fonte: Povos Indígenas no Ceará: organização, memória e luta, 2007, p. 33.

Os Tremembé[3] vivem da agricultura, da pesca, da caça e de benefícios sociais. O artesanato é feito de cipó, palha de carnaúba, barro, sementes, etc. Têm como tradição dançar o Torém, ritual sagrado praticado por eles com o objetivo de

3 Conforme convenção estabelecida em 1953, entre linguistas e antropólogos, ficou estabelecido que o substantivo gentílico referente ao nome de um povo indígena seria grafado com maiúscula e nunca pluralizado. Por se tratar de designativo de um povo, de uma sociedade, de uma coletividade única e não apenas de um conjunto de indivíduos. (Olhar – Formação de Professores indígenas: repensando trajetórias de Grupioni, 2006, p. 14).

buscar força e fortalecimento através dos encantados para lutar e vencer as dificuldades existentes.

Quanto aos Tremembé situados em Itapipoca, vieram de Almofala em Itarema – CE, devido à seca do quinze, fato histórico, ocorrido em 1915. O que os impulsionou a desbravar novas terras a fim de sobreviverem.

Segundo as memórias dos antepassados e relatos dos moradores indígenas Tremembé, quando chegaram a essa terra depararam-se com índios de outras etnias que não se identificaram.

A comunidade indígena de Itapipoca vive em uma área de aproximadamente 3.100 hectares, localizada entre o rio Mundaú e a praia da Baleia, mais precisamente, no distrito de Marinheiros, pertencente ao município de Itapipoca/CE. As aldeias são rodeadas por dunas móveis e fixas e muitas lagoas temporárias que enchem no inverno e secam no verão. Essa população é constituída por aproximadamente 500 índios e estão distribuídos nas aldeias: Buriti de Baixo, Buriti do Meio, Munguba e São José. A maioria desses indígenas só assumiu sua identidade publicamente no ano de 2002.

Somente em 2005 conseguiram uma Educação Diferenciada para a aldeia. A escola E.D.E.F.M. de Buriti funcionava em condições precárias no salão comunitário da comunidade e nos alpendres das casas de algumas professoras, sem as condições mínimas para efetivar o ensino e a aprendizagem carecendo urgentemente de uma infraestrutura física. Então, no dia 03 de setembro de 2010 foi inaugurada a Escola Indígena Brolhos da Terra, atendendo as comunidades de São José e Buriti, oferecendo uma educação que valoriza a cultura do povo Tremembé.

É interessante ressaltar a origem dos nomes das aldeias de São José e Buriti. A aldeia São José recebeu esse nome em homenagem a uma escultura de São José feita de ouro encontrada nas dunas de areia naquela região e a aldeia Buriti devido a uma vasta vegetação nativa de buriti naquela localidade. Assim, os nomes não se distanciavam da realidade vivida pelos nativos em seu habitat natural. Um estudo antropológico foi efetuado nas terras indígenas Tremembé em Itapipoca, no ano de 2009; esse documento foi aprovado e, recentemente, obtiveram a posse de suas terras publicadas no Diário Oficial da União, no entanto uma empresa contestou essa decisão.

A Constituição Federal de 1988 no Título VIII – Da Ordem Social, no capítulo VIII que trata o tema – Dos Índios afirmam:

> Art. 231. São reconhecidos aos índios sua organização social, costumes, línguas, crenças e tradições, e os direitos originários sobre as terras que tradicionalmente ocupam, competindo à União demarcá-las, proteger e fazer respeitar todos os seus bens. (p. 146)
> Art. 232. Os índios, suas comunidades e organizações são partes legítimas para ingressar em juízo em defesa de seus direitos e interesses, intervindo o Ministério Público em todos os atos do processo. (p. 146)

Como supracitado na Lei nº 6001/73 que afirma:

> Art. 1º Esta Lei regula a situação jurídica dos índios ou silvícolas e das comunidades indígenas, com o propósito de preservar a sua cultura e integrá-los,

> progressiva e harmoniosamente, à comunhão nacional.
> Parágrafo único. Aos índios e às comunidades indígenas se estende a proteção das leis do País, nos mesmos termos em que se aplicam aos demais brasileiros, resguardados os usos, costumes e tradições indígenas, bem como as condições peculiares reconhecidas nesta Lei.

Diante de tudo que foi mencionado até o presente momento, podemos recordar que os índios Tremembé de Itapipoca tomaram posse dessas terras em 1915 em uma época que o Ceará vivenciou um longo período de seca. A comunidade indígena aguarda sentença final da justiça.

Contando uma história

Iniciamos os trabalhos como orientadora na disciplina de estágio supervisionado orientando dez discentes do Polo II – Acaraú. Esse número pode ser considerado pequeno, mas, diante das dificuldades de adentrar as reservas indígenas, esse número passa a ser bem expressivo. Visitamos quatro escolas indígenas, a saber: Escola Indígena Brolhos da Terra – aldeia Munguba, Escola Indígena Tremembé Rosa Suzana da Rocha – aldeia São José, Escola Indígena Tremembé de Queimadas – aldeia de Queimadas e Escola Tremembé de Passagem Rasa – aldeia Passagem Rasa.

Ao visitar as escolas indígenas percebemos que algumas delas estão sendo padronizadas na sua estrutura física, cuja vista topológica assemelha-se a um cocar, conforme figura 03:

Figura 03: Vista topológica de uma escola indígena
Fonte: www.googlemaps.com.br acessado em 19/05/2015 às 22h50min /imagem de domínio público

Essa é uma imagem da Escola Indígena Ita-ará em Pacatuba, CE– 060 km 15 (vista de cima) realmente tem um formato de um cocar. O que nos remete a uma escola diferenciada a começar por sua estrutura. A área circular acima é o espaço onde são realizados os rituais sagrados como a dança específica de cada povo. As salas de aula ficam contornando o círculo, que devido o calor intenso do nordeste, essa área está sendo coberta. Em relação à secretaria, biblioteca, sala de informática, cozinha/cantina e banheiros ficam na área interna. A Escola possui uma infraestrutura adequada, que favorece um clima de interação plena entre os gestores, docentes, discentes e comunidade.

Direcionaremos nosso olhar apenas à Escola Indígena Brolhos da Terra, na qual observamos quatro estagiárias. Experiência rica e prazerosa que pudemos vivenciar e observar

a prática docente dessas futuras professoras na disciplina, Estágio Supervisionado de Matemática, referentes ao segundo semestre de 2013.

O estágio foi realizado no Ensino Fundamental I, nas turmas do 2º e 3º ano, com 12 alunos em cada turma, no período matutino, cujos alunos estavam na faixa etária destinada a esse segmento (7 a 11 anos). As salas de aula têm uma infraestrutura adequada, possuem ventiladores, quadro branco, mesa para o professor e cadeiras com braço de apoio para o material escolar dos aprendizes. O espaço interno escolar foi idealizado e projetado para que sua ambientação receba iluminação e ventilação natural, como confirmamos em lócus.

A estrutura da aula está baseada em um planejamento prévio, no qual as estagiárias preliminarmente realizaram uma pesquisa junto às docentes titulares para diagnosticar o nível cognitivo dos alunos, conhecendo assim, a realidade de cada sala de aula. Vale ressaltar que o planejamento é um fator importante dentro do processo de ensino e aprendizagem de qualquer modalidade de ensino. Uma aula bem elaborada estimula a participação do aluno, levando-o a novas aquisições de saberes.

Entretanto, se uma aula não for bem planejada, causa frustração para os envolvidos nesse processo de aprendizagem. Por isso o docente necessita planejar, refletir sobre sua ação, pensar sobre o que faz antes, durante e depois de cada aula. Lembrando que o planejamento é flexível e à medida que o professor sentir necessidade fará o replanejamento necessário da sua práxis, nos moldes operantes pedagógicos. O aprendiz, nesse processo, se torna coadjuvante no planejamento das aulas. Claramente percebemos que o planejamento efetivo constitui uma atividade contínua e flexível.

Nas aulas observadas foram trabalhados assuntos envolvendo as quatro operações, com ênfase em adição, subtração e multiplicação. Percebemos que as docentes iniciaram suas aulas resgatando os conhecimentos prévios dos alunos por meio de conversas, estimulando-os a perguntarem e a responderem suas próprias indagações. É interessante que o professor inicie sua aula fazendo um levantamento sobre o que os alunos sabem a respeito do tema a ser estudado. Essa abordagem é fundamental, pois estimula os saberes dos alunos preparando-os para novos conhecimentos. Na década de 60 Ausubel *apud* Moreira (2011) asseverava que os conhecimentos prévios trazidos intrinsecamente pelos discentes era uma teoria que alicerçava ações didáticas.

A partir dos conhecimentos prévios, as professoras utilizaram recursos como livros paradidáticos, situações problemas contextualizados na realidade dos participantes. Estimularam a atenção dos presentes através de contação de história, atraindo a participação e interação do grupo. Nessa rede de aprendizagem acontecem as trocas de experiências discentes mediado pela ensinante.

As metodologias utilizadas foram diversificadas, instigando ativamente a participação dos alunos. Através da leitura e escrita matemática, os alunos socializaram saberes, interagindo suas descobertas e aprendizagens. As docentes discorriam os assuntos abordados tópico por tópico, faziam perguntas e os discentes respondiam, verificavam a aprendizagem continuamente e conduziam os alunos a refletirem diante dos conteúdos abordados.

De acordo com RCNEI (2005, p. 160):

> A Matemática torna-se significativa para quem a estuda, à medida que ela contribui para entender o mundo local e também o mais amplo. Além dos conhecimentos envolvendo relações quantitativas ligadas às atividades cotidianas, o estudo da Matemática contribui para o desenvolvimento de capacidades relacionadas ao raciocínio e à abstração. No campo da Matemática, é possível imaginar, criticar, errar, criar modelos e representações, descobrir que o conhecimento que às vezes parece que vem pronto e acabado não é uma verdade absoluta.

Dessa forma, o ensino de Matemática, na comunidade indígena, torna-se atrativo; os alunos interagem e socializam os conhecimentos adquiridos de forma ampla e significativa.

Maher (2006, p. 18) "constatou em lócus que o modelo de aprendizagem indígena passa pela demonstração, pela observação, pela imitação, pela tentativa e erro". Nós comprovamos o mesmo modelo de aprendizagem, praticado no ensino da Matemática nesse palco de saberes e aprendizagens indígenas. Ao utilizarem os materiais manipulativos, as estagiárias, primeiro, explicavam como iriam trabalhar; os alunos observavam, imitavam e depois eles mesmos iam resolvendo suas situações problemas por tentativa e erro, (veja figura 04). O interessante é que os próprios alunos estabeleciam parcerias entre si, compartilhando experiências de aprendizagem coletivamente. Os materiais utilizados no ensino da Matemática foram: sementes silvestres, grãos de feijão, ábaco, material dourado, livro didático, paradidático e computador.

Figura 04: Aluna desenvolvendo situações problema utilizando grãos de feijão
Fonte: Acervo do autor

Esses materiais induziam a curiosidade desses atores em relação ao ensino e aprendizagem da Matemática escolar.

Um exemplo dessa prática foi vivenciado por uma das estagiárias, quando dividiu a aula em dois momentos significativos: o primeiro, na própria sala de aula, relacionando teoria e prática: expôs o conteúdo, explicou e motivou os alunos a perguntarem e a praticarem os exercícios propostos; o segundo momento, levando os alunos à sala de informática para juntos aprimorarem os conhecimentos adquiridos (vide figura 05).

Figura 05: Alunos aprimorando os conhecimentos na sala de informática
Fonte: Acervo do autor

Utilizou o *site*[4], ocasião em que as crianças puderam revisar todo o conteúdo abordado (adição, subtração e multiplicação) através do programa de tabuada. Alguns alunos utilizaram o material dourado para realizar as atividades e dinamizar o processo educativo.

Os aprendizes se envolveram ativamente nos exercícios propostos pelas professoras e a cada atividade os discentes de posse dos materiais manipulativos resolviam as situações problemas que iam surgindo, sob a coordenação da facilitadora. O que fica evidente é a promoção espontânea dos participantes na socialização com o grupo através de varias formas de interação. A docente monitorava essas correções, fazendo as devidas inferências e apontando positivamente o sucesso individual e coletivo dos participantes no processo de aprendizagem.

4 www.escolagames.com.br/jogos/tabuadaDino/.

Todas as estagiárias antes de concluir suas aulas faziam uma retrospectiva de todo o assunto abordado durante a aula, buscando relacioná-lo significativamente com o cotidiano do estudante. Ao concluir as aulas todos os alunos eram convidados pelas professoras para juntos encerrarem as atividades do turno com o ritual sagrado o Torém. Os alunos corriam para o pátio, soltavam suas bolsas e/ou materiais escolares no chão e imediatamente formavam um grande círculo de mãos dadas e iniciavam sua oração. Depois, alguns alunos do gênero masculino vão para o interior do círculo tocar e cantar músicas sagradas; pela autonomia deles em relação ao ritual do Torém, provavelmente, trata-se de futuras lideranças, veja figura 06. Após cantarem e dançarem, eles encerram suas atividades do turno, dirigindo-se ao transporte escolar.

Figura 06: Ritual sagrado, dança do Torém
Fonte: Acervo do autor

Assim, aplicando essas metodologias, as futuras professoras de matemática vão construindo e reconstruindo sua identidade profissional. Conforme Dubar (1997, p. 13) *apud* Pimenta e Lima (2010, p. 63):

> a identidade humana não é dada, de uma vez por todas, no ato do nascimento: constrói-se na infância e deve reconstruir-se sempre ao longo da vida. O indivíduo nunca constrói [sua identidade] sozinho: depende tanto dos julgamentos dos outros, como das suas próprias orientações e auto definições. [Assim] a identidade é produto de sucessivas socializações.

É através da vivência e da maturidade que o professor vai, paulatinamente, construir e reconstruir sua identidade profissional. E para tal, ele precisará se aperfeiçoar nos conhecimentos científicos, adquirindo competências e habilidades para trilhar os caminhos da sabedoria, para tornar-se um profissional capaz de estimular e aguçar a curiosidade de seus alunos, para que esses possam também trilhar o caminho do saber.

Considerações Finais

O ensino da Matemática vem sendo contextualizado de acordo com os PCN's e, especificamente, o RCNEI documento direcionado para as escolas indígenas que contempla as competências e habilidades exigidas na base educacional nacional.

As estagiarias apropriaram-se de várias teorias, entre elas a de Ausubel, na qual o indivíduo traz conhecimentos pré-existentes que levam a auferir novas aprendizagens que enriquecem os mecanismos do conhecer e aprender significativamente. Trabalharam com jogos, instigando a curiosidade dos discentes, levando-os a várias descobertas, estimulando-os à vontade de saber e descobrir mais e mais.

De acordo com o contexto social das escolas indígenas, as ensinantes favoreceram e facilitaram o ensino da Matemática, propiciando vivências prazerosas em seus discentes; exploraram os materiais manipuláveis como ábaco, material dourado entre outros, motivando a aprendizagem e enaltecendo o processo de ensino da Matemática nessa comunidade.

Utilizaram os recursos como: jogos estruturados e não estruturados, livros didáticos, paradidáticos e tecnologias disponíveis, as docentes mediavam e facilitavam o caminho do saber, tornando assim o ensino da Matemática mais significativo. Como percebemos em lócus, os discentes sentem-se seguros e motivados em socializar esses conhecimentos que a cada dia ampliam-se mais.

Tivemos a confirmação de que as docentes utilizam e ou adaptam as atividades que foram ministradas no decorrer do curso do Magistério Indígena II – Nível Médio. Verificamos que as estagiárias estavam aplicando os conteúdos e metodologias estudadas em sala de aula, conforme a realidade de suas turmas.

As futuras professoras indígenas demonstraram destreza e habilidade em relação aos conteúdos programáticos, como também aos materiais manipuláveis, tendo o cuidado

de contextualizar a teoria e a prática, proporcionando aos seus aprendizes um ensino significativo. Com muita competência, conseguiram transformar as maçantes aulas de Matemática da aldeia em verdadeiro momento de integração e socialização, no qual vimos discentes interessados e comprometidos em compartilhar e ampliar saberes, participando ativamente das atividades propostas.

Essas professoras indígenas souberam disfrutar cada conteúdo estudado e assim socializar o ensino e aprendizagem da melhor forma possível em sala de aula. Percebemos que a maioria dessas profissionais são graduadas ou estão em processo de graduação. A necessidade de uma formação qualificada para atuarem na escola é uma realidade nas comunidades indígenas.

Hoje, os professores indígenas reconhecem a importância da qualificação profissional e estão fazendo de suas escolas diferenciadas um lugar de oportunidade onde socializam todas as suas experiências, abrindo portas para um futuro promissor, no qual o estágio supervisionado passa a ser um veículo que conduz à aplicação das teorias e práticas, trazendo a essa escola um ensino de Matemática contextualizado e significativo para os aprendizes.

Esse estudo é apenas um ensaio inicial sobre a prática docente na disciplina de Matemática na educação indígena. Em outro momento iremos retornar às discussões em torno da efetivação desses conhecimentos adquiridos no decorrer da formação desses docentes.

Referências

AGUIAR, Ubiratan. **LDB: memória e comentários/**Ubiratan Aguiar, Ricardo Martins. Fortaleza: Livro Técnico: 2ª Edição, 2003, 178p.

BRASIL, **Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDBEN**. Lei nº. 9.394 de 1996. Brasília: Ministério da Educação, 1996.

_____. Ministério da Educação. **Referenciais para a formação de professores indígenas/** Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização e Diversidade - SECAD / MEC - Brasília: MEC 2ª edição, 2005.

_____. Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial Curricular Nacional para as Escolas Indígenas**. Brasília: MEC/SEF, 2005.

GRUPIONI, Luís Donisete Benzi (Org.). **As leis e a educação escolar indígena**. Brasília: MEC / SEF, 2005. 2ª edição. (Programa Parâmetros em Ação de Educação Escolar Indígena).

MOREIRA, Marco Antonio. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. Marco Antonio Moreira, Elcie F. Salzano Masini. 2ª reimp. 2011.

PIMENTA, Selma Garrido. **Estágio e docência /** Selma Garrido Pimenta, Maria Socorro Lucena Lima; revisão técnica José Cerchi Fusari, - 5. ed – São Paulo: Cortez, 2010. (Coleção docência em formação. Série saberes pedagógicos).

SILVA, Isabelle Braz Peixoto da. Memorial da Cultura Cearense, do Centro Dragão do Mar de Arte e Cultura. (2007). **Povos Indígenas no Ceará***: organização, memória e luta.* Coordenação: Isabelle Braz Peixoto da Silva. Fortaleza: Gráfica Ribeiro's.

_____. **Resolução 3/99 do Conselho Nacional de Educação.**

http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l6001.htm: Acessado em: 18/05/2015, às 15h.

http://www2.ipece.ce.gov.br/SWAP/swapii/salvaguardas/marco_logico_indigenas.pdf. Acessado em: 10/05/2015, às 13h.

AUTORES

Ana Carolina Costa Pereira é licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (2001), tem mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2005) e doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2010). Atualmente é coordenadora de curso de Matemática da Universidade Aberta do Brasil, professora Adjunta da Universidade Estadual do Ceará, líder do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática e Diretora da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional do Ceará. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Ensino de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Geometria, Livros Didáticos, História da Matemática, Educação Matemática e História da Educação Matemática. E-mail: carolina.pereira@uece.br

Giselle Costa de Sousa é licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2001 e 2003) e tem mestrado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2005), na linha de pesquisa em Educação Matemática. É doutora em Educação linha Educação Matemática pela UFRN (2008). Além disso, concluiu o curso de técnico em Estradas pela ETFRN, hoje IFRN (1997). Atualmente é professora adjunta do Departamento de Matemática da UFRN. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em História da Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: História da Matemática, Relações entre Hist. da Mat. e TIC, Geogebra, Cálculo, Educação Matemática, Lógica e George Boole. Atuou como professora convidada no Instituto de Formação Superior Presidente Kennedy - IFESP (2007). É coordenadora do PIBID

de Matemática da UFRN/Natal desde 2008 e professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática - PPGECNM/UFRN. E-mail: giselle@ccet.ufrn.br

Joelma Nogueira dos Santos é professora de Matemática do Instituto Federal do Ceará - IFCE, Campus Camocim. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática. Concluiu o mestrado profissional em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) pela Universidade Federal do Ceará (UFC). É Especialista em Ensino de Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE) cuja formação está direcionada para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática. É Especialista em Gestão e Avaliação da Educação Pública pela Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) a qual está voltada para a Gestão do Currículo. E-mail: joelma.santos@ifce.edu.br

José Damião Souza de Oliveira é licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2012) tem mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2014). Atualmente é professor efetivo da rede estadual do ensino básico do Rio Grande do Norte e Professor Supervisor do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID-Matemática UFRN). Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Ensino de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: História da Matemática, Tecnologia da Informação e Comunicação e Geometria do Compasso. E-mail: damiaomatematica@hotmail.com

Laura Andrade Santiago é licencianda em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará. Atualmente é monitora da disciplina de Laboratório de Matemática e integrante do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática. Linha de

pesquisa: Um estudo sobre a concepção do uso de história em quadrinhos como recurso metodológico. E-mail: laura.santiago@aluno.uece.br

Luis Adolfo de Oliveira Cavalcante é licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (2010), especialista em Educação Matemática (2012) e mestre em Educação em Ciências e Matemática (2014) pela mesma instituição. Atua como professor de Matemática na Unidade Integrada Professor Venerando de Freitas do SESI/GOIÁS e é docente da Faculdade Integrada de Goiás (FIG). E-mail: luisadolfo001@hotmail.com

Márcio Nascimento da Silva é bacharel (2001) e mestre (2003) em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC), professor do curso Licenciatura de Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA) desde 2005. Atualmente vem trabalhando mais de perto com a formação dos futuros professores de Matemática da Região Norte do estado do Ceará atuando como coordenador de área do subprojeto de Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência (PIBID) na UVA. Além de colaborador do Laboratório de Estatística e Matemática Aplicada (LEMAP), também é coordenador do Laboratório de Vídeos Didáticos (LAVID) onde são desenvolvidos projetos de produção de audiovisuais voltados para ensino, aprendizagem e divulgação da Matemática. E-mail: marcio@matematicauva.org

Maria Gilvanise de Oliveira Pontes é professora da UECE, licenciada em Matemática (1975) e Pedagogia (1976) por esta universidade, com especialização em EAD pela UnB (2000), mestrado e doutorado em educação pela UFC (1986) e UNICAMP (1996), respectivamente. Atua em formação de

professores, pela UECE, na área de Matemática, desde 1995. Na FAFIDAM, coordenou dois importantes projetos de investigação: Formação de grupos de pesquisa em Ciências e Matemática, com financiamento do SPEC/PADCT/CAPES e Integração entre a Matemática e a Língua Materna, com apoio do CNPq e da FUNCAP. Atuou na PROGRAD, como assessora técnico-pedagógica, coordenou várias turmas do Curso de Especialização em Ensino de Matemática e a área de Matemática no Programa de Formação de Professores do NECAD/CED/UECE, faz parte do corpo docente do Curso de Mestrado Acadêmico Intercampi em Educação FAFIDAM/FECLESC da UECE e do Mestrado em Informática Educativa - MPCOMP. E-mail: gilvanisepontes@hotmail.com

Nilton José Neves Cordeiro é bacharel em Atuária pela Universidade Federal do Ceará (1999), tem mestrado em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco (2002). Desde 2005 é professor do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú. Atualmente coordena o Laboratório de Estatística e Matemática Aplicada – LEMAP e o Laboratório de Informática da Matemática – LIMA, onde desenvolve pesquisas/projetos sobre ensino/aprendizagem em Matemática, com ênfase em Estatística e Probabilidade. É professor colaborador do Laboratório de Vídeos Didáticos – LAVID, também do Curso de Matemática. Tem atuado, principalmente, nas seguintes áreas: Estatística, Educação Estatística e Probabilidade. E-mail: nilton@matematicauva.org

Sheyla Silva Thé Freitas é licenciada em Pedagogia com habilitação em Matemática e Física pela Universidade Estadual Vale do Acaraú (2001), licenciada em Letras com habilitação em Espanhol pela Universidade Estadual do Ceará (2012), Mestranda em Ciências da Educação pela Universidad Americana,

especialista em Gestão Educacional pela Universidad Americana (2014), especialista em Metodologia do Ensino Fundamental e Médio pela Universidade Estadual Vale do Acaraú (2002). Atualmente professora convidada dos cursos de Matemática e Pedagogia Universidade Aberta do Brasil – UECE, professora formadora na área de Matemática na Educação Indígena e Programa Brasil Alfabetizado pela SEDUC-CE, consultora em Jogos Matemáticos na área da Educação Infantil e Ensino Fundamental I pela Editora Moderna. E-mail: sheylasthe@gmail.com

Valmiro de Santiago Lima é licenciado em Matemática pelas Universidades Estadual e Federal do Ceará (UECE – 2002 e UFC – 2015), licenciado em Física pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (2011), mestrando em Ciências da Educação pela Universidad Americana, especialista em Docência Universitária pela Universidade Americana (2014), especialista em Ensino de Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (2007). Atualmente professor convidado dos cursos de Matemática e Pedagogia Universidade Aberta do Brasil – UECE, professor formador na área de Matemática na Educação Indígena pela SEDUC-CE, consultor na área de Matemática do Ensino Fundamental II, Médio e do Projeto Aprova Brasil pela Editora Moderna. E-mail:valmirosantiago@gmail.com

Wellington Lima Cedro é Doutor em Educação (área de Ensino de Ciências e Matemática) pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. Atualmente é professor Adjunto do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás (IME/UFG). Atua no curso de licenciatura em Matemática e na especialização em Educação Matemática, ambos os cursos ofertados pelo IME/UFG. Atualmente é o coordenador do curso de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática da UFG (2015-2016) e foi subcoordenador no período de 2011

a 2014. Na Educação Matemática, os seus trabalhos e pesquisas enfatizam a formação de professores e as atividades de ensino e aprendizagem de estudantes, tendo como base teórica a Teoria histórico-cultural. Coordenador do Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Atividade Matemática (GeMAT) do IME/UFG; Membro do GEPAPe (Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Atividade Pedagógica) da FEUSP; Diretor da Regional Goiás da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (2013-2016). E-mail: wcedro@ufg.br

Wendy Mesquita de Morais é licenciando em Matemática na Universidade Estadual do Ceará, foi aluna de intercambio na Universidade do Porto (2013-2014). Atualmente é bolsista da pró-reitoria de extensão, integrante do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática. Linha de pesquisa: Um estudo sobre a concepção do uso de história em quadrinhos como recurso metodológico. E-mail: Wendy-mesquita@outlook.com