

**DOIS**

*O*  
*Cálculo*  
*com*  
*Geometria*  
*Analítica*

*3ª Edição*



editora  
HARBRA

**Louis  
Leithold**

---

**DOIS**

**O Cálculo  
com Geometria Analítica**

3ª Edição

*Tradução:*

**CYRO DE CARVALHO PATARRA**

Professor do Instituto de Matemática e Estatística  
da Universidade de São Paulo  
Ph. D. Northwestern University

*Revisão Técnica:*

**WILSON CASTRO FERREIRA, Jr.**  
**SILVIO PREGNOLATTO**

Departamento de Matemática  
Universidade Estadual de Campinas

---

**DOIS**

**O Cálculo  
com Geometria  
Analítica**

3ª Edição

**LOUIS LEITHOLD**



**editora HARBRA Ltda.**

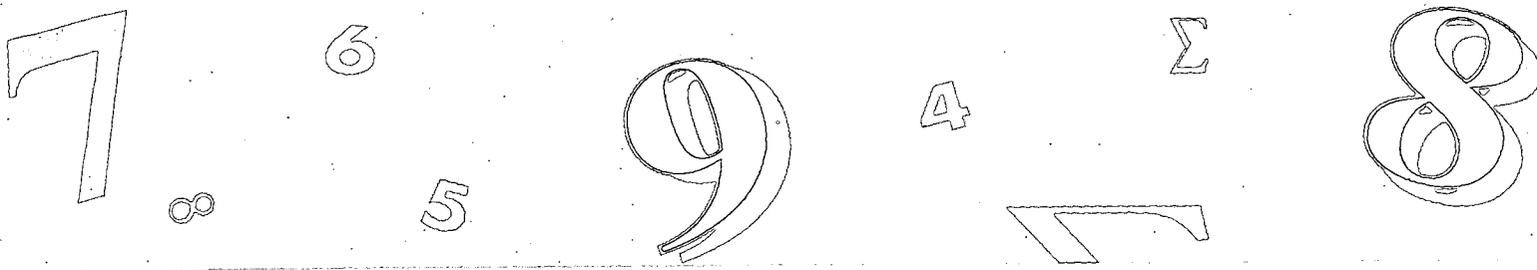
Direção Geral: Julio E. Emöd  
Supervisão Editorial: Maria Pia Castiglia  
Coordenação Editorial: Marilu Bernardes Sória  
Revisão de Estilo: Maria Lúcia G. Leite Rosa  
Assistente Editorial: Mônica Roberta Suguiyama  
Revisão de Provas: Melissa Mesquita Ponciano  
Composição e Capa: AM Produções Gráficas Ltda.  
Fotolitos: STAP Stúdio Gráfico  
Impressão e Acabamento: Gráfica Paym

**O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA – volume 2 – 3ª edição**  
Copyright © 1994 por editora **HARBRA** Ltda.

Rua Joaquim Távora, 629 – Vila Mariana  
04015-001 – São Paulo – SP  
*Promoção:* (011) 5084-2482 e 5571-1122. Fax: (011) 5575-6876  
*Vendas:* (011) 5549-2244 e 5571-0276. Fax: (011) 5571-9777

Tradução de *The Calculus with Analytic Geometry, 6th edition*  
Copyright © 1990 por HarperCollins Publishers.  
Publicado com a permissão de HarperCollins Publishers.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta edição pode ser utilizada ou reproduzida – em qualquer meio ou forma, seja mecânico ou eletrônico, fotocópia, gravação etc. – nem apropriada ou estocada em sistema de banco de dados, sem a expressa autorização da editora.



# Conteúdo

## VOLUME II

*Prefácio*  
*Agradecimentos*  
*Um Pouco de História*

ix  
 xiv  
 xv

<b>CAPÍTULO 12</b>			
<b>SEQÜÊNCIAS E SÉRIES INFINITAS DE TERMOS CONSTANTES</b>	12.1	Seqüências	688
	12.2	Seqüências Monótonas e Limitadas	695
	12.3	Séries Infinitas de Termos Constantes	701
	12.4	Quatro Teoremas sobre Séries Infinitas	710
	12.5	Séries Infinitas de Termos Positivos	714
	12.6	O Teste da Integral	724
	12.7	Séries Alternadas	727
	12.8	Convergência Absoluta e Condicional, o Teste da Razão e o Teste da Raiz	732
	12.9	Sumário dos Testes de Convergência ou Divergência para uma Série Infinita	739
		<i>Exercícios de Revisão</i>	741
<b>CAPÍTULO 13</b>			
<b>SÉRIES DE POTÊNCIAS</b>	13.1	Introdução às Séries de Potências	744
	13.2	Derivação de Séries de Potências	751
	13.3	Integração de Séries de Potências	761
	13.4	Série de Taylor	768
	13.5	Série Binomial	777
		<i>Exercícios de Revisão</i>	781
<b>CAPÍTULO 14</b>			
<b>VETORES NO PLANO E EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS</b>	14.1	Vetores no Plano	784
	14.2	Produto Escalar	795
	14.3	Funções com Valores Vetoriais e Equações Paramétricas	802
	14.4	Cálculo de Funções com Valores Vetoriais	809
	14.5	Comprimento de Arco	815
	14.6	Os Vetores Unitários da Tangente e da Normal e o Comprimento de Arco como um Parâmetro	821
	14.7	Curvatura	825
	14.8	Movimento Plano	833
	14.9	Componentes Normal e Tangencial da Aceleração (Suplementar)	839
		<i>Exercícios de Revisão</i>	843

<b>CAPÍTULO 15</b>			
<b>VETORES EM UM ESPAÇO TRIDIMENSIONAL E GEOMETRIA ANALÍTICA SÓLIDA</b>	15.1	O Espaço Numérico Tridimensional	847
	15.2	Vetores no Espaço Tridimensional	853
	15.3	Planos	862
	15.4	Retas em $R^3$	869
	15.5	Produto Vetorial	874
	15.6	Cilindros e Superfícies de Revolução	884
	15.7	Superfícies Quádricas	889
	15.8	Curvas em $R^3$	895
	15.9	Coordenadas Cilíndricas e Esféricas	902
			<i>Exercícios de Revisão</i>
<b>CAPÍTULO 16</b>			
<b>CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL</b>	16.1	Funções de mais de Uma Variável	909
	16.2	Limites de Funções de mais de Uma Variável	918
	16.3	Continuidade de Funções de mais de Uma Variável	928
	16.4	Derivadas Parciais	932
	16.5	Diferenciabilidade e Diferencial Total	940
	16.6	A Regra da Cadeia	950
	16.7	Derivadas Parciais de Ordem Superior	957
	16.8	Condições Suficientes para a Diferenciabilidade (Suplementar)	964
			<i>Exercícios de Revisão</i>
<b>CAPÍTULO 17</b>			
<b>DERIVADAS DIRECIONAIS, GRADIENTES E APLICAÇÕES DAS DERIVADAS PARCIAIS</b>	17.1	Derivadas Direcionais e Gradientes	973
	17.2	Planos Tangentes e Normais a Superfícies	980
	17.3	Extremos de Funções de Duas Variáveis	984
	17.4	Funções Implícitas, Derivação	998
	17.5	Multiplicadores de Lagrange	1006
	17.6	Obtenção de Uma Função a partir de seu Gradiente e Diferencial Exata	1012
			<i>Exercícios de Revisão</i>
<b>CAPÍTULO 18</b>			
<b>INTEGRAÇÃO MÚLTIPLA</b>	18.1	A Integral Dupla	1023
	18.2	Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas	1028
	18.3	Centro de Massa e Momentos de Inércia	1035
	18.4	A Integral Dupla em Coordenadas Polares	1040
	18.5	Área de Uma Superfície	1045
	18.6	A Integral Tripla	1050
	18.7	A Integral Tripla em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas	1055
	18.8	Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas	1061
			<i>Exercícios de Revisão</i>
<b>CAPÍTULO 19</b>			
<b>INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE CAMPOS VETORIAIS</b>	19.1	Campos Vetoriais	1073
	19.2	Integrais de Linha	1081
	19.3	Integrais de Linha Independentes do Caminho	1089
	19.4	O Teorema de Green	1099
	19.5	Integrais de Superfícies	1112
	19.6	Teorema da Divergência de Gauss e Teorema de Stokes	1119
			<i>Exercícios de Revisão</i>

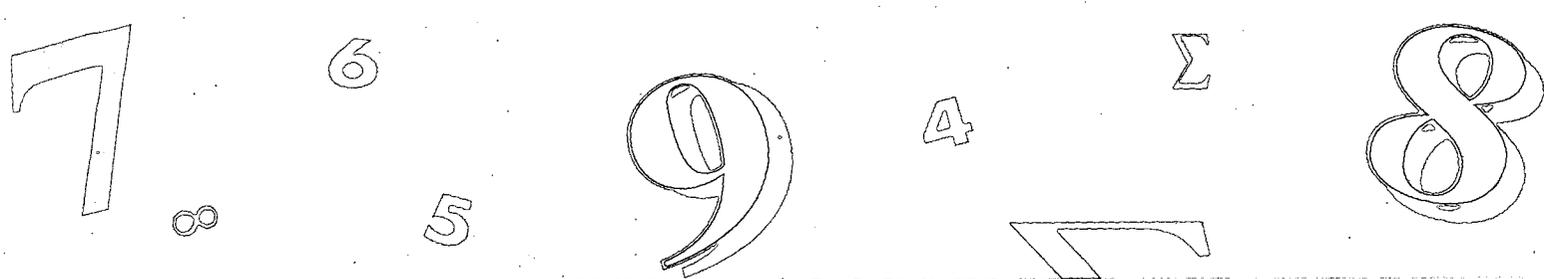
<b>CAPÍTULO 20</b>	20.1	Conceitos Básicos	1131
<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS</b>	20.2	Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem	1134
	20.3	Equações Diferenciais de Primeira Ordem com Variáveis Separáveis	1141
	20.4	Equações Diferenciais Homogêneas,	1145
	20.5	Equação de Bernoulli	1149
	20.6	Equações Diferenciais Exatas	1154
	20.7	Equações Diferenciais de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes	1158
	20.8	Equações Não-Homogêneas	1164
	20.9	Resolução de Equações Diferenciais por Séries	1174
<i>Apêndice</i>	A-1	Uso de uma Tabela de Integrais	A-1
	A-2	Transformações Funcionais e Operadores	A-5
<i>Fórmulas</i>		O Alfabeto Grego	F-1
		Fórmulas de Geometria	F-1
		Fórmulas de Trigonometria	F-2
		Tabela de Derivadas	F-3
		Tabela de Integrais	F-3
<i>Respostas dos Exercícios de Número Ímpar</i>			R-1
<i>Índice Remissivo</i>			I-1

## VOLUME I

<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>NUMEROS REAIS, FUNÇÕES E GRÁFICOS</b>
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>LIMITES E CONTINUIDADE</b>
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>A DERIVADA E A DERIVAÇÃO</b>
<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>VALORES EXTREMOS DAS FUNÇÕES, TÉCNICAS DE CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS E A DIFERENCIAL</b>
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>INTEGRAÇÃO E A INTEGRAL DEFINIDA</b>
<b>CAPÍTULO 6</b>	<b>APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA</b>
<b>CAPÍTULO 7</b>	<b>FUNÇÕES INVERSAS, LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS</b>
<b>CAPÍTULO 8</b>	<b>FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS E FUNÇÕES HIPERBÓLICAS</b>
<b>CAPÍTULO 9</b>	<b>TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO</b>
<b>CAPÍTULO 10</b>	<b>SECÇÕES CÔNICAS E COORDENADAS POLARES</b>
<b>CAPÍTULO 11</b>	<b>FORMAS INDETERMINADAS, INTEGRAIS IMPRÓPRIAS E A FÓRMULA DE TAYLOR</b>

*Apêndice**Fórmulas**Respostas dos Exercícios de**Número Ímpar**Índice Remissivo*





---

# Prefácio

“Tudo deveria se tornar o mais simples possível, mas não simplificado”

— ALBERT EINSTEIN

*O Cálculo com Geometria Analítica* foi planejado para futuros matemáticos e para estudantes cujo interesse primário seja Engenharia, Ciências Exatas e Humanas, ou áreas não-técnicas. As explanações passo-a-passo, os inúmeros exemplos descritos e a ampla variedade de exercícios continuam a ser os aspectos relevantes do livro nesta edição. Uma vez que um livro-texto deve ser escrito para o estudante, empenhei-me em manter uma apresentação de acordo com a experiência e a maturidade de um principiante, sem deixar que qualquer passagem fosse omitida ou ficasse sem explicação. Espero que o leitor tome consciência de que as demonstrações dos teoremas são necessárias; procurei torná-las bastante motivadoras e explicá-las cuidadosamente, de forma que sejam compreensíveis para o estudante que adquiriu um nível razoável de conhecimentos das secções que as precedem. Se um teorema está enunciado sem demonstração, a sua discussão foi ampliada com figuras e exemplos e, em tais casos, sempre ressaltai que se trata de uma ilustração do conteúdo do teorema, e não de uma demonstração. Nas Secções Suplementares do final dos capítulos aparecem algumas discussões teóricas as quais, se o estudante desejar, poderão ser omitidas sem prejuízo da seqüência do texto.

---

## A TERCEIRA EDIÇÃO DE O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA

Desde a primeira edição deste livro em 1968, o curso de Cálculo sofreu mudanças significativas em seu conteúdo e ensino. A cada nova edição, tentei incorporar tais mudanças e manter um equilíbrio saudável entre uma abordagem rigorosa e um ponto de vista intuitivo. Os dezenove\* capítulos de *O Cálculo com Geometria Analítica* formam quatro segmentos: capítulo 1, revisão de tópicos de pré-cálculo; capítulos 2-11 funções de uma única variável; capítulos 12-13, séries infinitas; e capítulos 14-19, vetores e funções de mais de uma variável. A terceira edição incorpora alterações em cada um desses segmentos, algumas delas foram feitas para refletir a importância cada vez maior de computadores e calculadoras programáveis, facilitando os cálculos.

---

\* N. do E.: O Capítulo 20 foi escrito especialmente para a edição brasileira e trata das equações diferenciais.

## TÓPICOS DE REVISÃO DO CÁLCULO

**CAPÍTULO 1** Esse capítulo, “Números Reais, Funções e Gráficos”, é menos detalhado do que nas edições anteriores. Uma secção sobre aspectos básicos do sistema de números reais é seguida por uma introdução à Geometria Analítica que inclui o material tradicional sobre retas e circunferências. É apresentada uma discussão sobre a definição de uma função, operações com funções e tipos de funções. A introdução de seis tipos de funções trigonométricas permite o seu uso nos exemplos de derivação e integração de funções não-algébricas.

## FUNÇÕES DE UMA ÚNICA VARIÁVEL

**CAPÍTULO 2** Com a secção sobre limites no infinito introduzida neste capítulo, a discussão de limite e continuidade é concluída em um mesmo capítulo. Esses tópicos constituem a essência de um curso inicial de Cálculo. Todos os teoremas de limite são enunciados, e algumas provas são apresentadas no texto, enquanto outras são propostas como exercícios. Nesta edição há exemplos e exercícios novos que envolvem o uso de calculadoras para lançar conjecturas sobre um determinado limite.

**CAPÍTULO 3** Na secção 3.1, defino a reta tangente a uma curva para demonstrar, antecipadamente, a interpretação geométrica da derivada, definida na secção 3.2. A aplicação física de velocidade instantânea no movimento retilíneo é apresentada após a demonstração de teoremas sobre diferenciação. As derivadas das seis funções trigonométricas são apresentadas, tornando-se disponíveis como exemplos para a apresentação da regra da cadeia. Há alguns exercícios novos que requerem o uso de calculadora para se estimar um dado valor da derivada, a partir da definição.

**CAPÍTULO 4** Esse capítulo apresenta as aplicações tradicionais da derivada a problemas envolvendo máximos e mínimos, bem como o esboço de curvas. Os tópicos sobre limites no infinito e assíntotas verticais e horizontais passam para o capítulo 2. A secção sobre aplicações na Economia que aparecia neste capítulo nas edições anteriores foi suprimida, mas parte desse assunto foi discutido em outros capítulos. A secção sobre a diferencial foi mudada para este capítulo, de modo a ficar mais próxima de sua referência no tratamento da antidiferenciação.

**CAPÍTULO 5** A integral definida e a integração são assuntos tratados no capítulo 5. As duas primeiras secções envolvem a antidiferenciação. Uso o termo “antidiferenciação” em vez de “integração indefinida”, mas a notação padrão  $\int f(x) dx$  é conservada. Essa notação irá sugerir a existência de alguma relação entre integrais definidas e antiderivadas, mas não vejo nenhuma inconveniência nisso, pois a apresentação dá a visão teórica apropriada da integral definida como o limite de somas. Dois métodos numéricos para aproximar a integral definida são dados na secção final do capítulo. Esses procedimentos são importantes devido à sua adequação a computadores e calculadoras programáveis. O material sobre a aproximação de integrais definidas inclui o enunciado de teoremas sobre os limites do erro envolvido nessas aproximações. O capítulo também inclui uma secção sobre equações diferenciais com variáveis separáveis, e a discussão completa da área de uma região plana.

**CAPÍTULO 6** Nesse capítulo introduzi aplicações de integral definida que esclarecem não apenas as técnicas de manipulação, mas também os princípios envolvidos. Em cada aplicação, as definições dos novos termos são intuitivamente motivadas e explicadas. O tratamento de volumes de sólidos, assunto das duas primeiras secções, foi revisado. A secção 6.1 começa com volumes apresentando secções planas, e depois volumes de sólidos de revolução por discos e anéis circulares são considerados como casos especiais de volumes por cortes. Volumes de sólidos de revolução por invólucros cilíndricos são discutidos na secção 6.2. Outra aplicação geométrica da integral definida é o comprimento de arco na secção 6.3. As secções restantes do capítulo são dedicadas a aplicações físicas incluindo centro de massa de barras e regiões planas, trabalho e pressão líquida.

**CAPÍTULOS 7 e 8** Funções inversas são tratadas nas duas primeiras secções do capítulo 7, e as cinco secções seguintes são dedicadas às funções logarítmica e exponencial. A função logarítmica natural é definida primeiro e depois a função exponencial natural é definida como a sua inversa. Esse procedimento permite-nos dar um significado preciso a um expoente irracional de um número positivo. Em seguida definimos a função exponencial de base  $a$ , onde  $a$  é positivo e sua inversa é a função logarítmica de base  $a$ . Aplicações dessas funções incluem as leis do crescimento e decaimento, o crescimento limitado envolvendo a curva de aprendizado e a função densidade de probabilidade normal padrão. A secção 7.8, introduzida nesta edição, envolve a solução de equações diferenciais lineares de primeira ordem. No capítulo 8, as demais funções transcendentais (não-algébricas) são introduzidas. Essas são as funções trigonométricas inversas e as funções hiperbólicas.

**CAPÍTULO 9** Técnicas de integração envolvem um aspecto computacional importante do Cálculo. São discutidas nesse capítulo que foi reduzido para oito secções nesta edição. Expliquei os fundamentos teóricos de cada método diferente, após uma motivação inicial. O domínio das técnicas de integração depende de exemplos, e usei, como ilustrações, problemas que o estudante certamente encontrará na prática. Duas outras aplicações de integração são introduzidas na secção 9.5: crescimento logístico, ocorrendo em Economia, Biologia e Sociologia; e a lei da ação de massas na Química.

**CAPÍTULO 10** A ordem dos tópicos da Geometria Analítica nesse capítulo foi alterada nesta edição. As quatro primeiras secções pertencem a secções cônicas: a parábola, a elipse e a hipérbole. Cada uma dessas cônicas é introduzida pela indicação de como ela é formada ao interceptarmos um plano com um cone; então a definição analítica é dada e sua equação em coordenadas retangulares é obtida. As coordenadas polares e algumas de suas aplicações são apresentadas nas secções de 10.5 a 10.7. As equações polares das cônicas aparecem na secção 10.8, onde ocorrem como parte de um tratamento unificado de secções cônicas.

**CAPÍTULO 11** Esse capítulo, “Formas Indeterminadas, Integrais Impróprias e a Fórmula de Taylor”, foi posicionado de modo a preceder imediatamente as séries infinitas, onde muitos dos resultados são aplicados. As aplicações de integrais impróprias, que aparecem nas secções 11.3 e 11.4, incluem a função densidade de probabilidade, além de outras usadas em Geometria e Economia.

## SÉRIES INFINITAS

**CAPÍTULOS 12 e 13** O estudo de séries infinitas nesses dois capítulos é considerado como um segmento separado do curso, de forma a evidenciar que se trata de um conteúdo independente, que pode ser estudado quando se desejar, uma vez que o estudo do cálculo de funções de uma única variável tenha sido completado. O capítulo 12 é dedicado a seqüências e séries infinitas de termos constantes, e sua última seção apresenta um resumo de testes para convergências de uma série infinita. O capítulo 13 trata de séries infinitas de termos variáveis denominadas séries de potências. O conjunto de exercícios foi ampliado, em relação às edições anteriores, para incluir mais aplicações.

## VETORES E FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

**CAPÍTULOS 14 e 15** Esses dois capítulos contêm o cálculo de vetores, bem como uma abordagem vetorial à Geometria Analítica dos Sólidos. As primeiras seções do capítulo 14 sobre vetores no plano podem ser estudadas após o capítulo 5, se você desejar estudar os vetores mais cedo, em seu curso. O capítulo 15 trata de vetores no espaço tridimensional e, se desejado, os tópicos das seções 15.1 e 15.2 podem ser estudados simultaneamente com os seus correspondentes no capítulo 14. As aplicações de vetores à Geometria, Física e Engenharia ocorrem em ambos os capítulos.

**CAPÍTULOS 16, 17\* e 18\*** A diferencial e o cálculo integral de funções de mais de uma variável são apresentados nesses três capítulos. Limites, continuidade, derivação parcial, diferenciabilidade e a diferencial total são discutidos no capítulo 16, onde as aplicações incluem taxas de variações e cálculos aproximados. No capítulo 17, uma seção sobre derivadas direcionais e gradientes é seguida por uma seção que mostra a aplicação do gradiente para encontrarmos uma equação do plano tangente à superfície. Outras aplicações de derivadas parciais no capítulo 17 são a solução de problemas de extremos e os multiplicadores de Lagrange. As equações diferenciais exatas são resolvidas na seção 17.5. A integral dupla de uma função de duas variáveis e a integral tripla de uma função de três variáveis, juntamente com algumas aplicações à Física, Engenharia e Geometria, são tratadas no capítulo 18.

**CAPÍTULO 19** O capítulo “Introdução ao Cálculo de Campos Vetoriais”, recebeu um tratamento mais detalhado de Cálculo Vetorial. O conteúdo inclui integrais de linha e de superfície, o teorema de Green, o teorema da divergência de Gauss e o teorema de Stoke. A abordagem neste capítulo é intuitiva e são apresentadas aplicações à Física e à Engenharia.

---

\* N. do E.: As seções 17.4, sobre funções implícitas e sua derivação, e 18.8, sobre mudança de variáveis e integrais múltiplas, foram especialmente elaboradas para a edição brasileira.

## CAPÍTULO EXCLUSIVO PARA A EDIÇÃO BRASILEIRA

**CAPÍTULO 20** Escrito pelo prof. Cyro Patarra, prof. do IME-USP, este capítulo sobre equações diferenciais foi especialmente concebido para atender às exigências do currículo das faculdades brasileiras. As suas seções apresentam os conceitos básicos das diferentes equações diferenciais e os métodos de resolução.

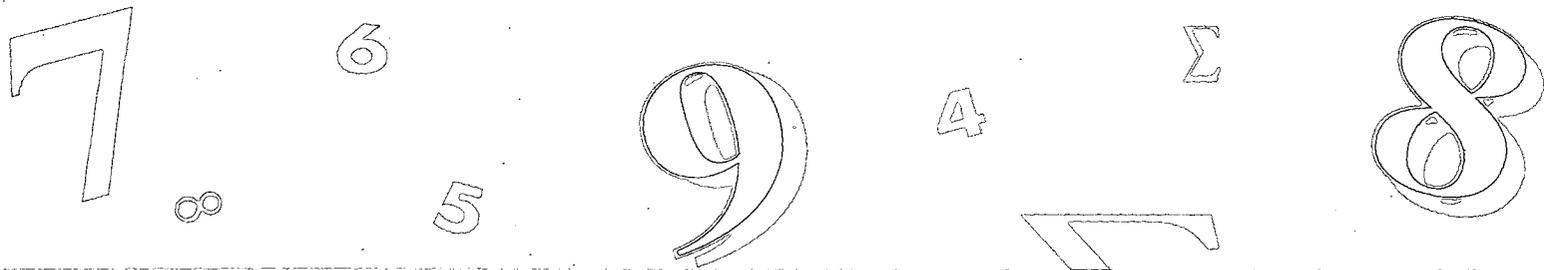
**SEÇÕES SUPLEMENTARES** Dez seções, que aparecem no final de alguns capítulos, são designadas como suplementares. Esses tópicos independentes podem ser estudados ou omitidos sem afetar o entendimento da matéria subsequente. As seções suplementares são de dois tipos. Algumas apresentam material adicional que não faz necessariamente parte do conteúdo tradicional de um curso de Cálculo: as seções 4.10, 6.7, 7.8, 8.5, 9.8, 10.9, 14.8. Outras incluem discussões teóricas, inserindo provas de alguns teoremas: as seções 2.9, 2.10 e 16.8. Ambos os tipos aumentam a flexibilidade do texto.

**EXEMPLOS E ILUSTRAÇÕES** Os exemplos e ilustrações — quase 1.000 no total — aparecem em todas as seções. Os exemplos, que foram cuidadosamente escolhidos para preparar os estudantes para os exercícios, deveriam ser usados como modelos para suas soluções. Uma ilustração é utilizada para demonstrar um conceito particular, uma definição ou teorema; é um protótipo da idéia apresentada.

**EXERCÍCIOS** Há, agora, mais de 7.400 exercícios, revisados e ordenados de acordo com o grau de dificuldade, para propiciar uma ampla variedade de tipos, abrangendo desde problemas teóricos e aplicados, até aqueles que são computacionais. Eles aparecem no final das seções e como exercícios de revisão seguindo a última seção de cada capítulo. As respostas aos exercícios de número ímpar são dadas no final do livro.

**GRÁFICOS TRIDIMENSIONAIS** Para atender às necessidades dos estudantes de ter uma apresentação de gráficos tridimensionais mais moderna e fácil de visualizar, mais de 200 figuras fazem parte desta nova edição. Muitas delas foram geradas por computadores, para assegurar a precisão matemática. Essas figuras, que os instrutores acharão mais claras que o estilo de sólidos geométricos feitos com aerógrafo na edição anterior e nos textos mais antigos, foram criadas com auxílio do programa Mathematica e o uso de *Illustrator 88*.

*Louis Leithold.*



---

# Agradecimentos

*Aos professores que mais me influenciaram:*

Florence Balensiefer; Inglês, Lowell High Scholl, São Francisco  
Ivan Barker; Matemática, Lowell High Schooll, São Francisco  
Alan McKeever; Jornalismo, Lowell High Scholl, São Francisco  
Benjamin Bernstein; Matemática, University of California, Berkeley  
Pauline Sperry; Matemática, University of California, Berkeley  
Virginia Wakerling; Matemática, University of California, Berkeley

*Aos que foram meus alunos em:*

Phoenix College; California State University, Los Angeles; University of  
Southern California; Open University of Great Britain; Pepperdine University

*Apreendi com todos eles.*

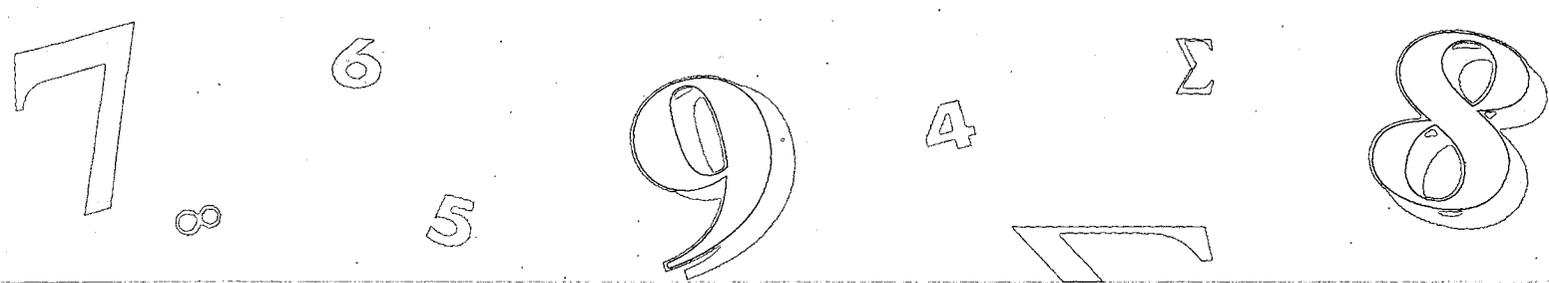
*Aos revisores da edição americana:*

Peter P. Andre, United States Naval Academy; Leon E. Arnold, Delaware  
County Community College; Harold R. Bennett, Texas Tech University;  
Michael L. Berry, West Virginia Wesleyan College; John Broughton, Indiana  
University of Pennsylvania; Floyd A. Cohen, California State University, Long  
Beach; Joel Davis, Oregon State University; K. Joe Davis, East Carolina  
University; N. J. DeLillo, Manhattan College; William A. Echols, Houston  
Community College; John Garlow, Tarrant Country Junior College;  
Stuart Goldenberg, California Polytechnic State University, San Luis Obispo;  
Joel K. Haack, Oklahoma State University; Norvin Holm, Charles S. Mott  
Community College; Roy A. Johnson, Washington State University;  
Dan Kemp, South Dakota State University; Joh Klippert, James Madison  
University; Walter F. Martens, University of Alabama, Birmingham; Roger B.  
Nelsen, Lewis and Clark College; William L. Perry, Texas A&M University;  
Walter A. Rosenkrantz, University of Massachusetts, Amherst; Daniel B.  
Shapiro, Ohio State University; Charles R. Stone, Dekalb College;  
Jere Strickland, James H. Faulkner State Junior College; Richard B. Thompson,  
University of Arizona; G. B. Turney, University of Texas, Arlington; J. Terry  
Wilson, San Jacinto College; Richard M. Witt, University of Wisconsin-Eau Claire

*Aos que auxiliaram na resolução dos exercícios:*

Leon Gerber, St. John's University; Gloria Langer, University of Colorado

A essas pessoas e a todos aqueles que usaram as primeiras edições e sugeriram  
mudanças, expresso a minha profunda admiração.



---

# Um Pouco de História

Algumas idéias do Cálculo podem ser encontradas nos trabalhos dos matemáticos gregos da Antiguidade, da época de Arquimedes (287-212 A.C.) e em trabalhos do início do século dezessete por René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Entretanto, a invenção do Cálculo é frequentemente atribuída a Sir Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pois eles começaram a efetuar a generalização e unificação do assunto. Havia outros matemáticos do século dezessete e dezoito que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo; alguns deles foram Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph L. Lagrange (1736-1813). No entanto, não foi antes do século dezenove que os processos do Cálculo receberam fundamentação sólida por parte de matemáticos como Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin L. Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) e Richard Dedekind (1831-1916).



# DOZE

## Seqüências e Séries Infinitas de Termos Constantes

$$2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \dots, \frac{n^2+1}{n}, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}$$

O estudo de *séries infinitas* neste capítulo e no Capítulo 13 utiliza conceitos de Cálculo que você já aprendeu. No entanto, nenhum conteúdo nos capítulos subsequentes exige, como pré-requisito, conhecimentos de séries infinitas. Em consequência, os Capítulos de 14 a 19 poderão ser estudados antes dos Capítulos 12 e 13, se desejado.

Neste capítulo, estudamos outro tipo de função, tendo um conjunto de números reais como seu domínio e imagem. Na Seção 12.1, uma *seqüência* é definida como uma função cujo domínio é um conjunto de inteiros. Na Seção 12.2 você encontrará a prova da equivalência de convergência e limitação de seqüências monótonas (Teoremas 12.2.6 e 12.2.9) baseada na propriedade de completamento de números reais. Na Seção 12.3, uma *série infinita* é definida como um tipo particular de seqüência, e quatro teoremas sobre séries infinitas

são discutidos na Secção 12.4. As quatro secções a seguir tratam de *testes de convergência* de séries infinitas. Nas Secções 12.5 e 12.6 consideramos séries de termos positivos, e então, na Secção 12.7 estamos interessados em séries cujos termos são positivos e negativos, alternadamente. Séries de termos arbitrários são tratadas na Secção 12.8. Um resumo dos testes para convergência ou divergência de uma série infinita é dado na Secção 12.9.

## 12.1 SEQÜÊNCIAS

Seqüências de números são freqüentes em Matemática. Por exemplo, os números 2, 4, 6, 8, 10

formam uma seqüência denominada **finita** pois há um último número. Se o conjunto de números que formam uma seqüência não tiver um último número, a seqüência será denominada **infinita**. Por exemplo, a seqüência

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots \quad (1)$$

é infinita pois os três pontos sem nenhum número em seguida indicam que não há um último número. Estamos interessados aqui em seqüências infinitas e quando usamos a palavra “seqüência” devemos entender que se trata de uma seqüência infinita. Vamos dar agora uma definição formal de seqüência; ela é um tipo particular de função.

### 12.1.1 DEFINIÇÃO

**Seqüência** é uma função cujo domínio é o conjunto

$$\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

de todos os números inteiros positivos.

Os números na imagem de uma seqüência são chamados de **elementos** da seqüência.

Se o  $n$ -ésimo elemento for dado por  $f(n)$ , então a seqüência será o conjunto de pares ordenados da forma  $(n, f(n))$ ; onde  $n$  é um inteiro positivo.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Se  $f(n) = n/(2n + 1)$ , então

$$f(1) = \frac{1}{3} \quad f(2) = \frac{2}{5} \quad f(3) = \frac{3}{7} \quad f(4) = \frac{4}{9}$$

e assim por diante. A imagem de  $f$  consiste nos elementos da seqüência (1). Alguns dos pares ordenados na seqüência  $f$  são  $(1, \frac{1}{3})$ ,  $(2, \frac{2}{5})$ ,  $(3, \frac{3}{7})$ ,  $(4, \frac{4}{9})$  e  $(5, \frac{5}{11})$ . Um esboço do gráfico da seqüência está na Figura 1. ◀

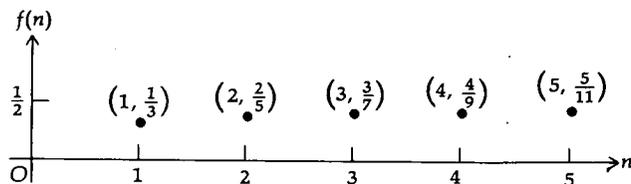


FIGURA 1

Geralmente o  $n$ -ésimo elemento da seqüência é dado quando os elementos aparecem em ordem. Assim, os elementos da seqüência (1) podem ser escritos como

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \dots$$

Como o domínio de toda seqüência é o mesmo, a notação  $\{f(n)\}$  pode ser usada para denotar uma seqüência. Assim sendo, (1) pode ser denotada por  $\{n/(2n+1)\}$ . A notação como subíndice  $\{a_n\}$  é também usada para denotar a seqüência para a qual  $f(n) = a_n$ .

Dizemos que a seqüência

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

é igual à seqüência

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$$

se e somente se  $a_i = b_i$ , para todo  $i$  inteiro positivo. Lembre-se de que uma seqüência consiste em uma ordenação de elementos. Dessa forma, é possível duas seqüências terem os mesmos elementos e não serem iguais. Tal situação pode ser esclarecida na ilustração a seguir.

► **ILUSTRAÇÃO 2** A seqüência  $\{1/n\}$  tem como elementos os recíprocos dos números inteiros positivos.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (2)$$

A seqüência para a qual

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ \frac{2}{n+2} & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

tem como elementos

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots \quad (3)$$

Os elementos das seqüências (2) e (3) são os mesmos, contudo, as seqüências são diferentes. Esboços dos gráficos das seqüências (2) e (3) são dados nas Figuras 2 e 3, respectivamente. ◀

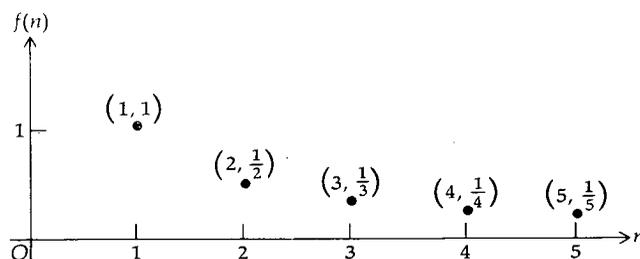


FIGURA 2

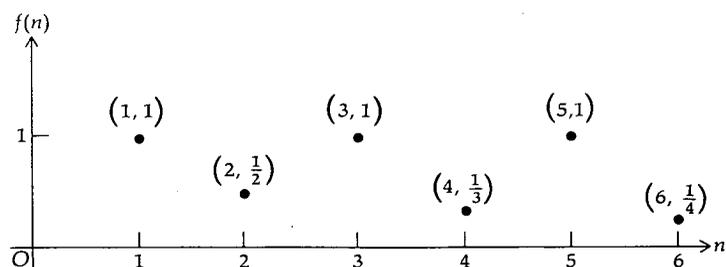


FIGURA 3

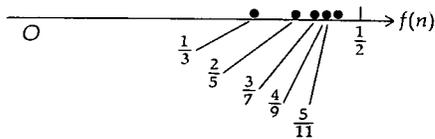


FIGURA 4

Vamos colocar agora, num eixo horizontal, os pontos correspondentes aos sucessivos elementos de uma seqüência. Isso foi efetuado na Figura 4 para a seqüência (1) que é  $\{n/(2n + 1)\}$ . Observe que os sucessivos elementos da seqüência estão cada vez mais próximos de  $\frac{1}{2}$ , muito embora nenhum elemento da seqüência assuma o valor  $\frac{1}{2}$ . Intuitivamente, vemos que é possível obter um elemento da seqüência tão próximo de  $\frac{1}{2}$  quanto desejarmos, bastando tomar o número de elementos suficientemente grande. Ou, expressando isso de outra forma,  $|n/(2n + 1) - \frac{1}{2}|$  pode se tornar menor que qualquer número positivo  $\epsilon$ , contanto que  $n$  seja suficientemente grande. Por isso, dizemos que o limite da seqüência  $\{n/(2n + 1)\}$  é  $\frac{1}{2}$ .

Em geral, se existe um número  $L$  tal que  $|a_n - L|$  seja arbitrariamente pequeno para  $n$  suficientemente grande, dizemos que a seqüência  $\{a_n\}$  tem o limite  $L$ . Segue a definição precisa de limite de uma seqüência.

## 12.1.2 DEFINIÇÃO

A seqüência  $\{a_n\}$  tem o limite  $L$  se para qualquer  $\epsilon > 0$  existir um número  $N > 0$ , tal que se  $n$  for um inteiro e

$$\text{se } n > N, \text{ então } |a_n - L| < \epsilon$$

e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

**EXEMPLO 1** Use a Definição 12.1.2 para provar que a seqüência tem limite  $\frac{1}{2}$ :

$$\left\{ \frac{n}{2n + 1} \right\}$$

**Solução** Precisamos mostrar que para todo  $\epsilon > 0$  existe um número  $N > 0$ , tal que se  $n$  for inteiro e

$$\text{se } n > N, \text{ então } \left| \frac{n}{2n + 1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N, \text{ então } \left| \frac{2n - 2n - 1}{2(2n + 1)} \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N, \text{ então } \left| \frac{-1}{2(2n + 1)} \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N, \text{ então } \frac{1}{2(2n + 1)} < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N, \text{ então } 2n + 1 > \frac{1}{2\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N, \text{ então } n > \frac{1 - 2\epsilon}{4\epsilon}$$

Para que a afirmação anterior seja válida, tomamos  $N = (1 - 2\epsilon)/(4\epsilon)$  e se  $n$  for um inteiro

$$\text{se } n > \frac{1 - 2\epsilon}{4\epsilon}, \text{ então } \left| \frac{n}{2n + 1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon \quad (4)$$

Observe que no caso em que  $\epsilon = \frac{1}{8}$ , então  $N = \frac{3}{2}$  e (4) torna-se

$$\text{se } n > \frac{3}{2} \text{ então } \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{8}$$

Por exemplo, se  $n = 4$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{4}{9} - \frac{1}{2} \right| \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

e  $\frac{1}{18} < \frac{1}{8}$ . O estabelecido em (4) prova que a seqüência dada tem limite  $\frac{1}{2}$ .

► **ILUSTRAÇÃO 3** Considere a seqüência  $\{(-1)^{n+1}/n\}$ . Note que o  $n$ -ésimo elemento dessa seqüência é  $(-1)^{n+1}/n$ , e  $(-1)^{n+1}$  é igual a  $+1$  quando  $n$  for ímpar e igual a  $-1$  quando  $n$  for par. Assim sendo, podemos escrever os elementos da seqüência da seguinte forma:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \dots$$

Na Figura 5 foram colocados os pontos correspondentes a sucessivos elementos da seqüência. Na figura,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_3 = \frac{1}{3}$ ,  $a_4 = -\frac{1}{4}$ ,  $a_5 = \frac{1}{5}$ ,  $a_6 = -\frac{1}{6}$ ,  $a_7 = \frac{1}{7}$ ,  $a_8 = -\frac{1}{8}$ ,  $a_9 = \frac{1}{9}$ ,  $a_{10} = -\frac{1}{10}$ . O limite dessa seqüência é 0, e os elementos oscilam em torno de 0. ◀

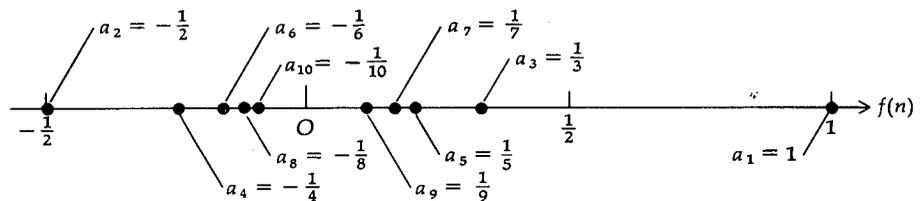


FIGURA 5

Compare a Definição 12.1.2 com a Definição 2.5.1 de limite de  $f(x)$  quando  $x$  cresce sem limitação. As duas definições são quase idênticas; contudo, quando estabelecemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ , a função  $f$  é definida para todos os números reais maiores do que um certo número real  $r$ , enquanto que quando consideramos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ ,  $n$  está restrito aos números inteiros positivos. Porém, da Definição 2.5.1 segue imediatamente o teorema apresentado a seguir.

### 12.1.3 TEOREMA

Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  e  $f$  estiver definida para todo inteiro positivo, então também  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = L$  quando  $n$  for um inteiro positivo qualquer.

A demonstração é proposta como exercício (veja o Exercício 26).

► **ILUSTRAÇÃO 4** Vamos verificar o Teorema 12.1.3 para a seqüência do Exemplo 1, para a qual  $f(n) = n/(2n + 1)$ . Assim,  $f(x) = x/(2x + 1)$  e

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Segue, então, do Teorema 12.1.3, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \frac{1}{2}$  quando  $n$  for qualquer inteiro positivo. Isso está de acordo com a solução dada no Exemplo 1. ◀

#### 12.1.4 DEFINIÇÃO

Se a seqüência  $\{a_n\}$  tiver um limite, dizemos que ela é **convergente**, e  $a_n$  **converge** para o limite. Se a seqüência não for convergente, ela será **divergente**.

**EXEMPLO 2** Determine se a seqüência é convergente ou divergente:

$$\left\{ \frac{4n^2}{2n^2 + 1} \right\}$$

**Solução** Queremos determinar se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2/(2n^2 + 1)$  existe. Seja, então,  $f(x) = 4x^2/(2x^2 + 1)$  e vamos estudar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{2x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2 + \frac{1}{x^2}} \\ &= 2\end{aligned}$$

Assim sendo, pelo Teorema 12.1.3,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 2$ . Dessa forma, a seqüência dada é convergente e  $4n^2/(2n^2 + 1)$  converge para 2.

**EXEMPLO 3** Prove que se  $|r| < 1$ , então a seqüência  $\{r^n\}$  será convergente e  $r^n$  convergirá para zero.

**Solução** Consideremos primeiro  $r = 0$ . Então, a seqüência é  $\{0\}$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ . Logo, a seqüência é convergente e o  $n$ -ésimo elemento converge para zero.

Se  $0 < |r| < 1$ , queremos mostrar então que a Definição 12.1.2 aplica-se com  $L = 0$ . Assim sendo, devemos mostrar que para todo  $\epsilon > 0$  existe um número  $N > 0$  tal que se  $n$  for inteiro e

$$\text{se } n > N, \text{ então } |r^n - 0| < \epsilon \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N, \text{ então } |r|^n < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N, \text{ então } \ln|r|^n < \ln \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N, \text{ então } n \ln|r| < \ln \epsilon$$

Como  $0 < |r| < 1$ ,  $\ln|r| < 0$ . Logo, a afirmação acima é equivalente a

$$\text{se } n > N, \text{ então } n > \frac{\ln \epsilon}{\ln|r|}$$

Assim sendo, se  $N = \ln \epsilon / \ln |r|$ , podemos concluir (5). Conseqüentemente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$ . Dessa forma, pelas Definições 12.1.2 e 12.1.4,  $\{r^n\}$  é convergente e  $r^n$  converge para zero.

**EXEMPLO 4** Determine se a seqüência  $\{(-1)^n + 1\}$  é convergente ou divergente.

**Solução** Os elementos dessa seqüência são 0, 2, 0, 2, 0, 2, ...,  $(-1)^n + 1, \dots$  Como  $a_n = 0$  se  $n$  for ímpar e  $a_n = 2$  se  $n$  for par, parece que a seqüência é divergente. Para provar isso, vamos supor que a seqüência seja convergente e mostrar que tal hipótese leva a uma contradição. Se a seqüência tiver um limite  $L$ , então, pela Definição 12.1.2, para todo  $\epsilon > 0$  existe um número  $N > 0$  tal que se  $n$  for inteiro e

$$\text{se } n > N, \text{ então } |a_n - L| < \epsilon$$

Em particular, para  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , existe um número  $N > 0$  tal que se  $n$  for inteiro e

$$\text{se } n > N \text{ então } |a_n - L| < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N \text{ então } -\frac{1}{2} < a_n - L < \frac{1}{2}$$

Como  $a_n = 0$  para  $n$  ímpar e  $a_n = 2$  para  $n$  par, decorre dessa afirmação que

$$-\frac{1}{2} < -L < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2} < 2 - L < \frac{1}{2}$$

Mas se  $-L > -\frac{1}{2}$ , então  $2 - L > \frac{3}{2}$  e, assim sendo,  $2 - L$  não pode ser menor do que  $\frac{1}{2}$ . Logo, há uma contradição e a seqüência dada é divergente.

**EXEMPLO 5** Determine se a seqüência é convergente ou divergente:

$$\left\{ n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right\}$$

**Solução** Queremos determinar se o  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \operatorname{sen}(\pi/n)$  existe. Seja

$f(x) = x \operatorname{sen}(\pi/x)$  e vamos estudar o  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Uma vez que  $f(x)$  pode ser escrita na forma  $[\operatorname{sen}(\pi/x)]/(1/x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sen}(\pi/x) = 0$ , bem como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x) = 0$ , a regra de L'Hôpital pode ser aplicada para obtermos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{x^2} \cos \frac{\pi}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \pi \cos \frac{\pi}{x} \\ &= \pi \end{aligned}$$

Logo,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \pi$ , se  $n$  for inteiro positivo. Dessa forma, a seqüência dada é convergente e  $n \operatorname{sen}(\pi/n)$  converge para  $\pi$ .

Existem teoremas de limite para seqüências, análogos aos que foram dados para funções no Capítulo 2. No enunciado desses teoremas é usada a terminologia de seqüências. As demonstrações não serão apresentadas pois são similares àquelas dos teoremas correspondentes, dadas no Capítulo 2.

## 12.1.5 TEOREMA

Se  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  forem seqüências convergentes e  $c$  for uma constante, então

(i) a seqüência constante  $\{c\}$  tem  $c$  como seu limite;

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n;$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n;$$

$$(iv) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \right);$$

$$(v) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n} \text{ se } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \neq 0 \text{ e todo } b_n \neq 0.$$

**EXEMPLO 6** Use o Teorema 12.1.5 para provar que a seqüência

$$\left\{ \frac{n^2}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right\}$$

é convergente e ache o seu limite.

**Solução**

$$\frac{n^2}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \frac{n}{2n+1} \cdot n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$$

No Exemplo 1 comprovamos que a seqüência  $\{n/(2n+1)\}$  é convergente e que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [n/(2n+1)] = \frac{1}{2}$ . No Exemplo 5 ficou provado que a seqüência  $\{n \operatorname{sen}(\pi/n)\}$  é convergente e que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [n \operatorname{sen}(\pi/n)] = \pi$ . Assim sendo, pelo Teorema 12.1.5 (iv),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{n}{2n+1} \cdot n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \pi \end{aligned}$$

Logo, a seqüência dada é convergente e seu limite é  $\frac{1}{2}\pi$ .

## EXERCÍCIOS 12.1

Nos Exercícios de 1 a 19, escreva os quatro primeiros elementos da seqüência e determine se ela é convergente ou divergente. Caso seja convergente, ache o seu limite.

1.  $\left\{ \frac{n+1}{2n-1} \right\}$

2.  $\left\{ \frac{2n^2+1}{3n^2-n} \right\}$

3.  $\left\{ \frac{n^2+1}{n} \right\}$

7.  $\left\{ \frac{\ln n}{n^2} \right\}$

8.  $\left\{ \frac{\log_b n}{n} \right\}, b > 1$

9.  $\{\operatorname{tgh} n\}$

4.  $\left\{ \frac{3n^3+1}{2n^2+n} \right\}$

5.  $\left\{ \frac{3-2n^2}{n^2-1} \right\}$

6.  $\left\{ \frac{e^n}{n} \right\}$

10.  $\{\operatorname{senh} n\}$

11.  $\left\{ \frac{n}{n+1} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right\}$

12.  $\left\{ \frac{\operatorname{senh} n}{\operatorname{sen} n} \right\}$

13.  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n} \right\}$

14.  $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$

15.  $\left\{ \left( 1 + \frac{1}{3n} \right)^n \right\}$  (Sugestão: use  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ .)
16.  $\left\{ \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^n \right\}$  Veja a sugestão para o Exercício 15.
17.  $\{r^{1/n}\}$  e  $r > 0$  (Sugestão: considere os dois casos:  $r \leq 1$  e  $r > 1$ .)
18.  $\{\cos n\pi\}$
19.  $\left\{ \frac{n}{c^n} \right\}$ ,  $c > 1$

Nos Exercícios de 20 a 25, use a Definição 12.1.2 para provar que a seqüência dada tem o limite  $L$ .

20.  $\left\{ \frac{4}{2n-1} \right\}$ ;  $L = 0$
21.  $\left\{ \frac{3}{n-1} \right\}$ ;  $L = 0$
22.  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$ ;  $L = 0$
23.  $\left\{ \frac{8n}{2n+3} \right\}$ ;  $L = 4$
24.  $\left\{ \frac{5-n}{2+3n} \right\}$ ;  $L = -\frac{1}{3}$
25.  $\left\{ \frac{2n^2}{5n^2+1} \right\}$ ;  $L = \frac{2}{5}$
26. Demonstre o Teorema 12.1.3.
27. Mostre que as seqüências  $\left\{ \frac{n^2}{n-3} \right\}$  e  $\left\{ \frac{n^2}{n+4} \right\}$  divergem; porém, a seqüência  $\left\{ \frac{n^2}{n-3} - \frac{n^2}{n+4} \right\}$  é convergente.

28. Dada a seqüência

$$\left\{ \frac{1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^a}{1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^b} \right\}, \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são constantes e } b \neq 0$$

Determine se a seqüência é convergente ou divergente. Se for convergente, determine o seu limite.

29. Prove que se  $|r| < 1$ , a seqüência  $\{nr^n\}$  é convergente e  $nr^n$  converge para zero.
30. Prove que se a seqüência  $\{a_n\}$  converge, então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  é único. (Sugestão: suponha que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  tenha dois valores diferentes,  $L$  e  $M$ , e mostre que isso é impossível, tomando  $\epsilon = \frac{1}{2} |L - M|$  na Definição 12.1.2.)
31. Prove que se a seqüência  $\{a_n\}$  for convergente e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ , então a seqüência  $\{a_n^2\}$  também será convergente e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 = L^2$ .
32. Prove que se a seqüência  $\{a_n\}$  for convergente e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ , então a seqüência  $\{|a_n|\}$  também será convergente e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |L|$ .

## 12.2 SEQÜÊNCIAS MONÓTONAS E LIMITADAS

Certos tipos de seqüências recebem nomes especiais.

### 12.2.1 DEFINIÇÃO

Dizemos que uma seqüência  $\{a_n\}$  é

- (i) **creciente**, se  $a_n \leq a_{n+1}$  para todo  $n$ ;
- (ii) **decrecente**, se  $a_n \geq a_{n+1}$  para todo  $n$ .

Chamamos de **monótona** uma seqüência que seja crescente ou decrecente.

No caso de  $a_n < a_{n+1}$  (um caso especial de  $a_n \leq a_{n+1}$ ), a seqüência é **estritamente crescente**; se  $a_n > a_{n+1}$ , a seqüência é **estritamente decrecente**.

**EXEMPLO 1** Determine se as seguintes seqüências são crescentes, decrescentes ou não-monótonas: (a)  $\{n/(2n+1)\}$ ; (b)  $\{1/n\}$ ; (c)  $\{(-1)^{n+1}/n\}$ .

### Solução

(a) Os elementos da seqüência podem ser escritos como

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+3}, \dots$$

Observe que obtemos  $a_{n+1}$  de  $a_n$ , substituindo  $n$  por  $n + 1$ . Logo, como  $a_n = n/(2n + 1)$ ,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n+1}{2(n+1)+1} \\ &= \frac{n+1}{2n+3} \end{aligned}$$

Observando os quatro primeiros elementos da seqüência, vemos que eles crescem quando  $n$  cresce. Assim, suspeitamos que em geral

$$\frac{n}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+3} \quad (1)$$

A desigualdade (1) pode ser comprovada se encontrarmos uma desigualdade equivalente que sabemos ser válida. Multiplicando cada membro de (1) por  $(2n+1)(2n+3)$ , obtemos as desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned} n(2n+3) &\leq (n+1)(2n+1) \\ 2n^2 + 3n &\leq 2n^2 + 3n + 1 \end{aligned} \quad (2)$$

A desigualdade (2) é, obviamente, verdadeira, pois o segundo membro é 1 maior do que o primeiro. Logo, a desigualdade (1) é verificada e, portanto, a seqüência dada é crescente.

(b) Os elementos da seqüência podem ser escritos como:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

Como

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

para todo  $n$ , a seqüência é decrescente.

(c) Os elementos da seqüência são

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}, \dots$$

Como  $a_1 = 1$  e  $a_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_1 > a_2$ . Porém  $a_3 = \frac{1}{3}$ ; assim  $a_2 < a_3$ . Em geral, consideramos três elementos consecutivos da seqüência:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \quad a_{n+2} = \frac{(-1)^{n+3}}{n+2}$$

Se  $n$  for ímpar,  $a_n > a_{n+1}$  e  $a_{n+1} < a_{n+2}$ ; por exemplo,  $a_1 > a_2$  e  $a_2 < a_3$ . Se  $n$  for par,  $a_n < a_{n+1}$  e  $a_{n+1} > a_{n+2}$ ; por exemplo,  $a_2 < a_3$  e  $a_3 > a_4$ . Dessa forma, a seqüência não é nem crescente, nem decrescente e, assim sendo, não é monótona.

### 12.2.2 DEFINIÇÃO

O número  $C$  é chamado de **limitante inferior** da seqüência  $\{a_n\}$  se  $C \leq a_n$  para todo  $n$  inteiro positivo, e o número  $D$  é chamado de **limitante superior** da seqüência  $\{a_n\}$  se  $a_n \leq D$  para todo  $n$  inteiro positivo.

► **ILUSTRAÇÃO 1** O número zero é um limitante inferior da seqüência  $\{n/(2n + 1)\}$  cujos elementos são

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \dots$$

Observe que  $\frac{1}{3}$  é outro limitante inferior da seqüência. Na verdade, todo número menor ou igual a  $\frac{1}{3}$  é um limitante inferior da seqüência. ◀

► **ILUSTRAÇÃO 2** Para a seqüência  $\{1/n\}$  cujos elementos são

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

1 é um limitante superior; 26 também é um limitante superior. Qualquer número que seja maior ou igual a 1 será um limitante superior, e qualquer número não-positivo servirá como limitante inferior para a seqüência. ◀

Com as Ilustrações 1 e 2 vemos que uma seqüência pode ter vários limitantes superiores e inferiores.

### 12.2.3 DEFINIÇÃO

Se  $A$  for um limitante inferior de uma seqüência  $\{a_n\}$  e se  $A$  satisfizer a propriedade de que para todo limitante inferior  $C$  de  $\{a_n\}$ ,  $C \leq A$ , então  $A$  será chamado de **limitante inferior máximo** da seqüência. Analogamente, se  $B$  for um limitante superior de uma seqüência  $\{a_n\}$  e se  $B$  satisfizer a propriedade de que para todo limitante superior  $D$  de  $\{a_n\}$ ,  $B \leq D$ , então  $B$  será chamado de **limitante superior mínimo** da seqüência.

► **ILUSTRAÇÃO 3** Para a seqüência  $\{n/(2n + 1)\}$  da Ilustração 1, o limite inferior máximo é  $\frac{1}{3}$ , pois todo limitante inferior da seqüência é menor ou igual a  $\frac{1}{3}$ . Além disso, como

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} < \frac{1}{2}$$

para todo  $n$ , então  $\frac{1}{2}$  é o limite superior mínimo da seqüência.

Na Ilustração 2 há a seqüência  $\{1/n\}$  cujo limitante superior mínimo é 1, pois todo limitante superior da seqüência é maior ou igual a 1. O limitante inferior máximo dessa seqüência é 0. ◀

### 12.2.4 DEFINIÇÃO

Dizemos que uma seqüência  $\{a_n\}$  é **limitada** se e somente se ela tiver limitantes superior e inferior.

Como a seqüência  $\{1/n\}$  tem um limitante superior e um limitante inferior, ela é limitada. Além disso,  $\{1/n\}$  também é decrescente; logo, é uma seqüência monótona limitada. Há um teorema (12.2.6) que garante que toda seqüência monótona limitada é convergente. Em particular,  $\{1/n\}$  é convergente, pois  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1/n) = 0$ . A seqüência  $\{n\}$  cujos elementos são

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

é monótona (pois é crescente); porém não é limitada (uma vez que não possui limitante superior). Ela não é convergente, pois  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ .

Para demonstrar o Teorema 12.2.6 precisamos de uma propriedade muito importante do sistema de números reais que será enunciada a seguir.

### 12.2.5 O AXIOMA DO COMPLEMENTO

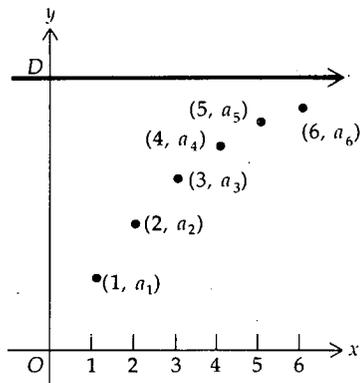


FIGURA 1

Todo conjunto não-vazio de números reais que tenha um limitante inferior, possui um limitante inferior máximo. Da mesma forma, todo conjunto não-vazio de números reais que tenha um limitante superior possui um limite superior mínimo.

A segunda sentença no enunciado do axioma do complemento é desnecessária, uma vez que pode ser provada da primeira sentença. Ela foi incluída no axioma para facilitar a discussão.

Vamos supor que a seqüência  $\{a_n\}$  seja crescente e limitada. Seja  $D$  um limitante superior da seqüência. Então, se os pontos  $(n, a_n)$  forem colocados num sistema cartesiano ortogonal, eles ficarão abaixo da reta  $y = D$ . Além disso, como a seqüência é crescente, à medida que  $n$  cresce, os pontos ficarão cada vez mais próximos da reta  $y = D$ . Veja a Figura 1. Assim sendo, quando  $n$  cresce, os elementos  $a_n$  crescem em direção a  $D$ . Intuitivamente, diremos que a seqüência  $\{a_n\}$  tem um limite que é  $D$  ou algum número menor do que  $D$ . Isso é realmente o que acontece, como está provado no teorema a seguir.

### 12.2.6 TEOREMA

Uma seqüência monótona limitada é convergente.

**Prova** Demonstraremos o teorema para o caso das seqüências monótonas crescentes. Seja  $\{a_n\}$  a seqüência.

Como  $\{a_n\}$  é limitada, existe um limitante superior para a seqüência. Pelo axioma de complemento,  $\{a_n\}$  tem um limitante superior mínimo que chamaremos de  $B$ . Então, se  $\epsilon$  for um número positivo,  $B - \epsilon$  não poderá ser um limitante superior para a seqüência, pois  $B - \epsilon < B$  e  $B$  é o limitante superior mínimo dela. Assim sendo, para algum número inteiro positivo  $N$ ,

$$B - \epsilon < a_N \quad (3)$$

Como  $B$  é o limitante superior mínimo de  $\{a_n\}$ , pela Definição 12.2.2 segue que

$$a_n \leq B \quad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo} \quad (4)$$

Como  $\{a_n\}$  é uma seqüência crescente, pela Definição 12.2.1(i) segue que

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo}$$

e assim

$$\text{se } n \geq N \text{ então } a_N \leq a_n$$

Dessa afirmação e de (3) e (4) segue que

$$\text{se } n \geq N \text{ então } B - \epsilon < a_N \leq a_n \leq B < B + \epsilon$$

de onde concluímos que

$$\text{se } n \geq N \text{ então } B - \epsilon < a_n < B + \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n \geq N \text{ então } -\epsilon < a_n - B < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n \geq N \text{ então } |a_n - B| < \epsilon$$

Mas, pela Definição 12.1.2, essa afirmação é a condição para que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = B$ . Logo, a seqüência  $\{a_n\}$  é convergente.

Para provar o teorema quando  $\{a_n\}$  for uma seqüência decrescente, basta considerar a seqüência  $\{-a_n\}$ , que será crescente, e aplicar os resultados acima. Propomos como um exercício que as etapas da demonstração sejam completadas. (veja o Exercício 17). ■

O Teorema 12.2.6 estabelece que se  $\{a_n\}$  for uma seqüência monótona limitada, então existirá um número  $L$  tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ , mas não esclarece como encontrar  $L$ . Por essa razão, o Teorema 12.2.6 é chamado de *teorema de existência*. Muitos conceitos importantes em Matemática baseiam-se em teoremas de existência. Assim, existem diversas seqüências para as quais o limite não pode ser encontrado através do uso direto da definição ou da aplicação de teoremas de limite, mas o conhecimento de que tal limite existe pode ser importante para um matemático.

Na demonstração do Teorema 12.2.6, o limite de uma seqüência crescente limitada é o seu limitante superior mínimo  $B$ . Logo, se  $D$  for um limitante superior da seqüência,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = B \leq D$ . Temos, então, o teorema a seguir.

**12.2.7 TEOREMA**

Seja  $\{a_n\}$  uma seqüência crescente, e suponhamos que  $D$  seja um limitante superior da seqüência. Então,  $\{a_n\}$  será convergente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq D$$

Na demonstração do Teorema 12.2.6 para o caso de seqüências monótonas decrescentes, o limite é o limitante inferior máximo. Assim sendo, existe um teorema similar ao Teorema 12.2.7.

**12.2.8 TEOREMA**

Seja  $\{a_n\}$  uma seqüência decrescente, e suponhamos que  $C$  seja um limitante inferior da seqüência. Então,  $\{a_n\}$  será convergente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq C$$

**EXEMPLO 2** Use o Teorema 12.2.6 para provar que a seqüência é convergente:

$$\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$$

**Solução** Os elementos da seqüência dada são

$$\frac{2^1}{1!}, \frac{2^2}{2!}, \frac{2^3}{3!}, \frac{2^4}{4!}, \dots, \frac{2^n}{n!}, \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \dots$$

$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24$ . Assim sendo, os elementos da seqüência podem ser escritos como

$$2, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{2^n}{n!}, \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \dots$$

Então  $a_1 = a_2 > a_3 > a_4$ ; logo, a seqüência dada pode ser decrescente. Precisamos verificar se  $a_n \geq a_{n+1}$ ; isto é, precisamos determinar se

$$\frac{2^n}{n!} \geq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow 2^n(n+1)! \geq 2^{n+1}n!$$

$$\Leftrightarrow 2^n n!(n+1) \geq 2 \cdot 2^n n!$$

$$\Leftrightarrow n+1 \geq 2 \quad (6)$$

Quando  $n = 1$ , a desigualdade (6) torna-se  $2 = 2$  e (6) é, obviamente, verdadeira quando  $n > 2$ . Como a desigualdade (5) é equivalente a (6), segue que a seqüência dada é decrescente e, portanto, monótona. Um limitante superior para a seqüência dada é 2, e um limitante inferior é 0. Assim sendo, a seqüência é limitada.

A seqüência  $\{2^n/n!\}$  é, então, uma seqüência monótona limitada e, pelo Teorema 12.2.6, ela é convergente.

O Teorema 12.2.6 estabelece que uma condição suficiente para uma seqüência monótona ser convergente é que ela seja limitada. Esta também é uma condição necessária e será dada no teorema a seguir.

## 12.2.9 TEOREMA

Uma seqüência monótona convergente é limitada.

**Prova** Vamos demonstrar o teorema para o caso das seqüências monótonas crescentes. Seja  $\{a_n\}$  a seqüência.

Para provar que  $\{a_n\}$  é limitada, é preciso mostrar que ela tem um limitante inferior e um limitante superior. Como  $\{a_n\}$  é uma seqüência crescente, seu primeiro elemento serve como um limitante inferior. Precisamos agora encontrar um limitante superior.

Como  $\{a_n\}$  é convergente, a seqüência tem um limite; seja  $L$  esse limite. Então,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$  e, pela Definição 12.1.2, para todo  $\epsilon > 0$  existe um número  $N > 0$  tal que se  $n$  for um inteiro e

$$\text{se } n > N \text{ então } |a_n - L| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N \text{ então } -\epsilon < a_n - L < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N \text{ então } L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$

Como  $\{a_n\}$  é crescente, segue dessa afirmação que

$$a_n < L + \epsilon \quad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo}$$

Logo,  $L + \epsilon$  servirá com um limitante superior para a seqüência  $\{a_n\}$ .

Para provar o teorema quando  $\{a_n\}$  for uma seqüência decrescente, basta proceder como foi sugerido na demonstração do Teorema 12.2.6: considere a seqüência  $\{-a_n\}$ , que é crescente, e aplique os resultados acima. Você deverá fazer tal demonstração no Exercício 18. ■

## EXERCÍCIOS 12.2

Nos Exercícios de 1 a 16, determine se a seqüência dada é crescente, decrescente ou não-monótona.

1.  $\left\{ \frac{3n-1}{4n+5} \right\}$

2.  $\left\{ \frac{2n-1}{4n-1} \right\}$

3.  $\left\{ \frac{1-2n^2}{n^2} \right\}$

4.  $\{\sin n\pi\}$

5.  $\{\cos \frac{1}{3}n\pi\}$

6.  $\left\{ \frac{n^3-1}{n} \right\}$

7.  $\left\{ \frac{1}{n + \sin n^2} \right\}$

8.  $\left\{ \frac{2^n}{1+2^n} \right\}$

9.  $\left\{ \frac{5^n}{1+5^{2n}} \right\}$

10.  $\left\{ \frac{(2n)!}{5^n} \right\}$

11.  $\left\{ \frac{n!}{3^n} \right\}$

12.  $\left\{ \frac{n}{2^n} \right\}$

13.  $\left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}$

14.  $\{n^2 + (-1)^n n\}$

15.  $\left\{ \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right\}$

16.  $\left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} \right\}$

17. Use o fato de que o Teorema 12.2.6 é válido para uma seqüência crescente, para provar que o teorema também é válido quando  $\{a_n\}$  for uma seqüência decrescente. (Sugestão: considere a seqüência  $\{-a_n\}$ .)

18. Prove o Teorema 12.2.9 quando  $\{a_n\}$  for uma seqüência decrescente, usando um método similar ao que foi usado no Exercício 17.

Nos Exercícios 19 e 20, determine se a seqüência dada é limitada.

19.  $\left\{ \frac{n^2+3}{n+1} \right\}$

20.  $\{3 - (-1)^{n-1}\}$

Nos Exercícios de 21 a 30, prove que a seqüência dada é convergente, usando o Teorema 12.2.6.

21. A seqüência do Exercício 1. 22.  $\left\{ \frac{n}{3^{n+1}} \right\}$

23.  $\left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right\}$

25. A seqüência do Exercício 9.

26. A seqüência do Exercício 12.

27. A seqüência do Exercício 15.

28. A seqüência do Exercício 16.

29.  $\left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\}$

30.  $\{k^{1/n}\}$ ,  $k > 1$

31. Dê exemplo de uma seqüência que seja limitada e convergente, porém não-monótona.

32. Dada a seqüência  $\{a_n\}$ , onde  $a_n > 0$  para todo  $n$  e  $a_{n+1} < ka_n$  com  $0 < k < 1$ . Prove que  $\{a_n\}$  é convergente.

## 12.3 SÉRIES INFINITAS DE TERMOS CONSTANTES

Uma parte importante no estudo do Cálculo envolve a representação de funções como “somas infinitas”. Isso requer que a operação usual de adição em conjuntos finitos de números seja estendida para conjuntos infinitos. Para tanto, usamos um processo de limite através de seqüências.

Associemos à seqüência

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

uma “soma infinita” denotada por

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

Mas, qual o significado de tal expressão? Isto é, o que queremos denotar com a “soma” de um número infinito de termos e em quais circunstâncias essa soma existe? Para termos uma idéia intuitiva do conceito dessa soma, consideremos um pedaço de fio com 2 m de comprimento e suponhamos que ele seja cortado ao meio. Uma das partes é deixada de lado, enquanto que a outra é novamente dividida ao meio. Um dos pedaços com 1/2 m de comprimento é posto de lado, enquanto que o outro é cortado ao meio, e então obtemos dois pedaços com 1/4 m de comprimento cada um. Tomando apenas um deles e dividindo-o ao meio, obtemos dois pedaços com 1/8 m de comprimento. Novamente, cortamos um dos pedaços ao meio. Se esse procedimento continuar indefinidamente, o número de metros na soma dos comprimentos dos pedaços separados pode ser considerado como a soma infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots \quad (1)$$

Como começamos com um pedaço de fio com 2 m de comprimento, nossa intuição indica que a soma infinita (1) deve ser 2. Na Ilustração 2 demonstraremos que é realmente o que ocorre. No entanto, precisamos primeiro de algumas definições preliminares.

Da seqüência

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

vamos formar uma nova seqüência  $\{s_n\}$ , adicionando os sucessivos elementos de  $\{u_n\}$ :

$$s_1 = u_1$$

$$s_2 = u_1 + u_2$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$s_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

⋮

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$$

A seqüência  $\{s_n\}$  obtida dessa maneira da seqüência  $\{u_n\}$  é chamada de *série infinita*.

## 12.3.1 DEFINIÇÃO

Se  $\{u_n\}$  for uma seqüência e

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

então a seqüência  $\{s_n\}$  será chamada de **série infinita**, a qual é denotada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

Os números  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$  são chamados de **termos** da série infinita. Os números  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$  são chamados de **somas parciais** da série infinita.

Observe que a Definição 12.3.1 estabelece que uma série infinita é uma seqüência de somas parciais.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Considere a seqüência  $\{u_n\}$ , onde  $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

A partir dela, vamos formar uma seqüência de somas parciais:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 & s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} & \Leftrightarrow s_2 &= \frac{3}{2} \\ s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \Leftrightarrow s_3 &= \frac{7}{4} \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} & \Leftrightarrow s_4 &= \frac{15}{8} \\ s_5 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} & \Leftrightarrow s_5 &= \frac{31}{16} \\ &\vdots & & \\ s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Essa seqüência de somas parciais  $\{s_n\}$  é a série infinita denotada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

Observe que essa é a soma infinita (1) obtida no começo desta secção, na discussão sobre o corte de um fio de 2 m de comprimento. Ela é exemplo de uma *série geométrica* a ser estudada posteriormente nesta secção. ◀

Quando  $\{s_n\}$  é uma seqüência de somas parciais,

$$s_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}$$

Assim,

$$s_n = s_{n-1} + u_n$$

Usaremos essa fórmula no exemplo a seguir.

**EXEMPLO 1** Dada a série infinita

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- (a) determine os quatro primeiros elementos da seqüência das somas parciais  $\{s_n\}$ , e  
 (b) determine a fórmula para  $s_n$  em termos de  $n$ .

**Solução**

- (a) Como  $s_n = s_{n-1} + u_n$

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 & s_2 &= s_1 + u_2 \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} & &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{1}{2} & &= \frac{2}{3} \\ s_3 &= s_2 + u_3 & s_4 &= s_3 + u_4 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} & &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} \\ &= \frac{3}{4} & &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

- (b) Como  $u_k = \frac{1}{k(k+1)}$  temos, por frações parciais,

$$u_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Logo,

$$u_1 = 1 - \frac{1}{2} \quad u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

...

$$u_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Assim, como  $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$ ,

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Eliminando os parênteses e combinando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} s_n &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Tomando  $n$  igual a 1, 2, 3 e 4, vemos que os resultados estão de acordo.

O método de resolução do exemplo acima aplica-se somente a casos particulares. Em geral, não é possível obter tal expressão para  $s_n$ .

Vamos definir agora a *soma* de uma série infinita.

### 12.3.2 DEFINIÇÃO

Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  uma dada série infinita, e seja  $\{s_n\}$  a seqüência das somas parciais que definem a série. Então, se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  existir e for igual a  $S$ , dizemos que a série dada será **convergente**, sendo  $S$  a **soma** da série infinita dada. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  não existir, a série será **divergente** e não terá uma soma.

Essencialmente, a Definição 12.3.2 estabelece que uma série infinita será convergente se e somente se a seqüência das somas parciais correspondentes for convergente.

Se uma série infinita tiver uma soma  $S$ , dizemos também que a série convergirá para  $S$ .

Observe que a soma de uma série convergente é o limite de uma seqüência de somas parciais e não é obtida pela adição ordinária. Para uma série convergente o símbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

é usado, denotando ambas a série e a soma da série. O uso do mesmo símbolo não deve causar confusão, pois a interpretação correta fica clara a partir do contexto em que ele for empregado.

► **ILUSTRAÇÃO 2** A série infinita da Ilustração 1 é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots \quad (2)$$

e a seqüência das somas parciais é  $\{s_n\}$ , onde

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad (3)$$

Para determinar se a série infinita (2) tem uma soma, precisamos calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ . Em primeiro lugar, encontramos uma fórmula para  $s_n$ . Da Álgebra,

temos a identidade:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Aplicando essa fórmula com  $a = 1$  e  $b = \frac{1}{2}$ , temos

$$1 - \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}$$

Comparando essa equação com (3), obtemos

$$s_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$  temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 2$$

Assim sendo, a série infinita (2) tem por soma 2. ◀

**EXEMPLO 2** Determine se a série infinita do Exemplo 1 tem uma soma.

**Solução** Na resolução do Exemplo 1 foi mostrado que a seqüência das somas parciais para a série dada é  $\{s_n\} = \{n/(n+1)\}$ . Logo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Assim sendo, a série infinita tem uma soma igual a 1, e escrevemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

**EXEMPLO 3** Determine a série infinita que tem a seguinte seqüência de somas parciais:

$$\{s_n\} = \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}$$

Também determine se a série infinita é convergente ou divergente; se for convergente, obtenha a sua soma.

**Solução** Como  $s_1 = \frac{1}{2}$ , então  $u_1 = \frac{1}{2}$ . Se  $n > 1$ ,

$$\begin{aligned} u_n &= s_n - s_{n-1} \\ &= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= -\frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Logo, a série infinita é

$$\frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

Já que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 0\end{aligned}$$

a série é convergente e sua soma é 0.

Como já foi mencionado acima, na maioria dos casos não é possível obter uma expressão para  $s_n$  em termos de  $n$ ; assim sendo, precisamos de outros métodos para determinar se uma dada série infinita tem uma soma ou, equivalentemente, se uma dada série é convergente ou divergente.

### 12.3.3 TEOREMA

Se a série infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  for convergente, então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Prova** Seja  $\{s_n\}$  a seqüência das somas parciais para a série dada, e seja  $S$  a soma da série. Da Definição 12.3.2,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$ . Assim, para todo  $\epsilon > 0$  existe um número  $N > 0$  tal que

$$\text{se } n > N \text{ então } |S - s_n| < \frac{1}{2}\epsilon$$

Também

$$\text{se } n > N \text{ então } |S - s_{n+1}| < \frac{1}{2}\epsilon$$

Portanto,

$$\begin{aligned}|u_{n+1}| &= |s_{n+1} - s_n| \\ &= |S - s_n + s_{n+1} - S| \\ &\leq |S - s_n| + |s_{n+1} - S|\end{aligned}$$

Assim,

$$\text{se } n > N \text{ então } |u_{n+1}| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \blacksquare$$

O Teorema 12.3.3 fornece um teste simples para divergência, pois se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ , podemos concluir que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  é divergente.

**EXEMPLO 4** Prove que as duas séries seguintes são divergentes:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2} = 2 + \frac{5}{4} + \frac{10}{9} + \frac{17}{16} + \dots$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} 3 = 3 - 3 + 3 - 3 + \dots$$

**Solução**

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1} \\
 &= 1 \\
 &\neq 0
 \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 12.3.3, a série é divergente.

$$\text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} 3, \text{ que não existe. Logo, pelo Teorema 12.3.3, a série é divergente.}$$

O inverso do Teorema 12.3.3 é falso. Isto é, se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , então não é necessariamente verdadeiro que a série seja convergente. Em outras palavras, é possível ter uma série divergente para a qual  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . Um exemplo disso é a chamada **série harmônica**, que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (4)$$

Obviamente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n = 0$ . Na ilustração 3 provaremos que a série harmônica diverge, fazendo uso do teorema que estabelece o seguinte: a diferença entre duas somas parciais,  $s_R$  e  $s_T$ , de uma série convergente pode se tornar tão pequena quanto desejarmos, tomando  $R$  e  $T$  suficientemente grandes.

**12.3.4 TEOREMA**

Seja  $\{s_n\}$  a seqüência das somas parciais de uma dada série convergente  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .

Então, para todo  $\epsilon > 0$ , existe um número  $N$  tal que

$$\text{se } R > N \text{ e } T > N \text{ então } |s_R - s_T| < \epsilon$$

**Prova** Como a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  é convergente, seja  $S$  a sua soma. Então, para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $N > 0$  tal que se  $n > N$ , então  $|S - s_n| < \frac{1}{2}\epsilon$ . Logo, se  $R > N$  e  $T > N$ ,

$$|s_R - s_T| = |s_R - S + S - s_T| \leq |s_R - S| + |S - s_T| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon$$

Portanto,

$$\text{se } R > N \text{ e } T > N, \text{ então } |s_R - s_T| < \epsilon \quad \blacksquare$$

► **ILUSTRAÇÃO 3** Vamos provar que a série harmônica (4) é divergente. Para essa série,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

e

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Logo,

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \quad (5)$$

Se  $n > 1$ ,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Há  $n$  termos em cada lado do sinal de desigualdade; assim, o lado direito é  $n(1/2n) = \frac{1}{2}$ . Logo, de (5) e da desigualdade acima,

$$\text{se } n > 1, \text{ então } s_{2n} - s_n > \frac{1}{2} \quad (6)$$

Mas o Teorema 12.3.4 estabelece que se a série dada for convergente,  $s_{2n} - s_n$  poderá se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando  $n$  suficientemente grande; isto é, se  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , existe um  $N$  tal que

$$\text{se } 2n > N \text{ e } n > N, \text{ então } s_{2n} - s_n < \frac{1}{2}$$

Mas isso contradiz (6). Logo, a série harmônica é divergente, muito embora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n = 0$ . ◀

Uma série geométrica é da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

A série infinita (2), discutida nas Ilustrações 1 e 2, é uma série geométrica com  $a = 1$  e  $r = \frac{1}{2}$ . A  $n$ -ésima soma parcial da série geométrica acima é dada por

$$s_n = a(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}) \quad (7)$$

Da identidade

$$1 - r^n = (1 - r)(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1})$$

podemos escrever (7) como

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{se } r \neq 1 \quad (8)$$

### 12.3.5 TEOREMA

A série geométrica converge para a soma  $a/(1 - r)$  se  $|r| < 1$  e a série geométrica diverge se  $|r| \geq 1$ .

**Prova** No Exemplo 3, Secção 12.1, mostramos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$  se  $|r| < 1$ . Logo, de (8), podemos concluir que se  $|r| < 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{a}{1 - r}$$

Assim sendo, se  $|r| < 1$ , a série geométrica converge e sua soma é  $a/(1 - r)$ .

Se  $r = 1$ ,  $s_n = na$ . Então,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ , se  $a > 0$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$  se  $a < 0$ .

Se  $r = -1$ , então a série geométrica torna-se

$$a - a + a - \dots + (-1)^{n-1}a + \dots$$

Assim,  $s_n = 0$ , se  $n$  for par, e  $s_n = a$ , se  $n$  for ímpar. Logo,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  não existe. Então, a série geométrica diverge quando  $|r| = 1$ .

Se  $|r| > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ar^{n-1} = a \lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n-1}$ . É claro que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n-1} \neq 0$  pois  $|r^{n-1}|$  pode se tornar tão grande quanto desejarmos, tomando  $n$  suficientemente grande. Logo, pelo Teorema 12.3.3, a série é divergente. Isso completa a demonstração. ■

O exemplo a seguir ilustra de que modo o Teorema 12.3.5 pode ser usado para expressar uma dízima periódica como uma fração comum.

**EXEMPLO 5** Exprese a dízima periódica 0,3333 ... como uma fração comum.

**Solução**

$$0,3333 \dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10.000} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$$

Essa é uma série geométrica na qual  $a = \frac{3}{10}$  e  $r = \frac{1}{10}$ . Como  $|r| < 1$ , do Teorema 12.3.5 segue que a série converge e sua soma é  $a/(1 - r)$ . Então,

$$\begin{aligned} 0,3333 \dots &= \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**EXERCÍCIOS 12.3**

Nos Exercícios de 1 a 8, encontre os quatro primeiros elementos da seqüência de somas parciais  $\{s_n\}$ , e obtenha uma fórmula para  $s_n$  em termos de  $n$ . Determine também se a série infinita é convergente ou divergente; se for convergente, encontre a sua soma.

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} n$

3.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{(3n+1)(3n-2)}$

4.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)}$

5.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

6.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

7.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{5^{n-1}}$

8.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$

11.  $\{s_n\} = \left\{ \frac{1}{3^n} \right\}$

12.  $\{s_n\} = \{3^n\}$

13.  $\{s_n\} = \{\ln(2n+1)\}$

Nos Exercícios de 14 a 26, escreva os quatro primeiros termos da série infinita dada e determine se ela é convergente ou divergente. Se for convergente, obtenha a sua soma.

14.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$

15.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$

16.  $\sum_{n=1}^{+\infty} [1 + (-1)^n]$

17.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

18.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2}{n^2+1}$

19.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{1}{n}$

20.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$

21.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2^n}$

22.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg}^n \frac{\pi}{6}$

23.  $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}$

Nos Exercícios de 9 a 13, encontre a série infinita que produz a seqüência de somas parciais dada. Determine também se a série infinita é convergente ou divergente; se for convergente, encontre a sua soma.

9.  $\{s_n\} = \left\{ \frac{2n}{3n+1} \right\}$

10.  $\{s_n\} = \left\{ \frac{n^2}{n+1} \right\}$

24.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{senh} n}{n}$

25.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos \pi n$

26.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \pi n$

Nos Exercícios de 27 a 30, expresse a dízima periódica decimal como uma fração ordinária.

27. 0,272727 ...                      28. 2,0454545 ...  
29. 1,234234234 ...                  30. 0,465346534653 ...

31. A trajetória de cada oscilação de um pêndulo é 0,93 do comprimento da trajetória da oscilação anterior (de um lado até o outro). Se a trajetória da primeira oscilação mede 56 cm de comprimento e se a resistência do ar leva o pêndulo ao repouso, quanto mede o caminho percorrido pelo pêndulo até que ele pare?
32. Uma bola cai de uma altura de 12 m. Cada vez que ela bate no chão, sobe a uma altura de três quartos da altura da queda anterior. Determine a distância percorrida pela bola até o repouso.
33. Qual a distância total percorrida por uma bola de tênis até o repouso, se ela cai de uma altura de 100 m e se após cada queda ela rebate no chão e volta a uma distância de 11/20 da altura anterior?
34. Um triângulo equilátero tem lados medindo 4 unidades de comprimento. Portanto, o seu perímetro é 12 unidades. Outro triângulo equilátero é construído com segmentos de reta traçados através dos pontos médios dos lados do primeiro triângulo. Esse triângulo tem lados medindo 2 unidades de comprimento e seu perímetro é de 6 unidades. Se o procedimento puder ser repetido um número ilimitado de vezes, qual será o perímetro total de todos os triângulos formados?
35. Após tirar os pés dos pedais, a roda da frente de uma bicicleta gira 200 vezes durante os 10 primeiros segundos e em cada um dos 10 s seguintes ela gira 4/5 do que girou no período anterior. Determine o número de voltas da roda até que a bicicleta pare.
36. Determine uma série geométrica infinita cuja soma é 6 e tal que cada termo seja quatro vezes a soma de todos os termos que o sucedem.

## 12.4 QUATRO TEOREMAS SOBRE SÉRIES INFINITAS

O primeiro teorema desta secção estabelece que o caráter convergente ou divergente de uma série infinita não é afetado quando se muda um número finito de termos.

### 12.4.1 TEOREMA

Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  são duas séries infinitas que diferem somente pelo seus  $m$  primeiros termos (isto é,  $a_k = b_k$  se  $k > m$ ), então ambas convergem ou ambas divergem.

**Prova** Sejam  $\{s_n\}$  e  $\{t_n\}$  as seqüências das somas parciais das séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ , respectivamente. Então,

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

e

$$t_n = b_1 + b_2 + \dots + b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \dots + b_n$$

Como  $a_k = b_k$  se  $k > m$ , então se  $n \geq m$ ,

$$s_n - t_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_m) - (b_1 + b_2 + \dots + b_m)$$

Assim sendo,

$$\text{se } n \geq m, \text{ então } s_n - t_n = s_m - t_m \quad (1)$$

Queremos provar que ambos os limites  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$  existem ou ambos não existem.

Vamos supor que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$  exista. Então, de (1),

$$\text{se } n \geq m, \text{ então } s_n = t_n + (s_m - t_m)$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n + (s_m - t_m)$$

Logo, quando  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$  existe,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  também existe e ambas as séries convergem.

Vamos supor agora que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$  não exista, enquanto que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  existe. De (1),

$$\text{se } n \geq m, \text{ então } t_n = s_n + (t_m - s_m)$$

Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  existe, segue que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n + (t_m - s_m)$$

e, portanto,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$  deve existir, o que é uma contradição. Logo, se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$  não existir, também  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  não existirá e ambas as séries divergirão. ■

**EXEMPLO 1** Determine se a série infinita é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+4}$$

**Solução** A série dada é

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n+4} + \dots$$

que pode ser escrita como

$$0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (2)$$

Mas, sabemos que a série harmônica é divergente, e

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

A série (2) difere da série harmônica somente nos quatro primeiros termos. Logo, pelo Teorema 12.4.1, a série (2) também é divergente.

**EXEMPLO 2** Determine se a seguinte série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[ \cos \frac{3}{n} \pi + 2 \right]}{3^n}$$

**Solução** A série dada pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \frac{\left[ \cos 3\pi + 2 \right]}{3} + \frac{\left[ \cos \frac{3}{2}\pi + 2 \right]}{3^2} + \frac{\left[ \cos \pi + 2 \right]}{3^3} + \frac{\left[ \cos \frac{3}{4}\pi + 2 \right]}{3^4} \\ & \quad + \frac{\left[ \cos \frac{3}{5}\pi + 2 \right]}{3^5} + \frac{\left[ \cos \frac{1}{2}\pi + 2 \right]}{3^6} + \frac{\left[ \cos \frac{3}{7}\pi + 2 \right]}{3^7} + \dots \\ & = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Consideremos a série geométrica com  $a = \frac{2}{3}$  e  $r = \frac{1}{3}$ :

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \dots \quad (4)$$

Essa é uma série convergente, pelo Teorema 12.3.5. Como a série (3) difere da série (4) somente pelos cinco primeiros termos, segue do Teorema 12.4.1 que a série (3) também é convergente.

Como consequência do Teorema 12.4.1, para uma dada série infinita, podemos adicionar ou subtrair um número finito de termos, sem afetar seu caráter convergente ou divergente. Por exemplo, no Exemplo 1, a série dada pode ser considerada como a série harmônica da qual foram subtraídos os quatro primeiros termos. Como a série harmônica é divergente, a série dada também será divergente. No Exemplo 2 poderíamos considerar a série geométrica convergente

$$\frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \dots \quad (5)$$

e obter a série dada (3), somando cinco termos. Como a série (5) é convergente, segue que a série (3) também é convergente.

O teorema seguinte estabelece que se uma série infinita for multiplicada termo a termo por uma constante não-nula, seu caráter convergente ou divergente não será afetado.

#### 12.4.2 TEOREMA

Seja  $c$  uma constante não-nula.

- (i) Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  for convergente e sua soma for  $S$ , então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$  também será convergente e sua soma será  $c \cdot S$ .
- (ii) Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  for divergente, então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$  também será divergente.

**Prova** Seja  $s_n$  a  $n$ -ésima soma parcial da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ . Então,

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n. \text{ A } n\text{-ésima soma parcial da série } \sum_{n=1}^{+\infty} cu_n \text{ é}$$

$$c(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = cs_n.$$

**Prova de (i)** Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  for convergente, então existe o  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  e será  $S$ . Logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} cs_n = c \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

$$= c \cdot S$$

Assim sendo, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$  é convergente e sua soma é  $c \cdot S$ .

**Prova de (ii)** Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  for divergente, então não existirá  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ . Suponha que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$  seja convergente. Então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} cs_n$  existe. Como  $s_n = cs_n/c$ , segue que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{c} (cs_n)$$

$$= \frac{1}{c} \lim_{n \rightarrow +\infty} cs_n$$

Logo,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  deve existir, o que é uma contradição. Portanto, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$  é divergente. ■

**EXEMPLO 3** Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n}$$

**Solução**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4n} + \dots$$

Como  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  é a série harmônica que é divergente, então, pelo Teorema 12.4.2(ii) com  $c = \frac{1}{4}$ , a série dada é divergente.

O Teorema 12.4.2(i) é uma extensão para séries infinitas convergentes da seguinte propriedade de somas finitas:

$$\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

Outra propriedade de somas finitas é

$$\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$$

e sua aplicação a séries infinitas convergentes é dada pelo teorema a seguir.

#### 12.4.3 TEOREMA

Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  são séries infinitas convergentes com somas  $S$  e  $R$ , respectivamente, então

(i)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  é uma série convergente e sua soma é  $S + R$ ;

(ii)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n)$  é uma série convergente e sua soma é  $S - R$ .

A demonstração desse teorema é deixada como exercício (veja o Exercício 24).

O próximo teorema é um corolário do teorema anterior, sendo usado algumas vezes para provar a divergência de uma série.

#### 12.4.4 TEOREMA

Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  for convergente e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  for divergente, então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  será divergente.

**Prova** Suponha que  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  seja convergente e que sua soma seja  $S$ . Seja  $R$  a soma da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ . Então, como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n + b_n) - a_n]$$

segue, do Teorema 12.4.3(ii), que  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é convergente e que sua soma é  $S - R$ .

Mas isso contradiz a hipótese de que  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é divergente. Logo,  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  é divergente. ■

**EXEMPLO 4** Determine se a série infinita é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{4n} + \frac{1}{4^n} \right)$$

**Solução** No Exemplo 3 ficou provado que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n}$  é divergente. Como a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}$  é uma série geométrica com  $|r| = \frac{1}{4} < 1$ , ela é convergente. Assim, pelo Teorema 12.4.4, a série dada é divergente.

Se ambas as séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  forem divergentes, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  poderá ou não ser convergente. Por exemplo, se  $a_n = \frac{1}{n}$  e  $b_n = \frac{1}{n}$ , então  $a_n + b_n = \frac{2}{n}$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}$  será divergente. Mas, se  $a_n = \frac{1}{n}$  e  $b_n = -\frac{1}{n}$ , então  $a_n + b_n = 0$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$  será convergente.

## EXERCÍCIOS 12.4

Nos Exercícios de 1 a 22, determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, ache a sua soma.

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}$

2.  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n-1}$

3.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n}$

4.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3n}$

5.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n}$

6.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$

7.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3} \left( \frac{5}{7} \right)^n$

8.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{5} \left( \frac{3}{4} \right)^n$

9.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[ \sin \frac{4}{n} \pi + 3 \right]}{4^n}$

10.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[ \cos \frac{1}{n} \pi + 1 \right]}{2^n}$

14.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} \right)$

15.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-n} + e^n)$

16.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (2^{-n} + 3^n)$

17.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n} \right)$

18.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{3}{2n} - \frac{2}{3n} \right)$

19.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n} \right)$

20.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{5}{4^n} + \frac{4}{5^n} \right)$

21.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n^2} + 2 \right)$

22.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{5^n}$

23. Dê um exemplo para mostrar que mesmo sendo  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  divergentes, é possível que  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$  seja convergente.

24. Prove o Teorema 12.4.3.

11.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^n} \right)$

12.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3n} \right)$

13.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$

## 12.5 SÉRIES INFINITAS DE TERMOS POSITIVOS

Se todos os termos de uma série infinita forem positivos, a seqüência das somas parciais será crescente. Assim sendo, dos Teoremas 12.2.6 e 12.2.9, segue imediatamente o teorema a seguir.

### 12.5.1 TEOREMA

Uma série infinita de termos positivos será convergente se e somente se sua seqüência de somas parciais tiver um limitante superior.

**Prova** Para uma série infinita de termos positivos, a seqüência das somas parciais tem um limitante inferior de 0. Se a seqüência das somas parciais também tiver um limitante superior, então ela será limitada. Além disso, a seqüência das somas parciais de uma série infinita de termos positivos é crescente. Segue, então, do Teorema 12.2.6, que a seqüência das somas parciais é convergente e, portanto, a série infinita é convergente.

Vamos supor agora que uma série infinita de termos positivos seja convergente. Então, a seqüência das somas parciais também será convergente. Segue, do Teorema 12.2.9, que a seqüência das somas parciais será limitada e, assim sendo, terá um limitante superior. ■

**EXEMPLO 1** Prove que a série é convergente, usando o Teorema 12.5.1:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

**Solução** Precisamos encontrar um limitante superior para a seqüência das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ .

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}, s_3 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

⋮

$$s_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \quad (1)$$

Consideremos agora os  $n$  primeiros termos da série geométrica com  $a = 1$  e  $r = \frac{1}{2}$ :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad (2)$$

Pelo Teorema 12.3.5, a série geométrica com  $a = 1$  e  $r = \frac{1}{2}$  tem a soma  $a/(1 - r) = 2$ . Assim sendo, a soma (2) é menor do que 2. Observe que cada termo da soma (1) é menor ou igual ao termo correspondente da soma (2), isto é,

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

Isso é verdade, pois  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ , que além do fator 1 contém  $k - 1$  fatores, cada um maior ou igual a 2. Logo,

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 2$$

Segue que  $s_n$  tem um limitante superior de 2. Assim sendo, pelo Teorema 12.5.1 a série dada é convergente.

No exemplo acima, os termos da série dada foram comparados com os de uma série que sabemos ser convergente. Esse é um caso particular do teorema a seguir, conhecido como o *teste de comparação*.

**12.5.2 TEOREMA**  
**Teste de Comparação**

Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  uma série de termos positivos.

(i) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  for uma série de termos positivos que sabemos ser convergentes e se  $u_n \leq v_n$  para todo  $n$  inteiro positivo, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  será convergente.

(ii) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$  for uma série de termos positivos que sabemos ser divergentes e se  $u_n \geq w_n$  para todo  $n$  inteiro positivo, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  será divergente.

**Prova de (i)** Seja  $\{s_n\}$  a seqüência de somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  e  $\{t_n\}$  a seqüência de somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ . Como  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  é uma série convergente de termos positivos, segue do Teorema 12.5.1 que a seqüência  $\{t_n\}$  tem um limitante superior, o qual chamaremos de  $B$ . Como  $u_n \leq v_n$  para todo  $n$  inteiro positivo, podemos concluir que  $s_n \leq t_n \leq B$  para todo  $n$  inteiro positivo. Logo,  $B$  é um limitante superior da seqüência  $\{s_n\}$ . Como os termos da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  são todos positivos, segue do Teorema 12.5.1 que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  é convergente.

**Prova de (ii)** Suponha que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  seja convergente. Então, como ambas  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$  são séries infinitas de termos positivos e  $w_n \leq u_n$  para todo  $n$  inteiro positivo, segue da parte (i) que  $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$  é convergente. Porém, isso contradiz a hipótese; logo,  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  é divergente. ■

Como aprendemos na Secção 12.4, o caráter convergente ou divergente de uma série infinita não se altera quando descartamos um número finito de termos. Assim sendo, quando estivermos aplicando o teste de comparação, se  $u_i \leq v_i$  ou  $u_i \geq w_i$  para  $i > m$ , o teste será válido para qualquer escolha dos  $m$  primeiros termos das duas séries a serem comparados.

**EXEMPLO 2** Determine se a série infinita é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n + 1}$$

**Solução** A série dada é

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{10} + \frac{4}{28} + \frac{4}{82} + \dots + \frac{4}{3^n + 1} + \dots$$

Comparando o  $n$ -ésimo termo dessa série com o  $n$ -ésimo termo da série geométrica convergente

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \dots + \frac{4}{3^n} + \dots \quad r = \frac{1}{3} < 1$$

temos

$$\frac{4}{3^n + 1} < \frac{4}{3^n}$$

para todo  $n$  inteiro positivo. Assim sendo, pelo teste de comparação, Teorema 12.5.2(i), a série dada é convergente.

**EXEMPLO 3** Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

**Solução** A série dada é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Comparando o  $n$ -ésimo termo dessa série com o  $n$ -ésimo termo da série harmônica divergente, temos

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo}$$

Assim sendo, pelo Teorema 12.5.2(ii) a série dada é divergente.

O teorema a seguir, conhecido como *teste de comparação com limite*, é consequência do Teorema 12.5.2, e sua aplicação é, em muitos casos, mais fácil.

**12.5.3 TEOREMA**  
Teste de Comparação  
com Limite

Sejam  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  duas séries de termos positivos.

- (i) Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = c > 0$ , então ambas as séries convergem, ou ambas divergem.
- (ii) Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$  e se  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  converge, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  converge.
- (iii) Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$  e se  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  diverge, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  diverge.

**Prova de (i)** Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n/v_n) = c$ , segue que existe um  $N > 0$  tal que

$$\text{se } n > N \quad \text{então} \quad \left| \frac{u_n}{v_n} - c \right| < \frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N \quad \text{então} \quad -\frac{c}{2} < \frac{u_n}{v_n} - c < \frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{se } n > N \quad \text{então} \quad \frac{c}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3c}{2} \quad (3)$$

Do segundo membro da desigualdade (3),

$$u_n < \frac{3}{2}cv_n \quad (4)$$

Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  for convergente, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2}cv_n$  também o será. Segue, da desigualdade (4) e do teste de comparação, que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  é convergente.

Do primeiro membro da desigualdade (3),

$$v_n < \frac{2}{c}u_n \quad (5)$$

Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  for convergente, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{c}u_n$  também o será. Da desigualdade (5) e do teste de comparação, segue que  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  é convergente.

Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  for divergente, podemos mostrar que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  será divergente por contradição, supondo  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  convergente e aplicando o teste de comparação e a desigualdade (5).

Da mesma forma, se  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  for divergente, segue que  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  é divergente, pois obtemos uma contradição da desigualdade (4) e do teste de comparação, supondo que  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  seja convergente.

Provamos, até agora, a parte (i). As demonstrações das partes (ii) e (iii) serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios 30 e 31). ■

Uma advertência deve ser feita com respeito à parte (ii) do Teorema 12.5.3.

Observe que se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ , a divergência da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  não implica a divergência da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .

**EXEMPLO 4** Resolva o Exemplo 2, usando o teste de comparação com limite.

**Solução** Seja  $u_n$  o  $n$ -ésimo termo da série dada  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n + 1}$  e seja  $v_n$  o  $n$ -ésimo termo da série geométrica convergente  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n}$ . Então,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{3^n + 1}}{\frac{4}{3^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 3^{-n}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Assim sendo, pela parte (i) do teste de comparação com limite, segue que a série dada é convergente.

**EXEMPLO 5** Resolva o Exemplo 3, usando o teste de comparação com limite.

**Solução** Seja  $u_n$  o  $n$ -ésimo termo da série dada  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  e seja  $v_n$  o  $n$ -ésimo termo da série harmônica divergente. Então,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Assim, pela parte (iii) do teste de comparação com limite, segue que a série dada é divergente.

**EXEMPLO 6** Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$$

**Solução** No Exemplo 1 provamos que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$  é convergente. Pelo teste de comparação com limite, aplicado a  $u_n = \frac{n^3}{n!}$  e  $v_n = \frac{1}{n!}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^3}{n!}}{\frac{1}{n!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

A parte (iii) do teste de comparação com limite não é aplicável, pois  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  converge. Há, contudo, uma maneira de usar o teste. A série dada pode ser escrita como

$$\frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \frac{5^3}{5!} + \dots + \frac{n^3}{n!} + \dots$$

Uma vez que o Teorema 12.4.1 nos permite subtrair um número finito de termos sem alterar o comportamento (convergência ou divergência) de uma série, descartaremos os três primeiros termos, obtendo

$$\frac{4^3}{4!} + \frac{5^3}{5!} + \frac{6^3}{6!} + \dots + \frac{(n+3)^3}{(n+3)!} + \dots$$

Seja agora  $u_n = \frac{(n+3)^3}{(n+3)!}$  e, como anteriormente, seja  $v_n = \frac{1}{n!}$ . Então,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+3)^3}{(n+3)!}}{\frac{1}{n!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3)^3 n!}{(n+3)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3)^3 n!}{n!(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 6n + 9}{n^2 + 3n + 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{6}{n} + \frac{9}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, segue, da parte (i) do teste de comparação com limite, que a série dada é convergente.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Considere a série geométrica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots \quad (6)$$

que converge para 2, conforme foi mostrado na Ilustração 2 da Secção 12.3. Reagrupando os termos da série, obteremos

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}\right) + \dots$$

que é a série

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{32} + \dots + \frac{3}{2 \cdot 4^{n-1}} + \dots \quad (7)$$

A série (7) é a série geométrica com  $a = \frac{3}{2}$  e  $r = \frac{1}{4}$ . Dessa forma, pelo Teorema 12.3.5, ela é convergente, com soma

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-r} &= \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{4}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Portanto, a série (7), obtida da série convergente (6), através do reagrupamento dos termos, também é convergente. A soma da série (7) é a mesma que a da série (6). ◀

A Ilustração 1 é um caso particular do teorema a seguir.

12.5.4 TEOREMA

Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  for uma série convergente de termos positivos, seus termos poderão ser agrupados de qualquer maneira, e a série resultante continuará convergente e com a mesma soma que a série original.

**Prova** Seja  $\{s_n\}$  a seqüência de somas parciais da série convergente de termos positivos. Então, o  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  existe; seja  $S$  esse limite. Considere a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  cujos termos foram obtidos agrupando-se os termos de  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  de alguma forma. Por exemplo,  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  pode ser a série

$$u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + u_5 + u_6) + (u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}) + \dots$$

ou a série

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + (u_5 + u_6) + (u_7 + u_8) + \dots$$

e assim por diante. Seja  $\{t_m\}$  a seqüência de somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ .

Cada soma parcial da seqüência  $\{t_m\}$  é também uma soma parcial da seqüência  $\{s_n\}$ . Logo, quando  $m$  cresce sem limitação, o mesmo acontece com  $n$ . Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$ , concluímos que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} t_m = S$ , o que prova o teorema. ■

O Teorema 12.5.4 e o próximo teorema estabelecem propriedades da soma de uma série convergente de termos positivos que são similares às propriedades válidas para a soma de um número finito de termos.

12.5.5 TEOREMA

Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  for uma série convergente de termos positivos, a ordem dos termos pode ser rearranjada, e a série resultante será também convergente e terá a mesma soma que a série dada.

**Prova** Seja  $\{s_n\}$  a seqüência das somas parciais de uma dada série convergente de termos positivos, e seja  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$ . Seja ainda  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  a série formada ao se rearranjar a ordem dos termos de  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ . Por exemplo,  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  pode ser a série

$$u_4 + u_3 + u_7 + u_1 + u_9 + u_5 + \dots$$

Seja  $\{t_n\}$  a seqüência das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ . Cada soma parcial da seqüência  $\{t_n\}$  será menor que  $S$ , pois é a soma de  $n$  termos da série infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ . Assim sendo,  $S$  é um limitante superior da seqüência  $\{t_n\}$ . Além disso, como todos os termos da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  são positivos,  $\{t_n\}$  é uma seqüência mo-

nótona crescente. Logo, pelo Teorema 12.2.7, a seqüência  $\{t_n\}$  é convergente e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = T \leq S$ . Agora, como a série dada  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  pode ser obtida da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  ao reorganizarmos a ordem dos termos, podemos usar o mesmo argumento e concluir que  $S \leq T$ . Como ambas as desigualdades,  $T \leq S$  e  $S \leq T$ , devem ser válidas, segue que  $S = T$ , o que demonstra o teorema. ■

Uma série freqüentemente usada no teste de comparação é aquela conhecida como **série  $p$**  ou **série hiper-harmônica**. Ela é

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad \text{onde } p \text{ é uma constante} \quad (8)$$

Na ilustração a seguir vamos provar que a série  $p$  diverge se  $p \leq 1$  e converge se  $p > 1$ .

► **ILUSTRAÇÃO 2** Se  $p = 1$ , a série  $p$  é a série harmônica a qual diverge. Se  $p < 1$ , então  $n^p \leq n$ ; assim,

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo}$$

Logo, pelo Teorema 12.5.2(ii), a série  $p$  é divergente, se  $p < 1$ .

Se  $p > 1$ , vamos agrupar os termos da seguinte forma:

$$\frac{1}{1^p} + \left( \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left( \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right) + \left( \frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \dots + \frac{1}{15^p} \right) + \dots \quad (9)$$

Consideremos a série

$$\frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \dots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} + \dots \quad (10)$$

Trata-se de uma série geométrica cuja razão é  $2/2^p = 1/2^{p-1}$ , que é um número positivo menor do que 1. Assim sendo, a série (10) é convergente. Vamos reescrever os termos da série (10) para obter

$$\frac{1}{1^p} + \left( \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \right) + \left( \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} \right) + \left( \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{8^p} \right) + \dots \quad (11)$$

Comparando as séries (9) e (11) vemos que o grupo de termos em cada conjunto entre parênteses, após o primeiro grupo, tem soma menor em (9) do que em (11). Logo, pelo teste de comparação, a série (9) é convergente. Como (9) é um mero reagrupamento da série  $p$  quando  $p > 1$ , segue, do Teorema 12.5.4, que a série  $p$  é convergente, se  $p > 1$ . ◀

Observe que a série do Exemplo 3 é uma série  $p$  com  $p = \frac{1}{2} < 1$  e, portanto, é divergente.

**EXEMPLO 7** Determine se a série infinita é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 + 2)^{1/3}}$$

**Solução** Como para valores elevados de  $n$ , o número  $n^2 + 2$  está próximo do número  $n^2$ , então o número  $1/(n^2 + 2)^{1/3}$  está próximo do número  $1/n^{2/3}$ . A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$  é divergente, pois é uma série  $p$  com  $p = \frac{2}{3} < 1$ . Aplicando o teste de comparação com limite a  $u_n = \frac{1}{(n^2 + 2)^{1/3}}$  e  $v_n = \frac{1}{n^{2/3}}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n^2 + 2)^{1/3}}}{\frac{1}{n^{2/3}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{2/3}}{(n^2 + 2)^{1/3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^2}{n^2 + 2} \right)^{1/3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{2}{n^2}} \right)^{1/3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, a série dada é divergente.

### EXERCÍCIOS 12.5

▲ Nos Exercícios de 1 a 26, determine se a série dada é convergente ou divergente.

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$                      | 2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$               | 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$            |
| 4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{4n^3 + 1}$                | 5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5}$                 | 6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n^3+n}}$   |
| 7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$                | 8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$                  | 9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}$  |
| 10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ \operatorname{sen} n }{n^2}$ | 11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$                  | 12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$  |
| 13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5n^2+3}$                   | 14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$              | 15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!}$        |
| 16. $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$     | 17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ \operatorname{cosec} n }{n}$ | 18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$  |
| 19. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$            | 20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$                     | 21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n - \sqrt{n}}$ |
| 22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$             | 23. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2+2}$                | 24. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n - \cos n}$  |

25.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$       26.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$

27. Use a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$  para mostrar que o Teorema 12.5.1 não se aplica a uma série infinita de termos positivos e negativos; isto é, mostre que a seqüência das somas parciais tem um limitante superior, mas a série não é convergente.
28. Suponha que  $f$  seja uma função tal que  $f(n) > 0$ , para todo  $n$  inteiro positivo. Além disso, suponha que se  $p$  for um número positivo qualquer,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p f(n)$  existirá e será positivo. Prove que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  é convergente se  $p > 1$ , e divergente se  $0 < p \leq 1$ .
29. Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  são duas séries convergentes de termos positivos, use o teste de comparação com limite para provar que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$  também é convergente.
30. Prove o Teorema 12.5.3(ii).
31. Prove o Teorema 12.5.3(iii).

## 12.6 O TESTE DA INTEGRAL

O teorema conhecido como o *teste da integral* faz uso da teoria das integrais impróprias para testar a convergência de uma série de termos positivos.

### 12.6.1 TEOREMA O Teste da Integral

Seja  $f$  uma função contínua, decrescente e com valores positivos para todo  $x \geq 1$ . Então, a série infinita

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots$$

será convergente se a integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

existir e será divergente se  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx = +\infty$ .

**Prova** Se  $i$  é um inteiro positivo e  $i \geq 2$ , então, pelo teorema do valor médio para integrais (5.7.1), existe um número  $X$  tal que  $i - 1 \leq X \leq i$  e

$$\int_{i-1}^i f(x) dx = f(X) \cdot 1 \quad (1)$$

Como  $f$  é uma função decrescente,

$$f(i-1) \geq f(X) \geq f(i)$$

e assim de (1),

$$f(i-1) \geq \int_{i-1}^i f(x) dx \geq f(i)$$

Logo, se  $n$  for um número inteiro positivo e  $n \geq 2$ ,

$$\sum_{i=2}^n f(i-1) \geq \sum_{i=2}^n \int_{i-1}^i f(x) dx \geq \sum_{i=2}^n f(i)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{i=1}^n f(i) - f(1) \quad (2)$$

As Figuras 1 e 2 mostram a interpretação geométrica da argumentação acima, para  $n = 6$ . Na Figura 1 há um esboço do gráfico da função  $f$  satisfazendo as hipóteses. A soma das medidas das áreas dos retângulos sombreados é  $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$ , precisamente o primeiro membro da desigualdade (2) quando  $n = 6$ . Obviamente, a soma das medidas das áreas desses retângulos é maior do que a medida da área dada pela integral definida quando  $n = 6$ . Na Figura 2 a soma das medidas das áreas dos retângulos sombreados é  $f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$ , precisamente o terceiro membro da desigualdade (2), quando  $n = 6$ . Essa soma é menor do que o valor da integral definida, quando  $n = 6$ .

Se a integral imprópria existe, seja  $L$  o seu valor. Então,

$$\int_1^n f(x) dx \leq L \quad (3)$$

Do segundo e terceiro membros da desigualdade (2) e de (3),

$$\sum_{i=1}^n f(i) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + L \quad (4)$$

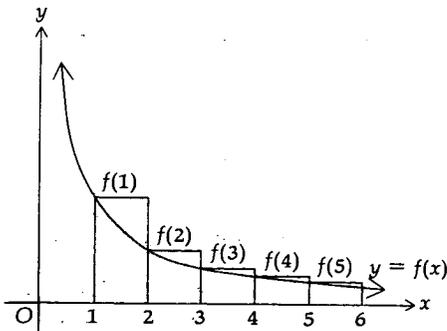


FIGURA 1

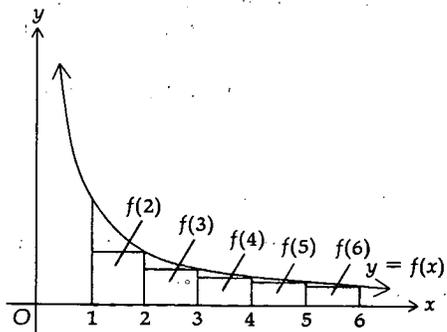


FIGURA 2

Consideremos agora a série infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ . Seja  $\{s_n\}$  a seqüência das somas parciais dessa série, onde  $s_n = \sum_{i=1}^n f(i)$ . De (4),  $\{s_n\}$  tem um limitante superior  $f(1) + L$ . Logo, pelo Teorema 12.5.1,  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  é convergente.

Suponha que  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx = +\infty$ . De (2)

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \geq \int_1^n f(x) dx$$

para todo  $n$  inteiro positivo. Segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(i) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Portanto,  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  é divergente. ■

**EXEMPLO 1** Use o teste da integral para mostrar que a série  $p$  diverge se  $p \leq 1$  e converge se  $p > 1$ .

**Solução** A série  $p$  é  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ . Se  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ , então  $f$  é contínua e assume valores positivos para todo  $x \geq 1$ . Além disso, se  $1 \leq x_1 < x_2$ , então  $\frac{1}{x_1^p} > \frac{1}{x_2^p}$ , e assim  $f$  é decrescente para todo  $x \geq 1$ . Portanto, então verificadas as hipóteses do Teorema 12.6.1 para a função  $f$ . Consideraremos agora a integral imprópria e teremos

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}$$

Se  $p = 1$ , a integral acima resulta em

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Se  $p \neq 1$ , a integral resulta em

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-p} - 1}{1-p}$$

Esse limite é  $+\infty$  quando  $p < 1$  e  $-1/(1-p)$  se  $p > 1$ . Assim sendo, pelo teste da integral, segue que a série  $p$  converge se  $p > 1$  e diverge se  $p \leq 1$ .

**EXEMPLO 2** Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$$

**Solução** Seja  $f(x) = xe^{-x}$ . Então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= e^{-x}(1 - x) \end{aligned}$$

Como  $f'(x) < 0$  para  $x > 1$ , segue do Teorema 4.4.3 que  $f$  é decrescente se  $x \geq 1$ . Além disso,  $f$  é contínua e seus valores são positivos para todo  $x \geq 1$ . Assim, as hipóteses do teste da integral estão verificadas. Aplicando a integração por partes,

$$\int xe^{-x} dx = -e^{-x}(x + 1) + C$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} xe^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -e^{-x}(x + 1) \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{b + 1}{e^b} + \frac{2}{e} \right] \end{aligned}$$

Como  $\lim_{b \rightarrow +\infty} (b + 1) = +\infty$  e  $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^b = +\infty$ , podemos usar a regra de L'Hôpital para obter

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b + 1}{e^b} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^b} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x} dx = \frac{2}{e}$$

Dessa forma, a série dada é convergente.

---

Se para uma série infinita o índice do somatório começa com  $n = k$  em vez de  $n = 1$ , temos então a seguinte modificação do teste da integral:

Se  $f$  for uma função contínua, decrescente e com valores positivos para todo  $x \geq k$ , a série infinita  $\sum_{n=k}^{+\infty} f(n)$  será convergente se a integral imprópria

$$\int_k^{+\infty} f(x) dx$$

existir e será divergente se  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_k^b f(x) dx = +\infty$ .

A demonstração é idêntica àquela do Teorema 12.6.1.

---

**EXEMPLO 3** Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

**Solução** A função  $f$  definida por

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$$

é contínua e tem valores positivos para todo  $x \geq 2$ . Além disso, se  $2 \leq x_1 < x_2$ , então  $f(x_1) > f(x_2)$ ; assim,  $f$  é decrescente para todo  $x \geq 2$ . Portanto, o teste da integral pode ser aplicado.

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b (\ln x)^{-1/2} \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ 2\sqrt{\ln x} \right]_2^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [2\sqrt{\ln b} - 2\sqrt{\ln 2}] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Assim sendo, a série dada é divergente.

### EXERCÍCIOS 12.6

Nos Exercícios de 1 a 8, use o teste da integral para determinar se a série dada é convergente ou divergente.

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$

2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(3n+5)^2}$

3.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{3/2}}$

4.  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-2}$

5.  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4}{n^2-4}$

6.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{(n^2+3n)^2}$

7.  $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-5n}$

8.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n^4+1}$

Nos Exercícios de 9 a 22, determine se a série dada é convergente ou divergente.

9.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$

10.  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$

11.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}^{-1} n}{n^2+1}$

12.  $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}$

13.  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n}$

14.  $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$

15.  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

16.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{cotg}^{-1} n$

17.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{cosech} n$

18.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\operatorname{tg}^{-1} n}}{n^2+1}$

19.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

20.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 n$

21.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( \frac{n+3}{n} \right)$

22.  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

23. Prove que a série  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$  é convergente se e somente se  $p > 1$ .

24. Prove que a série  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)[\ln(\ln n)]^p}$  é convergente se e somente se  $p > 1$ .

25. Prove que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^p}$  é convergente se e somente se  $p > 1$ .

26. Se  $s_k$  for a  $k$ -ésima soma parcial da série harmônica, prove que  $\ln(k+1) < s_k < 1 + \ln k$ .

(Sugestão:  $\frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{m}$  se  $0 < m \leq x \leq m+1$ .)

Integre cada membro da desigualdade de  $m$  a  $m+1$ ; faça  $m$  assumir sucessivamente os valores  $1, 2, \dots, n-1$ , e some os resultados).

27. Use o resultado do Exercício 26 para estimar a soma

$$\sum_{m=50}^{100} \frac{1}{m} = \frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{100}$$

## 12.7 SÉRIES ALTERNADAS

Nesta seção e na seguinte consideraremos séries infinitas constando tanto de termos negativos como positivos. Discutiremos primeiramente um tipo de série cujos termos são alternadamente positivos e negativos — as chamadas *séries alternadas*.

## 12.7.1 DEFINIÇÃO

Se  $a_n > 0$  para todo  $n$  inteiro positivo, então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots \quad (1)$$

e a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n + \dots \quad (2)$$

são chamadas de **séries alternadas**.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Um exemplo de série alternada do tipo (1), onde o primeiro termo é positivo, é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

Uma série alternada do tipo (2), onde o primeiro termo é negativo, é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} = -1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \dots \quad \blacktriangleleft$$

O teorema a seguir fornece um teste de convergência para uma série alternada. Ele é chamado de teste de séries alternadas; também é conhecido como teste de Leibniz, pois foi formulado por ele em 1705.

12.7.2 TEOREMA  
Teste de Séries Alternadas

Considere a série alternada  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$  [ou  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ ], onde  $a_n > 0$  e  $a_{n+1} < a_n$  para todo  $n$  inteiro positivo. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , a série alternada converge.

**Prova** Suponhamos que o primeiro termo da série alternada seja positivo. Com essa hipótese não há perda da generalidade, pois, se assim não for, descartamos o primeiro termo, o que não afeta a convergência da série. Assim, temos a série alternada  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ . Considere a soma parcial

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

Como por hipótese  $a_{n+1} < a_n$ , cada quantidade entre parênteses em (3) é positiva. Logo,

$$0 < s_2 < s_4 < s_6 < \dots < s_{2n} < \dots \quad (3)$$

Podemos também escrever  $s_{2n}$  como

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

Como  $a_{n+1} < a_n$ , cada quantidade entre parênteses é positiva. Logo

$$s_{2n} < a_1 \quad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo} \quad (4)$$

De (3) e de (4),

$$0 < s_{2n} < a_1 \quad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo}$$

Assim sendo, a seqüência  $\{s_{2n}\}$  é limitada. Além disso, de (3), a seqüência  $\{s_{2n}\}$  é crescente. Logo, pelo Teorema 12.2.6, a seqüência  $\{s_{2n}\}$  é convergente. Seja  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} = S$  e, do Teorema 12.2.7,  $S \leq a_1$ . Como  $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1}$$

Mas, por hipótese,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1} = 0$ ; logo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n}$ . Assim sendo, a seqüência das somas parciais dos termos de índice par e a seqüência das somas parciais dos termos de índice ímpar têm o mesmo limite  $S$ .

Vamos mostrar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$ . Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} = S$ , então para todo  $\epsilon > 0$  existe um inteiro  $N_1 > 0$ , tal que

$$\text{se } 2n \geq N_1, \text{ então } |s_{2n} - S| < \epsilon$$

E como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n+1} = S$ , existe um inteiro  $N_2 > 0$  tal que

$$\text{se } 2n + 1 \geq N_2, \text{ então } |s_{2n+1} - S| < \epsilon$$

Se  $N$  for maior do que os dois inteiros  $N_1$  e  $N_2$ , segue que se  $n$  for qualquer inteiro, par ou ímpar, e

$$\text{se } n \geq N, \text{ então } |s_n - S| < \epsilon$$

Logo,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$  e assim sendo, a série alternada é convergente. ■

**EXEMPLO 1** Prove que a série alternada é convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

**Solução** A série dada é

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} + \dots$$

Como  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$  para todo  $n$  inteiro positivo, e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , segue, do Teorema 12.7.2, que a série alternada dada é convergente.

**EXEMPLO 2** Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$$

**Solução** A série dada é uma série alternada.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$= 0$$

Antes de aplicar o teste de séries alternadas, devemos provar que  $a_{n+1} < a_n$  ou, equivalentemente,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\frac{n+2}{n(n+1)}} \\ &= \frac{n(n+3)}{(n+2)^2} \\ &= \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4} \\ &< 1 \end{aligned}$$

Então, do Teorema 12.7.2, segue que a série dada é convergente.

### 12.7.3 DEFINIÇÃO

Se uma série infinita for convergente e sua soma for  $S$ , então o **resto** obtido quando aproximamos a soma da série pela  $k$ -ésima soma parcial  $s_k$  será denotado por  $R_k$  e

$$R_k = S - s_k$$

### 12.7.4 TEOREMA

Considere a série alternada  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$  [ou  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ ], onde  $a_n > 0$  e  $a_{n+1} < a_n$  para todo  $n$  inteiro positivo, e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ . Então, se  $R_k$  for o resto obtido quando aproximamos a soma da série pela soma dos  $k$  primeiros termos,  $|R_k| < a_{k+1}$ .

**Prova** A série dada converge pelo teste de séries alternadas. Suponha que os termos com índices ímpares da série dada sejam positivos e os termos com índices pares sejam negativos. Então, de (3), na demonstração do Teorema 12.7.2, a seqüência  $\{s_{2n}\}$  é crescente. Assim, se  $S$  for a soma da série dada,

$$s_{2k} < s_{2k+2} < S \quad \text{para todo } k \geq 1 \quad (5)$$

Para mostrar que a seqüência  $\{s_{2n-1}\}$  é decrescente, escrevemos

$$s_{2n-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1})$$

Como  $a_{n+1} < a_n$ , segue que cada quantidade entre parênteses é positiva. Logo, como  $a_1 > 0$

$$s_1 > s_3 > s_5 > \dots > s_{2n-1} > \dots$$

Portanto, a seqüência  $\{s_{2n-1}\}$  é decrescente. Assim,

$$S < s_{2k+1} < s_{2k-1} \quad \text{para todo } k \geq 1 \quad (6)$$

Como  $S < s_{2k+1}$

$$S - s_{2k} < s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1} \quad \text{para todo } k \geq 1 \quad (7)$$

De (5),  $s_{2k} < S$ . Logo

$$0 < S - s_{2k} \quad \text{para todo } k \geq 1$$

Logo, dessa desigualdade e de (7),

$$0 < S - s_{2k} < a_{2k+1} \quad \text{para todo } k \geq 1 \quad (8)$$

De (5),  $-S < -s_{2k}$ . Assim,

$$s_{2k-1} - S < s_{2k-1} - s_{2k} = a_{2k} \quad \text{para todo } k \geq 1 \quad (9)$$

De (6),

$$0 < s_{2k-1} - S \quad \text{para todo } k \geq 1$$

Então, dessa desigualdade e de (9),

$$0 < s_{2k-1} - S < a_{2k} \quad \text{para todo } k \geq 1 \quad (10)$$

Da Definição 12.7.3,  $R_k = S - s_k$ , então (8) pode ser escrita como

$$0 < R_{2k} < a_{2k+1} \quad \text{para todo } k \geq 1 \quad (11)$$

e (10) pode ser escrita como

$$0 < -R_{2k-1} < a_{2k} \quad \text{para todo } k \geq 1$$

Combinando essa desigualdade e (11), temos

$$|R_k| < a_{k+1} \quad \text{para todo } k \geq 1$$

e o teorema está provado. ■

**EXEMPLO 3** Uma série para calcular  $\ln(1+x)$  se  $x$  está no intervalo aberto  $(-1, 1)$  é

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Ache um limitante superior para o erro cometido quando aproximamos o valor de  $\ln 1,1$  pela soma dos três primeiros termos da série.

**Solução** Vamos usar a série dada com  $x = 0,1$  para obter

$$\ln 1,1 = 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} - \frac{(0,1)^4}{4} + \dots$$

Tal série satisfaz as condições do Teorema 12.7.4; assim, se  $R_3$  for a diferença entre o valor de  $\ln 1,1$  e a soma dos três primeiros termos, então

$$|R_3| < 0,000025$$

Assim sendo, a soma dos três primeiros termos fornece um valor para  $\ln 1,1$  com precisão de até pelo menos quatro casas decimais. Usando os três primeiros termos, obtemos

$$\ln 1,1 \approx 0,0953$$

## EXERCÍCIOS 12.7

Nos Exercícios de 1 a 14 determine se a série alternada dada é convergente ou divergente.

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n}$

2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

3.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3}{n^2 + 1}$

5.  $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$

4.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{3n-2}$

6.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$

7. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 2}$$

8. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$$

19. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

20. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^n}$$

9. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n^2}$$

10. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n}$$

21. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$$

11. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n^2}$$

12. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{3n-1}$$

22. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$$

13. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$$

14. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{1+3^{2n}}$$

Nos Exercícios de 23 a 30, obtenha a soma da série infinita dada, com precisão de três casas decimais.

Nos Exercícios de 15 a 22, ache um limitante superior para o erro, quando aproximamos a soma da série infinita dada pela soma dos quatro primeiros termos.

23. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}$$

24. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4}$$

25. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

26. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n}$$

15. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

16. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2}$$

27. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}$$

28. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3}$$

17. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

18. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)^2}$$

29. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n2^n}$$

30. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!}$$

## 12.8 CONVERGÊNCIA ABSOLUTA E CONDICIONAL, O TESTE DA RAZÃO E O TESTE DA RAIZ

Se todos os termos de uma dada série infinita forem substituídos pelos seus valores absolutos e a série resultante for convergente, então dizemos que a série dada é *absolutamente convergente*.

### 12.8.1 DEFINIÇÃO

Dizemos que a série infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  será **absolutamente convergente** se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$  for convergente.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Considere a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} - \frac{2}{3^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n} + \dots \quad (1)$$

Essa série será absolutamente convergente se a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots$$

for convergente. Como se trata de uma série geométrica com  $r = \frac{1}{3} < 1$ , ela será convergente. Logo, a série (1) é absolutamente convergente. ◀

► **ILUSTRAÇÃO 2** Uma série convergente que não é absolutamente convergente é, por exemplo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

No Exemplo 1 da Secção 12.7 ficou provado que tal série é convergente. A série não é absolutamente convergente, pois a série dos valores absolutos é a série harmônica, que é divergente. ◀

A série da Ilustração 2 é exemplo de uma série *condicionalmente convergente*.

## 12.8.2 DEFINIÇÃO

Uma série que é convergente, mas não absolutamente convergente, é denominada **condicionalmente convergente**.

Então, é possível que uma série seja convergente, mas não absolutamente convergente. Por outro lado, se uma série for absolutamente convergente, ela deverá ser convergente; esse será o objeto do próximo teorema.

## 12.8.3 TEOREMA

Se a série infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  for absolutamente convergente, ela será convergente e

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$$

**Prova** Consideremos as séries infinitas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + |u_n|)$$

e sejam  $\{s_n\}$ ,  $\{t_n\}$  e  $\{r_n\}$  as seqüências de suas somas parciais, respectivamente. Para todo  $n$  inteiro positivo,  $u_n + |u_n|$  é 0 ou  $2|u_n|$ ; assim sendo, temos a desigualdade

$$0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n| \quad (2)$$

Como  $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$  é convergente, denotaremos a sua soma por  $T$ . Já que  $\{t_n\}$  é uma seqüência crescente de números positivos, então  $t_n \leq T$  para todo  $n$  inteiro positivo. De (2) segue que

$$0 \leq r_n \leq 2t_n \leq 2T$$

Logo, a seqüência  $\{r_n\}$  tem um limitante superior igual a  $2T$ . Assim, pelo Teorema 12.5.1, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + |u_n|)$  é convergente. Seja  $R$  a sua soma. Como de (2),  $\{r_n\}$  é uma seqüência crescente, podemos concluir, do Teorema 12.2.7, que  $R \leq 2T$ .

Cada uma das séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + |u_n|)$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$  é convergente; logo, do Teorema 12.4.3, segue que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [(u_n + |u_n|) - |u_n|] = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

também é convergente.

Seja  $S$  a soma da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ . Então, novamente pelo Teorema 12.4.3,  $S = R - T$ . E como  $R \leq 2T$ ,  $S \leq 2T - T = T$ .

Como  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  é convergente e tem soma  $S$ , segue, do Teorema 12.4.2, que  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-u_n)$  é convergente e tem soma  $-S$ . Como  $\sum_{n=1}^{+\infty} |-u_n|$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$  são ambas iguais a  $T$ , podemos substituir  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  por  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-u_n)$  na discussão acima e mostrar que  $-S \leq T$ . Como  $S \leq T$  e  $-S \leq T$ , temos  $|S| \leq T$ ; então

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|, \text{ e o teorema está provado. } \blacksquare$$

**EXEMPLO 1** Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{1}{3}n\pi}{n^2}$$

**Solução** Denotando a série dada por  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \dots + \frac{\cos \frac{1}{3}n\pi}{n^2} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} + \frac{1}{36} + \frac{1}{98} - \dots \end{aligned}$$

Essa é uma série de termos positivos e negativos. Podemos provar que tal série é convergente se pudermos mostrar que ela é absolutamente convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos \frac{1}{3}n\pi|}{n^2}$$

Como

$$|\cos \frac{1}{3}n\pi| \leq 1 \quad \text{para todo } n$$

$$\frac{|\cos \frac{1}{3}n\pi|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo}$$

A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  é uma série  $p$ , com  $p = 2$  e, portanto, é convergente. Assim, pelo teste de comparação  $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$  é convergente. Logo, a série dada é absolutamente convergente, e então, pelo Teorema 12.8.3, ela é convergente.

Observe que os termos da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$  nem crescem nem decrescem monotonicamente. Por exemplo,  $|u_4| = \frac{1}{32}$ ,  $|u_5| = \frac{1}{50}$ ,  $|u_6| = \frac{1}{36}$ ; e assim,  $|u_5| < |u_4|$ , mas  $|u_6| > |u_5|$ .

O teste da razão, dado no próximo teorema, é usado freqüentemente para determinar se uma dada série é absolutamente convergente.

#### 12.8.4 TEOREMA Teste da Razão

Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  uma série infinita dada para a qual todo  $u_n$  é não-nulo. Então,

(i) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1$ , a série dada é absolutamente convergente;

(ii) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L > 1$  ou se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = +\infty$ , a série dada é divergente;

(iii) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$ , nenhuma conclusão quanto à convergência pode ser tirada do teste.

**Prova de (i)** É dado que  $L < 1$ . Seja  $R$  um número tal que  $L < R < 1$ . Seja  $R - L = \epsilon < 1$ . Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L$ , existe um inteiro  $N > 0$  tal que

$$\text{se } n \geq N \text{ então } \left| \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - L \right| < \epsilon$$

Assim,

$$\text{se } n \geq N \text{ então } 0 < \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < L + \epsilon = R \quad (3)$$

Vamos supor que  $n$  assuma os valores sucessivos  $N, N + 1, N + 2, \dots$  e assim por diante. De (3) obtemos,

$$\begin{aligned} |u_{N+1}| &< R|u_N| \\ |u_{N+2}| &< R|u_{N+1}| < R^2|u_N| \\ |u_{N+3}| &< R|u_{N+2}| < R^3|u_N| \\ &\dots \end{aligned}$$

Em geral,

$$|u_{N+k}| < R^k|u_N| \quad \text{para todo } k \text{ inteiro positivo.} \quad (4)$$

A série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |u_N|R^k = |u_N|R + |u_N|R^2 + \dots + |u_N|R^n + \dots$$

é convergente, pois é uma série geométrica com razão menor que 1. De (4) e do teste de comparação, segue que a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_{N+k}|$  é convergente. A série  $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_{N+k}|$  difere da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$  somente nos  $N$  primeiros termos. Assim sendo,  $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$  é convergente e, portanto, a série dada é absolutamente convergente.

**Prova de (ii)** Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L > 1$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = +\infty$ , então em

ambos os casos existe um inteiro  $N > 0$  tal que se  $n \geq N$ , então  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$ .

Vamos supor que  $n$  assuma os valores sucessivos  $N, N + 1, N + 2, \dots$  e assim por diante. Obtemos

$$\begin{aligned} |u_{N+1}| &> |u_N| \\ |u_{N+2}| &> |u_{N+1}| > |u_N| \\ |u_{N+3}| &> |u_{N+2}| > |u_N| \\ &\dots \end{aligned}$$

Assim, se  $n > N$ , então  $|u_n| > |u_N|$ . Logo,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$  e, portanto, a série dada é divergente.

**Prova de (iii)** Aplicando o teste da razão à série  $p$ , teremos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left( \frac{n}{n+1} \right)^p \right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Já que a série  $p$  diverge se  $p \leq 1$  e converge se  $p > 1$ , mostramos que é possível ter tanto séries convergentes como divergentes para as quais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$ . Isso prova a parte (iii). ■

**EXEMPLO 2** Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$$

**Solução**  $u_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$  e  $u_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{n+1}{2^{n+1}}$ . Logo

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \\ &< 1 \end{aligned}$$

Segue, pelo teste da razão, que a série dada é absolutamente convergente e, portanto, pelo Teorema 12.8.3, ela é convergente.

**EXEMPLO 3** No Exemplo 2 da Secção 12.7 ficou provado que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$$

é convergente. Essa série é absolutamente convergente ou condicionalmente convergente?

**Solução** Para testar a convergência absoluta aplicamos o teste da razão. Na solução do Exemplo 2 da Seção 12.7 foi mostrado que a razão

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 4}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Desta forma, o teste da razão falha. Como

$$\begin{aligned} |u_n| &= \frac{n+2}{n(n+1)} \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \\ &> \frac{1}{n} \end{aligned}$$

o teste de comparação pode ser aplicado. Uma vez que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  é a série harmônica, que diverge, concluímos que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$  é divergente e então  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  não é absolutamente convergente. Portanto, ela é condicionalmente convergente.

Devemos ressaltar que o teste da razão não inclui todas as possibilidades para  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ , pois é possível que o limite não exista e não seja  $+\infty$ . A discussão de tais casos não se insere no contexto deste livro.

A demonstração do teste da razão baseou-se na aplicação do teste de comparação com a série geométrica. Outro teste com demonstração similar é o *teste da raiz*.

### 12.8.5 TEOREMA Teste da Raiz

Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  uma série infinita para a qual  $u_n$  é diferente de zero. Então,

- (i) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L < 1$ , a série dada é absolutamente convergente;
- (ii) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L > 1$ , ou se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = +\infty$ , a série é divergente;
- (iii) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ , nenhuma conclusão relativa à convergência pode ser tirada do teste.

Dada a semelhança entre a demonstração do teste da raiz e a do teste da razão, ela será proposta como exercício (veja os Exercícios de 26 a 28).

**EXEMPLO 4** Use o teste da raiz para determinar se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$$

**Solução** Aplicando o teste da raiz, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}} \right)^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2+(1/n)}}{n^2} \\ &= 0 \\ &< 1 \end{aligned}$$

Assim sendo, pelo teste da raiz, concluímos que a série dada é absolutamente convergente. Portanto, do Teorema 12.8.3, segue que ela é convergente.

Os testes da razão e da raiz são intimamente relacionados; contudo, o primeiro é, em geral, mais fácil de ser aplicado. Se os termos da série contiverem fatoriais, então certamente esse será o caso. Por outro lado, se os termos contiverem potências, como no Exemplo 4, poderá ser vantajoso o uso do teste da raiz. O próximo exemplo é um caso onde é mais indicado aplicar o teste da raiz.

**EXEMPLO 5** Determine se a série é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$$

**Solução**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{[\ln(n+1)]^n} \right|} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{\ln(n+1)} \right| \\ &= 0 \\ &< 1 \end{aligned}$$

Do teste da raiz, segue que a série dada é absolutamente convergente e, portanto, do Teorema 12.8.3, ela é convergente.

Existem séries para as quais o teste da raiz pode ser usado, a fim de determinar a convergência, quando o teste da razão falhar. Uma dessas séries aparece no Exercício 25.

## EXERCÍCIOS 12.8

Nos Exercícios de 1 a 20, determine se a série dada é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente. Prove a sua resposta.

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$
2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^3}$
3.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$
4.  $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$
5.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$
6.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}$
7.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$
8.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+2)}$
9.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-2\sin n}{n^3}$
10.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^3}$
11.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$
12.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3}$
13.  $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(\ln n)^2}$
14.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$
15.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \pi n}{n}$
16.  $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{\ln n}$
17.  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$
18.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$
19.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$
20.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}$

21. Se  $|r| < 1$ , prove que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin nt$  é absolutamente convergente para todos os valores de  $t$ .
22. Prove que se  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  for absolutamente convergente e  $u_n \neq 0$  para todo  $n$ , então  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|u_n|}$  será divergente.
23. Prove que se  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  for absolutamente convergente, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$  será convergente.
24. Mostre, por meio de um exemplo, que o inverso do Exercício 23 não é verdadeiro.
25. Dada a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1} + (-1)^n}$ . (a) Mostre que o teste da razão falha para essa série. (b) Use o teste da raiz para determinar se a série é convergente ou divergente.
26. Prove a parte (i) do teste da raiz (Teorema 12.8.5). (Sugestão: como  $L < 1$ , seja  $R$  um número tal que  $L < R < 1$ , e seja  $R - L = \epsilon < 1$ . Mostre que existe um inteiro  $N$  tal que se  $n > N$ , então  $|u_n| < R^n$ . Em seguida, use o teste de comparação.)
27. Prove a parte (ii) do teste da raiz. Veja a sugestão do Exercício 26.
28. Prove a parte (iii) do teste da raiz, aplicando-o às séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ . (Sugestão: determine  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$ , expressando  $\sqrt[n]{n} = e^{(\ln n)/n}$  e usando a regra de L'Hôpital para achar  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n}$ .)

## 12.9 SUMÁRIO DOS TESTES DE CONVERGÊNCIA OU DIVERGÊNCIA PARA UMA SÉRIE INFINITA

Para concluir o estudo das séries infinitas de termos constantes, vamos resumir os vários testes que podem ser usados para determinar a convergência ou divergência de uma série dada. Nas Seções de 12.3 a 12.8 vimos alguns desses testes e para desenvolver a habilidade de reconhecer e aplicar o teste apropriado é necessária uma prática considerável. Você irá adquirir essa prática fazendo os Exercícios de 11 a 48 nos Exercícios de Revisão a seguir. Vamos dar aqui uma lista dos testes. Você deve tentar cada um deles, na ordem indicada. Se uma determinada etapa não se aplica ou não leva a conclusão alguma, você deverá tentar a seguinte. É claro que em alguns casos mais de um teste é aplicável, mas você deve selecionar o mais eficiente.

1. Calcule  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ , então a série diverge. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , nenhuma conclusão pode ser tirada.
2. Examine a série para determinar se ela faz parte de algum dos tipos especiais:

- (i) Uma série geométrica:  $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ . Ela converge para a soma  $\frac{a}{1-r}$ , se  $|r| < 1$  e diverge se  $|r| \geq 1$ .

- (ii) Uma série  $p$ :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  (onde  $p$  é uma constante). Ela converge se  $p > 1$  e diverge se  $p \leq 1$ .
- (iii) Uma série alternada:  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$  ou  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ . Aplique o teste de séries alternadas (Teorema 12.7.2): se  $a_n > 0$  e  $a_{n+1} < a_n$  para todo  $n$  inteiro positivo, e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , então a série alternada é convergente.
3. Tente o teste da razão (Teorema 12.8.4): seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  uma série infinita dada, para a qual todo  $u_n$  é não-nulo. Então,
- (i) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1$ , a série dada é absolutamente convergente;
- (ii) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L > 1$  ou se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = +\infty$ , a série é divergente;
- (iii) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$ , nenhuma conclusão quanto à convergência pode ser tirada do teste.
4. Tente o teste da raiz (Teorema 12.8.5): seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  uma série infinita dada, para a qual todo  $u_n$  é não-nulo. Então,
- (i) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L < 1$ , a série dada é absolutamente convergente;
- (ii) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L > 1$ , ou se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = +\infty$ , a série é divergente;
- (iii) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ , nenhuma conclusão quanto à convergência pode ser tirada do teste.
5. Tente o teste da integral (Teorema 12.6.1): seja  $f$  uma função contínua, decrescente e com valores positivos para todo  $x \geq 1$ . Então a série infinita
- $$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots$$
- será convergente se a integral imprópria
- $$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$
- existir, e será divergente se  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx = +\infty$ .
6. Tente o teste de comparação (Teorema 12.5.2): seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  uma série de termos positivos.
- (i) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  for uma série convergente de termos positivos já conhecida e  $u_n \leq v_n$  para todo  $n$  inteiro positivo, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  será convergente.

(ii) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$  for uma série divergente de termos positivos já conhecida e  $u_n \geq w_n$  para todo  $n$  inteiro positivo, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  será divergente.

Ou tente o teste de comparação com limite (Teorema 12.5.3): sejam  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  duas séries de termos positivos.

(i) Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = c > 0$ , então ambas as séries convergem ou divergem conjuntamente.

(ii) Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$  e se  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  converge, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  converge.

(iii) Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$  e se  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  diverge, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  diverge.

**EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 12**

Nos Exercícios de 1 a 8, escreva os quatro primeiros números da seqüência e ache o seu limite, se existir.

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1. $\left\{ \frac{3n}{n+2} \right\}$                    | 2. $\left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} \right\}$              | 3. $\left\{ \frac{n^2-1}{n^2+1} \right\}$  |
| 4. $\left\{ \frac{n+3n^2}{4+2n^3} \right\}$             | 5. $\{2 + (-1)^n\}$   | 6. $\left\{ \frac{n^2}{\ln(n+1)} \right\}$ |
| 7. $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \right\}$ | 8. $\left\{ \frac{(n+2)^2}{n+4} - \frac{(n+2)^2}{n} \right\}$ |  |

Nos Exercícios 9 e 10, ache os quatro primeiros elementos da seqüência de somas parciais  $\{s_n\}$  e encontre uma fórmula para  $s_n$  em termos de  $n$ . Também determine se a série infinita é convergente ou divergente; se for convergente, ache a sua soma.

- |   |   |
|---|---|
| 9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^{n+1}}$ | 10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( \frac{2n-1}{2n+1} \right)$ |
|---|---|

Nos Exercícios de 11 a 20, determine se a série é convergente ou divergente. Se a série for convergente, ache a sua soma.

- |  |  |
|--|--|
| 11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$  | 12. $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2n}$               |
| 13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1}$   | 14. $\sum_{n=0}^{+\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}]$ |
| 15. $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sen}^n \frac{1}{3}\pi$   | 16. $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n \frac{1}{3}\pi$ |
| 17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ (Sugestão: para obter a soma, ache primeiro a seqüência das somas parciais.) |  |

- |   |   |
|---|---|
| 18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ | 19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[\operatorname{sen} \frac{3}{n}\pi + 2\right]}{3^n}$ |
|---|---|

20.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3^n}\right)$

Nos Exercícios de 21 a 38, determine se a série é convergente ou divergente.

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+6n}$                         | 22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$                   |   |
| 23. $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos \left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$     | 24. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 + \operatorname{sen} n}{n^2}$ |   |
| 25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$                     | 26. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{3n+2}}$                | 27. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \frac{1}{n}$ |
| 28. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1 + \sqrt{n}}$          | 29. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$                 | 30. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$      |
| 31. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{5n} - \frac{3}{2n}\right)$ | 32. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{10^n}$                      | 33. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+2 \ln n}$    |
| 34. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ \sec n }{n^{3/4}}$                 | 35. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^3}$                   | 36. $\sum_{n=1}^{+\infty} n3^{-n^2}$              |
| 37. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n + \operatorname{sen} n}$     | 38. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+3)!}$               |   |

Nos Exercícios de 39 a 48, determine se a série dada é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente. Prove as suas respostas.

- |   |  |
|---|--|
| 39. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n}$           | 40. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}$ |
| 41. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)^{3/4}}$ | 42. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{6^n}{5^{n+1}}$  |
| 43. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{10n}$            | 44. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{2n-1}}{n}$    |

$$45. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{3n}}{n^n}$$

$$46. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{[\ln(n+2)]^n}$$

$$47. \sum_{n=1}^{+\infty} c_n, \text{ onde } c_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ for um quadrado perfeito} \\ \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ não for um quadrado perfeito} \end{cases}$$

$$48. \sum_{n=1}^{+\infty} c_n, \text{ onde } c_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } \frac{1}{4}n \text{ for um inteiro} \\ \frac{1}{n^2} & \text{se } \frac{1}{4}n \text{ não for um inteiro} \end{cases}$$

49. Expresse como uma fração ordinária a dízima periódica: 1,3242424 . . .

50. Deixa-se cair uma bola de uma altura de 18 m. Cada vez que ela bate no chão, sobe a uma altura correspondente a dois terços da altura da queda anterior. Ache a distância percorrida pela bola até o repouso.

51. A trajetória de cada oscilação de um pêndulo, após a primeira, é 80% da trajetória da oscilação anterior de um lado até o outro. Se a trajetória da primeira oscilação mede 18 cm de comprimento e se a resistência do ar leva o pêndulo ao repouso, quanto mede o trajeto total percorrido pelo pêndulo até que ele pare?

# TREZE

## Séries de Potências

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

As séries infinitas são tratadas aqui de forma completa e adequada a um texto elementar de Cálculo. Na Seção 13.1 introduzimos *séries de potências* e nas Seções de 13.2 a 13.5 você aprenderá a usar séries de potências para expressar como uma série infinita tem muitas funções, entre elas as racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. As provas (Teoremas 13.2.3 e 13.3.1) dos processos computacionais envolvendo derivação e integração de séries de potências estão incluídas.

Uma aplicação de séries de potências consiste em achar aproximações de números irracionais tais como  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $e$ ,  $\ln 5$  e  $\sin 0,3$ . Outra aplicação é feita para aproximar as integrais definidas para as quais o integrando não tem antiderivada que possa ser expressa em termos de funções elementares. Por exemplo, vo-

cê aprenderá a usar séries de potências para calcular valores de integrais tais como  $\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt$ ,  $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$ , e  $\int_0^{0,1} \ln(1 + \operatorname{sen} x) dx$  para qualquer precisão exigida. Além disso, soluções de muitas equações diferenciais podem ser expressas como séries de potências.

## 13.1 INTRODUÇÃO ÀS SÉRIES DE POTÊNCIAS

As séries infinitas do Capítulo 12 envolvem termos constantes. Discutiremos agora um tipo importante de séries de termos variáveis chamado de *séries de potências*, que podem ser consideradas como uma generalização da função polinomial. Você aprenderá, neste capítulo, como usar séries de potências para calcular valores de funções como  $\operatorname{sen} x$ ,  $e^x$ ,  $\ln x$  e  $\sqrt{x}$ , os quais não podem ser calculados pelas operações da Aritmética, usadas para determinar os valores de funções racionais.

### 13.1.1 DEFINIÇÃO

Uma **série de potências** em  $x - a$  é uma série da forma

$$c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n + \dots \quad (1)$$

Usaremos a notação  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x - a)^n$  para representar a série (1). (Observe que consideramos  $(x - a)^0 = 1$  mesmo quando  $x = a$ , por conveniência, ao escrever o termo geral.) Se  $x$  for um determinado número, a série de potências (1) tornar-se-á uma série infinita de termos constantes. Um caso especial de (1) ocorre quando  $a = 0$ , e a série torna-se uma série de potências em  $x$ , que é

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (2)$$

Além das séries de potências em  $x - a$  e  $x$ , existem séries de potências da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n [\phi(x)]^n = c_0 + c_1 \phi(x) + c_2 [\phi(x)]^2 + \dots + c_n [\phi(x)]^n + \dots$$

onde  $\phi$  é uma função de  $x$ . Tais séries são chamadas de séries de potências em  $\phi(x)$ . Neste livro trataremos exclusivamente de séries de potências da forma (1) ou (2) e, quando usarmos o termo “série de potências”, estaremos nos referindo a uma dessas duas formas. Restringiremos a nossa discussão às séries de potências da forma (2). A forma mais geral (1) pode ser obtida de (2) através da translação  $x = \bar{x} - a$ ; assim sendo, nossos resultados aplicam-se igualmente às séries da forma (1).

Ao tratarmos de séries infinitas de termos constantes, estávamos interessados em questões de convergência ou divergência da série. Ao considerarmos séries de potências, perguntamos: para que valores de  $x$  a série converge? Para cada valor de  $x$  para o qual a série converge, ela representa um número que é a sua soma. Assim sendo, uma série de potências define uma função. A função  $f$ , com valores funcionais

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

tem como domínio todos os valores de  $x$  para os quais a série de potências converge. É claro que toda a série de potências (2) é convergente para  $x = 0$ . Existem algumas séries (veja o Exemplo 3) que são convergentes somente para esse valor de  $x$ , enquanto há também séries que convergem para todo valor de  $x$  (veja o Exemplo 2).

Os três exemplos a seguir ilustram como o teste da razão pode ser usado para determinar os valores de  $x$  para os quais uma série de potências é convergente. Quando  $n!$  for usado na representação do  $n$ -ésimo termo de uma série de potências (como no Exemplo 2), convém lembrar que  $0! = 1$ , de tal forma que a representação do  $n$ -ésimo termo será válida também quando  $n = 0$ .

**EXEMPLO 1** Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n}$$

**Solução** Para a série dada,

$$u_n = (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n} \quad \text{e} \quad u_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1) 3^{n+1}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1) 3^{n+1}} \cdot \frac{n 3^n}{2^n x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} |x| \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{2}{3} |x| \end{aligned}$$

Logo, a série de potências é absolutamente convergente quando  $\frac{2}{3}|x| < 1$  ou, equivalentemente, quando  $|x| < \frac{3}{2}$ . A série é divergente quando  $\frac{2}{3}|x| > 1$  ou, equivalentemente, quando  $|x| > \frac{3}{2}$ . Se  $\frac{2}{3}|x| = 1$  (ou seja,  $x = \pm \frac{3}{2}$ ), o teste da razão falha. Quando  $x = \frac{3}{2}$ , a série de potências dada torna-se:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

que é convergente, conforme foi mostrado no Exemplo 1 da Seção 12.7. Quando  $x = -\frac{3}{2}$ , temos

$$-\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n} - \dots$$

que, pelo Teorema 12.4.2, é divergente. Concluimos, então, que a série de potências dada é convergente quando  $-\frac{3}{2} < x \leq \frac{3}{2}$ . A série é absolutamente convergente quando  $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$  e é condicionalmente convergente quando  $x = \frac{3}{2}$ . Se  $x \leq -\frac{3}{2}$  ou  $x > \frac{3}{2}$ , a série é divergente.

**EXEMPLO 2** Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

**Solução** Para a série dada,

$$u_n = \frac{x^n}{n!} \quad \text{e} \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Assim, aplicando o teste da razão,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \\ &= 0 \\ &< 1\end{aligned}$$

Logo, a série de potências dada é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$ .

**EXEMPLO 3** Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$$

**Solução** Para a série dada,  $u_n = n!x^n$  e  $u_{n+1} = (n+1)!x^{n+1}$ . Aplicando o teste da razão, temos

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |(n+1)x| \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ +\infty & \text{se } x \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Segue que a série é divergente para todos os valores de  $x$ , exceto 0.

No próximo exemplo, o teste da raiz será usado para determinar quando uma série de potências é convergente.

**EXEMPLO 4** Ache os valores de  $x$  para os quais a série de potências é convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^n$$

**Solução** Usamos o teste da raiz e calculamos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|n^3 x^n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/n} |x| \quad (3)$$

Para determinar  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/n}$ , seja  $y = n^{3/n}$ . Então,  $\ln y = \frac{3}{n} \ln n$ . Assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln n}{n} \quad (4)$$

Para calcular o limite no segundo membro de (4), vamos achar primeiro

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln z}{z}, \text{ onde } z \text{ é um número real. Como } \lim_{z \rightarrow +\infty} \ln z = +\infty \text{ e}$$

$\lim_{z \rightarrow +\infty} z = +\infty$ , aplicaremos a regra de L'Hôpital, obtendo

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln z}{z} &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{3}{z} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, do Teorema 12.1.3,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln n}{n} = 0$ . De (4), segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln y &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} y &= 1 \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado em (3), temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|n^3 x^n|} = |x|$$

Logo, a série de potências é absolutamente convergente quando  $|x| < 1$ . A série é divergente quando  $|x| > 1$ . Se  $x = 1$ , a série de potências torna-se

$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3$ , que é divergente, pois  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \neq 0$ . Analogamente, a série de potências é divergente quando  $x = -1$ .

### 13.1.2 TEOREMA

Se a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  for convergente para  $x = x_1$  ( $x_1 \neq 0$ ), então ela será absolutamente convergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| < |x_1|$ .

**Prova** Se  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_1^n$  for convergente, então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n x_1^n = 0$ . Logo, se tomarmos  $\epsilon = 1$  na Definição 2.5.1, existirá um inteiro  $N > 0$  tal que

$$\text{se } n \geq N \text{ então } |c_n x_1^n| < 1$$

Agora, se  $x$  for qualquer número tal que  $|x| < |x_1|$ , então se  $n \geq N$

$$\begin{aligned} |c_n x^n| &= \left| c_n x_1^n \frac{x^n}{x_1^n} \right| \\ |c_n x^n| &= |c_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \\ |c_n x^n| &< \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \end{aligned} \tag{5}$$

A série

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \tag{6}$$

é convergente, porque é uma série geométrica com  $r = |x/x_1| < 1$  (pois  $|x| < |x_1|$ ). Compare a série  $\sum_{n=N}^{+\infty} |c_n x^n|$ , onde  $|x| < |x_1|$ , com a série (6).

De (5) e do teste de comparação  $\sum_{n=N}^{+\infty} |c_n x^n|$  é convergente para  $|x| < |x_1|$ .

Assim sendo, a série de potências dada é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| < |x_1|$ . ■

► **ILUSTRAÇÃO 1** Uma ilustração do Teorema 13.1.2 é dada no Exemplo 1. A série de potências é convergente para  $x = \frac{3}{2}$  e é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| < \frac{3}{2}$ . ◀

O seguinte teorema é um corolário do Teorema 13.1.2.

### 13.1.3 TEOREMA

Se a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  for divergente para  $x = x_2$ , ela será divergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| > |x_2|$ .

**Prova** Suponha que a série de potências seja convergente para algum número  $x$  para o qual  $|x| > |x_2|$ . Então, pelo Teorema 13.1.2, a série deve convergir para  $x = x_2$ . Mas isso contradiz a hipótese. Logo, a série de potências dada é divergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| > |x_2|$ . ■

► **ILUSTRAÇÃO 2** Para ilustrar 13.1.3, considere novamente a série de potências do Exemplo 1. Ela diverge para  $x = -\frac{3}{2}$  e também é divergente para todos os valores de  $x$  tais que  $|x| > |-\frac{3}{2}|$ . ◀

Podemos provar, a partir dos Teoremas 13.1.2 e 13.1.3, o importante teorema enunciado a seguir.

### 13.1.4 TEOREMA

Seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  uma dada série de potências. Então uma, e somente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- (i) a série converge somente para  $x = 0$ ;
- (ii) a série é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$ ;
- (iii) existe um número  $R > 0$  tal que a série é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| < R$  e é divergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| > R$ .

**Prova** Se  $x$  for substituído por zero na série de potências dada, temos  $c_0 + 0 + 0 + \dots$  que, obviamente, é convergente. Assim, toda série de potências da forma  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  é convergente quando  $x = 0$ . Se esse for o único valor de  $x$  para o qual a série converge, então a afirmação (i) é válida.

Suponha que a série dada seja convergente para  $x = x_1$ , onde  $x_1 \neq 0$ . Segue então, do Teorema 13.1.2, que a série é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| < |x_1|$ . Além disso, se não existir valor de  $x$  para o qual a série dada seja divergente, então a série será absolutamente convergente para todos os valores de  $x$ . Assim, a afirmação (ii) é válida.

Se a série dada for convergente para  $x = x_1$ , onde  $x_1 \neq 0$  e divergente para  $x = x_2$ , onde  $|x_2| > |x_1|$ , do Teorema 13.1.3 segue que a série é divergente para todos os valores de  $x$  tais que  $|x| > |x_2|$ . Logo,  $|x_2|$  é um limitante superior para o conjunto de valores de  $|x|$  para os quais a série é absolutamente convergente. Então, pelo axioma do completamento (12.2.5), esse conjunto de números tem um limitante superior mínimo, que é o número  $R$  da afirmação (iii). Isso completa a demonstração de que uma e somente uma das três afirmações é válida. ■

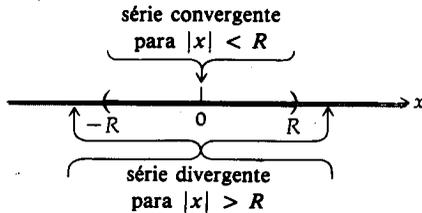


FIGURA 1

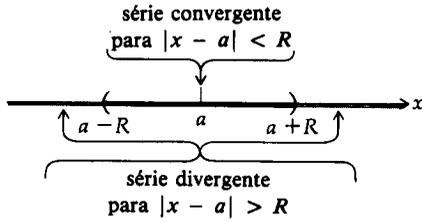


FIGURA 2

O Teorema 13.1.4(iii) pode ser ilustrado no eixo real. Veja a Figura 1.

Se, em vez da série de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$ , tivermos a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - a)^n$ , então nas afirmações (i) e (iii) do Teorema 13.1.4,  $x$  será substituído por  $x - a$ . As afirmações alteram-se para:

- (i) a série converge somente para  $x = a$ ;
- (iii) existe um número  $R > 0$  tal que a série é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x - a| < R$  e é divergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x - a| > R$ . (Veja a Figura 2 que ilustra isso no eixo real.)

Ao conjunto de todos os valores de  $x$  para os quais uma dada série de potências é convergente, chamamos **intervalo de convergência** da série de potências. O número  $R$  da afirmação (iii) do Teorema 13.1.4 é denominado **raio de convergência** da série de potências. Se a afirmação (i) for verdadeira,  $R = 0$ ; se a afirmação (ii) for verdadeira, então  $R = +\infty$ .

► **ILUSTRAÇÃO 3** Para a série de potências do Exemplo 1,  $R = \frac{3}{2}$  e o intervalo de convergência é  $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ . No Exemplo 2,  $R = +\infty$ , e o intervalo de convergência é escrito como  $(-\infty, +\infty)$ . ◀

Se  $R$  for o raio de convergência da série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ , o intervalo de convergência será um dos seguintes:  $(-R, R)$ ,  $[-R, R]$ ,  $(-R, R]$  ou  $[-R, R)$ . No caso mais geral da série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - a)^n$ , o intervalo de convergência será um dos seguintes:

$$(a - R, a + R) \quad [a - R, a + R] \quad (a - R, a + R] \quad [-R, a + R)$$

Uma dada série de potências define uma função tendo como domínio o intervalo de convergência. O método mais vantajoso para determinar o intervalo de convergência de que dispomos é o teste da razão. No entanto, tal teste nada revela sobre o que acontece nos pontos extremos do intervalo de convergência, quanto à convergência ou divergência da série de potências. Nas extremidades do intervalo de convergência a série de potências pode ser absolutamente convergente, condicionalmente convergente, ou ainda divergente. Se uma série de potências convergir absolutamente numa extremidade, segue da definição de convergência absoluta que a série será absolutamente convergente nas extremidades (veja o Exercício 33). Se uma série de potências convergir numa extremidade e divergir na outra, a série será condicionalmente convergente no extremo no qual convergir (veja o Exercício 34). Há casos para os quais a convergência ou divergência de uma série de potências nos extremos não pode ser determinada por métodos do Cálculo Elementar.

**EXEMPLO 5** Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(x-2)^n$$

**Solução** A série dada é

$$(x-2) + 2(x-2)^2 + \dots + n(x-2)^n + (n+1)(x-2)^{n+1} + \dots$$

Aplicando o teste da razão, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)(x-2)^{n+1}}{n(x-2)^n} \right| \\ &= |x-2| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \\ &= |x-2| \end{aligned}$$

A série dada será, então, absolutamente convergente se  $|x-2| < 1$  ou, equivalentemente,  $-1 < x-2 < 1$ , ou ainda,  $1 < x < 3$ .

Quando  $x = 1$ , a série será  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n$ , que é divergente, pois

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ . Quando  $x = 3$ , a série torna-se  $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ , que também diverge, pois  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ . Assim, o intervalo de convergência será  $(1, 3)$ . Logo, a série de potências define uma função cujo domínio é o intervalo  $(1, 3)$ .

**EXEMPLO 6** Determine o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2+n^2}$$

**Solução** A série dada é

$$\frac{x}{2+1^2} + \frac{x^2}{2+2^2} + \frac{x^3}{2+3^2} + \dots + \frac{x^n}{2+n^2} + \frac{x^{n+1}}{2+(n+1)^2} + \dots$$

Aplicando o teste da razão, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{2+(n+1)^2} \cdot \frac{2+n^2}{x^n} \right| \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+n^2}{2+n^2+2n+1} \\ &= |x| \end{aligned}$$

Assim, a série dada será absolutamente convergente se  $|x| < 1$  ou, equivalentemente, se  $-1 < x < 1$ . Quando  $x = 1$ , a série torna-se

$$\frac{1}{2+1^2} + \frac{1}{2+2^2} + \frac{1}{2+3^2} + \dots + \frac{1}{2+n^2} + \dots$$

Já que  $\frac{1}{2+n^2} < \frac{1}{n^2}$  para todo  $n$  inteiro positivo, e ainda como  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  é uma série  $p$  convergente, segue então, do teste de comparação, que a série de po-

tências dada converge quando  $x = 1$ . Para  $x = -1$ , a série é  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2+n^2}$ , que é convergente pois acabamos de ver que ela é absolutamente convergente. Assim sendo, o intervalo de convergência da série de potências dada é  $[-1, 1]$ .

## EXERCÍCIOS 13.1

Nos Exercícios de 1 a 28, determine o intervalo de convergência da série de potências dada.

1.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$
2.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$
3.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-3}$
4.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$
5.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}$
6.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n}}$
7.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{3^n}$
8.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
9.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
10.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^{2n}} x^n$
11.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$
12.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$
13.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$
14.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)x^n}{n!}$
15.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$
16.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}$
17.  $\sum_{n=0}^{+\infty} (\sinh 2n)x^n$
18.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$
19.  $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$
20.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+5)^{n-1}}{n^2}$
21.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{5^n} (x-1)^n$
22.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1} x^{2n}}{n+3}$
23.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n(x-5)^n}{n+1}$
24.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$
25.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} x^{2n+1}$
26.  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n (x-3)^n$
27.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$
28.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} x^n$
29. Se  $a$  e  $b$  são inteiros positivos, determine o raio de convergência da série de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+a)!}{n!(n+b)!} x^n$ .
30. Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  for uma série absolutamente convergente, prove que a série de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$  será absolutamente convergente quando  $|x| \leq 1$ .
31. Prove que se o raio de convergência da série de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$  for  $r$ , então o raio de convergência da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^{2n}$  será  $\sqrt{r}$ .
32. Prove que se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$  ( $L \neq 0$ ), então o raio de convergência da série de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$  será  $\frac{1}{L}$ .
33. Prove que se uma série de potências for absolutamente convergente num extremo do seu intervalo de convergência, então a série de potências será absolutamente convergente nos extremos.
34. Prove que se uma série de potências convergir num extremo de seu intervalo de convergência e divergir no outro extremo, então a série de potências será condicionalmente convergente no extremo onde converge.

## 13.2 DERIVAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Você aprendeu na Seção 13.1 que uma série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  define uma função cujo domínio é o intervalo de convergência da série.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Considere a série geométrica com  $a = 1$  e  $r = x$ , isto é,  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ . Pelo Teorema 12.3.5, a série converge para a soma  $1/(1-x)$ , se  $|x| < 1$ . Logo, a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  define a função  $f$ , tal que

$f(x) = 1/(1-x)$  e  $|x| < 1$ . Logo,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{se } |x| < 1 \quad (1)$$

A série em (1) pode ser usada para formar outras séries de potências cujas somas podem ser determinadas.

► **ILUSTRAÇÃO 2** Se em (1)  $x$  for substituído por  $-x$ , teremos

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \frac{1}{1+x} \quad \text{se } |x| < 1 \quad (2)$$

Seja  $x = x^2$  em (1), teremos

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + \dots = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{se } |x| < 1 \quad (3)$$

Se em (1)  $x$  for substituído por  $-x^2$ , obteremos

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{se } |x| < 1 \quad (4)$$

Nesta secção e na próxima, outras séries interessantes são obtidas de séries como as acima referidas, por derivação e integração. Provaremos que se  $R$  (onde  $R \neq 0$ ) for o raio de convergência de uma série de potências que define a função  $f$ , então  $f$  será diferenciável no intervalo aberto  $(-R, R)$  e a derivada de  $f$  poderá ser obtida ao derivarmos a série de potências termo a termo. Além disso, mostraremos que  $f$  é integrável em todo subintervalo fechado de  $(-R, R)$ , e calculamos a integral de  $f$ , integrando a série de potências termo a termo. Precisamos primeiro de alguns teoremas preliminares.

### 13.2.1 TEOREMA

Se  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  for uma série de potências com um raio de convergência  $R > 0$ , então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$  também terá  $R$  como raio de convergência.

Esse teorema estabelece que a série, obtida com a derivação de cada termo de uma dada série de potências, terá o mesmo raio de convergência que a série dada.

**Prova** Seja  $x$  qualquer número no intervalo aberto  $(-R, R)$ . Então  $|x| < R$ . Seleccionamos um número  $x_1$  tal que  $|x| < |x_1| < R$ . Como  $|x_1| < R$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_1^n$  é convergente. Logo,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n x_1^n = 0$ . Assim, se tomarmos  $\epsilon = 1$  na Definição 2.5.1, existirá um número  $N > 0$ , tal que

$$\text{se } n > N, \text{ então } |c_n x_1^n| < 1$$

Seja  $M$  o maior dos números  $|c_1 x_1|, |c_2 x_1^2|, |c_3 x_1^3|, \dots, |c_N x_1^N|, 1$ . Então

$$|c_n x_1^n| \leq M \quad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo.} \quad (5)$$

Agora

$$\begin{aligned} |nc_n x^{n-1}| &= \left| nc_n \cdot \frac{x^{n-1}}{x_1^n} \cdot x_1^n \right| \\ &= n \frac{|c_n x_1^n|}{|x_1|} \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1} \end{aligned}$$

De (5) e da equação acima,

$$|nc_n x^{n-1}| \leq n \frac{M}{|x_1|} \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1} \quad (6)$$

Se o teste da razão for aplicado à série

$$\frac{M}{|x_1|} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1} \quad (7)$$

então

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)|x|^n}{|x_1|^n} \cdot \frac{|x_1|^{n-1}}{n|x_1|^{n-1}} \\ &= \left| \frac{x}{x_1} \right| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \\ &= \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1 \end{aligned}$$

Assim sendo, a série (7) é absolutamente convergente; logo, de (6) e do teste de comparação, segue que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x^{n-1}$  também é absolutamente convergente. Como  $x$  é qualquer número em  $(-R, R)$ , segue que se o raio de convergência de  $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x^{n-1}$  for  $R'$ , então  $R' \geq R$ .

Para completar a demonstração precisamos mostrar que  $R'$  não pode ser maior do que  $R$ . Vamos supor que  $R' > R$  e seja  $x_2$  um número tal que  $R < |x_2| < R'$ . Como  $|x_2| > R$  segue que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_2^n \text{ é divergente} \quad (8)$$

Como  $|x_2| < R'$ , segue que  $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x_2^{n-1}$  é absolutamente convergente.

Além disso,

$$|x_2| \sum_{n=1}^{+\infty} |nc_n x_2^{n-1}| = \sum_{n=1}^{+\infty} |nc_n x_2^n|$$

e assim, do Teorema 12.4.2,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |nc_n x_2^n| \text{ será convergente} \quad (9)$$

Se  $n$  for qualquer inteiro positivo,

$$|c_n x_2^n| \leq n |c_n x_2^n| = |nc_n x_2^n|$$

Dessa desigualdade, da afirmação (9) e do teste de comparação, segue que  $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n x_n^2|$  é convergente. Logo, a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_n^2$  é convergente, o que contradiz o resultado (8). Assim sendo, a hipótese de que  $R' > R$  é falsa. Logo,  $R'$  não pode ser maior do que  $R$ ; e como foi mostrado que  $R' \geq R$ , segue que  $R' = R$ , o que prova o teorema. ■

► **ILUSTRAÇÃO 3** Verificaremos o Teorema 13.2.1 para a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} + \dots$$

Determinamos o raio de convergência aplicando o teste da razão.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^2 x^{n+2}}{(n+2)^2 x^{n+1}} \right| \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 4n + 4} \right| \\ &= |x| \end{aligned}$$

Dessa forma, a série de potências é convergente quando  $|x| < 1$ ; assim sendo, seu raio de convergência é  $R = 1$ .

A série de potências obtida da série dada com a derivação termo a termo é

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots + \frac{x^n}{n+1} + \frac{x^{n+1}}{n+2} + \dots \end{aligned}$$

Aplicando o teste da razão a essa série de potências, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+2)x^n} \right| \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| \\ &= |x| \end{aligned}$$

Essa série é convergente se  $|x| < 1$ ; assim, seu raio de convergência é  $R' = 1$ . Como  $R = R'$ , está cumprido o Teorema 13.2.1. ◀

### 13.2.2 TEOREMA

Se o raio de convergência da série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  for  $R > 0$ , então o raio de convergência da série  $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$  também será  $R$ .

**Prova** Se aplicarmos o Teorema 13.2.1 à série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$ , obteremos o resultado desejado. ■

Estamos agora em condições de provar o teorema sobre derivação termo a termo de uma série de potências.

## 13.2.3 TEOREMA

Seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  uma série de potências cujo raio de convergência é  $R > 0$ .

Então, se  $f$  for a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad (10)$$

$f'(x)$  existirá para todo  $x$  no intervalo aberto  $(-R, R)$ , sendo dada por

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$$

**Prova** Sejam  $x$  e  $a$  dois números distintos no intervalo aberto  $(-R, R)$ . A fórmula de Taylor (fórmula (2) da Seção 11.5), com  $n = 1$ , é

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x - a)^2$$

Dessa fórmula, com  $f(x) = x^n$ , segue que para todo  $n$  inteiro positivo

$$x^n = a^n + n a^{n-1} (x - a) + \frac{1}{2} n(n-1) (\xi_n)^{n-2} (x - a)^2 \quad (11)$$

onde  $\xi_n$  está entre  $a$  e  $x$  para todo  $n$  inteiro positivo. De (10),

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n a^n \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n - c_0 - \sum_{n=1}^{+\infty} c_n a^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (x^n - a^n) \end{aligned}$$

Dividindo por  $x - a$  (pois  $x \neq a$ ) e usando (11), temos, das equações acima,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n [n a^{n-1} (x - a) + \frac{1}{2} n(n-1) (\xi_n)^{n-2} (x - a)^2]$$

Assim,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n a^{n-1} + \frac{1}{2} (x - a) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n (\xi_n)^{n-2} \quad (12)$$

Como  $a$  está em  $(-R, R)$ , concluímos do Teorema 13.2.1 que  $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n a^{n-1}$  é absolutamente convergente.

Como ambos,  $a$  e  $x$ , estão em  $(-R, R)$ , existe algum número  $K > 0$  tal que  $|a| < K < R$  e  $|x| < K < R$ . Segue, do Teorema 13.2.2, que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n K^{n-2}$$

é absolutamente convergente. Então, como

$$|n(n-1)c_n(\xi_n)^{n-2}| < |n(n-1)c_n K^{n-2}| \quad (13)$$

para cada  $\xi_n$ , podemos concluir do teste de comparação que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n(\xi_n)^{n-2}$$

é absolutamente convergente.

De (12),

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1} \right| = \left| \frac{1}{2}(x - a) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n(\xi_n)^{n-2} \right| \quad (14)$$

Entretanto, do Teorema 12.8.3, se  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  for absolutamente convergente, então

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$$

Aplicando esse resultado ao segundo membro de (14), obtemos

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1} \right| \leq \frac{1}{2} |x - a| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) |c_n| |\xi_n|^{n-2}$$

Dessa desigualdade e de (13),

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1} \right| \leq \frac{1}{2} |x - a| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) |c_n| K^{n-2} \quad (15)$$

onde  $0 < K < R$ . Como a série do segundo membro de (15) é absolutamente convergente, o limite do segundo membro, quando  $x$  tende a  $a$ , é zero. Então, de (15) e do teorema do confronto de limites (ou teorema do “sanduíche”),

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow f'(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1}$$

e como  $a$  pode ser qualquer número no intervalo aberto  $(-R, R)$ , o teorema está provado. ■

**EXEMPLO 1** Seja  $f$  a função definida pela série de potências da Ilustração 3. (a) Ache o domínio de  $f$ ; (b) escreva a série de potências que define a função  $f'$  e determine o domínio de  $f'$ .

**Solução**

$$(a) f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

O domínio de  $f$  é o intervalo de convergência da série de potências. Na Ilustração 3 mostramos que o raio de convergência da série de potências é 1;

isto é, a série converge quando  $|x| < 1$ . Considere agora a série de potências quando  $|x| = 1$ . Para  $x = 1$ , a série é

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots$$

que é convergente, pois é uma série  $p$  com  $p = 2$ . Para  $x = -1$  temos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$$

que é convergente, pois é absolutamente convergente. Logo o intervalo  $[-1, 1]$  é o domínio de  $f$ .

(b) Do Teorema 13.2.3 segue que  $f'$  é definida por

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (16)$$

e que  $f'(x)$  existe para todo  $x$  no intervalo aberto  $(-1, 1)$ . Na Ilustração 3 ficou provado que o raio de convergência da série de potências em (16) é 1. Consideremos agora a série de potências em (16), para  $x = \pm 1$ . Quando  $x = 1$ , a série é

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} + \dots$$

que é a série harmônica e, portanto, divergente. Para  $x = -1$ , a série fica

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \dots$$

que é uma série alternada convergente. Assim, o domínio de  $f'$  é o intervalo  $[-1, 1)$ .

O Exemplo 1 ilustra o fato de que se uma função  $f$  for definida por uma série de potências e se essa série for derivada termo a termo, a série de potências resultante, que define  $f'$ , terá o mesmo raio de convergência, mas não necessariamente o mesmo intervalo de convergência.

**EXEMPLO 2** Obtenha uma série de potências que represente

$$\frac{1}{(1-x)^2}$$

**Solução** De (1),

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad \text{se } |x| < 1$$

Usando o Teorema 13.2.3 e derivando ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots \quad \text{se } |x| < 1$$

---

**EXEMPLO 3** Mostre que para todos os valores reais de  $x$

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

**Solução** No Exemplo 2 da Secção 13.1 foi mostrado que a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  é absolutamente convergente para todos os valores reais de  $x$ . Assim, se  $f$  for a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (17)$$

o domínio de  $f$  será o conjunto de todos os números reais; isto é, o intervalo de convergência será  $(-\infty, +\infty)$ . Segue, do Teorema 13.2.3, que para todos os valores reais de  $x$  temos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!}$$

Uma vez que  $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$ , isso pode ser escrito como

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ \Leftrightarrow f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Dessa igualdade e de (17),  $f'(x) = f(x)$  para todos os valores reais de  $x$ . Assim sendo, a função  $f$  satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y$$

a qual, pelo Teorema 7.7.1, tem como solução geral  $y = Ce^x$ . Logo, para alguma constante  $C$ ,  $f(x) = Ce^x$ . De (17),  $f(0) = 1$ . (Lembre-se de que estamos tomando  $x^0 = 1$  mesmo que  $x = 0$ , por conveniência, ao escrever o termo geral.) Portanto,  $C = 1$ ; assim,  $f(x) = e^x$ , e teremos o resultado desejado.

---

**EXEMPLO 4** Use o resultado do Exemplo 3 para achar uma representação em série de potências de  $e^{-x}$ .

**Solução** Se  $x$  for substituído por  $-x$  na série de  $e^x$ , segue que

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

para todos os valores reais de  $x$ .

---

**EXEMPLO 5** Use a série do Exemplo 4 para determinar o valor exato de  $e^{-1}$  até a quinta casa decimal.

**Solução** Se  $x = 1$  na série para  $e^{-x}$ ,

$$\begin{aligned} e^{-1} &= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} - \dots \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{40.320} \\ &\quad - \frac{1}{362.880} + \frac{1}{3.628.800} - \dots \\ &\approx 1 - 1 + 0,5 - 0,166667 + 0,041667 - 0,008333 + 0,001389 \\ &\quad - 0,000198 + 0,000025 - 0,000003 + 0,000003 - \dots \end{aligned}$$

Essa é uma série alternada convergente para a qual  $|u_{n+1}| < |u_n|$ . Assim, se usarmos os dez primeiros termos para aproximar a soma, pelo Teorema 12.7.4 o erro será menor do que o valor absoluto do décimo primeiro termo. Somando os dez primeiros termos obtemos 0,367880. Arredondando para cinco casas decimais, temos

$$e^{-1} \approx 0,36788$$

Nos cálculos com séries infinitas ocorrem dois tipos de erros. Um deles é o erro dado pelo resto após os  $n$  primeiros termos. O outro é o arredondamento, que ocorre quando cada termo da série é aproximado por um decimal com um número finito de casas. No caso do Exemplo 5, queríamos o resultado preciso com cinco casas decimais; assim, cada termo foi arredondado para seis casas decimais. Depois de calcular a soma, arredondamos o resultado para cinco decimais. Naturalmente, o erro dado pelo resto pode ser reduzido, se considerarmos termos adicionais da série, enquanto que o erro de arredondamento pode ser reduzido se usarmos mais casas decimais.

Se você fizer um curso de Equações Diferenciais, aprenderá que é possível expressar as soluções de muitas equações diferenciais como séries de potências. Tal situação será ilustrada no exemplo a seguir.

**EXEMPLO 6** Mostre que

$$y = x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{18}$$

é uma solução da equação diferencial  $\frac{d^2y}{dx^2} - y + x = 0$ .

**Solução** A série de potências em (18) é convergente para todos os valores de  $x$ . Logo, do Teorema 13.2.3, para todo  $x$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} & \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{(n-1)!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \\ & & &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y + x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \left( x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) + x = 0$$

Então, a equação diferencial está satisfeita e, portanto, (18) é uma solução.

### EXERCÍCIOS 13.2

Nos Exercícios de 1 a 10, faça o seguinte: (a) ache o raio de convergência da série de potências dada e o domínio de  $f$ ; (b) escreva a série de potências que define a função  $f'$  e ache seu raio de convergência, usando os métodos da Seção 13.1 (verificando assim o Teorema 13.2.1); (c) ache o domínio de  $f'$ .

1.  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$
2.  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$
3.  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$
4.  $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n-1}}$
5.  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
6.  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$
7.  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(3x-1)^n$
8.  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$
9.  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n3^n}$
10.  $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n(n-1)}$
11. Use o resultado do Exemplo 2 para achar uma representação em série de potências de  $\frac{1}{(1-x)^3}$ .
12. Use o resultado do Exemplo 3 para achar uma representação em série de potências de  $e^{\sqrt{x}}$ .
13. Obtenha uma representação em série de potências de  $\frac{1}{(1+x)^2}$ , se  $|x| < 1$ , derivando a série (2) termo a termo.
14. Obtenha uma representação em série de potências de  $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ , se  $|x| < 1$ , derivando a série (4) termo a termo.
15. (a) Use a série (1) de modo a encontrar uma representação em série de potências para  $\frac{1}{1-2x}$ . (b) Derive termo a termo a série encontrada na parte (a), a fim de achar uma representação em série de potências para  $\frac{2}{(1-2x)^2}$ .
16. (a) Use a série (2) de modo a encontrar uma representação em série de potências para  $\frac{1}{1+x^3}$ . (b) Derive termo a termo a série encontrada na parte (a), a fim de achar uma representação em série de potências para  $\frac{-3x^2}{(1+x^3)^2}$ .

17. (a) Use o resultado do Exemplo 3, a fim de encontrar uma representação em série de potências para  $e^{x^2}$ . Derive termo a termo a série encontrada em (a) de modo a achar uma representação em série de potências para  $xe^{x^2}$ .

18. Seja  $f$  a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n(n+2)}.$$

(a) Ache o domínio de  $f$ .

(b) Ache  $f'(x)$  e determine o domínio de  $f'$ .

- 19 Use o resultado do Exemplo 4 para determinar o valor de  $\frac{1}{\sqrt{e}}$  com precisão de cinco casas decimais.

20. Se  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n}$ , ache  $f'(\frac{1}{2})$  com precisão de quatro casas decimais.

21. Use os resultados dos Exemplos 3 e 4 para encontrar uma representação em série de potências de (a)  $\sinh x$  e (b)  $\cosh x$ .

22. Mostre que cada uma das séries de potências nas partes (a) e (b) do Exercício 21 pode ser obtida da outra por derivação termo a termo.

23. Use o resultado do Exemplo 2 para encontrar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}.$$

24. (a) Ache uma representação em série de potências para  $\frac{e^x - 1}{x}$ . (b) Por derivação termo a termo da série de potências da parte (a), mostre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

25. (a) Ache uma representação em série de potências para  $x^2 e^{-x}$ . (b) Por derivação termo a termo da série de potências da parte (a), mostre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^{n+1} \frac{n+2}{n!} = 4.$$

26. (a) Ache uma representação em série de potências para  $e^{-x^2}$ . (b) Por derivação da série de potências na parte (a), termo a termo duas vezes, mostre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2^n n!} = 1.$$

27. Suponha que a função  $f$  tenha  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  como representação em série de potências, onde  $R > 0$ , se  $R$  for o raio de convergência. Se  $f'(x) = f(x)$  e  $f(0) = 1$ , ache a série de potências usando somente propriedades de séries de potências e nenhuma informação sobre a função exponencial.

28. (a) Use somente propriedades de séries de potências para encontrar uma representação em série de potências da função  $f$  se  $f(x) > 0$ ,  $f'(x) = 2xf(x)$  para todo  $x$  e  $f(0) = 1$ . (b) Verifique o resultado obtido na parte (a), resolvendo a equação diferencial  $\frac{dy}{dx} = 2xy$  com a condição inicial  $y = 1$  se  $x = 0$ .

29. Suponha que uma função  $f$  tenha a representação dada pela série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ . Se  $f$  for uma função par, mostre que  $c_n = 0$  quando  $n$  for ímpar.

30. Suponha que a constante 0 tenha uma representação dada pela série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ , onde o raio de convergência é  $R > 0$ . Prove que  $c_n = 0$  para todo  $n$ .

Nos Exercícios de 31 a 35, mostre que a série de potências é uma solução da equação diferencial.

$$31. y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n; \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

$$32. y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} x^{2n}; \frac{dy}{dx} - xy = 0$$

$$33. y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}; \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

$$34. y = x + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \frac{d^2 y}{dx^2} + y - x = 0$$

$$35. y = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}; \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

## 13.3 INTEGRAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

O teorema que diz respeito à integração termo a termo de uma série de potências é uma consequência do Teorema 13.2.3.

### 13.3.1 TEOREMA

Seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  uma série de potências cujo raio de convergência é  $R > 0$ . Então, se  $f$  for a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

$f$  será integrável em todo subintervalo fechado de  $(-R, R)$ , e calculamos a integral de  $f$  integrando termo a termo a série de potências dada; isto é, se  $x$  está em  $(-R, R)$ , então

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

Além disso, o raio de convergência da série resultante é  $R$ .

**Prova** Seja  $g$  a função definida por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

Como os termos da série de potências que representa  $f(x)$  são as derivadas dos termos da série de potências que representa  $g(x)$ , as duas séries têm o mesmo raio de convergência pelo Teorema 13.2.1. Pelo Teorema 13.2.3

$$g'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \text{ em } (-R, R)$$

Pelo Teorema 13.2.2 segue que  $f'(x) = g''(x)$  para todo  $x$  em  $(-R, R)$ . Como  $f$  é diferenciável em  $(-R, R)$ ,  $f$  é contínua neste intervalo; conseqüentemente,  $f$  é contínua em todo subintervalo fechado de  $(-R, R)$ . Do Teorema 5.8.2 concluímos que se  $x$  está em  $(-R, R)$ , então

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= g(x) - g(0) \\ &= g(x) \\ \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$

■

O Teorema 13.3.1 é usado com frequência para o cálculo de uma integral definida, a qual não pode ser determinada diretamente, achando uma antiderivada do integrando. Os Exemplos 1 e 2 ilustram essa técnica. A integral definida  $\int_0^x e^{-t^2} dt$  que aparece nesses dois exemplos é similar àquela que representa a medida da área de uma região sob a “curva de probabilidade normal”.

**EXEMPLO 1** Ache uma representação em série de potências de  $\int_0^x e^{-t^2} dt$ .

**Solução** Do Exemplo 4 da Secção 13.2,

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

para todos os valores de  $x$ . Se  $x$  for substituído por  $t^2$ ,

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \dots \quad \text{para todos os valores de } t$$

Aplicando o Teorema 13.3.1, integramos termo a termo, obtendo

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t^2} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \dots \end{aligned}$$

A série de potências representa a integral para todos os valores de  $x$ .

**EXEMPLO 2** Use o resultado do Exemplo 1 para calcular, com precisão de até três casas decimais, o valor de  $\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt$ .

**Solução** Substituindo  $x$  por  $\frac{1}{2}$  na série de potências obtida no Exemplo 1, teremos

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} e^{-t^2} dt &= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \frac{1}{5376} + \dots \\ &\approx 0,5 - 0,0417 + 0,0031 - 0,0002 + \dots \end{aligned}$$

Essa é uma série alternada convergente com  $|u_{n+1}| < |u_n|$ . Assim, se usarmos os três primeiros termos para aproximar a soma, pelo Teorema 12.7.4 o erro será menor do que o valor absoluto do quarto termo. Dos três primeiros termos,

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt \approx 0,461$$

**EXEMPLO 3** Obtenha uma representação em série de potências para  $\ln(1+x)$ .

**Solução** Considere a função  $f$  definida por  $f(t) = \frac{1}{1+t}$ . Uma representação dessa função em série de potências é dada pela série (2) da Secção 13.2, que é

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots \quad \text{se } |t| < 1$$

Aplicando o Teorema 13.3.1 e integrando termo a termo, obtemos

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt \quad \text{se } |x| < 1$$

Logo,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad \text{se } |x| < 1 \\ \Leftrightarrow \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{se } |x| < 1 \end{aligned} \quad (1)$$

Como  $|x| < 1$ ,  $|1+x| = 1+x$ . Assim, as barras de valor absoluto são desnecessárias ao escrevermos  $\ln(1+x)$ .

No Exemplo 3, o Teorema 13.3.1 permite-nos concluir que a série de potências em (1) representa a função somente para os valores de  $x$  no intervalo aberto  $(-1, 1)$ . No entanto, a série de potências é convergente no extremo direito 1, conforme foi mostrado no Exemplo 1 da Seção 12.7. Quando  $x = -1$ , a série de potências torna-se a série harmônica negativa que é divergente. Logo, o intervalo de convergência da série de potências em (1) é  $(-1, 1]$ .

Na ilustração seguinte mostramos que a série de potências em (1) representa  $\ln(1+x)$  em  $x = 1$ , provando que a soma da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  é  $\ln 2$ .

► **ILUSTRAÇÃO 1** Para a série infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ , a  $n$ -ésima soma parcial é

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \quad (2)$$

Assim, da Definição 12.3.2, se mostrarmos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \ln 2$ , provamos que a soma da série é  $\ln 2$ .

Da Álgebra, temos a seguinte fórmula para a soma de uma série geométrica finita:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

Dessa fórmula com  $a = 1$  e  $r = -t$ ,

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-t)^{n-1} = \frac{1 - (-t)^n}{1 + t}$$

que pode ser escrita como

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \frac{1}{1+t} + (-1)^{n+1} \frac{t^n}{1+t}$$

Integrando de 0 a 1, obtemos

$$\int_0^1 [1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1}] dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

que dá

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \quad (3)$$

De (2), vemos que o primeiro membro de (3) é  $s_n$ . Seja

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

então (3) pode ser escrito como

$$s_n = \ln 2 + R_n \quad (4)$$

Como  $\frac{t^n}{1+t} \leq t^n$  para todo  $t$  em  $[0, 1]$ , segue, do Teorema 5.6.8, que

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

Logo,

$$0 \leq |R_n| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , segue da desigualdade acima e do Teorema 2.8.1

que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ . Portanto, de (4),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n &= \ln 2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \\ &= \ln 2 \end{aligned} \quad (5)$$

A solução do Exemplo 3 mostra que a série de potências em (1) representa  $\ln(x+1)$  se  $|x| < 1$ . Então, com o resultado da Ilustração 1 podemos concluir que a série de potências em (1) representa  $\ln(x+1)$  para todo  $x$  em seu intervalo de convergência  $(-1, 1]$ .

Embora seja interessante que a soma da série em (5) seja  $\ln 2$ , essa série converge muito vagarosamente para ser usada no cálculo de  $\ln 2$ . Vamos obter agora uma série de potências para o cálculo dos logaritmos naturais.

De (1),

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \text{para } x \text{ em } (-1, 1] \quad (6)$$

Substituindo  $x$  por  $-x$  nessa série,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \quad \text{para } x \text{ em } [-1, 1) \quad (7)$$

Subtraindo termo a termo (7) de (6), obtemos

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right) \quad \text{se } |x| < 1 \quad (8)$$

A série em (8) pode ser usada para o cálculo do logaritmo natural de qualquer número positivo.

► **ILUSTRAÇÃO 2** Se  $y$  for um número positivo qualquer, seja

$$y = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{e então} \quad x = \frac{y-1}{y+1} \quad \text{e} \quad |x| < 1$$

Por exemplo, se  $y = 2$ , então  $x = \frac{1}{3}$ . De (8),

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \dots \right) \\ &= 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15,309} + \frac{1}{177,147} + \frac{1}{1,948,617} + \dots \right) \\ &\approx 2(0,333333 + 0,012346 + 0,000823 + 0,000065 + 0,000006 + 0,000001 + \dots) \end{aligned}$$

Usando os seis primeiros termos entre parênteses, multiplicando por 2 e arredondando para cinco casas decimais, obtemos

$$\ln 2 \approx 0,69315 \quad \blacktriangleleft$$

**EXEMPLO 4** Obtenha uma representação em série de potências de  $\text{tg}^{-1} x$ .

**Solução** Da série (4) na Secção 13.2,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \quad \text{se } |x| < 1$$

Aplicando o Teorema 13.3.1 e integrando termo a termo, obtemos

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Logo,

$$\text{tg}^{-1} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{se } |x| < 1 \quad (9)$$

Embora o Teorema 13.3.1 nos permita concluir que a série de potências em (9) representa  $\text{tg}^{-1} x$  somente para os valores de  $x$  tais que  $|x| < 1$ , podemos mostrar que o intervalo de convergência da série de potências é  $[-1, 1]$  e que ela é uma representação de  $\text{tg}^{-1} x$  para todo  $x$  em seu intervalo de convergên-

cia. (Será pedido que você prove isso no Exercício 36.) Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^{-1} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \text{ se } |x| \leq 1 \end{aligned} \quad (10)$$

► **ILUSTRAÇÃO 3** Se  $x = 1$  em (10),

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

A série da Ilustração 3 não é adequada ao cálculo de  $\pi$ , pois converge muito vagarosamente. O exemplo a seguir fornece um método melhor.

**EXEMPLO 5** Prove que  $\frac{1}{4}\pi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{2} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3}$ . Use essa fórmula e a série de potências para  $\operatorname{tg}^{-1} x$  do Exemplo 4, para calcular com precisão de cinco algarismos significativos o valor de  $\pi$ .

**Solução** Sejam  $\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{2}$  e  $\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3}$ . Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \frac{3 + 2}{6 - 1} \\ &= 1 \\ &= \operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi \end{aligned}$$

Logo, como  $0 < \alpha + \beta < \frac{1}{2}\pi$ ,

$$\frac{1}{4}\pi = \alpha + \beta$$

$$\frac{1}{4}\pi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{2} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3} \quad (11)$$

Da fórmula (10) com  $x = \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 - \frac{1}{11} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \frac{1}{13} \left(\frac{1}{2}\right)^{13} - \frac{1}{15} \left(\frac{1}{2}\right)^{15} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160} - \frac{1}{896} + \frac{1}{4608} - \frac{1}{22,528} + \frac{1}{106,492} - \frac{1}{491,520} + \dots \\ &\approx 0,500000 - 0,041667 + 0,006250 - 0,001116 + 0,000217 - 0,000044 + 0,000009 - 0,000002 + \dots \end{aligned}$$

Como a série é alternada e  $|u_{n+1}| < |u_n|$ , segue, do Teorema 12.7.4, que se os sete primeiros termos forem usados para aproximar a soma da série, o erro

será menor do que o valor absoluto do oitavo termo. Logo,

$$\operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{2} \approx 0,463648$$

Da fórmula (10) com  $x = \frac{1}{3}$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^9 - \frac{1}{11} \left(\frac{1}{3}\right)^{11} + \dots \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} - \frac{1}{15.309} + \frac{1}{177.147} - \frac{1}{1.948.617} + \dots \\ &\approx 0,333333 - 0,012346 + 0,000823 - 0,000065 + 0,000006 - 0,0000005 + \dots \end{aligned}$$

Se os cinco primeiros termos forem usados para aproximar a soma,

$$\operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3} \approx 0,321751$$

Substituindo os valores de  $\operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{2}$  e  $\operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3}$  em (11),

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\pi &\approx 0,463648 + 0,321751 \\ &\approx 0,78540 \end{aligned}$$

Multiplicamos por 4 e o resultado com cinco algarismos significativos é  $\pi \approx 3,1416$ .

### EXERCÍCIOS 13.3

Nos Exercícios de 1 a 4, ache a representação em série de potências para a integral dada e determine o seu raio de convergência.

1.  $\int_0^x e^t dt$

2.  $\int_0^x \frac{dt}{t^2 + 4}$

3.  $\int_2^x \frac{dt}{4-t}$

4.  $\int_0^x \ln(1+t) dt$

Nos Exercícios de 5 a 8, calcule com precisão de três casas decimais o valor da integral dada por dois métodos: (a) use o segundo teorema fundamental do Cálculo; (b) use o resultado do exercício indicado.

5.  $\int_0^1 e^t dt$ ; Exercício 1

6.  $\int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 4}$ ; Exercício 2

7.  $\int_2^3 \frac{dt}{4-t}$ ; Exercício 3

8.  $\int_0^{1/3} \ln(1+t) dt$ ; Exercício 4

Nos Exercícios de 9 a 12, ache a série de potências que representa a integral dada e determine o seu raio de convergência.

9.  $\int_0^x f(t) dt$ , onde  $f(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$

10.  $\int_0^x f(t) dt$ , onde  $f(t) = \begin{cases} \frac{\ln(1+t)}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$

11.  $\int_0^x h(t) dt$ , onde  $h(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{senh} t}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$

12.  $\int_0^x g(t) dt$ , onde  $g(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}^{-1} t}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$

Nos Exercícios de 13 a 16, calcule com precisão de três casas decimais o valor da integral definida obtida quando substituirmos  $x$  pelo número dado no exercício indicado.

13.  $x = 1$ ; Exercício 9

14.  $x = \frac{1}{2}$ ; Exercício 10

15.  $x = 1$ ; Exercício 11

16.  $x = \frac{1}{4}$ ; Exercício 12

Nos Exercícios de 17 a 24, calcule com precisão de três casas decimais o valor da integral dada, usando séries.

17.  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^3}$

18.  $\int_0^{1/2} e^{-x^3} dx$

19.  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

20.  $\int_0^{1/3} \frac{dx}{1+x^4}$

21.  $\int_0^{1/2} \operatorname{tg}^{-1} x^2 dx$

22.  $\int_0^{1/2} \cosh x^2 dx$

23.  $\int_0^1 x \operatorname{senh} \sqrt{x} dx$

24.  $\int_0^1 g(x) dx$ , onde  $g(x) = \begin{cases} \frac{\cosh x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

25. Dado  $\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  para todo  $x$ , obtenha uma representação em série de potências para  $\sinh x$ , integrando termo a termo de 0 a  $x$  a série dada.
26. Ache uma representação em série de potências para  $\ln(1 + ax)$ , integrando termo a termo de 0 a  $x$  a representação em série de potências para  $\frac{1}{1 + at}$ .
27. Use série de potências em (9) para calcular  $\operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{4}$  com precisão de quatro casas decimais.
28. Use série de potências em (8) para calcular  $\ln 3$  com precisão de quatro casas decimais.
29. Se  $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n!}$ , ache  $f(\frac{5}{4})$  com precisão de três casas decimais.
30. Se  $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 + 3}$ , ache  $g(1)$  com precisão de duas casas decimais.
31. Ache uma representação em série de potências para  $\operatorname{tgh}^{-1} x$ , integrando termo a termo de 0 a  $x$  a representação em série de potências para  $(1 - t^2)^{-1}$ .
32. Ache uma série de potências para  $xe^x$ , multiplicando a série de  $e^x$  por  $x$ , e então integre a série termo a termo de 0 a 1, mostrando que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}$ .
33. Integrando termo a termo de 0 a  $x$  uma representação em série de potências de  $\ln(1 - t)$ , mostre que
- $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)n} = x + (1-x) \ln(1-x)$$
34. Integrando termo a termo de 0 a  $x$  uma representação em série de potências para  $\ln(1 + t)$ , mostre que
- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = 2 \ln 2 - 1$$
35. Integrando termo a termo de 0 a  $x$  uma representação em série de potências para  $t \operatorname{tg}^{-1} t$ , mostre que
- $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} [(x^2 + 1) \operatorname{tg}^{-1} x - x]$$
36. Mostre que o intervalo de convergência da série de potências em (9) é  $[-1, 1]$  e que a série de potências é uma representação de  $\operatorname{tg}^{-1} x$  para todo  $x$  em seu intervalo de convergência.
37. Ache a série de potências em  $x$  de  $f(x)$  se  $f''(x) = -f(x)$ ,  $f(0) = 0$  e  $f'(0) = 1$ . Ache também o raio de convergência da série resultante.
38. Integre termo a termo de 0 a  $x$  uma representação em série de potências para  $(1 - t^2)^{-1}$ , a fim de obter a série de potências para  $\ln \frac{1+x}{1-x}$  em (8).

### 13.4 SÉRIE DE TAYLOR

Se  $f$  for a função definida por

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

cujo raio de convergência é  $R > 0$ , segue, de sucessivas aplicações do Teorema 13.2.3, que  $f$  tem derivadas de todas as ordens em  $(-R, R)$ . Dizemos que tal função é *infinitamente derivável* em  $(-R, R)$ . Sucessivas derivações da função em (1) resultam em

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots + nc_n x^{n-1} + \dots \quad (2)$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + 3 \cdot 4c_4 x^2 + \dots + (n-1)nc_n x^{n-2} + \dots \quad (3)$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4 x + \dots + (n-2)(n-1)nc_n x^{n-3} + \dots \quad (4)$$

$$f^{(iv)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4c_4 + \dots + (n-3)(n-2)(n-1)nc_n x^{n-4} + \dots \quad (5)$$

e assim por diante. Se  $x = 0$  em (1),

$$f(0) = c_0$$

Se  $x = 0$  em (2),

$$f'(0) = c_1$$

Se  $x = 0$  em (3),

$$f''(0) = 2c_2 \Leftrightarrow c_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

De (4), se  $x = 0$ ,

$$f'''(0) = 2 \cdot 3c_3 \Leftrightarrow c_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

Da mesma forma, de (5), se  $x = 0$ ,

$$f^{(iv)}(0) = 2 \cdot 3 \cdot 4c_4 \Leftrightarrow c_4 = \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}$$

Em geral,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo}$$

Essa fórmula também é válida para  $n = 0$ , se tomarmos  $f^{(0)}(0)$  como sendo  $f(0)$  e  $0! = 1$ . Assim, dessa fórmula e de (1), a série de potências de  $f$  em  $x$  pode ser escrita como

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (6)$$

Em um sentido mais geral, consideremos a função  $f$  como uma série de potências em  $x - a$ , isto é,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - a)^n \\ &= c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Se o raio de convergência dessa série for  $R$ , então  $f$  será infinitamente derivável em  $(a - R, a + R)$ . Sucessivas derivações da função em (7) resultam em

$$\begin{aligned} f'(x) &= c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + 4c_4(x - a)^3 + \dots + nc_n(x - a)^{n-1} + \dots \\ f''(x) &= 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \dots + (n - 1)nc_n(x - a)^{n-2} + \dots \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - a) + \dots + (n - 2)(n - 1)nc_n(x - a)^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

e assim por diante. Tomando  $x = a$  nas representações de  $f$  em séries de potências, bem como nas de suas derivadas, obtemos

$$c_0 = f(a) \quad c_1 = f'(a) \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

e em geral

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (8)$$

Dessa fórmula e de (7) podemos escrever a série de potências de  $f$  em  $x - a$  como

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + \dots \quad (9)$$

A série (9) é chamada de **série de Taylor** de  $f$  em  $a$ . O caso especial de (9) quando  $a = 0$ , isto é, (6), é chamado de **série de Maclaurin**.

Observe que a  $n$ -ésima soma parcial da série infinita (9) é polinômio de Taylor de  $n$ -ésimo grau da função  $f$  em  $a$ , discutido na Seção 11.5.

**EXEMPLO 1** Ache a série de Maclaurin para  $e^x$ .

**Solução** Se  $f(x) = e^x$ ,  $f^{(n)}(x) = e^x$  para todo  $x$ ; logo  $f^{(n)}(0) = 1$  para todo  $n$ . Assim, de (6) temos a série de Maclaurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (10)$$

Tal série é a mesma que foi obtida no Exemplo 3 da Seção 13.2.

**EXEMPLO 2** Ache a série de Taylor para  $\sin x$  em  $a$ .

**Solução** Se  $f(x) = \sin x$ , temos então que  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$ ,  $f'''(x) = -\cos x$ ,  $f^{(4)}(x) = \sin x$ , e assim por diante. Assim, da fórmula (8),  $c_0 = \sin a$ ,  $c_1 = \cos a$ ,  $c_2 = (-\sin a)/2!$ ,  $c_3 = (-\cos a)/3!$ ,  $c_4 = (\sin a)/4!$  e assim por diante. A série de Taylor é obtida de (9), sendo

$$\sin x = \sin a + (\cos a)(x - a) - (\sin a) \frac{(x - a)^2}{2!} - (\cos a) \frac{(x - a)^3}{3!} + (\sin a) \frac{(x - a)^4}{4!} + \dots$$

Podemos deduzir que a representação de uma função em série de potências é única. Isto é, se duas funções têm os mesmos valores funcionais em algum intervalo contendo o número  $a$ , e se ambas as funções têm uma representação em série de potências em  $x - a$ , então trata-se da mesma série, pois os seus coeficientes são obtidos a partir dos valores das funções e de suas derivadas em  $a$ . Logo, se uma função tem uma representação em série de potências em  $x - a$ , essa série deve ser sua série de Taylor em  $a$ . Assim sendo, a série de Taylor para uma dada função não precisa ser obtida da fórmula (9). Qualquer método que resulte em uma série em  $x - a$  representando a função será a série de Taylor da função em  $a$ .

► **ILUSTRAÇÃO 1** Para encontrar a série de Taylor para  $e^x$  em  $a$ , vamos escrever  $e^x = e^a e^{x-a}$  e então usar a série (10), onde substituímos  $x$  por  $x - a$ . Então,

$$e^x = e^a \left[ 1 + (x - a) + \frac{(x - a)^2}{2!} + \frac{(x - a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!} + \dots \right] \quad \blacktriangleleft$$

► **ILUSTRAÇÃO 2** A série para  $\ln(1 + x)$ , encontrada no Exemplo 3 da Seção 13.3, pode ser usada para determinar a série de Taylor de  $\ln x$  em  $a$  ( $a > 0$ ), escrevendo

$$\ln x = \ln[a + (x - a)]$$

$$\ln x = \ln a + \ln \left( 1 + \frac{x - a}{a} \right) \quad (11)$$

Como

$$\ln(1 + t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} \quad \text{se } -1 < t \leq 1$$

então

$$\ln\left(1 + \frac{x-a}{a}\right) = \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} - \dots$$

Logo, de (11),

$$\ln x = \ln a + \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} - \dots$$

e a série representa  $\ln x$  se  $-1 < \frac{x-a}{a} \leq 1$  ou, equivalentemente,  $0 < x \leq 2a$ . ◀

Uma questão natural que surge é: se uma função tem uma série de Taylor em  $x-a$ , com raio de convergência  $R > 0$ , essa série representa a função para todos os valores de  $x$  no intervalo  $(a-R, a+R)$ ? Para a maioria das funções elementares a resposta é afirmativa. Há, contudo, funções para as quais a resposta é *não*. O exemplo a seguir mostra isso.

**EXEMPLO 3** Seja  $f$  a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Ache a série de Maclaurin para  $f$  e mostre que ela converge para todos os valores de  $x$ , mas que ela representa  $f(x)$  somente se  $x = 0$ .

**Solução** Para encontrar  $f'(0)$ , vamos usar a definição de derivada.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x e^{1/x^2}} \end{aligned}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x^2} = +\infty$ , a regra de L'Hôpital pode ser usada. Logo,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{1/x^2} \left(-\frac{2}{x^3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2e^{1/x^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De forma análoga, usando a definição de derivada e a regra de L'Hôpital, obtemos 0 para todas as derivadas. Assim,  $f^{(n)}(0) = 0$  para todo  $n$ . Logo, a série de Maclaurin para a função dada é  $0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$ . Essa série converge para 0 para todo  $x$ ; contudo, se  $x \neq 0$ ,  $f(x) = e^{-1/x^2} \neq 0$ .

O teorema a seguir fornece um teste para determinar se uma função está representada por sua série de Taylor.

## 13.4.1 TEOREMA

Seja  $f$  uma função tal que  $f$  e todas as suas derivadas existam em algum intervalo  $(a - r, a + r)$ . Então, a função é representada por sua série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

para todo  $x$ , tal que  $|x - a| < r$ , se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1} = 0$$

onde cada  $\xi_n$  está entre  $x$  e  $a$ .

**Prova** No intervalo  $(a - r, a + r)$ , a função  $f$  satisfaz as hipóteses do Teorema 11.5.1 para o qual

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (12)$$

onde  $P_n(x)$  é o polinômio de Taylor de grau  $n$  de  $f$  em  $a$  e  $R_n(x)$  é o resto, dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1} \quad (13)$$

onde cada  $\xi_n$  está entre  $x$  e  $a$ .

Agora  $P_n(x)$  é a  $n$ -ésima soma parcial da série de Taylor de  $f$  em  $a$ . Assim, se mostrarmos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$  existe e é igual a  $f(x)$  se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0, \text{ o teorema estará provado. De (12),}$$

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ , segue dessa equação que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) &= f(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) \\ &= f(x) - 0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Queremos mostrar agora que se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = f(x)$ , então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ . De (12),

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) &= f(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Isso prova o teorema. ■

O Teorema 13.4.1 também é válido para outras formas do resto  $R_n(x)$ , além da fórmula de Lagrange.

Freqüentemente, é difícil aplicar o Teorema 13.4.1, pois os valores de  $\xi_n$  são arbitrários. Mas, às vezes pode ser encontrado um limitante superior para  $R_n(x)$  e pode ser possível provar que o limite dos limitantes superiores é zero quando  $n \rightarrow +\infty$ . O seguinte limite é de grande valia em alguns casos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{para todo } x \quad (14)$$

Isto segue do Exemplo 2 da Seção 13.1, onde mostramos que a série de potências

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  é convergente para todos os valores de  $x$  e assim sendo, o limite de seu  $n$ -ésimo termo deve ser zero. Da mesma forma, como  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$  é convergente para todos os valores de  $x$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} = 0 \quad \text{para todo } x \quad (15)$$

**EXEMPLO 4** Use o Teorema 13.4.1 para mostrar que a série de Maclaurin para  $e^x$ , encontrada no Exemplo 1, representa a função para todos os valores de  $x$ .

**Solução** A série de Maclaurin para  $e^x$  é (10) e

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

onde cada  $\xi_n$  está entre 0 e  $x$ .

Precisamos mostrar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$  para todo  $x$ . Há três casos a considerar:  $x > 0$ ,  $x < 0$  e  $x = 0$ .

Se  $x > 0$ , então  $0 < \xi_n < x$ ; logo,  $e^{\xi_n} < e^x$ . Assim,

$$0 < \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (16)$$

De (14) segue que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ , e assim

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Logo, de (16) e do Teorema 2.8.1, segue que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ .

Se  $x < 0$ , então  $x < \xi_n < 0$  e  $0 < e^{\xi_n} < 1$ . Logo, se  $x^{n+1} > 0$ ,

$$0 < \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

e se  $x^{n+1} < 0$ ,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < 0$$

Em ambos os casos, como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ , concluímos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ .

Finalmente, se  $x = 0$ , a série tem soma 1, que é  $e^0$ . Logo, a série (10) representa  $e^x$  para todos os valores de  $x$ .

Dos resultados do exemplo acima, podemos escrever

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \text{ para todo } x$$

o que está de acordo com o exemplo 3 da Secção 13.2.

**EXEMPLO 5** Mostre que a série de Taylor para  $\sin x$  em  $a$ , do Exemplo 2, representa a função para todos os valores de  $x$ .

**Solução** Vamos usar o Teorema 13.4.1. Precisamos então mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

$$= 0$$

Como  $f(x) = \sin x$ ,  $f^{(n+1)}(\xi_n)$  será um dos seguintes números:  $\cos \xi_n$ ,  $\sin \xi_n$ ,  $-\cos \xi_n$ , ou  $-\sin \xi_n$ . De qualquer modo,  $|f^{(n+1)}(\xi_n)| \leq 1$ . Logo,

$$0 < |R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (17)$$

De (15),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ . Assim, pelo teorema do “sanduíche” (2.8.1) e de (17), segue que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ .

**EXEMPLO 6** Calcule o valor de  $\sin 47^\circ$  com precisão de quatro casas decimais.

**Solução** A série de Taylor para  $\sin x$  em  $a$  foi obtida nos Exemplos 2 e 5. Ela representa a função para todos os valores de  $x$ . A série é

$$\sin x = (\sin a) + (\cos a)(x-a) - (\sin a) \frac{(x-a)^2}{2!} - (\cos a) \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots$$

Para tornar  $x-a$  pequeno devemos escolher um valor de  $a$  próximo do valor de  $x$  para o qual a função esteja sendo calculada. O seno e o co-seno de  $a$  também devem ser conhecidos. Assim sendo, escolhemos  $a = \frac{1}{4}\pi$  e obtemos

$$\sin x = \sin \frac{1}{4}\pi + (\cos \frac{1}{4}\pi)(x - \frac{1}{4}\pi) - (\sin \frac{1}{4}\pi) \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^2}{2!} - (\cos \frac{1}{4}\pi) \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^3}{3!} + \dots$$

Como  $47^\circ$  é equivalente a  $\frac{47}{180}\pi$  rad ou  $(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{90}\pi)$  rad, dessa série com  $x = \frac{47}{180}\pi$ , segue que

$$\sin \frac{47}{180}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{90}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{90}\pi)^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{6}(\frac{1}{90}\pi)^3 + \dots$$

$$\approx \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + 0,03490 - 0,00061 - 0,000002 + \dots)$$

Tomando  $\sqrt{2} \approx 1,41421$  e usando os três primeiros termos da série, obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \frac{47}{180}\pi &\approx (0,70711)(1,03429) \\ &\approx 0,73136\end{aligned}$$

Arredondando para quatro casas decimais, obtemos  $\operatorname{sen} 47^\circ \approx 0,7314$ . O erro introduzido com a utilização dos três primeiros termos é  $R_2(\frac{47}{180}\pi)$  e, de (17),

$$\left| R_2\left(\frac{47}{180}\pi\right) \right| \leq \frac{(\frac{1}{90}\pi)^3}{3!} \approx 0,00001$$

O resultado, então, está entre  $0,73136 - 0,00001$  e  $0,73136 + 0,00001$ , isto é, o resultado está entre  $0,73135$  e  $0,73137$ . Assim, para uma precisão de quatro casas decimais, temos

$$\operatorname{sen} \frac{47}{180}\pi \approx 0,7314$$

A seguinte série de Maclaurin representa a função dada para todos os valores de  $x$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \operatorname{senh} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \operatorname{cosh} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\end{aligned}$$

A série para  $\operatorname{sen} x$  resulta diretamente dos Exemplos 2 e 5, com  $a = 0$ . Você deverá verificar os resultados das outras séries nos Exercícios 1, 2 e 3.

**EXEMPLO 7** Calcule com precisão de cinco casas decimais

$$\int_{1/2}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

**Solução** Uma antiderivada do integrando, em termos de funções elementares, não pode ser encontrada. Mas, da série de Maclaurin para  $\sin x$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{x} \cdot \sin x \\ &= \frac{1}{x} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots\end{aligned}$$

que é verdadeira para todo  $x \neq 0$ . Usando integração termo a termo, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \left[ x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \frac{x^9}{9 \cdot 9!} - \dots \right]_{1/2}^1 \\ &\approx (1 - 0,0555555 + 0,0016667 - 0,0000283 + 0,0000003 - \dots) \\ &\quad - (0,5 - 0,0069444 + 0,0000521 - 0,0000002 + \dots)\end{aligned}$$

Entre cada par de parênteses há uma série alternada convergente com  $|u_{n+1}| < |u_n|$ . Primeiro colocamos os quatro primeiros termos, pois o erro cometido é menor do que 0,0000003. Em seguida, colocamos entre parênteses os três primeiros termos, onde o erro cometido é menor do que 0,0000002. Fazendo os cálculos aritméticos e arredondando para cinco casas decimais, obtemos

$$\int_{1/2}^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 0,45298$$

### EXERCÍCIOS 13.4

- Prove que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$  representa  $\cos x$  para todos os valores de  $x$ .
  - Prove que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  representa  $\sinh x$  para todos os valores de  $x$ .
  - Prove que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  representa  $\cosh x$  para todos os valores de  $x$ .
  - Obtenha a série de Maclaurin para a função co-seno, derivando a série de Maclaurin para a função seno. Também, obtenha a série de Maclaurin para a função seno, derivando a série da função co-seno.
  - Obtenha a série de Maclaurin para a função seno hiperbólico, derivando a série de Maclaurin para a função co-seno hiperbólico. Também, derive a série de Maclaurin para a função seno hiperbólico, de modo a obter a série da função co-seno hiperbólico.
  - Ache a série de Taylor para  $e^x$  em 3, usando a série de Maclaurin para  $e^x$ .
  - Use a série de Maclaurin de  $\ln(1+x)$  para encontrar a série de Taylor para  $\ln x$  em 2.
  - Dado  $\ln 2 = 0,6931$ , use a série obtida no Exercício 7 para encontrar  $\ln 3$  com precisão de quatro casas decimais.
- Nos Exercícios de 9 a 14, ache uma representação em série de potências para a função em torno do ponto  $a$  e determine o raio de convergência.*
- $f(x) = \ln(x+1); a = 1$
  - $f(x) = \sqrt[3]{x}; a = 1$
  - $f(x) = \sqrt{x}; a = 4$
  - $f(x) = \frac{1}{x}; a = 1$
  - $f(x) = \cos x; a = \frac{1}{2}\pi$
  - $f(x) = 2^x; a = 0$
  - Ache a série de Maclaurin para  $\sin^2 x$ .  
(Sugestão: use  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ .)
  - Ache a série de Maclaurin para  $\cos^2 x$ .  
(Sugestão: use  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ .)
  - (a) Ache os três primeiros termos não-nulos da série de Maclaurin para  $\operatorname{tg} x$ . (b) Use o resultado de (a) e a derivação termo a termo para encontrar os três primeiros termos não-nulos da série de Maclaurin para  $\sec^2 x$ . (c) Use o resultado de (a) e a integração termo a termo, de modo a encontrar os três primeiros termos não-nulos da série de Maclaurin para  $|\sec x|$ .
  - (a) Ache os três primeiros termos não-nulos da série de Taylor para  $\operatorname{cotg} x$  em  $\frac{1}{2}\pi$ . (b) Use o resultado de (a) e a integração termo a termo, a fim de encontrar os três primeiros termos não-nulos da série de Taylor para  $\ln \sin x$  em  $\frac{1}{2}\pi$ .

Nos Exercícios de 19 a 24, use séries de potências para calcular, com a precisão exigida, o valor da quantidade dada.

19.  $\cos 58^\circ$ ; quatro casas decimais

20.  $\sqrt[5]{e}$ ; quatro casas decimais

21.  $\sqrt[3]{30}$ ; cinco casas decimais

22.  $\sinh \frac{1}{2}$ ; cinco casas decimais

23.  $\ln(0,8)$ ; quatro casas decimais

24.  $\sqrt[3]{29}$ ; três casas decimais

25. Calcule o valor de  $e$  com precisão de sete casas decimais e comprove sua resposta.

Nos Exercícios de 26 a 31, calcule com três casas decimais de precisão o valor da integral definida.

26.  $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x^2} dx$

27.  $\int_0^{1/2} \sin x^2 dx$

28.  $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$

29.  $\int_0^{0,1} \ln(1 + \sin x) dx$

30.  $\int_0^{1/3} f(x) dx$ , onde  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

31.  $\int_0^1 g(x) dx$ , onde  $g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

32. A função  $E$  definida por

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

é chamada de *função erro* e é importante em Estatística Matemática. Ache a série de Maclaurin para a função erro.

33. Determine  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ) de tal modo que o polinômio

$$f(x) = 3x^4 - 17x^3 + 35x^2 - 32x + 17$$

possa ser escrito na forma:

$$f(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

34. Determine  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) de tal modo que o polinômio

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3$$

possa ser escrito na forma:

$$f(x) = a_3(x+2)^3 + a_2(x+2)^2 + a_1(x+2) + a_0$$

**13.5 SÉRIE BINOMIAL** Em Álgebra você aprendeu que o teorema binomial expressa  $(a + b)^m$  como uma soma de potências de  $a$  e  $b$ , onde  $m$  é um inteiro positivo, como segue:

$$(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2!} a^{m-2}b^2 + \dots + \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{k!} a^{m-k}b^k + \dots + b^m$$

Vamos tomar  $a = 1$  e  $b = x$  e aplicar o teorema binomial para expressar  $(1 + x)^m$ , onde  $m$  não é inteiro positivo. Obtemos a série de potências

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (1)$$

Essa é a série de Maclaurin para  $(1 + x)^m$ . Ela é chamada de **série binomial**. Para determinar o raio de convergência da série (1), aplicamos o teste da razão e obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{m-n}{n+1} \right| |x| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{m}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} \right| |x| \\ &= |x| \end{aligned}$$

Assim, a série é convergente se  $|x| < 1$ . Agora provaremos que a série (1) representa  $(1+x)^m$  para todo número real  $m$  se  $x$  estiver no intervalo aberto  $(-1, 1)$ . Isso não será feito calculando  $R_n(x)$  e mostrando que seu limite é zero, pois é um procedimento difícil, como você pode ver se tentar aplicá-lo. Em vez disso, usaremos o método a seguir. Seja

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n \quad |x| < 1 \quad (2)$$

Queremos mostrar que  $f(x) = (1+x)^m$ , onde  $|x| < 1$ . Pelo Teorema 13.2.3,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \quad |x| < 1 \quad (3)$$

Multiplicando ambos os lados de (3) por  $x$ , obtemos, pelo Teorema 12.4.2,

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{(n-1)!} x^n \quad (4)$$

Reescrevendo o segundo membro de (3),

$$f'(x) = m + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}$$

Reescrevendo essa somatória com o extremo inferior diminuído de 1, sendo  $n$  substituído por  $n+1$ , temos

$$f'(x) = m + \sum_{n=1}^{+\infty} (m-n) \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$$

Multiplicando o numerador e o denominador de (4) por  $n$ , obtemos

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$$

As séries para  $f'(x)$  e  $xf'(x)$  são absolutamente convergentes para  $|x| < 1$ . Então, pelo Teorema 12.4.3, elas podem ser somadas termo a termo, e a série resultante será absolutamente convergente, para  $|x| < 1$ . Então, da adição,

$$(1+x)f'(x) = m \left[ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n \right]$$

Como por (2) a expressão entre colchetes é  $f(x)$ , então

$$(1+x)f'(x) = mf(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{1+x}$$

O primeiro membro da equação acima é  $D_x[\ln f(x)]$ ; assim,

$$\frac{d}{dx} [\ln f(x)] = \frac{m}{1+x}$$

Mas também sabemos que

$$\frac{d}{dx} [\ln(1+x)^m] = \frac{m}{1+x}$$

Como  $\ln f(x)$  e  $\ln(1+x)^m$  têm a mesma derivada, eles diferem por uma constante. Logo,

$$\ln f(x) = \ln(1+x)^m + C$$

De (2),  $f(0) = 1$ . Logo  $C = 0$ ; assim,

$$f(x) = (1+x)^m$$

Provamos o teorema binomial geral, que agora enunciaremos.

### 13.5.1 TEOREMA Teorema Binomial

Se  $m$  for um número real qualquer, então

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n$$

para todos os valores de  $x$ , tais que  $|x| < 1$ .

Se  $m$  for um inteiro positivo, a série binomial terminará após um número finito de termos.

**EXEMPLO 1** Exprese como uma série de potência em  $x$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

**Solução** Do Teorema 13.5.1, quando  $|x| < 1$ ,

$$\begin{aligned} (1+x)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 \\ &\quad + \dots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2}) \cdots (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!}x^n + \dots \end{aligned}$$

**EXEMPLO 2** Do resultado do Exemplo 1, obtenha uma série binomial para  $(1-x^2)^{-1/2}$  e use-a, de modo a achar uma série de potências para  $\text{sen}^{-1} x$ .

**Solução** Substitua  $x$  por  $-x^2$  na série para  $(1+x)^{-1/2}$  e obtenha para  $|x| < 1$

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + \dots$$

Aplicando o Teorema 13.3.1 e integrando termo a termo, obtemos

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Logo,

$$\text{sen}^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{para } |x| < 1$$

O exemplo a seguir mostra como a série binomial é usada para o cálculo de raízes.

**EXEMPLO 3** Calcule o valor de  $\sqrt[3]{25}$  com precisão de três casas decimais, usando a série binomial para  $(1+x)^{1/3}$ .

**Solução** Do Teorema 13.5.1,

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{x^3}{3!} + \dots \text{ se } |x| < 1$$

Como  $\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{\frac{25}{27}}$ , podemos escrever

$$\sqrt[3]{25} = 3\left(1 - \frac{2}{27}\right)^{1/3} \quad (5)$$

Da série para  $(1+x)^{1/3}$  com  $x = -\frac{2}{27}$ ,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{27}\right)^{1/3} &= 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{27}\right) - \frac{2}{3^2 \cdot 2!}\left(-\frac{2}{27}\right)^2 + \frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}\left(-\frac{2}{27}\right)^3 + \dots \\ &\approx 1 - 0,0247 - 0,0006 - 0,00003 - \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Se os três primeiros termos da série acima forem usados, segue de (13) da Seção 13.4 que o resto é

$$\begin{aligned} R_2\left(-\frac{2}{27}\right) &= \frac{f'''(\xi_2)}{3!}\left(-\frac{2}{27}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{3!}\right)(1 + \xi_2)^{(1/3)-3}\left(-\frac{2}{27}\right)^3 \end{aligned}$$

onde  $-\frac{2}{27} < \xi_2 < 0$ . Logo,

$$\left|R_2\left(-\frac{2}{27}\right)\right| = \left(\frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}\right) \frac{(1 + \xi_2)^{1/3}}{(1 + \xi_2)^3} \left(\frac{2}{27}\right)^3 \quad (7)$$

Como  $-\frac{2}{27} < \xi_2 < 0$ , segue que

$$(1 + \xi_2)^{1/3} < 1^{1/3} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{(1 + \xi_2)^3} < \frac{1}{\left(\frac{25}{27}\right)^3} \quad (8)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!} &= \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{9} < \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Assim, da desigualdade acima e de (8) em (7),

$$\left|R_2\left(-\frac{2}{27}\right)\right| < \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\left(\frac{25}{27}\right)^3} \cdot \left(\frac{2}{27}\right)^3 = \frac{8}{140.625} < 0,00006$$

Usando, então, os três primeiros termos da série (6), obtemos

$$\left(1 - \frac{2}{27}\right)^{1/3} \approx 0,9747$$

com um erro menor do que 0,00006. De (5), obtemos

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{25} &\approx 3(0,9747) \\ &= 2,9241\end{aligned}$$

com um erro menor do que  $3(0,00006) = 0,00018$ . Arredondando para três casas decimais,  $\sqrt[3]{25} \approx 2,924$ .

### EXERCÍCIOS 13.5

Nos Exercícios de 1 a 10, use uma série binomial de modo a encontrar a série de Maclaurin para a função dada e determine seu raio de convergência.

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| 1. $f(x) = \sqrt{1+x}$             | 2. $f(x) = (3-x)^{-2}$                 |
| 3. $f(x) = (4+x)^{-1/2}$           | 4. $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$              |
| 5. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$        | 6. $f(x) = (4+x^2)^{-1}$               |
| 7. $f(x) = (9+x^4)^{-1/2}$         | 8. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$       |
| 9. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$ | 10. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ |

Nos Exercícios de 11 a 16, calcule o valor da quantidade dada com três casas decimais de precisão, usando uma série binomial.

- |                    |                               |                              |
|--------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 11. $\sqrt{24}$    | 12. $\sqrt{51}$               | 13. $\sqrt[3]{630}$          |
| 14. $\sqrt[3]{66}$ | 15. $\frac{1}{\sqrt[3]{128}}$ | 16. $\frac{1}{\sqrt[3]{31}}$ |

17. Integre termo a termo de 0 a  $x$  a série binomial para  $(1+t^2)^{-1/2}$ , de modo a obter a série de Maclaurin para  $\operatorname{senh}^{-1} x$ . Determine o raio de convergência.
18. Use um método similar ao do Exercício 17, a fim de encontrar a série de Maclaurin para  $\operatorname{tgh}^{-1} x$ . Determine o raio de convergência.
19. (a) Expresse  $\sqrt[4]{1+x}$  como uma série de potências em  $x$ . (b) Use o resultado da parte (a) para expressar  $\sqrt[4]{1+x^2}$  como

uma série de potências em  $x$ . (c) Use o resultado da parte (b) para calcular, com três casas decimais de precisão, o valor de  $\int_0^{1/2} \sqrt[4]{1+x^2} dx$ .

20. Use o procedimento indicado no Exercício 19 para calcular, com três casas decimais de precisão, o valor de  $\int_0^{1/4} (1-\sqrt{x})^{2/3} dx$ .

Nos Exercícios de 21 a 28, calcule com três casas decimais de precisão, o valor da integral definida.

- |  |   |
|--|---|
| 21. $\int_0^{1/3} \sqrt{1+x^3} dx$         | 22. $\int_0^{2/5} \sqrt[3]{1+x^4} dx$         |
| 23. $\int_0^1 \sqrt[3]{8+x^2} dx$          | 24. $\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^3} dx$            |
| 25. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ | 26. $\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ |
| 27. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ |   |

28.  $\int_0^{1/2} f(x) dx$ , onde  $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

29. Ache a série de Maclaurin para  $\int_0^x \frac{t^p}{\sqrt{1-t^2}} dt$ , se  $p$  for um inteiro não-negativo. Determine o raio de convergência da série.

### EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 13

Nos Exercícios de 1 a 12, determine o intervalo de convergência da série de potências dada.

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$                | 2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$               | 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n(n^2+n)}$ |
| 4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$                     | 5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n} (x-3)^n$          |  |
| 6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ | 7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{6^n} (x+1)^n$         |  |
| 8. $\sum_{n=1}^{+\infty} n(2x-1)^n$                           | 9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n2^n}$ |  |

10.  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$
11.  $\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{sen} 2n)x^n$

12.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{(n+1) \ln(n+1)}$

Nos Exercícios de 13 a 16 faça o seguinte: (a) ache o raio de convergência da série de potências dada e o domínio de  $f$ ; (b) escreva a série de potências que define a função  $f'$  e encontre o seu raio de convergência; (c) ache o domínio de  $f'$ .

13.  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$
14.  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3}$

15.  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$

16.  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$

Nos Exercícios de 17 a 20, ache a série de potências que representa a integral dada e determine seu raio de convergência.

17.  $\int_0^x \frac{dt}{t^2 + 16}$

18.  $\int_3^x \frac{dt}{t-1}$

19.  $\int_0^x f(t) dt$ , onde  $f(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} t}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$

20.  $\int_0^x f(t) dt$ , onde  $f(t) = \begin{cases} \frac{1 - \cos t}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$

Nos Exercícios de 21 a 24, calcule com a precisão de três casas decimais, o valor da integral definida com a substituição de  $x$  pelo número dado no exercício indicado.

21.  $x = 3$ ; Exercício 17

22.  $x = 4$ ; Exercício 18

23.  $x = \frac{1}{2}$ ; Exercício 19

24.  $x = \frac{1}{4}$ ; Exercício 20

Nos Exercícios de 25 a 34, use uma série de potências para calcular, com precisão quatro casas decimais, o valor da quantidade dada.

25.  $\operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{5}$

26.  $\operatorname{sen} 0,3$

27.  $\sqrt[3]{130}$

28.  $\operatorname{sen}^{-1} 1$

29.  $\cos 3^\circ$

30.  $\sqrt[4]{e}$

31.  $\ln 5$

32.  $\int_0^1 \cos x^3 dx$

33.  $\int_0^{1/4} \sqrt{x} \operatorname{sen} x dx$

34.  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^5}$

Nos Exercícios de 35 a 38, ache a série de Maclaurin para a função dada e ache o seu intervalo de convergência.

35.  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$ )

36.  $f(x) = \frac{1}{2-x}$

37.  $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$

38.  $f(x) = \sqrt{x+1}$

Nos Exercícios de 39 a 42, ache a série de Taylor para a função dada no número indicado.

39.  $f(x) = \operatorname{sen} 3x$ ; em  $-\frac{1}{3}\pi$

40.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ; em 2

41.  $f(x) = \ln|x|$ ; em  $-1$

42.  $f(x) = e^{x-2}$ ; em 2

Os Exercícios de 43 a 47 referem-se às funções  $J_0$  e  $J_1$  definidas por séries de potências, como segue:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!n!2^{2n}} \quad J_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

As funções  $J_0$  e  $J_1$  são chamadas de funções de Bessel da primeira espécie de ordem zero e um, respectivamente.

43. Mostre que ambas  $J_0$  e  $J_1$  convergem para todo valor real de  $x$ .

44. Mostre que  $y = J_0(x)$  é uma solução da equação diferencial

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

45. Mostre que  $J_0'(x) = -J_1(x)$ .

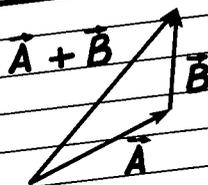
46. Mostre que  $D_x(xJ_1(x)) = xJ_0(x)$ .

47. Mostre que  $y = J_1(x)$  é uma solução da equação diferencial

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 1)y = 0$$

# QUATORZE

## Vetores no Plano e Equações Paramétricas



$$x = a(t - \sin t)$$

e

$$y = a(1 - \cos t)$$

Neste capítulo e no Capítulo 15 os vetores\* serão tratados de forma moderna e essa abordagem serve como introdução à perspectiva da Álgebra Linear e, ainda, à análise vetorial clássica. Na Secção 14.1 definimos um *vetor no plano* como um par ordenado de números reais e realizamos operações com vetores, aplicando operações algébricas em suas coordenadas reais, o que também será feito na Secção 14.2. Na Secção 14.3 nós introduzimos um novo tipo de função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Essas funções são chamadas de funções com valores vetoriais. O gráfico de uma função com valores vetoriais é uma curva que também pode ser representada por *equações paramétricas*. Tais equações expressam as coor-

\* N. do T.: No texto, onde aparecem vetores dados por seu módulo e direção, está subentendido tratar-se de *direção orientada*.

denadas  $x$  e  $y$  dos pontos sobre uma curva plana como funções de uma terceira variável  $t$ , a qual representa, freqüentemente, o tempo. O cálculo de funções com valores vetoriais, apresentado na Secção 14.3, envolve o cálculo de funções com valores reais definidas por suas equações paramétricas correspondentes.

As demais secções do capítulo envolvem aplicações de vetores à Geometria, Física e Engenharia. As aplicações geométricas incluem o *comprimento de arco*, o *vetor tangente* e o *vetor normal* a curvas, e a *curvatura*. Quanto às aplicações em Física e Engenharia, usamos vetores para calcular o *trabalho* e para discutir o *movimento ao longo de uma curva*.

## 14.1 VETORES NO PLANO

As aplicações de Matemática envolvem, freqüentemente, quantidades que possuem tanto módulo como direção e sentido. Exemplo de tal quantidade é a *velocidade*. Assim, a velocidade de um avião tem módulo (a velocidade escalar do avião), direção (que determina o curso) e o sentido (que determina o destino do avião). Outros exemplos de tais quantidades são *força*, *deslocamento* e *aceleração*. Físicos e engenheiros referem-se a um segmento de reta orientado como sendo um *vetor*, e aquelas quantidades que têm módulo, direção e sentido são chamadas de **quantidades vetoriais**. Em contraste, denominaremos **quantidades escalares** aquelas que têm módulo, mas não direção. Exemplos de quantidades escalares são comprimento, área, volume e velocidade. O estudo de vetores é chamado de **análise vetorial**.

Podemos abordar a análise vetorial geométrica ou analiticamente. Se a abordagem geométrica for escolhida, definimos primeiro um segmento de reta orientado de um ponto  $P$  a um ponto  $Q$  e denotamos esse segmento de reta orientado por  $\overrightarrow{PQ}$ . O ponto  $P$  é chamado de **ponto inicial**, e o ponto  $Q$  é chamado de **ponto final**. Então, dizemos que dois segmentos orientados  $\overrightarrow{PQ}$  e  $\overrightarrow{RS}$  são iguais se tiverem o mesmo *comprimento* e a mesma *direção* e *sentido*, e escrevemos  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$  (veja a Figura 1). O segmento de reta orientado  $\overrightarrow{PQ}$  é denominado o **vetor** de  $P$  a  $Q$ . Um vetor será denotado por uma única letra, em negrito, tal como  $\mathbf{A}$ . Em alguns livros, letras em tipo claro, com uma seta em cima, são usadas para indicar um vetor, por exemplo  $\vec{A}$ . Quando estiver fazendo o seu trabalho, você poderá usar essa notação ou  $\underline{A}$ , de modo a distinguir o símbolo para um vetor do símbolo usado para um número real.

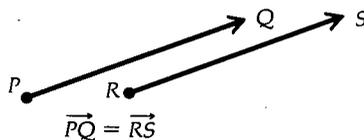


FIGURA 1

Continuando a abordagem geométrica à análise vetorial, note que se o segmento de reta orientado  $\overrightarrow{PQ}$  for o vetor  $\mathbf{A}$ , e  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ , o segmento de reta orientado  $\overrightarrow{RS}$  também será o vetor  $\mathbf{A}$ . Então, um vetor não muda quando o movemos paralelamente a si mesmo\*. Com essa interpretação de vetor podemos supor, por conveniência, que todo vetor tem seu ponto inicial em algum ponto de referência fixo. Se tomarmos esse ponto como a origem de um sistema de coordenadas cartesianas retangulares, um vetor poderá ser definido analiticamente em termos de números reais. Tal definição permite o estudo da análise vetorial de um ponto de vista puramente matemático.

Neste livro usaremos a abordagem analítica; porém, a interpretação geométrica será usada com finalidades ilustrativas. Um vetor no plano é denotado por um par ordenado de números reais e a notação  $\langle x, y \rangle$  será usada, em vez de  $(x, y)$ , para evitar confusão entre a notação de um vetor e de um ponto.  $V_2$  é o conjunto de todos esses pares ordenados.

\* N. do T.: O autor não está considerando aqui os vetores aplicados, tais como uma força, em relação aos quais essa afirmativa não é verdadeira.

## 14.1.1 DEFINIÇÃO

Um **vetor no plano** é um par ordenado de números reais  $\langle x, y \rangle$ . Os números  $x$  e  $y$  são chamados de **componentes** do vetor  $\langle x, y \rangle$ .

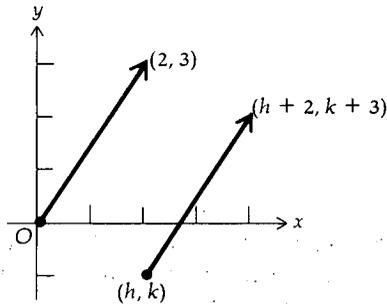


FIGURA 2

Há uma correspondência biunívoca entre os vetores  $\langle x, y \rangle$  no plano e os pontos  $(x, y)$  do plano. Seja  $\mathbf{A}$  o vetor dado pelo par ordenado de números reais  $\langle a_1, a_2 \rangle$ . Se  $\mathbf{A}$  for o ponto  $(a_1, a_2)$ , então o vetor  $\mathbf{A}$  poderá ser representado geometricamente pelo segmento de reta orientado  $\overrightarrow{OA}$ . Tal segmento de reta orientado é chamado de **representação** do vetor  $\mathbf{A}$ . Qualquer outro segmento de reta orientado que seja igual a  $\overrightarrow{OA}$  também será uma representação do vetor  $\mathbf{A}$ . A representação específica de um vetor que tem seu ponto inicial na origem é chamada de **representação posicional** do vetor.

► **ILUSTRAÇÃO 1** O vetor  $\langle 2, 3 \rangle$  tem por representação posicional o segmento de reta orientado da origem ao ponto  $(2, 3)$ . A representação do vetor  $\langle 2, 3 \rangle$  cujo ponto inicial é  $(h, k)$ , tem como ponto final  $(h + 2, k + 3)$ ; veja a Figura 2. ◀

O vetor  $\langle 0, 0 \rangle$  é chamado de **vetor zero**, sendo denotado por  $\mathbf{0}$ ; isto é,

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$$

Qualquer ponto é uma representação do vetor zero.

## 14.1.2 DEFINIÇÃO

O **módulo\*** de um vetor é o comprimento de qualquer uma de suas representações, e a **direção** e o **sentido** de um vetor não-nulo são a direção e o sentido de qualquer uma de suas representações.

O módulo do vetor  $\mathbf{A}$  é denotado por  $\|\mathbf{A}\|$ .

## 14.1.3 TEOREMA

Se  $\mathbf{A}$  for o vetor  $\langle a_1, a_2 \rangle$ , então  $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ .

**Prova** Como pela Definição 14.1.2  $\|\mathbf{A}\|$  é o comprimento de qualquer uma de suas representações, então  $\|\mathbf{A}\|$  será o comprimento da representação posicional de  $\mathbf{A}$  que é a distância da origem ao ponto  $(a_1, a_2)$ . Assim, da fórmula da distância entre dois pontos,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\| &= \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2} \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \end{aligned}$$

Observe que  $\|\mathbf{A}\|$  é um número não-negativo, e não um vetor. Do Teorema 14.1.3 segue que  $\|\mathbf{0}\| = 0$ . ■

► **ILUSTRAÇÃO 2** Se  $\mathbf{A} = \langle -3, 5 \rangle$ , então

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\| &= \sqrt{(-3)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

**EXEMPLO 1** Seja  $\mathbf{A}$  o vetor  $\langle -4, 5 \rangle$  e  $P$  o ponto  $(6, -2)$ . (a) Trace a representação posicional de  $\mathbf{A}$  e também a representação específica de  $\mathbf{A}$ , tendo  $P$  como ponto inicial. (b) Ache o módulo de  $\mathbf{A}$ .

\* N. do R.: Também denominado *norma* e em Física às vezes é denominado *magnitude* ou *intensidade* do vetor.

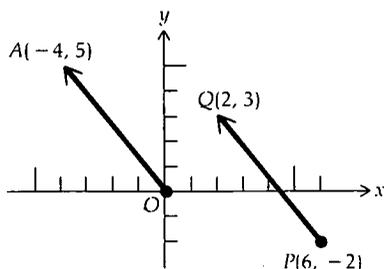


FIGURA 3

**Solução**

(a) Seja  $A$  o ponto  $(-4, 5)$ . A Figura 3 mostra  $\overline{OA}$ , que é a representação posicional do vetor  $A$ . Seja  $\overline{PQ}$  a representação específica de  $A$ , tendo  $P$  como ponto inicial. Se  $Q = (x, y)$ , então

$$\begin{aligned} x - 6 &= -4 & y + 2 &= 5 \\ x &= 2 & y &= 3 \end{aligned}$$

Logo,  $Q = (2, 3)$  e  $\overline{PQ}$  aparece na Figura 3.

(b) Do Teorema 14.1.3,

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sqrt{(-4)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

O ângulo de direção de qualquer vetor não-nulo é o ângulo  $\theta$  medido do lado positivo do eixo  $x$  no sentido anti-horário, até a representação posicional do vetor. Se  $\theta$  for medido em radianos,  $0 \leq \theta < 2\pi^*$ . Se  $A = \langle a_1, a_2 \rangle$  então

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{se } a_1 \neq 0 \quad (1)$$

Se  $a_1 = 0$  e  $a_2 > 0$ , então  $\theta = \frac{1}{2}\pi$ ; se  $a_1 = 0$  e  $a_2 < 0$ , então  $\theta = \frac{3}{2}\pi$ . As Figuras de 4 a 6 mostram o ângulo de direção  $\theta$  para alguns vetores cujas representações posicionais estão traçadas.

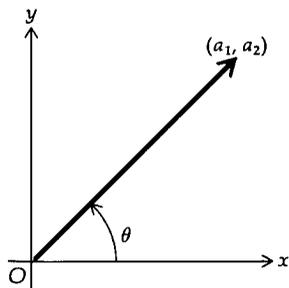


FIGURA 4

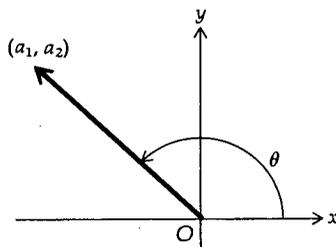


FIGURA 5

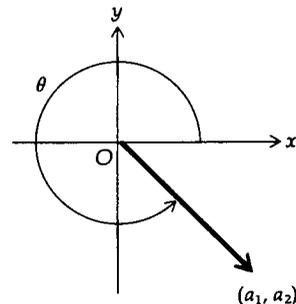


FIGURA 6

**EXEMPLO 2** Ache a medida em radianos do ângulo de direção de cada um dos seguintes vetores: (a)  $\langle -1, 1 \rangle$ ; (b)  $\langle 0, -5 \rangle$ ; (c)  $\langle 1, -2 \rangle$ .

**Solução** A representação posicional de cada um dos vetores em (a), (b) e (c) está nas Figuras 7, 8 e 9, respectivamente. (a)  $\operatorname{tg} \theta = -1$ , e  $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$ ; assim  $\theta = \frac{3}{4}\pi$ . (b)  $\operatorname{tg} \theta$  não existe, e  $a_2 < 0$ ; assim,  $\theta = \frac{3}{2}\pi$ . (c)  $\operatorname{tg} \theta = -2$  e  $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ ; logo,  $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(-2) + 2\pi$ ; isto é,  $\theta \approx 5,176$ .

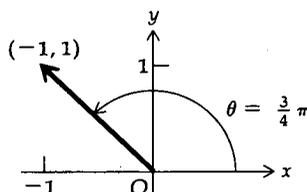


FIGURA 7

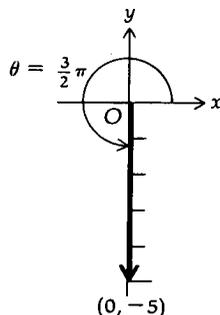


FIGURA 8

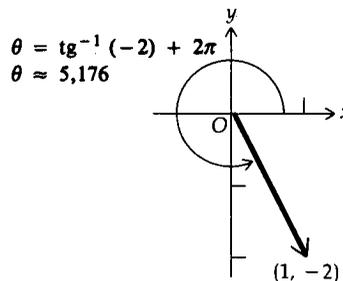


FIGURA 9

\* N. do R.: Observe que um ângulo de direção, apesar do nome abreviado, caracteriza não somente uma direção, mas também um sentido de uma família de vetores não-nulos de diferentes módulos.

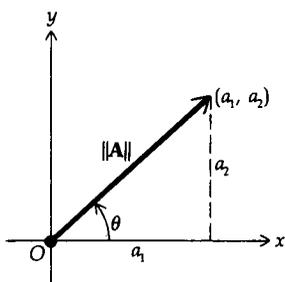


FIGURA 10

Observe que se  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ , sendo  $\theta$  o ângulo de direção de  $\mathbf{A}$ , então

$$a_1 = \|\mathbf{A}\| \cos \theta \quad a_2 = \|\mathbf{A}\| \operatorname{sen} \theta \quad (2)$$

Veja a Figura 10, onde o ponto  $(a_1, a_2)$  está no primeiro quadrante.

Se o vetor  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ , então a representação de  $\mathbf{A}$  cujo ponto inicial é  $(x, y)$  tem como pontos finais  $(x + a_1, y + a_2)$ . Dessa forma, um vetor pode ser considerado como uma translação do plano nele mesmo. A Figura 11 ilustra cinco representações do vetor  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ . Em cada caso,  $\mathbf{A}$  translada o ponto  $(x_i, y_i)$  no ponto  $(x_i + a_1, y_i + a_2)$ .

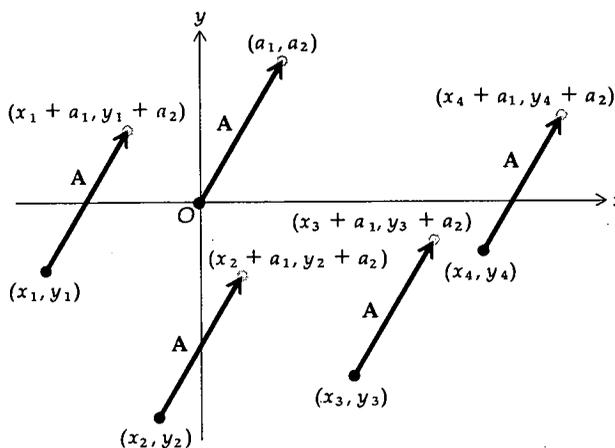


FIGURA 11

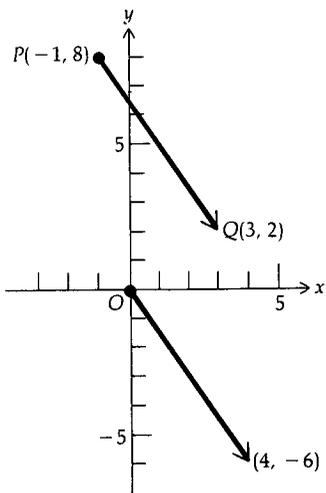


FIGURA 12

**EXEMPLO 3** Seja  $P$  o ponto  $(-1, 8)$  e  $Q$  o ponto  $(3, 2)$ . Ache o vetor  $\mathbf{A}$  cuja representação é  $\overline{PQ}$ . Trace  $\overline{PQ}$  e a representação posicional de  $\mathbf{A}$ .

**Solução** A Figura 12 mostra o segmento de reta orientado  $\overline{PQ}$ . Seja  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ . Como  $\overline{PQ}$  é uma representação de  $\mathbf{A}$ , o vetor  $\mathbf{A}$  translada o ponto  $P(-1, 8)$  no ponto  $Q(3, 2)$ . Mas o vetor  $\langle a_1, a_2 \rangle$  translada o ponto  $(-1, 8)$  no ponto  $(-1 + a_1, 8 + a_2)$ . Assim,

$$\begin{aligned} -1 + a_1 &= 3 & 8 + a_2 &= 2 \\ a_1 &= 4 & a_2 &= -6 \end{aligned}$$

Logo,  $\mathbf{A} = \langle 4, -6 \rangle$ . A Figura 12 também mostra a representação posicional de  $\mathbf{A}$ .

A definição a seguir fornece-nos o método para somar dois vetores.

14.1.4 DEFINIÇÃO

A soma de dois vetores  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$  é o vetor  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  definido por

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

► **ILUSTRAÇÃO 3** Se  $\mathbf{A} = \langle 3, -1 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle -4, 5 \rangle$ , então

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle 3 + (-4), -1 + 5 \rangle \\ &= \langle -1, 4 \rangle \end{aligned}$$

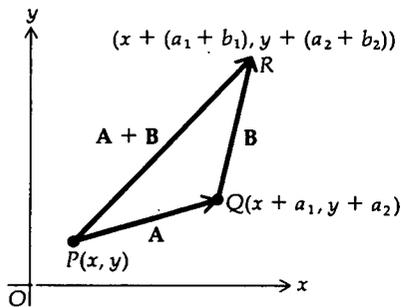


FIGURA 13

A interpretação geométrica da soma de dois vetores está mostrada na Figura 13. Seja  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ , e seja  $P$  o ponto  $(x, y)$ . Então,  $\mathbf{A}$  translada o ponto  $P$  no ponto  $(x + a_1, y + a_2) = Q$ . O vetor  $\mathbf{B}$  translada o ponto  $Q$  no ponto  $((x + a_1) + b_1, (y + a_2) + b_2)$  ou, equivalentemente,  $(x + (a_1 + b_1), y + (a_2 + b_2)) = R$ . Além disso,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

Logo, o vetor  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  translada o ponto  $(x + (a_1 + b_1), y + (a_2 + b_2)) = R$  o ponto  $P$ . Assim, na Figura 13  $\overline{PQ}$  é uma representação do vetor  $\mathbf{A}$ ,  $\overline{QR}$  é uma representação do vetor  $\mathbf{B}$ , e  $\overline{PR}$  é uma representação do vetor  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ . As representações dos vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são os lados adjacentes de um paralelogramo, e a representação do vetor  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  é uma diagonal do paralelogramo. Essa diagonal é chamada de a **resultante** dos vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . A regra para adição de vetores é, às vezes, chamada de **lei do paralelogramo**.

Força é uma quantidade vetorial cuja magnitude é expressa em unidades de força e o ângulo de direção é determinado pela direção da força. Mostra-se em Física que duas forças aplicadas a um objeto num dado ponto podem ser substituídas por uma força equivalente que é a sua resultante.

**EXEMPLO 4** Duas forças de 200 N e 250 N de magnitude formam um ângulo de  $\frac{1}{3}\pi$  entre si e estão aplicadas a um objeto no mesmo ponto. Ache (a) a magnitude da força resultante e (b) o ângulo que ela faz com a força de 200 N.

**Solução** Consulte a Figura 14, onde os eixos foram escolhidos de tal forma que a representação posicional da força de 200 N seja ao longo da parte positiva do eixo  $x$ . O vetor  $\mathbf{A}$  representa essa força, e  $\mathbf{A} = \langle 200, 0 \rangle$ . O vetor  $\mathbf{B}$  representa a força de 250 N. Das fórmulas (2), se  $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ , então

$$\begin{aligned} b_1 &= 250 \cos \frac{1}{3}\pi & b_2 &= 250 \sin \frac{1}{3}\pi \\ &= 125 & &\approx 216,5 \end{aligned}$$

Assim,  $\mathbf{B} = \langle 125, 216,5 \rangle$ . A força resultante é  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ , e

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle 200, 0 \rangle + \langle 125, 216,5 \rangle \\ &= \langle 325, 216,5 \rangle \end{aligned}$$

$$(a) \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \sqrt{(325)^2 + (216,5)^2} \approx 390,5$$

(b) Se  $\theta$  for o ângulo entre os vetores  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  e  $\mathbf{A}$ , então

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{216,5}{325}$$

$$\operatorname{tg} \theta \approx 0,6662$$

$$\theta \approx 0,5877$$

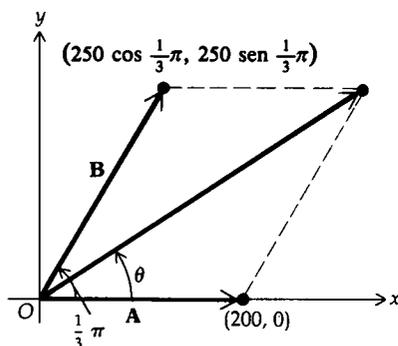


FIGURA 14

#### 14.1.5 DEFINIÇÃO

Se  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ , então o vetor  $\langle -a_1, -a_2 \rangle$  é definido como o **oposto** de  $\mathbf{A}$ , denotado por  $-\mathbf{A}$ .

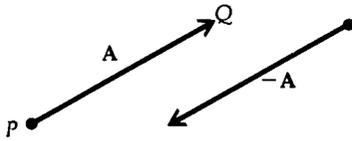


FIGURA 15

Se o segmento de reta orientado  $\overrightarrow{PQ}$  for uma representação do vetor  $\mathbf{A}$ , então o segmento de reta  $\overrightarrow{QP}$  será uma representação de  $-\mathbf{A}$ . Qualquer segmento de reta orientado que seja paralelo a  $\overrightarrow{PQ}$ , tenha o mesmo comprimento que  $\overrightarrow{PQ}$  e possua um sentido oposto àquele de  $\overrightarrow{PQ}$  também será uma representação de  $-\mathbf{A}$ . Veja a Figura 15. Definiremos agora a subtração de dois vetores.

14.1.6 DEFINIÇÃO

A diferença de dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , denotada por  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ , é o vetor obtido ao somarmos  $\mathbf{A}$  ao oposto de  $\mathbf{B}$ ; isto é,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Assim, se  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ , então  $-\mathbf{B} = \langle -b_1, -b_2 \rangle$ , e

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

► ILUSTRAÇÃO 4 Se  $\mathbf{A} = \langle 4, -2 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle 6, -3 \rangle$ , então

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \langle 4, -2 \rangle - \langle 6, -3 \rangle \\ &= \langle 4, -2 \rangle + \langle -6, 3 \rangle \\ &= \langle -2, 1 \rangle \end{aligned}$$

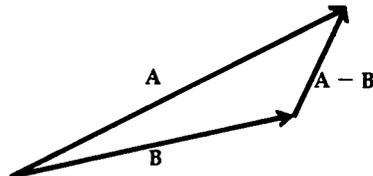


FIGURA 16

Para interpretar geometricamente a diferença entre dois vetores, vamos supor que os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  tenham o mesmo ponto inicial. Então, o segmento de reta do ponto final da representação de  $\mathbf{B}$  ao ponto final da representação de  $\mathbf{A}$  será uma representação do vetor  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ . Isso obedece à lei do paralelogramo  $\mathbf{B} + (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}$ . Veja a Figura 16.

O exemplo a seguir, envolvendo a diferença de dois vetores, diz respeito à navegação. A *velocidade escalar no ar* de um avião refere-se à sua velocidade em relação ao ar, e a *velocidade escalar no solo* indica sua velocidade relativa ao solo. Quando venta, a velocidade do avião em relação ao solo é a resultante do vetor que representa a velocidade do vento e de um vetor que indica a velocidade do veículo com relação ao ar. Em navegação, o *curso* de um navio ou de um avião é o ângulo medido em graus, no sentido horário, na direção em que o veículo está se deslocando, a partir do Norte. O ângulo é considerado positivo, se estiver no sentido horário.

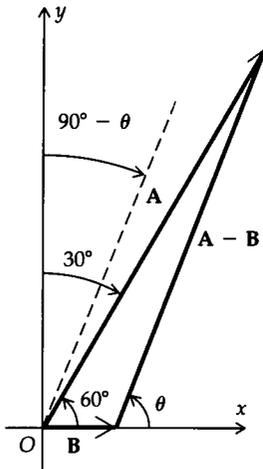


FIGURA 17

**EXEMPLO 5** Um avião pode voar a uma velocidade escalar no ar de 300 mi/h. Se o vento soprar do Leste a 50 mi/h, que orientação o avião deverá seguir, para que seu curso seja de 30°? Qual será a velocidade escalar do avião, se ele seguir esse trajeto?

**Solução** Refira-se à Figura 17, que mostra as representações posicionais dos vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , bem como de  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ . O vetor  $\mathbf{A}$  representa a velocidade do avião em relação ao solo, considerando-se um curso de 30°. O ângulo de direção de  $\mathbf{A}$  é 60°. O vetor  $\mathbf{B}$  indica a velocidade do vento. Como  $\mathbf{B}$  tem um módulo de 50 e um ângulo de direção de 0°,  $\mathbf{B} = \langle 50, 0 \rangle$ . O vetor  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  representa a velocidade do avião em relação ao ar. Assim,  $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = 300$ . Seja  $\theta$  o ângulo de direção de  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ . Da Figura 17 obtemos o triângulo mostrado na Figura 18.

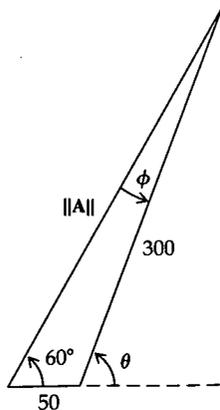


FIGURA 18

Aplicando a lei dos senos a esse triângulo, obtemos

$$\frac{\text{sen } \phi}{50} = \frac{\text{sen } 60^\circ}{300}$$

$$\text{sen } \phi = \frac{50 \text{ sen } 60^\circ}{300}$$

$$\text{sen } \phi = 0,1433$$

$$\phi = 8,3^\circ$$

Então,

$$\theta = 60^\circ + 8,3^\circ$$

$$= 68,3^\circ$$

Novamente, aplicando a lei dos senos ao triângulo na Figura 18, temos

$$\frac{\|\mathbf{A}\|}{\text{sen } (180^\circ - \theta)} = \frac{300}{\text{sen } 60^\circ}$$

$$\|\mathbf{A}\| = \frac{300 \text{ sen } 111,7^\circ}{\text{sen } 60^\circ}$$

$$\|\mathbf{A}\| = 322$$

A bússola do avião deveria indicar um rumo de  $90^\circ - \theta$ , ou seja,  $21,7^\circ$ , e se o avião seguir esse curso, sua velocidade escalar de solo será de 322 mi/h.

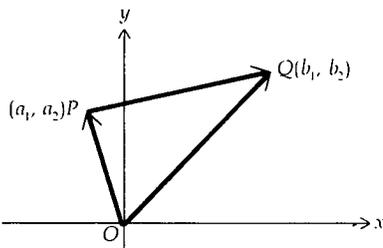


FIGURA 19

Suponha que  $P$  seja o ponto  $(a_1, a_2)$  e  $Q$  seja o ponto  $(b_1, b_2)$ . Usaremos a notação  $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$  para denotar o vetor que tem o segmento de reta orientado  $\overrightarrow{PQ}$  como uma representação. Veja a Figura 19, onde estão mostradas as representações dos vetores  $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$ ,  $\mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$  e  $\mathbf{V}(\overrightarrow{OQ})$ . Observe que

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{OQ}) - \mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$$

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle b_1, b_2 \rangle - \langle a_1, a_2 \rangle$$

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2 \rangle$$

► **ILUSTRAÇÃO 5** Se  $P$  for o ponto  $(-6, 7)$  e  $Q$  for o ponto  $(2, 9)$ , então

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) &= \langle 2 - (-6), 9 - 7 \rangle \\ &= \langle 8, 2 \rangle \end{aligned}$$

Outra operação com vetores é a *multiplicação por um escalar*. Segue a definição da multiplicação de um vetor por um escalar (um número real).

#### 14.1.7 DEFINIÇÃO

Se  $c$  for um escalar e  $\mathbf{A}$  for o vetor  $\langle a_1, a_2 \rangle$ , então o produto de  $c$  e  $\mathbf{A}$ , denotado por  $c\mathbf{A}$ , será um vetor dado por

$$\begin{aligned} c\mathbf{A} &= c\langle a_1, a_2 \rangle \\ &= \langle ca_1, ca_2 \rangle \end{aligned}$$

► **ILUSTRAÇÃO 6** Se  $\mathbf{A} = \langle 4, -5 \rangle$ , então

$$\begin{aligned} 3\mathbf{A} &= 3\langle 4, -5 \rangle \\ &= \langle 12, -15 \rangle \end{aligned}$$

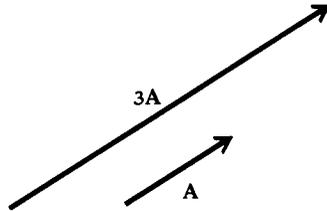


FIGURA 20

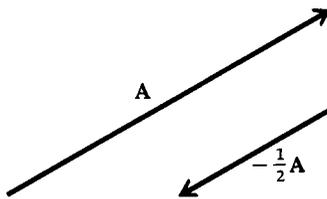


FIGURA 21

No Exercício 45 você deverá mostrar que se  $\mathbf{A}$  for um vetor e  $c$  for um escalar qualquer

$$0(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

O módulo do vetor  $c\mathbf{A}$  é calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \|c\mathbf{A}\| &= \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2} \\ &= \sqrt{c^2(a_1^2 + a_2^2)} \\ &= \sqrt{c^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ &= |c| \|\mathbf{A}\| \end{aligned}$$

Logo, o módulo de  $c\mathbf{A}$  é o valor absoluto de  $c$  vezes o módulo de  $\mathbf{A}$ .

A interpretação geométrica do vetor  $c\mathbf{A}$  é dada nas Figuras 20 e 21. Se  $c > 0$ , então  $c\mathbf{A}$  será um vetor cuja representação tem um comprimento  $c$  vezes o módulo de  $\mathbf{A}$  e o mesmo sentido que  $\mathbf{A}$ ; um exemplo disso aparece na Figura 20, onde  $c = 3$ . Se  $c < 0$ , então  $c\mathbf{A}$  será um vetor cuja representação tem um comprimento  $|c|$  vezes o módulo de  $\mathbf{A}$ , a mesma direção e o sentido oposto ao de  $\mathbf{A}$ . Isso aparece na Figura 21, onde  $c = -\frac{1}{2}$ .

O teorema a seguir fornece leis satisfeitas pelas operações de adição vetorial e multiplicação por escalar para quaisquer vetores em  $V_2$ .

#### 14.1.8 TEOREMA

Se  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  forem vetores quaisquer em  $V_2$  e  $c$  e  $d$  forem quaisquer escalares, então a adição de vetores e a multiplicação por escalar satisfarão as seguintes propriedades:

- (i)  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$  (lei comutativa)
- (ii)  $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$  (lei associativa)
- (iii) Existe um vetor  $\mathbf{0}$  em  $V_2$  para o qual  $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$  (existência de identidade aditiva)
- (iv) Existe um vetor  $-\mathbf{A}$  em  $V_2$  tal que  $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$  (existência do oposto)
- (v)  $(cd)\mathbf{A} = c(d\mathbf{A})$  (lei associativa)
- (vi)  $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$  (lei distributiva)
- (vii)  $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$  (lei distributiva)
- (viii)  $1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$  (existência de identidade para a multiplicação por escalar)

**Prova** Daremos as demonstrações de (i) e (vi) e deixaremos as demais como exercícios (veja os Exercícios de 40 a 50). Na demonstração de (i) usaremos a lei comutativa para números reais e na demonstração de (vi) empregaremos a lei distributiva para números reais. Sejam  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ .

Prova de (i)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle \\ &= \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \\ &= \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle \\ &= \langle b_1, b_2 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle \\ &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \end{aligned}$$

Prova de (vi)

$$\begin{aligned} c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= c(\langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle) \\ &= c\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \\ &= \langle c(a_1 + b_1), c(a_2 + b_2) \rangle \\ &= \langle ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2 \rangle \\ &= \langle ca_1, ca_2 \rangle + \langle cb_1, cb_2 \rangle \\ &= c\langle a_1, a_2 \rangle + c\langle b_1, b_2 \rangle \\ &= c\mathbf{A} + c\mathbf{B} \end{aligned}$$

O Teorema 14.1.8 é importante, pois das oito propriedades nele estabelecidas podem ser tiradas todas as leis algébricas para as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar em  $V_2$ . Essas leis são similares às leis da Aritmética de números reais. Além disso, em Álgebra Linear, um *espaço vetorial real* é definido como um conjunto de vetores associado a um conjunto de números reais (*escalares*) e duas operações de adição vetorial e multiplicação por escalar que satisfazem as oito propriedades dadas no Teorema 14.1.8.

#### 14.1.9 DEFINIÇÃO

Um **espaço vetorial real**  $V$  é um conjunto de elementos chamados de *vetores*, associado a um conjunto de números reais, denominados *escalares*, com duas operações chamadas de *adição vetorial* e *multiplicação por escalar*, tais que para todo par de vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  em  $V$  e para todo escalar  $c$ , estejam definidos os vetores  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  e  $c\mathbf{A}$  em  $V$ , satisfazendo as propriedades (i)-(viii) do Teorema 14.1.8.

Da Definição 14.1.9 e do Teorema 14.1.8, segue que  $V_2$  é um espaço vetorial real.

Consideremos um vetor arbitrário em  $V_2$ , escrevendo-o na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\langle a_1, a_2 \rangle &= \langle a_1, 0 \rangle + \langle 0, a_2 \rangle \\ \langle a_1, a_2 \rangle &= a_1 \langle 1, 0 \rangle + a_2 \langle 0, 1 \rangle\end{aligned}\quad (3)$$

Como o módulo de cada um dos vetores  $\langle 1, 0 \rangle$  e  $\langle 0, 1 \rangle$  é unitário, eles são chamados de **vetores unitários**. Introduziremos a seguinte notação para esses vetores unitários:

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Com essas notações, temos de (3)

$$\langle a_1, a_2 \rangle = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} \quad (4)$$

A representação posicional de cada um dos vetores  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  é mostrada na Figura 22. A equação (4) estabelece que qualquer vetor em  $V_2$  pode ser escrito como uma combinação linear de  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ . Desse fato e dado que  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  são independentes (suas representações posicionais não são colineares), dizemos que os vetores  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  formam uma **base** para o espaço vetorial  $V_2$ . Como exemplo de uma base formada por vetores não-unitários, veja o Exercício 52. O número de elementos numa base de um espaço vetorial é chamado de **dimensão** do espaço vetorial. Logo,  $V_2$  é um espaço vetorial bidimensional.

#### ► ILUSTRAÇÃO 7 De (4),

$$\langle 3, -4 \rangle = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

Seja  $\mathbf{A}$  o vetor  $\langle a_1, a_2 \rangle$  e  $\theta$  o ângulo de direção de  $\mathbf{A}$ . Veja a Figura 23, onde o ponto  $(a_1, a_2)$  está no segundo quadrante e está mostrada a representação posicional de  $\mathbf{A}$ . Como  $\mathbf{A} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$ ,  $a_1 = \|\mathbf{A}\| \cos \theta$  e  $a_2 = \|\mathbf{A}\| \sin \theta$ , podemos escrever

$$\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| \cos \theta \mathbf{i} + \|\mathbf{A}\| \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \quad (5)$$

Essa equação expressa o vetor  $\mathbf{A}$  em termos de seu módulo, do seno e co-seno do seu ângulo de direção e dos vetores unitários  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ .

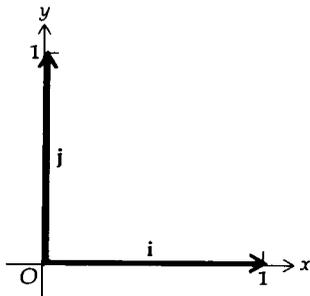


FIGURA 22

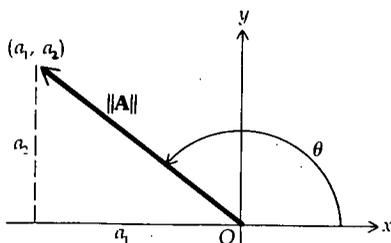


FIGURA 23

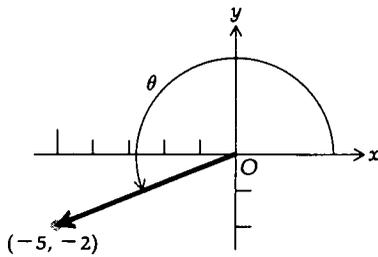


FIGURA 24

**EXEMPLO 6** Exprese o vetor  $\langle -5, -2 \rangle$  na forma da igualdade (5).

**Solução** Veja a Figura 24 que mostra a representação posicional do vetor  $\langle -5, -2 \rangle$ .

$$\|\langle -5, -2 \rangle\| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \quad \cos \theta = -\frac{5}{\sqrt{29}} \quad \text{sen } \theta = -\frac{2}{\sqrt{29}}$$

Logo, de (5), temos

$$\langle -5, -2 \rangle = \sqrt{29} \left( -\frac{5}{\sqrt{29}} \mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{29}} \mathbf{j} \right)$$

#### 14.1.10 TEOREMA

Se o vetor  $\mathbf{A} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$  não for nulo, então o vetor unitário  $\mathbf{U}$ , que tem a mesma direção e sentido de  $\mathbf{A}$ , será dado por

$$\mathbf{U} = \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|} \mathbf{i} + \frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|} \mathbf{j}$$

**Prova** Devemos mostrar que o vetor  $\mathbf{U}$  é um vetor unitário, tendo a mesma direção e sentido de  $\mathbf{A}$ .

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}\| &= \sqrt{\left(\frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|}\right)^2} & \mathbf{U} &= \frac{1}{\|\mathbf{A}\|} (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) \\ &= \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{\|\mathbf{A}\|} & &= \frac{1}{\|\mathbf{A}\|} \|\mathbf{A}\| \\ &= \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} & &= 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Como  $\|\mathbf{U}\| = 1$ ,  $\mathbf{U}$  é um vetor unitário e já que  $\mathbf{U}$  é um escalar positivo vezes o vetor  $\mathbf{A}$ , a direção de  $\mathbf{U}$  é a mesma que a direção de  $\mathbf{A}$ . ■

**EXEMPLO 7** Dado  $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$  e  $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ , ache o vetor unitário tendo a mesma direção que  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ .

**Solução**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{B} &= (3\mathbf{i} + \mathbf{j}) - (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \\ &= 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| &= \sqrt{5^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

Pelo Teorema 14.1.10, o vetor unitário desejado é

$$\mathbf{U} = \frac{5}{\sqrt{34}} \mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{34}} \mathbf{j}$$

## EXERCÍCIOS 14.1

Nos Exercícios de 1 a 4, (a) esboce a representação posicional do vetor dado  $\mathbf{A}$  e também a representação específica através do ponto  $P$  dado. (b) Ache o módulo de  $\mathbf{A}$ .

1.  $\mathbf{A} = \langle 3, 4 \rangle$ ;  $P = (2, 1)$       2.  $\mathbf{A} = \langle -2, 5 \rangle$ ;  $P = (-3, 4)$   
 3.  $\mathbf{A} = \langle e, -\frac{1}{2} \rangle$ ;  $P = (-2, -e)$       4.  $\mathbf{A} = \langle 4, 0 \rangle$ ;  $P = (2, 6)$

Nos Exercícios 5 e 6, ache a medida exata em radianos do ângulo de direção do vetor dado. Na parte (c) aproxime a medida em radianos até o centésimo mais próximo.

5. (a)  $\langle 1, -1 \rangle$ ; (b)  $\langle -3, 0 \rangle$ ; (c)  $\langle 5, 2 \rangle$   
 6. (a)  $\langle \sqrt{3}, 1 \rangle$ ; (b)  $\langle 0, 4 \rangle$ ; (c)  $\langle -3, 2 \rangle$

Nos Exercícios de 7 a 10, ache o vetor  $\mathbf{A}$  cuja representação é  $\overline{PQ}$ . Esboce  $\overline{PQ}$  e a representação posicional de  $\mathbf{A}$ .

7.  $P = (3, 7)$ ;  $Q = (5, 4)$       8.  $P = (5, 4)$ ;  $Q = (3, 7)$   
 9.  $P = (-5, -3)$ ;  $Q = (0, 3)$       10.  $P = (-\sqrt{2}, 0)$ ;  $Q = (0, 0)$

Nos Exercícios de 11 a 14, ache o ponto  $S$ , tal que  $\overline{PQ}$  e  $\overline{RS}$  representem o mesmo vetor.

11.  $P = (2, 5)$ ;  $Q = (1, 6)$ ;  $R = (-3, 2)$   
 12.  $P = (-2, 0)$ ;  $Q = (-3, -4)$ ;  $R = (4, 2)$   
 13.  $P = (0, 3)$ ;  $Q = (5, -2)$ ;  $R = (7, 0)$   
 14.  $P = (-1, 4)$ ;  $Q = (2, -3)$ ;  $R = (-5, -2)$

Nos Exercícios 15 e 16, ache a soma do par de vetores dados e ilustre geometricamente.

15. (a)  $\langle 2, 4 \rangle$ ,  $\langle -3, 5 \rangle$ ; (b)  $\langle -3, 0 \rangle$ ,  $\langle 4, -5 \rangle$   
 16. (a)  $\langle 0, 3 \rangle$ ,  $\langle -2, 3 \rangle$ ; (b)  $\langle 2, 3 \rangle$ ,  $\langle -\sqrt{2}, -1 \rangle$

Nos Exercícios 17 e 18, subtraia o segundo vetor do primeiro e ilustre geometricamente.

17. (a)  $\langle -3, -4 \rangle$ ,  $\langle 6, 0 \rangle$ ; (b)  $\langle 1, e \rangle$ ,  $\langle -3, 2e \rangle$   
 18. (a)  $\langle 0, 5 \rangle$ ,  $\langle 2, 8 \rangle$ ; (b)  $\langle 3, 7 \rangle$ ,  $\langle 3, 7 \rangle$

Nos Exercícios 19 e 20, ache o vetor ou o escalar, sendo  $\mathbf{A} = \langle 2, 4 \rangle$ ,  $\mathbf{B} = \langle 4, -3 \rangle$  e  $\mathbf{C} = \langle -3, 2 \rangle$ .

19. (a)  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ; (b)  $\|\mathbf{C} - \mathbf{B}\|$ ; (c)  $\|7\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$   
 20. (a)  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ; (b)  $\|\mathbf{C}\|$ ; (c)  $\|2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}\|$

Nos Exercícios de 21 a 24, ache o vetor ou o escalar, sendo  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$  e  $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ .

21. (a)  $5\mathbf{A}$ ; (b)  $-6\mathbf{B}$ ; (c)  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ; (d)  $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|$   
 22. (a)  $-2\mathbf{A}$ ; (b)  $3\mathbf{B}$ ; (c)  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ; (d)  $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$   
 23. (a)  $\|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ ; (b)  $5\mathbf{A} - 6\mathbf{B}$ ; (c)  $\|5\mathbf{A} - 6\mathbf{B}\|$ ; (d)  $\|5\mathbf{A}\| - \|6\mathbf{B}\|$   
 24. (a)  $\|\mathbf{A}\| - \|\mathbf{B}\|$ ; (b)  $3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}$ ; (c)  $\|3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}\|$ ; (d)  $\|3\mathbf{B}\| - \|2\mathbf{A}\|$

Nos Exercícios 25 e 26,  $\mathbf{A} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$  e  $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$ .

25. Ache: (a)  $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 2\mathbf{C}$  e (b)  $\|5\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 2\mathbf{C}\|$ .  
 26. Ache: (a)  $3\mathbf{B} - 2\mathbf{A} - \mathbf{C}$  e (b)  $\|3\mathbf{B} - 2\mathbf{A} - \mathbf{C}\|$ .

Nos Exercícios 27 e 28,  $\mathbf{A} = 8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$  e  $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ .

27. Ache o vetor unitário que tem a mesma direção e sentido de  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ .  
 28. Ache o vetor unitário que tem a mesma direção e sentido de  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ .

Nos Exercícios de 29 a 32, escreva o vetor dado na forma  $r(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})$ , onde  $r$  é o módulo e  $\theta$  é o ângulo de direção. Ache também o vetor unitário tendo a mesma direção e sentido.

29. (a)  $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ ; (b)  $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$       30. (a)  $8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ ; (b)  $2\sqrt{5}\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$   
 31. (a)  $-4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j}$ ; (b)  $-16\mathbf{i}$       32. (a)  $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ; (b)  $2\mathbf{j}$

33. Se  $\mathbf{A} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$  e  $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ , ache os escalares  $h$  e  $k$ , tais que  $\mathbf{C} = h\mathbf{A} + k\mathbf{B}$ .

34. Se  $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$  e  $\mathbf{C} = -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ , ache os escalares  $h$  e  $k$ , tais que  $\mathbf{B} = h\mathbf{C} - k\mathbf{A}$ .

35. Se  $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  e  $\mathbf{C} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ , mostre que  $\mathbf{C}$  não pode ser escrito na forma  $h\mathbf{A} + k\mathbf{B}$ , onde  $h$  e  $k$  são escalares.

36. Duas forças com magnitudes de 340 N e 475 N estão aplicadas no mesmo ponto de um objeto e formam entre si um ângulo de  $34,6^\circ$ . Ache (a) a magnitude da força resultante e (b) o valor do ângulo que ela faz com a força de 475 N com a precisão de até um décimo de grau.

37. Duas forças com magnitudes de 60 N e 80 N formam entre si um ângulo de  $30^\circ$  e estão aplicadas ao mesmo ponto de um objeto. Ache (a) a magnitude da força resultante e (b) o ângulo que ela forma com a força de 60 N, com precisão de um grau.

38. Uma força com magnitude de 22 N e outra de 34 N são aplicadas ao mesmo ponto de um objeto e formam entre si um ângulo  $\theta$ . Se a força resultante tem uma magnitude de 46 N, ache  $\theta$  aproximado ao grau mais próximo.

39. Uma força com 112 N de magnitude e outra com 84 N são aplicadas a um objeto, no mesmo ponto, e a força resultante tem uma magnitude de 162 N. Ache, com a precisão de um décimo de grau, o ângulo entre a força resultante e a força de 112 N.

40. Um avião possui uma velocidade escalar no ar de 560 km/h. Para que o curso que está realizando siga o rumo norte, a bússola deve marcar  $340^\circ$ . Se o vento soprar do oeste, (a) Qual será o módulo de sua velocidade? (b) Qual será a velocidade escalar no solo?

41. Em um avião com velocidade escalar no ar de 400 km/h, o piloto deseja voar rumo ao norte. Se o vento soprar a 96 km/h em direção ao leste, (a) Qual deverá ser a orientação da bússola? (b) Qual será a velocidade escalar do avião se ele seguir esse trajeto?

42. Um barco pode viajar a 28 km/h em relação à água. Em um rio cuja corrente é de 5 km/h em relação ao oeste, o barco tem sua bússola rumo ao sul. Qual será a velocidade escalar do barco em relação à terra e qual será o seu curso?

43. Um nadador que pode nadar a uma velocidade escalar de 1,5 mi/h em relação à água deixa a margem sul de um rio

- e se dirige para a margem norte, atravessando-o. Se a corrente do rio for para o leste a 0,8 mi/h, (a) Em que direção o nadador estará indo? (b) Qual será a velocidade escalar do nadador em relação à terra? (c) Se a distância para se atravessar o rio é de 1 milha, quanto o nadador deverá percorrer para chegar à margem norte do rio?
44. Suponha que o nadador no Exercício 43 deseje chegar a um ponto da margem norte, atravessando diretamente o rio. (a) Qual a direção que ele deverá tomar? (b) Qual será a velocidade escalar em relação à terra, se essa direção for tomada?
45. Prove que se  $\mathbf{A}$  for um vetor qualquer e  $c$  for um escalar qualquer, então  $0(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$  e  $c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .
46. Prove o Teorema 14.1.8(ii).
47. Prove o Teorema 14.1.8(iii) e (viii).
48. Prove o Teorema 14.1.8(iv).
49. Prove o Teorema 14.1.8(v).
50. Prove o Teorema 14.1.8(vii).
51. Dado  $\mathbf{A} = \langle 2, -5 \rangle$ ;  $\mathbf{B} = \langle 3, 1 \rangle$ ;  $\mathbf{C} = \langle -4, 2 \rangle$ . (a) Ache  $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$  e ilustre geometricamente. (b) Ache  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$  e ilustre geometricamente.
52. Dizemos que dois vetores são *independentes* se e somente se suas representações posicionais não forem colineares. Além disso, dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  formam uma *base* do espaço vetorial  $V_2$  se e somente se qualquer vetor em  $V_2$  puder ser escrito como uma combinação linear de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . O teorema que estabelece que dois vetores formam uma base para o espaço vetorial  $V_2$  se eles forem independentes pode ser provado. Mostre que esse teorema é válido para os dois vetores  $\langle 2, 5 \rangle$  e  $\langle 3, -1 \rangle$ , da seguinte forma: (a) comprove que os vetores são independentes, mostrando que suas representações posicionais não são colineares; (b) comprove que os vetores posicionais não são colineares; (c) comprove que os vetores formam uma base, mostrando que todo vetor  $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$  pode ser escrito como  $c(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) + d(3\mathbf{i} - \mathbf{j})$ , onde  $c$  e  $d$  são escalares. (*Sugestão*: ache  $c$  e  $d$  em termos de  $a_1$  e  $a_2$ .)
53. Considere as duas primeiras sentenças do Exercício 52. Pode-se provar um teorema, o qual estabelece que dois vetores do espaço vetorial  $V_2$  formam uma base somente se forem independentes. Mostre que esse teorema é válido para os vetores  $\langle 3, -2 \rangle$  e  $\langle -6, 4 \rangle$ , da seguinte forma: (a) comprove que os vetores são dependentes (não independentes), mostrando que suas representações posicionais são colineares; (b) demonstre que os vetores não formam uma base, obtendo um vetor que não pode ser escrito como  $c(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + d(-6\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$ , onde  $c$  e  $d$  são escalares.
54. Dizemos que um conjunto de vetores  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \dots, \mathbf{V}_n$  é *linearmente dependente* se e somente se existirem escalares  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ , nem todos nulos, tais que
- $$k_1\mathbf{V}_1 + k_2\mathbf{V}_2 + k_3\mathbf{V}_3 + \dots + k_n\mathbf{V}_n = \mathbf{0}$$
- Mostre que se  $\mathbf{V}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  e  $\mathbf{V}_3 = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ , então  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$  e  $\mathbf{V}_3$  são linearmente dependentes.
55. Seja  $\overline{PQ}$  a representação do vetor  $\mathbf{A}$ ,  $\overline{QR}$  a representação do vetor  $\mathbf{B}$ , e  $\overline{RS}$  a representação do vetor  $\mathbf{C}$ . Prove que se  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{QR}$  e  $\overline{RS}$  são os lados de um triângulo, então  $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$ .
56. Prove analiticamente a desigualdade triangular para vetores
- $$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$$

## 14.2 PRODUTO ESCALAR

Na Seção 14.1, a adição e a subtração de vetores, bem como a multiplicação de um vetor por um escalar, foram definidas. Definiremos agora uma operação de multiplicação entre dois vetores, chamada de *produto escalar*.

### 14.2.1 DEFINIÇÃO

Se  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$  forem dois vetores em  $V_2$ , então o **produto escalar** de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , denotado por  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , será dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

O produto escalar de dois vetores é um número real (ou escalar), e não um vetor. Às vezes é também chamado de **produto interno**.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Se  $\mathbf{A} = \langle 2, -3 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle -\frac{1}{2}, 4 \rangle$ , então

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle 2, -3 \rangle \cdot \langle -\frac{1}{2}, 4 \rangle \\ &= (2)(-\frac{1}{2}) + (-3)(4) \\ &= -13 \end{aligned}$$

Os seguintes produtos escalares são úteis e facilmente verificáveis (veja o Exercício 5).

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$$

O teorema a seguir estabelece a comutatividade e distributividade do produto escalar em relação à soma de vetores.

## 14.2.2 TEOREMA

Se  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  forem vetores quaisquer em  $V_2$ , então

- (i)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  (lei comutativa)  
 (ii)  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$  (lei distributiva)

Deixaremos as demonstrações de (i) e (ii) como exercícios (veja os Exercícios 6 e 7).

Como  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  é um escalar, a expressão  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$  não tem sentido. Por esse motivo, não consideraremos a associatividade do produto escalar.

Algumas outras leis do produto escalar são dadas no teorema a seguir.

## 14.2.3 TEOREMA

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem vetores quaisquer em  $V_2$  e  $c$  for um escalar qualquer, então

- (i)  $c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (c\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$   
 (ii)  $\mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = 0$   
 (iii)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \|\mathbf{A}\|^2$

As demonstrações serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios de 8 a 10).

Discutiremos agora o que entendemos por ângulo entre dois vetores e isso nos levará a outra expressão para o produto escalar de dois vetores.

## 14.2.4 DEFINIÇÃO

Sejam  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  dois vetores não-nulos, tais que  $\mathbf{A}$  não seja um múltiplo escalar de  $\mathbf{B}$ . Se  $\overline{OP}$  for a representação posicional de  $\mathbf{A}$  e  $\overline{OQ}$  for a representação posicional de  $\mathbf{B}$ , então o **ângulo entre os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$**  será definido como o ângulo de medida positiva entre  $\overline{OP}$  e  $\overline{OQ}$ , interior ao triângulo determinado pelos pontos  $O$ ,  $P$  e  $Q$ . Se  $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$ , onde  $c$  é um escalar, então se  $c > 0$ , o ângulo entre os vetores terá medida 0 em radianos; se  $c < 0$ , o ângulo entre os vetores terá por medida  $\pi$  radianos.

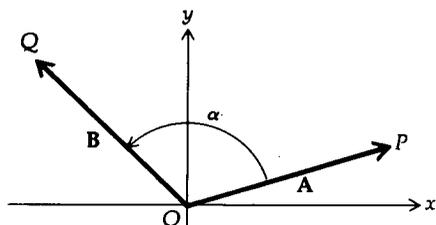


FIGURA 1

O símbolo usado para denotar o ângulo entre dois vetores também é usado para denotar a medida daquele ângulo. Da Definição 14.2.4, se  $\alpha$  for a medida em radianos do ângulo entre dois vetores, então  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . A Figura 1 mostra o ângulo entre dois vetores, se  $\mathbf{A}$  não for um múltiplo escalar de  $\mathbf{B}$ .

O teorema a seguir é, talvez, o fato mais importante sobre o produto escalar de dois vetores.

## 14.2.5 TEOREMA

Se  $\alpha$  for o ângulo entre os dois vetores não-nulos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , então

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \cos \alpha$$

**Prova** Seja  $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$  e  $\mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ . Seja  $\overline{OP}$  a representação posicional de  $\mathbf{A}$  e  $\overline{OQ}$  a representação posicional de  $\mathbf{B}$ . Então, o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  é o ângulo na origem, no triângulo  $POQ$  (veja a Figura 2);  $P$  é o ponto  $(a_1, b_2)$  e  $Q$  é o ponto  $(b_1, b_2)$ . No triângulo  $POQ$ ,  $\|\mathbf{A}\|$  é o comprimento do lado  $OP$  e  $\|\mathbf{B}\|$  é o comprimento do lado  $OQ$ . Assim, da lei dos co-senos,

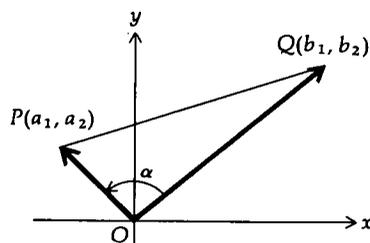


FIGURA 2

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 - |\overline{PQ}|^2}{2\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|} \\ &= \frac{(a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]}{2\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|} \\ &= \frac{2a_1b_1 + 2a_2b_2}{2\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|} \\ &= \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|} \end{aligned}$$

Logo,

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \cos \alpha \quad \blacksquare$$

O Teorema 14.2.5 estabelece que o produto escalar de dois vetores é o produto de seus módulos pelo co-seno do ângulo entre eles.

► **ILUSTRAÇÃO 2** Se  $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$  e  $\alpha$  for o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , então, do Teorema 14.2.5,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|} \\ &= \frac{(3)(2) + (-2)(1)}{\sqrt{9+4}\sqrt{4+1}} \\ &= \frac{6-2}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Vimos, na Seção 14.1, que se dois vetores não-nulos forem múltiplos escalares um do outro, então terão o mesmo sentido ou sentidos opostos. Temos, assim, a definição a seguir.

#### 14.2.6 DEFINIÇÃO

Dizemos que dois vetores são **paralelos** se e somente se um dos vetores for um múltiplo escalar do outro\*.

► **ILUSTRAÇÃO 3** Os vetores  $\langle 3, -4 \rangle$  e  $\langle \frac{3}{4}, -1 \rangle$  são paralelos pois  $\langle 3, -4 \rangle = 4\langle \frac{3}{4}, -1 \rangle$ . ◀

Se  $\mathbf{A}$  for um vetor qualquer,  $\mathbf{0} = 0\mathbf{A}$ ; assim, da Definição 14.2.6, segue que o vetor nulo será paralelo a qualquer vetor.

Será proposto como exercício provar que dois vetores não-nulos são paralelos se e somente se a medida em radianos do ângulo entre eles for 0 ou  $\pi$  (veja o Exercício 37).

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem vetores não-nulos, então, do Teorema 14.2.5, segue que

$$\cos \alpha = 0 \quad \text{se e somente se} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Como  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , segue disto que

$$\alpha = \frac{1}{2}\pi \quad \text{se e somente se} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Temos, então, a definição a seguir.

#### 14.2.7 DEFINIÇÃO

Dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são **ortogonais (perpendiculares)** se e somente se  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ .

\* **N. do R.:** Um conjunto de vetores não-nulos e paralelos caracteriza uma *direção*, isto é, o que eles têm em comum.

► **ILUSTRAÇÃO 4** Os vetores  $\langle -4, 5 \rangle$  e  $\langle 10, 8 \rangle$  são ortogonais pois

$$\begin{aligned}\langle -4, 5 \rangle \cdot \langle 10, 8 \rangle &= (-4)(10) + (5)(8) \\ &= 0\end{aligned}$$

Se  $\mathbf{A}$  for um vetor qualquer,  $\mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = 0$ ; logo, segue da Definição 14.2.7 que o vetor nulo será ortogonal a qualquer vetor.

**EXEMPLO 1** Dados  $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$  e  $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + k\mathbf{j}$ , onde  $k$  é um escalar, ache (a)  $k$  tal que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sejam ortogonais; (b)  $k$  tal que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sejam paralelos.

**Solução**

(a) Pela Definição 14.2.7,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são ortogonais se e somente se  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ , isto é,

$$(3)(2) + 2(k) = 0$$

$$k = -3$$

(b) Pela Definição 14.2.6,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são paralelos se e somente se houver um escalar  $c$  tal que  $\langle 3, 2 \rangle = c\langle 2, k \rangle$ , isto é,

$$3 = 2c \quad \text{e} \quad 2 = ck$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, obtemos  $k = \frac{4}{3}$ .

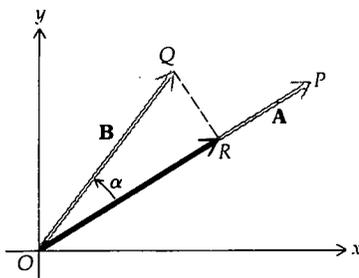


FIGURA 3

#### 14.2.8 DEFINIÇÃO

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem vetores não-nulos, a **projeção escalar de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$**  é definida como sendo  $\|\mathbf{B}\| \cos \alpha$ , onde  $\alpha$  é o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ .

Observe que a projeção escalar pode ser positiva ou negativa, dependendo do sinal de  $\cos \alpha$ .

Do teorema 14.2.5,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|(\|\mathbf{B}\| \cos \alpha) \quad (1)$$

Assim, o produto escalar de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  é o produto do módulo de  $\mathbf{A}$  pela projeção escalar de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$ . Veja a Figura 4(a) e (b). Como o produto escalar é comutativo,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  também é o módulo de  $\mathbf{B}$  multiplicado pela projeção escalar de  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbf{B}$ .

Se  $\mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ , então

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{B} = b_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} = b_2$$

Logo, o produto escalar de  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{B}$  dá a componente de  $\mathbf{B}$  na direção de  $\mathbf{i}$  e o produto escalar de  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{B}$  resulta a componente de  $\mathbf{B}$  na direção de  $\mathbf{j}$ . Para generalizar esse resultado, seja  $\mathbf{U}$  um vetor unitário qualquer. Então de (1), se  $\alpha$  for o ângulo entre  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{B}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{U} \cdot \mathbf{B} &= \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{B}\| \cos \alpha \\ &= \|\mathbf{B}\| \cos \alpha\end{aligned}$$

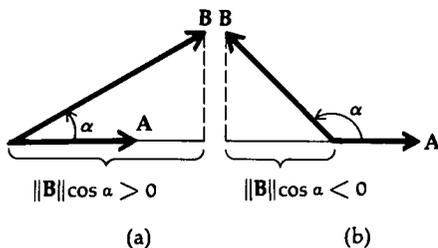


FIGURA 4

Assim,  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{B}$  é a projeção escalar de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{U}$ , que é denominada a *componente* do vetor  $\mathbf{B}$  na direção de  $\mathbf{U}$ . No caso geral, a **componente** de um vetor  $\mathbf{B}$  na direção de um vetor  $\mathbf{A}$  é a projeção escalar de  $\mathbf{B}$  sobre o vetor unitário na direção de  $\mathbf{A}$ .

O seguinte teorema pode ser usado para calcular a projeção escalar de um vetor em outro.

## 14.2.9 TEOREMA

A projeção escalar do vetor  $\mathbf{B}$  sobre o vetor  $\mathbf{A}$  é

$$\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|}$$

**Prova** Da Definição 14.2.8, a projeção escalar de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$  é  $\|\mathbf{B}\| \cos \alpha$ , onde  $\alpha$  é o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Do Teorema 14.2.5,

$$\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \cos \alpha = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$\|\mathbf{B}\| \cos \alpha = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|} \quad \blacksquare$$

Consulte novamente a Figura 3. Se  $\mathbf{C}$  for o vetor tal que  $\overline{OR}$  seja sua representação posicional, então  $\mathbf{C}$  será chamado de **projeção vetorial** de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$ . Para determinar  $\mathbf{C}$ , multiplicamos  $\|\mathbf{B}\| \cos \alpha$  pelo vetor unitário, tendo a mesma direção que  $\mathbf{A}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= (\|\mathbf{B}\| \cos \alpha) \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} \\ &= \frac{\|\mathbf{A}\| (\|\mathbf{B}\| \cos \alpha)}{\|\mathbf{A}\|^2} \mathbf{A} \\ &= \left( \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2} \right) \mathbf{A} \quad (\text{do Teorema 14.2.5}) \end{aligned}$$

Vamos enunciar esse resultado como um teorema.

## 14.2.10 TEOREMA

A projeção vetorial do vetor  $\mathbf{B}$  sobre o vetor  $\mathbf{A}$  é

$$\left( \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2} \right) \mathbf{A}$$

**EXEMPLO 2** Dados os vetores

$$\mathbf{A} = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

Ache: (a) a projeção escalar de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$ ; (b) a projeção vetorial de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$ ; (c) mostre com uma figura as representações posicionais de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e a projeção vetorial de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$ .

**Solução** Primeiro calculamos  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  e  $\|\mathbf{A}\|$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle -5, 1 \rangle \cdot \langle 4, 2 \rangle & \|\mathbf{A}\| &= \sqrt{(-5)^2 + 1^2} \\ &= -20 + 2 & &= \sqrt{26} \\ &= -18 & & \end{aligned}$$

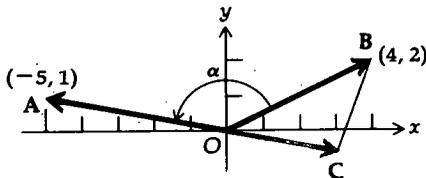


FIGURA 5

(a) Do Teorema 14.2.9, a projeção escalar de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$  é

$$\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|} = -\frac{18}{\sqrt{26}}$$

(b) Do Teorema 14.2.10, a projeção vetorial de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$  é

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2}\right)\mathbf{A} &= -\frac{18}{26}(-5\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ &= -\frac{9}{13}(-5\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ &= \frac{45}{13}\mathbf{i} - \frac{9}{13}\mathbf{j} \end{aligned}$$

(c) A Figura 5 mostra as representações posicionais de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , onde  $\mathbf{C}$  é a projeção vetorial de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$ .

Na Seção 6.6 estabelecemos que se uma força constante de  $F$  N move um objeto numa distância de  $d$  metros ao longo de uma linha reta e a força está atuando na direção do movimento, então se  $W$  for o número de joules do trabalho exercido pela força,  $W = Fd$ . Suponha, contudo, que a força constante não esteja atuando na direção da linha de movimento. Nesse caso, os físicos definem o **trabalho** realizado como o *produto da componente da força ao longo da linha de movimento vezes o deslocamento*. Se o objeto desloca-se de um ponto  $A$  para um ponto  $B$ , chamamos o vetor, cuja representação é  $\overline{AB}$ , de **vetor deslocamento** e o denotamos por  $\mathbf{V}(\overline{AB})$ . O módulo do vetor força constante  $\mathbf{F}$  é expresso em quilogramas, a distância de  $A$  para  $B$  é medida em metros, e  $\alpha$  é a medida em radianos do ângulo entre os vetores  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{V}(\overline{AB})$ . Portanto, se  $W$  for o número de joules do trabalho realizado pela força  $\mathbf{F}$  ao deslocar um objeto de  $A$  para  $B$  temos,

$$\begin{aligned} W &= (\|\mathbf{F}\| \cos \alpha) \|\mathbf{V}(\overline{AB})\| \\ &= \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{V}(\overline{AB})\| \cos \alpha \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}(\overline{AB}) \end{aligned}$$

**EXEMPLO 3** Suponha que uma força  $\mathbf{F}$  tenha uma intensidade de 6 N e  $\frac{1}{6}\pi$  seja a medida em radianos do ângulo que dá a sua direção. Ache o trabalho realizado por  $\mathbf{F}$  ao deslocar um objeto ao longo de uma linha reta, da origem ao ponto  $P(7, 1)$ , onde a distância é medida em metros.

**Solução** A Figura 6 mostra as representações posicionais de  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{V}(\overline{OP})$ . Como  $\mathbf{F} = \langle 6 \cos \frac{1}{6}\pi, 6 \sin \frac{1}{6}\pi \rangle$  e  $\mathbf{V}(\overline{OP}) = \langle 7, 1 \rangle$ , então se  $W$  for o trabalho realizado, temos

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}(\overline{OP}) \\ &= \langle 6 \cos \frac{1}{6}\pi, 6 \sin \frac{1}{6}\pi \rangle \cdot \langle 7, 1 \rangle \\ &= \langle 3\sqrt{3}, 3 \rangle \cdot \langle 7, 1 \rangle \\ &= 21\sqrt{3} + 3 \\ &\approx 39,37 \end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado é de aproximadamente 39,37 J.

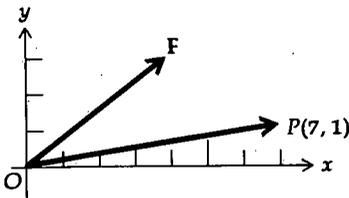


FIGURA 6

Os vetores têm representações geométricas que são independentes do sistema de coordenadas usado. Por isso, a análise vetorial pode ser usada para provar certos teoremas de Geometria Plana. Isso está ilustrado no exemplo a seguir.

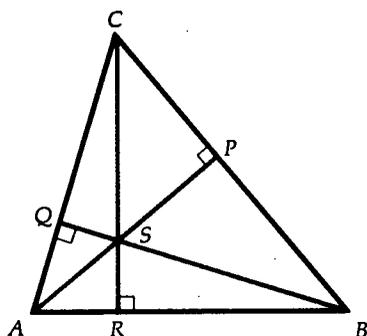


FIGURA 7

**EXEMPLO 4** Prove, usando a análise vetorial, que as alturas de um triângulo encontram-se num ponto.

**Solução** Seja  $ABC$  um triângulo com alturas  $AP$  e  $BQ$  interceptando-se no ponto  $S$ . Trace uma reta por  $C$  e  $S$  que intercepte  $AB$  no ponto  $R$ . Queremos provar que  $RC$  é perpendicular a  $AB$  (veja a Figura 7).

Sejam  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AS}$ ,  $\overline{BS}$  e  $\overline{CS}$  representações de vetores. Seja  $\mathbf{V}(\overline{AB})$  o vetor cuja representação é o segmento de reta orientado  $\overline{AB}$ . Da mesma forma, sejam  $\mathbf{V}(\overline{BC})$ ,  $\mathbf{V}(\overline{AC})$ ,  $\mathbf{V}(\overline{AS})$ ,  $\mathbf{V}(\overline{BS})$  e  $\mathbf{V}(\overline{CS})$  os vetores cujas representações são os segmentos de reta orientados entre parênteses.

Como  $AP$  é uma altura do triângulo,

$$\mathbf{V}(\overline{AS}) \cdot \mathbf{V}(\overline{BC}) = 0 \quad (2)$$

Também, como  $BQ$  é uma altura do triângulo,

$$\mathbf{V}(\overline{BS}) \cdot \mathbf{V}(\overline{AC}) = 0 \quad (3)$$

Para provar que  $RC$  é perpendicular a  $AB$ , mostraremos que  $\mathbf{V}(\overline{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overline{AB}) = 0$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overline{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overline{AB}) &= \mathbf{V}(\overline{CS}) \cdot [\mathbf{V}(\overline{AC}) + \mathbf{V}(\overline{CB})] \\ &= \mathbf{V}(\overline{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overline{AC}) + \mathbf{V}(\overline{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overline{CB}) \\ &= [\mathbf{V}(\overline{CB}) + \mathbf{V}(\overline{BS})] \cdot \mathbf{V}(\overline{AC}) + [\mathbf{V}(\overline{CA}) + \mathbf{V}(\overline{AS})] \cdot \mathbf{V}(\overline{CB}) \\ &= \mathbf{V}(\overline{CB}) \cdot \mathbf{V}(\overline{AC}) + \mathbf{V}(\overline{BS}) \cdot \mathbf{V}(\overline{AC}) + \mathbf{V}(\overline{CA}) \cdot \mathbf{V}(\overline{CB}) + \mathbf{V}(\overline{AS}) \cdot \mathbf{V}(\overline{CB}) \end{aligned}$$

Substituindo  $\mathbf{V}(\overline{CA})$  por  $-\mathbf{V}(\overline{AC})$  e usando (2) e (3), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overline{CS}) \cdot \mathbf{V}(\overline{AB}) &= \mathbf{V}(\overline{CB}) \cdot \mathbf{V}(\overline{AC}) + 0 + [-\mathbf{V}(\overline{AC})] \cdot \mathbf{V}(\overline{CB}) + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, as alturas  $AP$ ,  $BQ$  e  $RC$  encontram-se num ponto.

## EXERCÍCIOS 14.2

Nos Exercícios de 1 a 4 encontre  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ .

- $\mathbf{A} = \langle -1, 2 \rangle$ ;  $\mathbf{B} = \langle -4, 3 \rangle$
- $\mathbf{A} = \langle \frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \rangle$ ;  $\mathbf{B} = \langle \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \rangle$
- $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ;  $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
- $\mathbf{A} = -2\mathbf{i}$ ;  $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$
- Mostre que  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ ;  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ ;  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$ .
- Prove o Teorema 14.2.2(i).
- Prove o Teorema 14.2.2(ii).
- Prove o Teorema 14.2.3(i).
- Prove o Teorema 14.2.3(ii).
- Prove o Teorema 14.2.3(iii).

Nos Exercícios de 11 a 14, se  $\alpha$  for o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , ache  $\cos \alpha$ .

- $\mathbf{A} = \langle 4, 3 \rangle$ ;  $\mathbf{B} = \langle 1, -1 \rangle$
- $\mathbf{A} = \langle -2, -3 \rangle$ ;  $\mathbf{B} = \langle 3, 2 \rangle$
- $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
- $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{B} = -5\mathbf{j}$
- Ache  $k$ , tal que a medida em radianos do ângulo entre os vetores do Exemplo 1 desta secção seja  $\frac{1}{4}\pi$ .
- Dados  $\mathbf{A} = k\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$  e  $\mathbf{B} = k\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ , onde  $k$  é um escalar, ache  $k$  tal que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sejam ortogonais.
- Dados  $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - k\mathbf{j}$  e  $\mathbf{B} = k\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ , onde  $k$  é um escalar, ache (a)  $k$  tal que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sejam ortogonais; (b)  $k$  tal que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sejam paralelos.
- Ache  $k$  de tal forma que os vetores dados no Exercício 16 tenham direções opostas.
- Dados  $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{i} + k\mathbf{j}$ , onde  $k$  é um escalar, ache  $k$  de tal forma que a medida em radianos do ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  seja  $\frac{1}{3}\pi$ .
- Ache dois vetores unitários, cada um deles tendo uma representação posicional cujo ponto inicial é  $(2, 4)$  e sendo tangente à parábola  $y = x^2$  nesse ponto.
- Ache dois vetores unitários, cada um deles tendo uma representação posicional cujo ponto inicial é  $(2, 4)$  e sendo normal à parábola  $y = x^2$  nesse ponto.
- Se  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ , ache os vetores unitários ortogonais a  $\mathbf{A}$ .
- Se  $\mathbf{A}$  for o vetor  $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ , ache os vetores unitários ortogonais a  $\mathbf{A}$ .
- Se  $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$  e  $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ , mostre que existe um valor real para  $c$ , tal que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sejam ortogonais.

25. Se  $\mathbf{A} = -8\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  e  $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ , ache (a) a projeção escalar de  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbf{B}$  e (b) a projeção vetorial de  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbf{B}$ .
26. Para os vetores do Exercício 25, ache (a) a projeção escalar de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$  e (b) a projeção vetorial de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$ .
27. Ache as componentes do vetor  $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$  na direção do vetor  $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j}$ .
28. Para os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  do Exercício 27, ache as componentes do vetor  $\mathbf{B}$  na direção do vetor  $\mathbf{A}$ .
29. Um vetor  $\mathbf{F}$  representa uma força que tem uma intensidade de 8 N e  $\frac{1}{3}\pi$  é a medida em radianos de seu ângulo de direção. Ache o trabalho realizado pela força ao mover um objeto (a) ao longo do eixo  $x$ , da origem ao ponto (6, 0) e (b) ao longo do eixo  $y$ , da origem ao ponto (0, 6). A distância é medida em metros.
30. Um vetor  $\mathbf{F}$  representa uma força que tem uma intensidade de 10 N e  $\frac{1}{4}\pi$  é a medida em radianos de seu ângulo de direção. Ache o trabalho realizado pela força ao mover um objeto ao longo do eixo  $y$ , do ponto (0, -2) ao ponto (0, 5). A distância é medida em metros.
31. Um vetor  $\mathbf{F}$  representa uma força com 9 N de intensidade e  $\frac{2}{3}\pi$  é a medida em radianos de seu ângulo de direção. Ache o trabalho realizado pela força ao deslocar um objeto da origem ao ponto (-4, -2). A distância é medida em metros.
32. Duas forças representadas pelos vetores  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  atuando numa partícula, fazem com que ela se desloque ao longo de uma linha reta, do ponto (2, 5) ao ponto (7, 3). Se  $\mathbf{F}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$  e  $\mathbf{F}_2 = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ , sendo as intensidades das forças medidas em newtons e a distância em metros, ache o trabalho realizado pelas duas forças atuando juntas.
33. Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são vetores, prove que
- $$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$$
34. Prove, usando a análise vetorial, que as medianas de um triângulo encontram-se em um ponto.
35. Prove, usando a análise vetorial, que o segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e que seu comprimento é a metade do comprimento do terceiro lado.
36. Prove, usando a análise vetorial, que o segmento de reta que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo aos lados paralelos e que seu comprimento é a metade da soma dos comprimentos dos lados paralelos.
37. Prove que dois vetores não-nulos são paralelos se e somente se a medida em radianos do ângulo entre eles for 0 ou  $\pi$ .
38. Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são vetores, prove que  $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$ , onde a igualdade ocorre se e somente se existir um escalar  $c$ , tal que  $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$ .

## 14.3 FUNÇÕES COM VALORES VETORIAIS E EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Suponha que uma partícula se movimenta de tal forma que as coordenadas  $(x, y)$  de sua posição em qualquer instante  $t$  sejam dadas pelas equações  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ . Então, para todo número  $t$  no domínio comum a  $f$  e  $g$  haverá um vetor  $f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ , e os pontos finais das representações posicionais desses vetores traçarão uma curva  $C$  percorrida pela partícula. Isso nos leva a considerar uma função cujo domínio seja um conjunto de números reais e cuja imagem seja um conjunto de vetores. Tal função é chamada de *função com valores vetoriais*.

### 14.3.1 DEFINIÇÃO

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções com valores reais de uma variável real  $t$ . Então, para todo número  $t$  do domínio comum a  $f$  e  $g$  haverá um vetor  $\mathbf{R}$  definido por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

e  $\mathbf{R}$  será chamado *função com valores vetoriais*.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Seja  $\mathbf{R}$  a função com valores vetoriais definida por

$$\mathbf{R}(t) = \sqrt{t-2}\mathbf{i} + (t-3)^{-1}\mathbf{j}$$

Se  $f(t) = \sqrt{t-2}$  e  $g(t) = (t-3)^{-1}$ , o domínio de  $\mathbf{R}$  será o conjunto dos valores de  $t$  para os quais ambas  $f(t)$  e  $g(t)$  estão definidas. Como  $f(t)$  está definida para  $t \geq 2$  e  $g(t)$  está definida para todo número real exceto 3, o domínio de  $\mathbf{R}$  é  $\{t \mid t \geq 2, t \neq 3\}$ . ◀

A equação  $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$  é chamada de **equação vetorial** e define uma curva  $C$ . Essa mesma curva  $C$  também é definida pelas equações

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t) \tag{1}$$

que são chamadas de **equações paramétricas** de  $C$ . A variável  $t$  é um parâmetro. A curva  $C$  também é chamada de **gráfico**; isto é, o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$  satisfazendo (1) é o gráfico da função com valores vetoriais  $\mathbf{R}$ .

A equação vetorial de uma curva, bem como as equações paramétricas de uma curva, dão a ela uma direção em cada ponto. Isto é, se considerarmos a curva como sendo descrita por uma partícula, poderemos identificar a direção positiva ao longo da curva como a direção na qual a partícula movimentar-se quando  $t$  cresce. Em tal caso,  $t$  pode ser tomado como a medida do tempo, e o vetor  $\mathbf{R}(t)$  é chamado de **vetor posição**. Algumas vezes  $\mathbf{R}(t)$  é referido como o **vetor raio**.

Se o parâmetro  $t$  for eliminado do par de equações (1), obteremos uma equação em  $x$  e  $y$  chamada de **equação cartesiana** de  $C$ . Pode acontecer que a eliminação do parâmetro leve a uma equação cartesiana cujo gráfico contenha mais pontos do que o gráfico definido pela equação vetorial ou pelas equações paramétricas. Essa situação ocorre no Exemplo 2.

**EXEMPLO 1** Dada a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}$$

(a) Faça um esboço do gráfico dessa equação e (b) ache a equação cartesiana do gráfico.

**Solução**

(a) O domínio de  $\mathbf{R}$  é o conjunto de todos os números reais. Os valores de  $x$  e  $y$  para valores específicos de  $t$  podem ser dispostos em uma tabela. Calculamos o módulo do vetor posição. Para todo  $t$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}(t)\| &= \sqrt{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} \\ &= 2\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Assim sendo, o ponto final da representação posicional de cada vetor  $\mathbf{R}(t)$  está a duas unidades da origem. Fazendo  $t$  assumir todos os valores do intervalo fechado  $[0, 2\pi]$ , obtemos uma circunferência de raio 2 e centro na origem. Com isso completamos o gráfico, pois qualquer valor de  $t$  dará um ponto sobre essa circunferência. Um esboço dela está na Figura 1. As equações paramétricas do gráfico são

$$x = 2 \cos t \quad \text{e} \quad y = 2 \sin t$$

(b) Uma equação cartesiana do gráfico pode ser encontrada, bastando eliminar  $t$  das duas equações paramétricas. Isso pode ser feito se elevarmos ao quadrado cada equação e somarmos para obter:

$$x^2 + y^2 = 4$$

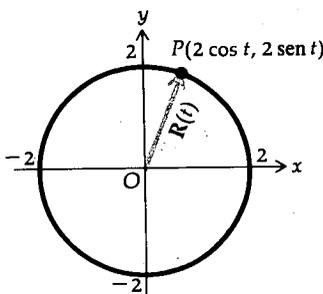


FIGURA 1

**EXEMPLO 2** Dadas as equações paramétricas

$$x = \cosh t \quad \text{e} \quad y = \sinh t$$

(a) Faça um esboço do gráfico definido por essas equações e (b) ache uma equação cartesiana do gráfico.

**Solução**

(a) Elevando ao quadrado as equações e subtraindo, teremos

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t$$

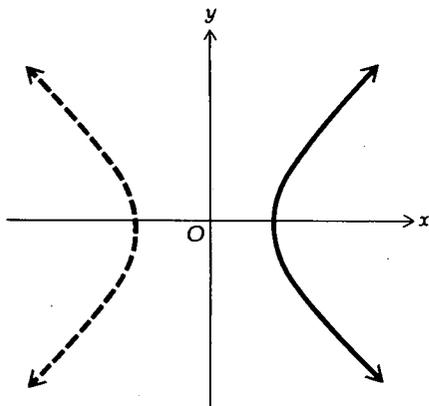


FIGURA 2

Da identidade  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ , teremos a equação

$$x^2 - y^2 = 1$$

Essa é a equação de uma hipérbole equilátera. Entretanto, observe que para todo  $t$  real,  $\cosh t$  nunca é menor do que 1. Assim, a curva definida pelas equações paramétricas consiste somente nos pontos sobre o ramo direito da hipérbole. Um esboço dessa curva está na Figura 2. A curva pontilhada na figura é o ramo esquerdo da hipérbole equilátera.

(b) Uma equação cartesiana é

$$x^2 - y^2 = 1 \quad x \geq 1$$

Vimos que, eliminando  $t$  das equações paramétricas (1), obtemos a equação cartesiana. Esta, implícita ou explicitamente, define  $y$  como uma ou mais funções de  $x$ . Isto é, se  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ , então  $y = h(x)$ . Se  $h$  for uma função diferenciável de  $x$  e  $f$  for uma função diferenciável de  $t$ , então, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Se  $\frac{dx}{dt} \neq 0$ , podemos dividir ambos os membros da igualdade acima por  $\frac{dx}{dt}$  e obter

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

(2)

A igualdade (2) possibilita-nos encontrar a derivada de  $y$  em relação a  $x$  diretamente das equações paramétricas.

Como  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right)$ , então  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx}$ . Assim,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d(y')}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

(3)

**EXEMPLO 3** Dada as equações paramétricas

$$x = 3t^2 \quad \text{e} \quad y = 4t^3$$

ache  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{d^2y}{dx^2}$  sem eliminar  $t$ .

**Solução** Como  $\frac{dy}{dt} = 12t^2$  e  $\frac{dx}{dt} = 6t$ , de (2) temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{12t^2}{6t} \\ &= 2t \end{aligned}$$

Como  $y' = 2t$ ,  $\frac{d(y')}{dt} = 2$ . Então, de (3),

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{d(y')}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{2}{6t} \\ &= \frac{1}{3t}\end{aligned}$$

Tabela 1

$t$	$x$	$y$
0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	3	4
2	12	32
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
-1	3	-4
-2	12	-32

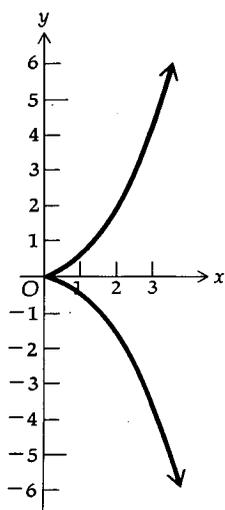


FIGURA 3

**EXEMPLO 4** (a) Faça um esboço do gráfico definido pelas equações paramétricas do Exemplo 3, e (b) ache uma equação cartesiana do gráfico.

**Solução** As equações paramétricas são

$$x = 3t^2 \quad \text{e} \quad y = 4t^3$$

- (a) Observamos que  $x$  é não-negativo. Assim, o gráfico está restrito ao primeiro e quarto quadrantes. A Tabela 1 dá os valores de  $x$  e  $y$  para valores específicos de  $t$ . Como  $\frac{dy}{dx} = 2t$ , então quando  $t = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$ . Logo, no ponto  $(0, 0)$ , a reta tangente é horizontal. Partindo desse fato e com os pontos obtidos da Tabela 1, obtemos o esboço do gráfico que aparece na Figura 3.
- (b) Das duas equações paramétricas obtemos  $x^3 = 27t^6$  e  $y^2 = 16t^6$ . Resolvendo essas equações para  $t^6$  e eliminando  $t^6$ , obtemos

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{27} &= \frac{y^2}{16} \\ 16x^3 &= 27y^2\end{aligned}\tag{4}$$

que é a equação cartesiana pedida.

► **ILUSTRAÇÃO 2** Se em (4) derivarmos implicitamente,

$$\begin{aligned}48x^2 &= 54y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{8x^2}{9y}\end{aligned}$$

Substituindo  $x$  e  $y$  em termos de  $t$  pelos valores dados nas equações paramétricas, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{8(3t^2)^2}{9(4t^3)} \\ &= 2t\end{aligned}$$

o que está de acordo com o valor já obtido de  $\frac{dy}{dx}$  no Exemplo 3. ◀

Segue de (2) que se num dado ponto  $\frac{dy}{dt} = 0$  e  $\frac{dx}{dt} \neq 0$ , então  $\frac{dy}{dx} = 0$  e o gráfico do par de equações paramétricas terá uma reta tangente horizontal no ponto. Além disso, se num dado ponto  $\frac{dx}{dt} = 0$  e  $\frac{dy}{dt} \neq 0$ , então  $\frac{dy}{dx}$  não existirá no ponto e o gráfico poderá ter uma reta tangente vertical passando nesse ponto. Essas retas tangentes podem nos ser de grande ajuda para traçarmos um esboço do gráfico das equações paramétricas.

Tabela 2

$t$	$x$	$y$
-4	-12	0
-3	-5	-3
-2	0	-4
-1	3	-3
0	4	0
1	3	5
2	0	12
3	-5	21

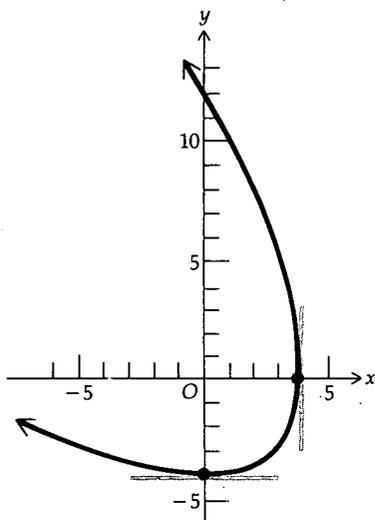


FIGURA 4

**EXEMPLO 5** Dadas as equações paramétricas

$$x = 4 - t^2 \quad \text{e} \quad y = t^2 + 4t$$

ache as retas tangentes, horizontal e vertical, ao gráfico desse par de equações e faça um esboço do gráfico.

**Solução**

$$\frac{dx}{dt} = -2t \quad \frac{dy}{dt} = 2t + 4$$

$$\text{Logo } \frac{dy}{dx} = \frac{2t + 4}{-2t}, \text{ isto é,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t + 2}{-t}$$

Quando  $t = -2$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$ ,  $x = 0$  e  $y = -4$ . Assim sendo, o gráfico tem uma reta tangente horizontal em  $(0, -4)$ . Quando  $t = 0$ ,  $\frac{dy}{dx}$  não existe,  $x = 4$  e  $y = 0$ ; o gráfico tem uma reta tangente vertical em  $(4, 0)$ . A Tabela 2 dá os valores de  $x$  e  $y$  para valores determinados de  $t$ . Com os pontos obtidos desses valores e sabendo onde estão as retas tangentes horizontal e vertical, fazemos o esboço do gráfico mostrado na Figura 4.

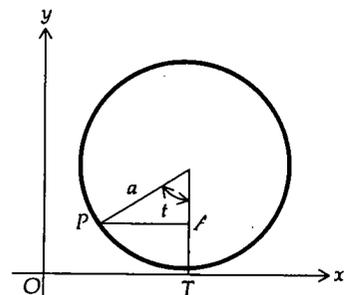


FIGURA 5

Agora iremos mostrar como as equações paramétricas podem ser usadas para definir uma curva descrita por um movimento físico. Consideraremos a **ciclóide**, que é a curva descrita por um ponto na circunferência de um círculo, quando esta rola ao longo de uma linha reta. Suponha que a circunferência tenha raio  $a$ . Seja o eixo  $x$ , a reta fixa sobre a qual a circunferência rola, e seja a origem um dos pontos onde o ponto  $P$  dado toca o eixo  $x$ . Veja a Figura 5, que mostra a circunferência após ter-se deslocado por um ângulo de  $t$  radianos. Da Figura 5,

$$\mathbf{V}(\overline{OT}) + \mathbf{V}(\overline{TA}) + \mathbf{V}(\overline{AP}) = \mathbf{V}(\overline{OP}) \quad (5)$$

O comprimento de arco  $PT$  é  $\|\mathbf{V}(\overline{OT})\| = at$ . Como o sentido de  $\mathbf{V}(\overline{OT})$  é o mesmo do eixo  $x$  positivo,

$$\mathbf{V}(\overline{OT}) = at\mathbf{i} \quad (6)$$

Também  $\|V(\overline{TA})\| = a - a \cos t$ . E como o sentido de  $V(\overline{TA})$  é o mesmo de  $\mathbf{j}$ ,  
 $V(\overline{TA}) = a(1 - \cos t)\mathbf{j}$  (7)

$\|V(\overline{AP})\| = a \sin t$ , e o sentido de  $V(\overline{AP})$  é igual ao de  $-\mathbf{i}$ ; assim,  
 $V(\overline{AP}) = -a \sin t \mathbf{i}$

Fazendo as substituições a partir dessa equação, de (6) e (7) em (5), teremos

$$at\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j} - a \sin t \mathbf{i} = V(\overline{OP})$$

$$\Leftrightarrow V(\overline{OP}) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$$

Essa é uma equação vetorial da cicloide. Assim, as equações paramétricas da cicloide são

$$x = a(t - \sin t) \text{ e } y = a(1 - \cos t) \quad (8)$$

onde  $t$  é um número real qualquer. Um esboço de parte da cicloide está na Figura 6.

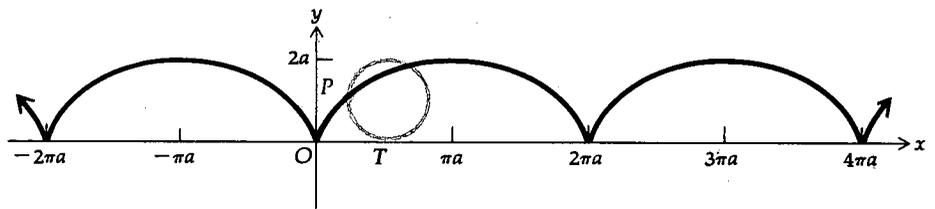


FIGURA 6

Na Secção 11.1, onde o teorema do valor médio de Cauchy (11.1.3) foi enunciado e provado, indicamos que uma interpretação geométrica seria dada aqui, pois são necessárias as equações paramétricas. Lembre-se de que o teorema afirma que se  $f$  e  $g$  forem duas funções tais que (i)  $f$  e  $g$  sejam contínuas em  $[a, b]$ , (ii)  $f$  e  $g$  sejam diferenciáveis em  $(a, b)$  e (iii) para todo  $x$  em  $(a, b)$   $g'(x) \neq 0$ , então existirá  $z$  no intervalo aberto  $(a, b)$ , tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

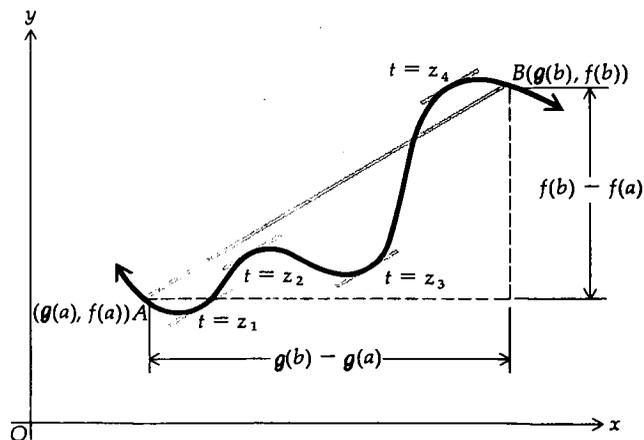


FIGURA 7

A Figura 7 mostra uma curva com equações paramétricas  $x = g(t)$  e  $y = f(t)$ , onde  $a \leq t \leq b$ . A inclinação da curva da figura num dado ponto é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

e a inclinação do segmento de reta que une os pontos  $A(g(a), f(a))$  e  $B(g(b), f(b))$  é dada por

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

O teorema do valor médio de Cauchy afirma que as inclinações são iguais em pelo menos um valor de  $t$  entre  $a$  e  $b$ . Para a curva da Figura 7 existem quatro valores de  $t$  satisfazendo a conclusão do teorema:  $t = z_1$ ,  $t = z_2$ ,  $t = z_3$  e  $t = z_4$ .

### EXERCÍCIOS 14.3

Nos Exercícios de 1 a 6, ache o domínio da função  $\mathbf{R}$  com valores vetoriais.

1.  $\mathbf{R}(t) = (1/t)\mathbf{i} + \sqrt{4-t}\mathbf{j}$
2.  $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 3)\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}$
3.  $\mathbf{R}(t) = (\sin^{-1} t)\mathbf{i} + (\cos^{-1} t)\mathbf{j}$
4.  $\mathbf{R}(t) = \ln(t+1)\mathbf{i} + (\operatorname{tg}^{-1} t)\mathbf{j}$
5.  $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t^2-9}\mathbf{i} + \sqrt{t^2+2t-8}\mathbf{j}$
6.  $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t-4}\mathbf{i} + \sqrt{4-t}\mathbf{j}$

Nos Exercícios de 7 a 12, ache  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , sem eliminar o parâmetro.

7.  $x = 3t, y = 2t^2$
8.  $x = 1 - t^2, y = 1 + t$
9.  $x = t^2 e^t, y = t \ln t$
10.  $x = e^{2t}, y = 1 + \cos t$
11.  $x = a \cos t, y = b \sin t$
12.  $x = a \cosh t, y = b \sinh t$

Nos Exercícios de 13 a 19, faça um esboço do gráfico da equação vetorial dada e ache a equação cartesiana do gráfico.

13.  $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t+1)\mathbf{j}$
14.  $\mathbf{R}(t) = (t-2)\mathbf{i} + (t^2+4)\mathbf{j}$
15.  $\mathbf{R}(t) = 3 \cosh t\mathbf{i} + 5 \sinh t\mathbf{j}$
16.  $\mathbf{R}(t) = \frac{4}{t^2}\mathbf{i} + \frac{4}{t}\mathbf{j}$
17.  $\mathbf{R}(t) = \sec t\mathbf{i} + \operatorname{tg} t\mathbf{j}; t$  em  $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$
18.  $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}; t$  em  $[0, \frac{1}{2}\pi]$
19.  $\mathbf{R}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j}; t$  em  $[0, 2\pi]$
20. Ache uma equação da reta tangente à curva  $x = 1 + 3 \sin t$ ,  $y = 2 - 5 \cos t$ , no ponto onde  $t = \frac{1}{6}\pi$ .
21. Ache uma equação da reta tangente à curva  $x = 2 \sin t$ ,  $y = 5 \cos t$ , no ponto onde  $t = \frac{1}{3}\pi$ .

Nos Exercícios de 22 a 24, ache as retas tangentes, horizontal e vertical, ao gráfico dado pelo par de equações paramétricas e faça um esboço do gráfico.

22.  $x = t^2 + t, y = t^2 - t$
23.  $x = 4t^2 - 4t, y = 1 - 4t^2$
24.  $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$

25. As equações paramétricas para a *troçoide* são

$$x = at - b \sin t \quad \text{e} \quad y = a - b \cos t$$

Mostre que essa curva não tem reta tangente vertical se  $a > b > 0$ .

26. Um projétil move-se de tal forma que sua posição em cada instante  $t$  seja dada pelas equações paramétricas  $x = 60t$  e  $y = 80t - 16t^2$ . Faça um esboço da trajetória do projétil.

27. Dada a cicloide descrita pelas equações (8), obtenha  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  e  $\frac{d^3y}{dx^3}$  no ponto em que  $y$  atinge o seu valor máximo para  $x$  no intervalo fechado  $[0, 2\pi a]$ .

28. Mostre que a inclinação da reta tangente, em  $t = t_1$ , à cicloide descrita pelas equações (8) é  $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t_1$ . Deduza, então, que a reta tangente é vertical quando  $t = 2n\pi$ , onde  $n$  é um inteiro qualquer.

29. A *hipocicloide* é uma curva traçada por um ponto  $P$  da circunferência de raio  $b$  que rola por dentro de uma outra circunferência fixa de raio  $a$ ,  $a > b$ . Se a origem é o centro da circunferência fixa,  $A(a, 0)$  é um dos pontos no qual o ponto  $P$  entra em contato com a circunferência fixa,  $B$  é o ponto de tangência móvel entre as duas circunferências e o parâmetro  $t$  é o número de radianos no ângulo  $AOB$ , prove que as equações paramétricas da hipocicloide são

$$x = (a - b) \cos t + b \cos \frac{a - b}{b} t$$

e

$$y = (a - b) \sin t - b \sin \frac{a - b}{b} t$$

30. Se  $a = 4b$  no Exercício 29, temos uma *hipocicloide de quatro vértices*. Mostre que as equações paramétricas dessa curva são  $x = a \cos^3 t$  e  $y = a \sin^3 t$ .

31. Use as equações paramétricas do Exercício 30 para achar uma equação cartesiana da hipocicloide de quatro vértices e faça um esboço do gráfico da equação resultante.

32. As equações paramétricas da *tratrix* são

$$x = t - a \operatorname{tgh} \frac{t}{a} \quad \text{e} \quad y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}$$

Faça um esboço da curva para  $a = 4$ .

33. Prove que o parâmetro  $t$  nas equações paramétricas de uma *tratrix* (veja o Exercício 32) é a intersecção da reta tangente com o eixo  $x$ .

34. Mostre que a *tratrix* do Exercício 32 é uma curva, tal que o comprimento do segmento de toda reta tangente do ponto de tangência ao ponto de intersecção com o eixo  $x$  é constante e igual a  $a$ .

35. Ache a área da região limitada pelo eixo  $x$  e um arco de cicloide tendo as equações (8).

36. Ache o centróide da região do Exercício 35.

## 14.4 CÁLCULO DE FUNÇÕES COM VALORES VETORIAIS

As definições de limites, continuidade, derivadas e integrais indefinidas de funções com valores vetoriais envolvem as definições correspondentes para funções com valores reais.

### 14.4.1 DEFINIÇÃO

Seja  $\mathbf{R}$  uma função com valores vetoriais cujos valores funcionais são dados por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

Então, o limite de  $\mathbf{R}(t)$  quando  $t$  tende a  $t_1$  será definido por

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \mathbf{R}(t) = \left[ \lim_{t \rightarrow t_1} f(t) \right] \mathbf{i} + \left[ \lim_{t \rightarrow t_1} g(t) \right] \mathbf{j}$$

se  $\lim_{t \rightarrow t_1} f(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow t_1} g(t)$  existirem.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Se  $\mathbf{R}(t) = \cos t \mathbf{i} + 2e^t \mathbf{j}$ , então

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{R}(t) &= (\lim_{t \rightarrow 0} \cos t) \mathbf{i} + (\lim_{t \rightarrow 0} 2e^t) \mathbf{j} \\ &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \end{aligned}$$

### 14.4.2 DEFINIÇÃO

A função  $\mathbf{R}$  com valores vetoriais será **contínua** em  $t_1$  se e somente se as três condições seguintes forem satisfeitas:

- (i)  $\mathbf{R}(t)$  existe;
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow t_1} \mathbf{R}(t)$  existe;
- (iii)  $\lim_{t \rightarrow t_1} \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_1)$ .

Das Definições 14.4.1 e 14.4.2, segue que a função com valores vetoriais  $\mathbf{R}$ , definida por  $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ , será contínua em  $t_1$  se e somente se  $f$  e  $g$  forem contínuas em  $t_1$ .

Na definição que segue, a expressão

$$\frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

será usada para indicar a divisão de um vetor por um escalar. Essa expressão significa

$$\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)]$$

### 14.4.3 DEFINIÇÃO

Se  $\mathbf{R}$  for uma função com valores vetoriais, então a **derivada** de  $\mathbf{R}$  também será uma função com valores vetoriais, denotada por  $\mathbf{R}'$  e definida por

$$\mathbf{R}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

se esse limite existir.

A notação  $D_t \mathbf{R}(t)$  é usada, por vezes, em lugar de  $\mathbf{R}'(t)$ .

Da Definição 14.4.3 e da definição da derivada de uma função com valores reais, decorre o teorema a seguir.

#### 14.4.4 TEOREMA

Se  $\mathbf{R}$  for uma função com valores vetoriais definida por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

então

$$\mathbf{R}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

se  $f'(t)$  e  $g'(t)$  existirem.

**Prova** Da Definição 14.4.3,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j}] - [f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[f(t + \Delta t) - f(t)]}{\Delta t} \mathbf{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[g(t + \Delta t) - g(t)]}{\Delta t} \mathbf{j} \\ &= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A direção de  $\mathbf{R}'(t)$  é a mesma da reta tangente ao gráfico de  $\mathbf{R}(t)$ , no ponto  $(f(t), g(t))$ , isto é, a direção de  $\mathbf{R}'(t)$  é dada por  $\theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ), onde  $\text{tg } \theta = g'(t)/f'(t)$ , isto é,

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

Uma interpretação geométrica da Definição 14.4.3 pode ser obtida se considerarmos as representações dos vetores  $\mathbf{R}(t)$ ,  $\mathbf{R}(t + \Delta t)$  e  $\mathbf{R}'(t)$ . Consulte a Figura 1. A curva  $C$  é traçada pelo ponto final da representação posicional de  $\mathbf{R}(t)$  quando  $t$  assume todos os valores do domínio de  $\mathbf{R}$ . Seja  $\overline{OP}$  a representação posicional de  $\mathbf{R}(t)$  e  $\overline{OQ}$  a representação posicional de  $\mathbf{R}(t + \Delta t)$ . Então  $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$  será um vetor tendo  $\overline{PQ}$  como representação. Se o vetor  $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$  for multiplicado pelo escalar  $1/\Delta t$ , obtemos um vetor com a mesma direção e cujo módulo é  $1/|\Delta t|$  vezes o módulo de  $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$ . Quando  $\Delta t$  tende a zero, o vetor  $[\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)]/\Delta t$  tende a um vetor tendo uma de suas representações tangente à curva  $C$  no ponto  $P$ .

► **ILUSTRAÇÃO 2** Se  $\mathbf{R}(t) = (2 + \text{sen } t)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$ , então

$$\mathbf{R}'(t) = \cos t\mathbf{i} - \text{sen } t\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$

Derivadas de ordem superior de funções com valores vetoriais são definidas como as derivadas de ordem superior para funções com valores reais. Assim, se  $\mathbf{R}$  for uma função com valores vetoriais definida por  $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ ,

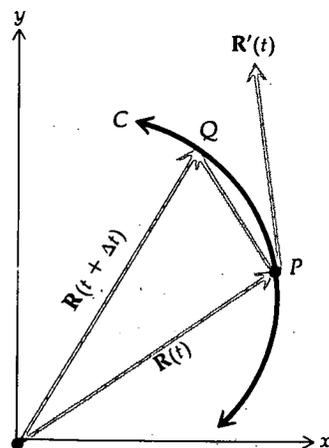


FIGURA 1

a derivada segunda de  $\mathbf{R}$ , denotada por  $\mathbf{R}''(t)$ , será dada por

$$\mathbf{R}''(t) = D_t[\mathbf{R}'(t)]$$

A notação  $D_t^2\mathbf{R}(t)$  pode ser usada em lugar de  $\mathbf{R}''(t)$ . Aplicando o Teorema 14.4.4 a  $\mathbf{R}'(t)$ ,

$$\mathbf{R}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j}$$

se  $f''(t)$  e  $g''(t)$  existirem.

► **ILUSTRAÇÃO 3** Se  $\mathbf{R}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{t}\right)\mathbf{j}$ , então

$$\mathbf{R}'(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} - \frac{1}{t^2}\mathbf{j} \quad \mathbf{R}''(t) = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{2}{t^3}\mathbf{j}$$

#### 14.4.5 DEFINIÇÃO

Dizemos que uma função com valores vetoriais  $\mathbf{R}$  é **diferenciável** num intervalo se  $\mathbf{R}'(t)$  existir para todos os valores de  $t$  no intervalo.

Os teoremas a seguir dão as fórmulas de derivação para funções com valores vetoriais. As demonstrações baseiam-se no Teorema 14.4.4 e nos teoremas sobre derivação de funções com valores reais.

#### 14.4.6 TEOREMA

Se  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{Q}$  forem funções com valores vetoriais diferenciáveis em um intervalo, então  $\mathbf{R} + \mathbf{Q}$  será diferenciável no intervalo, e

$$D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] = D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t)$$

A demonstração desse teorema será deixada como um exercício (veja o Exercício 25).

**EXEMPLO 1** Verifique o Teorema 14.4.6 se

$$\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$

**Solução**

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] &= D_t[(t^2\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}) + (\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j})] \\ &= D_t[(t^2 + \sin t)\mathbf{i} + (t - 1 + \cos t)\mathbf{j}] \\ &= (2t + \cos t)\mathbf{i} + (1 - \sin t)\mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t) &= D_t[t^2\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}] + D_t(\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}) \\ &= (2t\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}) \\ &= (2t + \cos t)\mathbf{i} + (1 - \sin t)\mathbf{j} \end{aligned}$$

Logo,  $D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] = D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t)$ .

#### 14.4.7 TEOREMA

Se  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{Q}$  forem funções com valores vetoriais diferenciáveis em um intervalo, então  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}$  será diferenciável no intervalo e

$$D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] = [D_t\mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t\mathbf{Q}(t)]$$

**Prova** Seja  $\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}$  e  $\mathbf{Q}(t) = f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}$ . Então, pelo Teorema 14.4.4,

$$D_t\mathbf{R}(t) = f_1'(t)\mathbf{i} + g_1'(t)\mathbf{j} \quad D_t\mathbf{Q}(t) = f_2'(t)\mathbf{i} + g_2'(t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) = [f_1(t)][f_2(t)] + [g_1(t)][g_2(t)]$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] &= [f_1'(t)][f_2(t)] + [f_1(t)][f_2'(t)] + [g_1'(t)][g_2(t)] + [g_1(t)][g_2'(t)] \\ &= \{[f_1'(t)][f_2(t)] + [g_1'(t)][g_2(t)]\} + \{[f_1(t)][f_2'(t)] + [g_1(t)][g_2'(t)]\} \\ &= [D_t \mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t \mathbf{Q}(t)] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**EXEMPLO 2** Verifique o Teorema 14.4.7 para os vetores do Exemplo 1.

**Solução** Os vetores são

$$\mathbf{R}(t) = t^2 \mathbf{i} + (t - 1) \mathbf{j} \quad \mathbf{Q}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

Assim,  $\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) = t^2 \sin t + (t - 1) \cos t$ . Logo,

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] &= 2t \sin t + t^2 \cos t + \cos t + (t - 1)(-\sin t) \\ &= (t + 1) \sin t + (t^2 + 1) \cos t \end{aligned} \quad (1)$$

Como  $D_t \mathbf{R}(t) = 2t \mathbf{i} + \mathbf{j}$  e  $D_t \mathbf{Q}(t) = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$ , temos que

$$\begin{aligned} [D_t \mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t \mathbf{Q}(t)] &= (2t \mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}) + [t^2 \mathbf{i} + (t - 1) \mathbf{j}] \cdot (\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}) \\ &= (2t \sin t + \cos t) + [t^2 \cos t - (t - 1) \sin t] \\ &= (t + 1) \sin t + (t^2 + 1) \cos t \end{aligned} \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), vemos que o Teorema 14.4.7 é válido para esses vetores.

#### 14.4.8 TEOREMA

Se  $\mathbf{R}$  for uma função com valores vetoriais, diferenciável em um intervalo e se  $f$  for uma função com valores reais, diferenciável no intervalo, então

$$D_t\{[f(t)]\mathbf{R}(t)\} = [D_t f(t)]\mathbf{R}(t) + f(t) D_t \mathbf{R}(t)$$

A demonstração desse teorema será proposto como exercício (veja o Exercício 26).

Será necessário aplicar, em discussões futuras, o teorema a seguir. É a regra da cadeia para funções com valores vetoriais. A sua demonstração será proposta como um exercício (veja o Exercício 27) e baseia-se no Teorema 14.4.4 e na regra da cadeia para funções com valores reais.

#### 14.4.9 TEOREMA

Suponha que  $\mathbf{F}$  seja uma função com valores vetoriais,  $h$  seja uma função com valores reais e  $\mathbf{G}$ , uma função com valores vetoriais definida por  $\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(h(t))$ .

Se  $\phi = h(t)$  e ambas  $\frac{d\phi}{dt}$  e  $D_\phi \mathbf{G}(t)$  existirem, então  $D_t \mathbf{G}(t)$  existe e é dada por

$$D_t \mathbf{G}(t) = [D_\phi \mathbf{G}(t)] \frac{d\phi}{dt}$$

► **ILUSTRAÇÃO 4** Sejam  $\mathbf{F}$  e  $h$  do Teorema 14.4.9 as funções definidas por

$$\mathbf{F}(\phi) = \phi^2 \mathbf{i} + e^\phi \mathbf{j} \quad \text{e} \quad h(t) = \sin t$$

Se  $\phi = h(t)$  e  $\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(h(t))$ , temos

$$\phi = \sin t \quad \text{e} \quad \mathbf{G}(t) = \sin^2 t \mathbf{i} + e^{\sin t} \mathbf{j}$$

Calculando  $D_t \mathbf{G}(t)$  pelo Teorema 14.4.4 temos

$$D_t \mathbf{G}(t) = 2 \operatorname{sen} t \cos t \mathbf{i} + e^{\operatorname{sen} t} \cos t \mathbf{j} \quad (3)$$

Vamos mostrar que aplicando o Teorema 14.4.9 obteremos o mesmo resultado. Uma vez que  $\mathbf{G}(t)$  também pode ser escrita como  $\phi^2 \mathbf{i} + e^\phi \mathbf{j}$ , temos

$$\begin{aligned} D_\phi \mathbf{G}(t) &= D_\phi [\phi^2 \mathbf{i} + e^\phi \mathbf{j}] \\ &= 2\phi \mathbf{i} + e^\phi \mathbf{j} \end{aligned}$$

Mas  $\phi = \operatorname{sen} t$ ; assim,

$$D_\phi \mathbf{G}(t) = 2 \operatorname{sen} t \mathbf{i} + e^{\operatorname{sen} t} \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \frac{d\phi}{dt} = \cos t$$

Substituindo esses valores no segundo membro da fórmula do Teorema 14.4.9, teremos

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{G}(t) &= [2 \operatorname{sen} t \mathbf{i} + e^{\operatorname{sen} t} \mathbf{j}] \cos t \\ &= 2 \operatorname{sen} t \cos t \mathbf{i} + e^{\operatorname{sen} t} \cos t \mathbf{j} \end{aligned}$$

que está de acordo com (3). ◀

Vamos definir agora uma integral indefinida (ou antiderivada) de uma função com valores vetoriais.

#### 14.4.10 DEFINIÇÃO

Se  $\mathbf{Q}$  for a função com valores vetoriais dada por

$$\mathbf{Q}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

então a **integral indefinida de  $\mathbf{Q}(t)$**  será definida por

$$\int \mathbf{Q}(t) dt = \mathbf{i} \int f(t) dt + \mathbf{j} \int g(t) dt \quad (4)$$

Essa definição é consistente com a definição de integral indefinida de uma função com valores reais, pois se tomarmos a derivada de ambos os membros de (4) em relação a  $t$ ,

$$D_t \int \mathbf{Q}(t) dt = \mathbf{i} D_t \int f(t) dt + \mathbf{j} D_t \int g(t) dt$$

$$D_t \int \mathbf{Q}(t) dt = \mathbf{i} f(t) + \mathbf{j} g(t)$$

Cada uma das integrais no segundo membro de (4) dá origem a uma constante escalar arbitrária. Quando multiplicamos cada uma das constantes por  $\mathbf{i}$  ou  $\mathbf{j}$ , obtemos um vetor constante arbitrário na soma. Assim,

$$\int \mathbf{Q}(t) dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$$

onde  $D_t \mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}(t)$  e  $\mathbf{C}$  é um vetor constante arbitrário.

---

**EXEMPLO 3** Ache a função com valores vetoriais mais geral, cuja derivada é

$$\mathbf{Q}(t) = \operatorname{sen} t \mathbf{i} - 3 \cos t \mathbf{j}$$

**Solução** Se  $D_t \mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}(t)$ , então  $\mathbf{R}(t) = \int \mathbf{Q}(t) dt$ , isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{i} \int \sin t dt - 3\mathbf{j} \int \cos t dt \\ &= \mathbf{i}(-\cos t + C_1) - 3\mathbf{j}(\sin t + C_2) \\ &= -\cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j} + (C_1 \mathbf{i} - 3C_2 \mathbf{j}) \\ &= -\cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j} + \mathbf{C} \end{aligned}$$

**EXEMPLO 4** Ache o vetor  $\mathbf{R}(t)$  para o qual

$$D_t \mathbf{R}(t) = e^{-t} \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

**Solução**

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{i} \int e^{-t} dt + \mathbf{j} \int e^t dt \\ &= \mathbf{i}(-e^{-t} + C_1) + \mathbf{j}(e^t + C_2) \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,

$$\mathbf{i} + \mathbf{j} = \mathbf{i}(-1 + C_1) + \mathbf{j}(1 + C_2)$$

Logo,

$$\begin{aligned} C_1 - 1 &= 1 & C_2 + 1 &= 1 \\ C_1 &= 2 & C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\mathbf{R}(t) = (-e^{-t} + 2)\mathbf{i} + e^t \mathbf{j}$$

O seguinte teorema nos será útil mais adiante.

#### 14.4.11 TEOREMA

Se  $\mathbf{R}$  for uma função com valores vetoriais, diferenciável em um intervalo e  $\|\mathbf{R}(t)\|$  for constante para todo  $t$  no intervalo, então os vetores  $\mathbf{R}(t)$  e  $D_t \mathbf{R}(t)$  serão ortogonais.

**Prova** Seja  $\|\mathbf{R}(t)\| = k$ . Então, pelo Teorema 14.2.3(iii),

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}(t) = k^2$$

Diferenciando ambos os membros em relação a  $t$  e usando o Teorema 14.4.7, obtemos

$$\begin{aligned} [D_t \mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{R}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t \mathbf{R}(t)] &= 0 \\ 2\mathbf{R}(t) \cdot D_t \mathbf{R}(t) &= 0 \end{aligned}$$

Como o produto escalar de  $\mathbf{R}(t)$  e  $D_t \mathbf{R}(t)$  é nulo, segue da Definição 14.2.7 que  $\mathbf{R}(t)$  e  $D_t \mathbf{R}(t)$  são ortogonais. ■

A interpretação geométrica do Teorema 14.4.11 é evidente. Se o vetor  $\mathbf{R}(t)$  tiver módulo constante, então a representação posicional  $\overline{OP}$  de  $\mathbf{R}(t)$  terá seu ponto final  $P$  sobre a circunferência, com centro na origem e raio  $k$ . Assim, o gráfico de  $\mathbf{R}$  é essa circunferência. Como  $D_t \mathbf{R}(t)$  e  $\mathbf{R}(t)$  são ortogonais,  $\overline{OP}$  é perpendicular a uma representação de  $D_t \mathbf{R}(t)$ . A Figura 2 mostra o esboço de uma parte da circunferência, a representação posicional de  $\mathbf{R}(t)$ ,  $\overline{OP}$  e a representação  $\overline{PB}$  de  $D_t \mathbf{R}(t)$ .

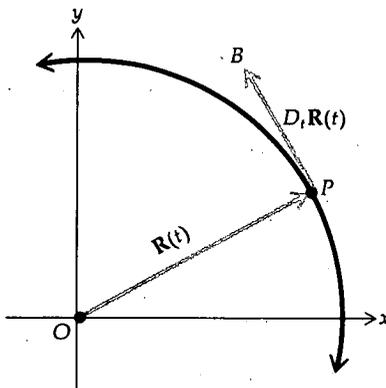


FIGURA 2

## EXERCÍCIOS 14.4

Nos Exercícios de 1 a 5, ache o limite indicado, se ele existir.

1.  $\mathbf{R}(t) = (3t - 2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ ;  $\lim_{t \rightarrow 2} \mathbf{R}(t)$

2.  $\mathbf{R}(t) = (t - 2)\mathbf{i} + \frac{t^2 - 4}{t - 2}\mathbf{j}$ ;  $\lim_{t \rightarrow 2} \mathbf{R}(t)$

3.  $\mathbf{R}(t) = 2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$ ;  $\lim_{t \rightarrow \pi/2} \mathbf{R}(t)$

4.  $\mathbf{R}(t) = \frac{t^2 - 2t - 3}{t - 3}\mathbf{i} + \frac{t^2 - 5t + 6}{t - 3}\mathbf{j}$ ;  $\lim_{t \rightarrow 3} \mathbf{R}(t)$

5.  $\mathbf{R}(t) = e^{t+1}\mathbf{i} + |t + 1|\mathbf{j}$ ;  $\lim_{t \rightarrow -1} \mathbf{R}(t)$

Nos Exercícios de 6 a 14, ache  $\mathbf{R}'(t)$  e  $\mathbf{R}''(t)$ .

6.  $\mathbf{R}(t) = (t^2 - 3)\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j}$       7.  $\mathbf{R}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + \ln t\mathbf{j}$

8.  $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} + \operatorname{tg} t\mathbf{j}$       9.  $\mathbf{R}(t) = \operatorname{tg}^{-1} t\mathbf{i} + 2^t\mathbf{j}$

10.  $\mathbf{R}(t) = \frac{t-1}{t+1}\mathbf{i} + \frac{t-2}{t}\mathbf{j}$

11.  $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 4)^{-1}\mathbf{i} + \sqrt{1 - 5t}\mathbf{j}$

12.  $\mathbf{R}(t) = \sqrt{2t + 1}\mathbf{i} + (t - 1)^2\mathbf{j}$

13.  $\mathbf{R}(t) = 5 \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} - \sec 4t\mathbf{j}$

14.  $\mathbf{R}(t) = (e^{3t} + 2)\mathbf{i} + 2e^{3t}\mathbf{j}$

Nos Exercícios 15 e 16, ache  $D_t \|\mathbf{R}(t)\|$ .

15.  $\mathbf{R}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j}$

16.  $\mathbf{R}(t) = (e^t + 1)\mathbf{i} + (e^t - 1)\mathbf{j}$

Nos Exercícios 17 e 18, verifique o Teorema 14.4.6 para os vetores dados.

17.  $\mathbf{R}(t) = (t^2 + e^t)\mathbf{i} + (t - e^{2t})\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{Q}(t) = (t^3 + 2e^t)\mathbf{i} - (3t + e^{2t})\mathbf{j}$

18.  $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} - \operatorname{sen} 2t\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{Q}(t) = \operatorname{sen}^2 t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j}$

Nos Exercícios 19 e 20, verifique o Teorema 14.4.7 para os vetores do exercício indicado.

19. Exercício 17

20. Exercício 18

Nos Exercícios de 21 a 24, ache  $\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}''(t)$ .

21.  $\mathbf{R}(t) = (2t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 3)\mathbf{j}$       22.  $\mathbf{R}(t) = \ln(t - 1)\mathbf{i} - 3t^{-1}\mathbf{j}$

23.  $\mathbf{R}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j}$       24.  $\mathbf{R}(t) = -\cos 2t\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t\mathbf{j}$

25. Prove o Teorema 14.4.6.

26. Prove o Teorema 14.4.8.

27. Prove o Teorema 14.4.9.

Nos Exercícios de 28 a 33, ache o vetor mais geral cuja derivada é a função dada.

28.  $(t^2 - 9)\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j}$       29.  $\operatorname{tg} t\mathbf{i} - \frac{1}{t}\mathbf{j}$

30.  $3^t\mathbf{i} - 2^t\mathbf{j}$       31.  $e^{3t}\mathbf{i} + \frac{1}{t-1}\mathbf{j}$

32.  $\frac{1}{4+t^2}\mathbf{i} - \frac{4}{1-t^2}\mathbf{j}$       33.  $\ln t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

34. Se  $\mathbf{R}'(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{t-2}\mathbf{j}$  e  $\mathbf{R}(3) = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ , ache  $\mathbf{R}(t)$ .

35. Se  $\mathbf{R}'(t) = \operatorname{sen}^2 t\mathbf{i} + 2 \cos^2 t\mathbf{j}$  e  $\mathbf{R}(\pi) = \mathbf{0}$ , ache  $\mathbf{R}(t)$ .

36. Se  $\mathbf{R}'(t) = e^t \operatorname{sen} t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j}$  e  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ , ache  $\mathbf{R}(t)$ .

Nos Exercícios 37 e 38, ache uma equação cartesiana da curva que seja descrita pelo ponto final da representação posicional de  $\mathbf{R}'(t)$ . Ache  $\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'(t)$ . Interprete o resultado geometricamente.

37.  $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$

38.  $\mathbf{R}(t) = \cosh t\mathbf{i} - \operatorname{senh} t\mathbf{j}$

Nos Exercícios 39 e 40, se  $\alpha(t)$  for a medida em radianos do ângulo entre  $\mathbf{R}(t)$  e  $\mathbf{Q}(t)$ , ache  $D_t \alpha(t)$ .

39.  $\mathbf{R}(t) = 3e^{2t}\mathbf{i}$  e  $\mathbf{Q}(t) = 6e^{3t}\mathbf{j}$

40.  $\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$  e  $\mathbf{Q}(t) = 3t\mathbf{i}$

41. Suponha que  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{R}'$  sejam funções com valores vetoriais, definidas em um intervalo, e  $\mathbf{R}'$  seja diferenciável no intervalo. Prove que

$$D_t[\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}(t)] = \|\mathbf{R}'(t)\|^2 + \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}''(t)$$

42. Se  $\|\mathbf{R}(t)\| = h(t)$ , prove que  $\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'(t) = [h(t)][h'(t)]$ .

43. Se a função com valores vetoriais  $\mathbf{R}$  e a função com valores reais  $f$  forem ambas diferenciáveis em um intervalo e  $f(t) \neq 0$  no intervalo, prove que  $\mathbf{R}/f$  também será diferenciável no intervalo e

$$D_t \left[ \frac{\mathbf{R}(t)}{f(t)} \right] = \frac{f(t)\mathbf{R}'(t) - f'(t)\mathbf{R}(t)}{[f(t)]^2}$$

44. Prove que se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem vetores constantes e  $f$  e  $g$  forem funções integráveis, então

$$\int [\mathbf{A}f(t) + \mathbf{B}g(t)] dt = \mathbf{A} \int f(t) dt + \mathbf{B} \int g(t) dt$$

(Sugestão: expresse  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  em termos de  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ .)

## 14.5 COMPRIMENTO DE ARCO

Na Secção 6.3 obtivemos uma fórmula para encontrar o comprimento de arco do gráfico de uma função. Tal gráfico é um tipo especial de curva, pois o gráfico de uma função não pode ser interceptado por uma reta vertical em mais de um ponto.

Desenvolveremos agora um método para encontrar o comprimento de arco de outros tipos de curvas. Seja  $C$  a curva tendo como equações paramétricas

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t)$$

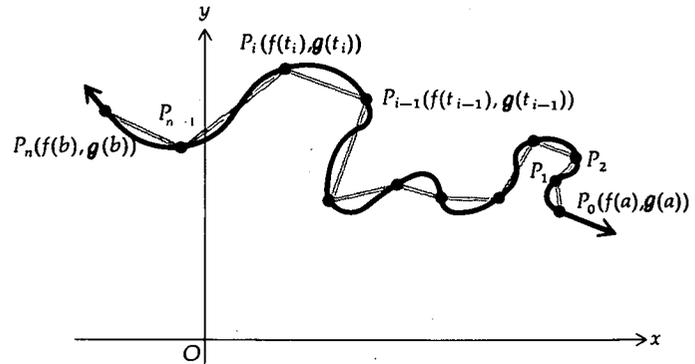


FIGURA 1

Suponha que  $f$  e  $g$  sejam contínuas no intervalo fechado  $[a, b]$ . Queremos especificar um número  $L$  para representar o número de unidades para o comprimento do arco de  $C$  entre  $t = a$  e  $t = b$ . Vamos proceder como na Seção 6.3

Seja  $\Delta$  uma partição do intervalo fechado  $[a, b]$ , formada pela divisão do intervalo em  $n$  subintervalos, sendo escolhidos  $(n - 1)$  números entre  $a$  e  $b$ . Sejam  $t_0 = a$  e  $t_n = b$ , e sejam  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  os números intermediários:

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$$

O  $i$ -ésimo subintervalo é  $[t_{i-1}, t_i]$  e  $\Delta_i t$  é a medida de seu comprimento, sendo  $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$ , e  $i = 1, 2, \dots, n$ . Seja  $\|\Delta\|$  a norma da partição, de tal forma que  $\Delta_i t \leq \|\Delta\|$ .

Há um ponto  $P_i(f(t_i), g(t_i))$  em  $C$  associado a cada número  $t_i$ . De cada ponto  $P_{i-1}$  traçamos um segmento de reta, ligando-o ao próximo ponto  $P_i$ . Veja a Figura 1. Vamos denotar por  $|\overline{P_{i-1}P_i}|$  a medida do comprimento do segmento de reta de  $P_{i-1}$  a  $P_i$ . Da fórmula da distância temos

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2} \quad (1)$$

A soma das medidas de comprimento dos  $n$  segmentos de reta é

$$\sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}|$$

Nossa noção intuitiva de comprimento de arco de  $t = a$  até  $t = b$  leva-nos a definir a medida do comprimento do arco como o limite da soma quando  $\|\Delta\|$  tende a zero.

#### 14.5.1 DEFINIÇÃO

Seja  $C$  a curva com equações paramétricas  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ . Vamos supor que exista um número  $L$  com a seguinte propriedade: para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que para toda partição  $\Delta$  do intervalo  $[a, b]$  para a qual  $\|\Delta\| < \delta$ , então

$$\left| \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| - L \right| < \epsilon$$

Assim escrevemos

$$L = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}|$$

e  $L$  é chamado o comprimento de arco da curva  $C$  do ponto  $(f(a), g(a))$  ao ponto  $(f(b), g(b))$ .

O arco da curva é retificável se o limite na Definição 14.5.1 existir. Se  $f'$  e  $g'$  forem contínuas em  $[a, b]$ , procederemos da seguinte forma, de modo a achar uma fórmula para calcular esse limite.

Como  $f'$  e  $g'$  são contínuas em  $[a, b]$ , elas são contínuas em cada subintervalo da partição  $\Delta$ . Assim, a hipótese do teorema do valor médio (Teorema 4.3.2) está satisfeita por  $f$  e  $g$  em cada  $[t_{i-1}, t_i]$ ; logo, existem os números  $z_i$  e  $w_i$  no intervalo aberto  $(t_{i-1}, t_i)$ , tais que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(z_i) \Delta_i t \quad \text{e} \quad g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(w_i) \Delta_i t$$

Substituindo em (1), obtemos

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{[f'(z_i) \Delta_i t]^2 + [g'(w_i) \Delta_i t]^2} \\ |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{[f'(z_i)]^2 + [g'(w_i)]^2} \Delta_i t \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $z_i$  e  $w_i$  estão no intervalo aberto  $(t_{i-1}, t_i)$ . Então, da Definição 14.5.1 e de (2), se o limite existir,

$$L = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(z_i)]^2 + [g'(w_i)]^2} \Delta_i t \quad (3)$$

A soma em (3) não é uma soma de Riemann pois  $z_i$  e  $w_i$  não são necessariamente os mesmos números. Assim sendo, não podemos aplicar a definição de integral definida para calcular o limite em (3). Há, contudo, um teorema que pode ser aplicado ao cálculo desse limite. Vamos enunciar o teorema, mas não daremos sua demonstração, pois ela está fora do contexto desse livro. Você poderá encontrá-la em textos de Cálculo Avançado.

#### 14.5.2 TEOREMA

Se as funções  $F$  e  $G$  forem contínuas no intervalo fechado  $[a, b]$ , então a função  $\sqrt{F^2 + G^2}$  também será contínua em  $[a, b]$ , e se  $\Delta$  for uma partição do intervalo  $[a, b]$  ( $\Delta: a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b$ ), e  $z_i, w_i$  forem números em  $(t_{i-1}, t_i)$ , então

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[F(z_i)]^2 + [G(w_i)]^2} \Delta_i t = \int_a^b \sqrt{[F(t)]^2 + [G(t)]^2} dt$$

Aplicando o Teorema 14.5.2 a (3), onde  $F$  é  $f'$  e  $G$  é  $g'$ , temos

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

Vamos enunciar esse resultado como um teorema.

#### 14.5.3 TEOREMA

Seja  $C$  a curva com equações paramétricas  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ , e vamos supor que  $f'$  e  $g'$  sejam contínuas no intervalo fechado  $[a, b]$ . Então, se  $L$  for o comprimento de arco da curva  $C$  entre os pontos  $(f(a), g(a))$ ,  $(f(b), g(b))$ ,

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

**EXEMPLO 1** Ache o comprimento de arco da curva com equações paramétricas

$$x = t^3 \quad \text{e} \quad y = 2t^2$$

nos seguintes casos: (a) de  $t = 0$  a  $t = 1$ ; (b) de  $t = -2$  a  $t = 0$ .

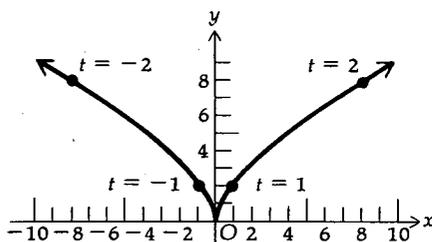


FIGURA 2

**Solução** Um esboço da curva está na Figura 2. Seja

$$f(t) = t^3 \quad g(t) = 2t^2$$

$$f'(t) = 3t^2 \quad g'(t) = 4t$$

A curva tem equações paramétricas  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ . Aplicamos o Teorema 14.5.3 nas partes (a) e (b), onde  $L_a$  é o comprimento de arco de  $t = 0$  a  $t = 1$  e  $L_b$  é o comprimento de arco de  $t = -2$  a  $t = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{(a) } L_a &= \int_0^1 \sqrt{9t^4 + 16t^2} dt & \text{(b) } L_b &= \int_{-2}^0 \sqrt{9t^4 + 16t^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{t^2} \sqrt{9t^2 + 16} dt & &= \int_{-2}^0 \sqrt{t^2} \sqrt{9t^2 + 16} dt \\ &= \int_0^1 t \sqrt{9t^2 + 16} dt & &= \int_{-2}^0 -t \sqrt{9t^2 + 16} dt \\ &= \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} (9t^2 + 16)^{3/2} \Big|_0^1 & &= -\frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} (9t^2 + 16)^{3/2} \Big|_{-2}^0 \\ &= \frac{1}{27} [(25)^{3/2} - (16)^{3/2}] & &= -\frac{1}{27} [(16)^{3/2} - (52)^{3/2}] \\ &= \frac{1}{27} (125 - 64) & &= \frac{1}{27} (104\sqrt{13} - 64) \\ &= \frac{61}{27} & &\approx 11,5 \end{aligned}$$

Observe que na terceira integral da parte (a) substituímos  $\sqrt{t^2}$  por  $t$ , pois  $0 \leq t \leq 1$ . Mas, na terceira integral da parte (b) substituímos  $\sqrt{t^2}$  por  $-t$ , pois  $-2 \leq t \leq 0$ .

Para a curva  $C$  tendo como equações paramétricas  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ , seja  $s$  o comprimento de arco de  $C$  do ponto  $(f(t_0), g(t_0))$  ao ponto  $(f(t), g(t))$  e vamos supor que  $s$  seja crescente enquanto  $t$  cresce. Então,  $s$  será uma função de  $t$  dada por

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2} du$$

Do primeiro teorema fundamental do Cálculo (Teorema 5.8.1),

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \quad (4)$$

Uma equação vetorial para  $C$  é

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad (5)$$

Como

$$\mathbf{R}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

então

$$\|\mathbf{R}'(t)\| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \quad (6)$$

Substituindo (6) em (4), obtemos

$$\|\mathbf{R}'(t)\| = \frac{ds}{dt}$$

Da equação acima segue que se  $s$  for o comprimento de arco da curva  $C$  tendo (5) como equação vetorial, medido entre um ponto fixo e o ponto  $(f(t), g(t))$ , onde  $s$  é crescente quando  $t$  cresce, então a derivada de  $s$  com relação a  $t$  será o módulo da derivada do vetor posição no ponto  $(f(t), g(t))$ .

Substituímos (6) na fórmula do Teorema 14.5.3 e obtemos  $L = \int_a^b \|\mathbf{R}'(t)\| dt$ . Assim, o Teorema 14.5.3 pode ser enunciado vetorialmente da seguinte maneira.

## 14.5.4 TEOREMA

Seja  $C$  a curva com equação vetorial  $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ , e vamos supor que  $f'$  e  $g'$  sejam contínuas no intervalo fechado  $[a, b]$ . Então, o comprimento de arco de  $C$ , traçado pelo ponto final da representação posicional de  $\mathbf{R}(t)$  quando  $t$  cresce de  $a$  até  $b$ , é determinado por

$$L = \int_a^b \|\mathbf{R}'(t)\| dt$$

**EXEMPLO 2** Ache o comprimento de arco traçado pelo ponto final da representação posicional de  $\mathbf{R}(t)$  quando  $t$  cresce de 1 para 4 se

$$\mathbf{R}(t) = e^t \sin t \mathbf{i} + e^t \cos t \mathbf{j}$$

**Solução**

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(t) &= (e^t \sin t + e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \cos t - e^t \sin t)\mathbf{j} \\ \|\mathbf{R}'(t)\| &= \sqrt{(e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + (e^t \cos t - e^t \sin t)^2} \\ &= \sqrt{e^{2t} \sqrt{\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t + \cos^2 t - 2 \sin t \cos t + \sin^2 t}} \\ &= e^t \sqrt{2} \end{aligned}$$

Do Teorema 14.5.4,

$$\begin{aligned} L &= \int_1^4 \sqrt{2} e^t dt \\ &= \sqrt{2} e^t \Big|_1^4 \\ &= \sqrt{2}(e^4 - e) \end{aligned}$$

Outra fórmula do Teorema 14.5.3 para o comprimento de arco de uma curva  $C$  tendo como equações paramétricas  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ , é obtida, substituindo  $f'(t)$  por  $\frac{dx}{dt}$  e  $g'(t)$  por  $\frac{dy}{dt}$ , o que nos dará

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (7)$$

Vamos supor que queiramos encontrar o comprimento de arco de uma curva  $C$  cuja equação polar seja  $r = F(\theta)$ . Se  $(x, y)$  for a representação cartesiana de um ponto  $P$  em  $C$  e  $(r, \theta)$  for a representação polar de  $P$ , então

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta$$

Substituindo  $r$  por  $F(\theta)$  nessas duas equações, temos

$$x = F(\theta) \cos \theta \quad \text{e} \quad y = F(\theta) \sin \theta$$

Tais equações podem ser consideradas como equações paramétricas de  $C$ , onde  $\theta$  é o parâmetro, em vez de  $t$ . Logo, se  $F'$  for contínua no intervalo fechado  $[\alpha, \beta]$ , obtemos de (7) a fórmula para o comprimento de arco da curva  $C$  cuja

equação polar é  $r = F(\theta)$ , tomando  $t = \theta$ . Assim,

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad (8)$$

Como  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ ,

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta \frac{dr}{d\theta} - r \sin \theta \quad \text{and} \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta \frac{dr}{d\theta} + r \cos \theta$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} &= \sqrt{\left(\cos \theta \frac{dr}{d\theta} - r \sin \theta\right)^2 + \left(\sin \theta \frac{dr}{d\theta} + r \cos \theta\right)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - 2r \sin \theta \cos \theta \frac{dr}{d\theta} + r^2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + 2r \sin \theta \cos \theta \frac{dr}{d\theta} + r^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) r^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} \end{aligned}$$

Substituindo em (8), obtemos

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta \quad (9)$$

**EXEMPLO 3** Ache o comprimento da cardióide  $r = 2(1 + \cos \theta)$ .

**Solução** Um esboço da curva está na Figura 3. Para obter o comprimento da curva toda podemos tomar  $\theta$  com valores de 0 a  $2\pi$ , ou então podemos usar a simetria da curva e calcular a metade do comprimento, fazendo com que  $\theta$  assumia apenas os valores entre 0 e  $\pi$ .

Como  $r = 2(1 + \cos \theta)$ ,  $\frac{dr}{d\theta} = -2 \sin \theta$ . Substituindo em (9), integrando de 0 a  $\pi$  e multiplicando por 2, temos

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^\pi \sqrt{(-2 \sin \theta)^2 + 4(1 + \cos \theta)^2} d\theta \\ &= 4 \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 \theta + 1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta} d\theta \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta \end{aligned}$$

Para calcular essa integral, usamos a identidade  $\cos^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$  que dá  $\sqrt{1 + \cos \theta} = \sqrt{2} |\cos \frac{1}{2}\theta|$ . Como  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \frac{1}{2}\theta \leq \frac{1}{2}\pi$ ; assim,  $\cos \frac{1}{2}\theta \geq 0$ . Logo,  $\sqrt{1 + \cos \theta} = \sqrt{2} \cos \frac{1}{2}\theta$ . Assim,

$$\begin{aligned} L &= 4\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{2} \cos \frac{1}{2}\theta d\theta \\ &= 16 \sin \frac{1}{2}\theta \Big|_0^\pi \\ &= 16 \end{aligned}$$

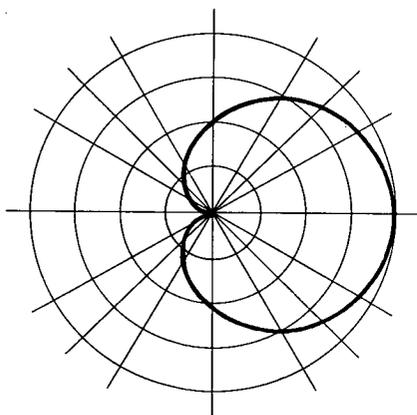


FIGURA 3

**EXERCÍCIOS 14.5**

Nos Exercícios de 1 a 28, ache o comprimento do arco dado. Quando aparecer  $a$ ,  $a > 0$ .

1.  $x = \frac{1}{2}t^2 + t, y = \frac{1}{2}t^2 - t$ ; de  $t = 0$  a  $t = 1$ .
2.  $x = 3t^2, y = 2t^3$ ; de  $t = 0$  a  $t = 3$ .
3.  $x = t^2 + 2t, y = t^2 - 2t$ ; de  $t = 0$  a  $t = 2$ .
4.  $x = t^3, y = 3t^2$ ; de  $t = -2$  a  $t = 0$ .
5.  $\mathbf{R}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j}$ ; de  $t = 1$  a  $t = 2$ .
6.  $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + \cosh t\mathbf{j}$ ; de  $t = 0$  a  $t = 3$ .
7.  $\mathbf{R}(t) = 3e^{2t}\mathbf{i} - 4e^{2t}\mathbf{j}$ ; de  $t = 0$  a  $t = \ln 5$ .
8.  $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 3)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ ; de  $t = 1$  a  $t = 4$ .
9.  $\mathbf{R}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j}$ ; de  $t = 0$  a  $t = 1$ .
10.  $\mathbf{R}(t) = \ln \sin t \mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j}$ ; de  $t = \frac{1}{6}\pi$  a  $t = \frac{1}{2}\pi$ .
11.  $\mathbf{R}(t) = \operatorname{tg}^{-1} t \mathbf{i} + \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1)\mathbf{j}$ ; de  $t = 0$  a  $t = 1$ .
12.  $\mathbf{R}(t) = a(\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + a(\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$ ; de  $t = 0$  a  $t = \frac{1}{3}\pi$ .
13. A hipociclóide de quatro vértices inteira:  
 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ .
14.  $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t$ ; de  $t = 0$  a  $t = \pi$ .
15.  $x = 4 \sin 2t, y = 4 \cos 2t$ ; de  $t = 0$  a  $t = \pi$ .

16. Um arco da cicloide:  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ .
17. A tratriz

$$x = t - a \operatorname{tgh} \frac{t}{a} \quad y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a};$$

de  $t = -a$  a  $t = 2a$ .

18. A circunferência descrita por:  $\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$ .
19. A circunferência descrita por:  $r = 5 \cos \theta$ .
20. A circunferência descrita por:  $r = a \sin \theta$ .
21. A circunferência descrita por:  $r = a$ .
22. A curva inteira:  $r = 1 - \sin \theta$ .
23. A curva inteira:  $r = 3 \cos^2 \frac{1}{2}\theta$ .
24.  $r = a\theta$ ; de  $\theta = 0$  a  $\theta = 2\pi$ .
25.  $r = e^{2\theta}$ ; de  $\theta = 0$  a  $\theta = 4$ .
26.  $r = a\theta^2$ ; de  $\theta = 0$  a  $\theta = \pi$ .
27.  $r = a \sin^3 \frac{1}{3}\theta$ ; de  $\theta = 0$  a  $\theta = \theta_1$ .
28.  $r = \sin^2 \frac{1}{2}\theta$ ; de  $\theta = 0$  a  $\theta = \frac{1}{2}\pi$ .
29. Ache a distância percorrida por um percevejo em um pneu de bicicleta se o raio do pneu for 40 cm e a bicicleta percorrer uma distância de 5π m. (Sugestão: a trajetória do percevejo é uma cicloide.)

**14.6 OS VETORES UNITÁRIOS DA TANGENTE E DA NORMAL E O COMPRIMENTO DE ARCO COMO UM PARÂMETRO**

A cada ponto da curva no plano agora associamos dois outros vetores unitários, o *vetor tangente unitário* e o *vetor normal unitário*. Esses valores aparecem em muitas aplicações de funções com valores vetoriais.

**14.6.1 DEFINIÇÃO**

Se  $\mathbf{R}(t)$  for o vetor posição da curva  $C$  num ponto  $P$  de  $C$ , então o **vetor tangente unitário** de  $C$  em  $P$ , denotado por  $\mathbf{T}(t)$ , será o vetor unitário na direção de  $D_t\mathbf{R}(t)$ , se  $D_t\mathbf{R}(t) \neq 0$ .

O vetor unitário na direção de  $D_t\mathbf{R}(t)$  é dado por  $D_t\mathbf{R}(t)/\|D_t\mathbf{R}(t)\|$ ; assim,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|} \tag{1}$$

Como  $\mathbf{T}(t)$  é um vetor unitário, segue do Teorema 14.4.11 que  $D_t\mathbf{T}(t)$  deve ser ortogonal a  $\mathbf{T}(t)$ .  $D_t\mathbf{T}(t)$  não é necessariamente um vetor unitário. Entretanto, o vetor  $D_t\mathbf{T}(t)/\|D_t\mathbf{T}(t)\|$  é de módulo unitário e tem a mesma direção que  $D_t\mathbf{T}(t)$ , logo  $D_t\mathbf{T}(t)/\|D_t\mathbf{T}(t)\|$  é um vetor unitário ortogonal a  $\mathbf{T}(t)$ , sendo chamado de *vetor normal unitário*.

**14.6.2 DEFINIÇÃO**

Se  $\mathbf{T}(t)$  for o vetor tangente unitário da curva  $C$  no ponto  $P$ , então o **vetor normal unitário** denotado por  $\mathbf{N}(t)$ , será o vetor unitário na direção de  $D_t\mathbf{T}(t)$ .

Da Definição 14.6.2 e da discussão anterior,

$$\mathbf{N}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{T}(t)\|} \tag{2}$$

**EXEMPLO 1** Dada a curva descrita pelas equações paramétricas

$$x = t^3 - 3t \quad \text{e} \quad y = 3t^2$$

ache  $\mathbf{T}(t)$  e  $\mathbf{N}(t)$ . Faça um esboço de uma parte da curva em  $t = 2$  e trace as representações de  $\mathbf{T}(2)$  e  $\mathbf{N}(2)$  tendo como ponto inicial  $t = 2$ .

**Solução** Uma equação vetorial da curva é

$$\mathbf{R}(t) = (t^3 - 3t)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$$

Assim,

$$\begin{aligned} D_t\mathbf{R}(t) &= (3t^2 - 3)\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} & \|D_t\mathbf{R}(t)\| &= \sqrt{(3t^2 - 3)^2 + 36t^2} \\ & & &= \sqrt{9(t^4 + 2t^2 + 1)} \\ & & &= 3(t^2 + 1) \end{aligned}$$

De (1),

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{D_t\mathbf{R}(t)}{\|D_t\mathbf{R}(t)\|} \\ &= \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{j} \end{aligned}$$

Diferenciando  $\mathbf{T}(t)$  em relação a  $t$  obtemos

$$D_t\mathbf{T}(t) = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}\mathbf{i} + \frac{2 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2}\mathbf{j}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|D_t\mathbf{T}(t)\| &= \sqrt{\frac{16t^2}{(t^2 + 1)^4} + \frac{4 - 8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}} \\ &= \sqrt{\frac{4 + 8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}} \\ &= \sqrt{\frac{4(t^2 + 1)^2}{(t^2 + 1)^4}} \\ &= \frac{2}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

De (2),

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(t) &= \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{T}(t)\|} \\ &= \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}\mathbf{j} \end{aligned}$$

Determinamos  $\mathbf{R}(t)$ ,  $\mathbf{T}(t)$  e  $\mathbf{N}(t)$ , para  $t = 2$ .

$$\mathbf{R}(2) = 2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} \quad \mathbf{T}(2) = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} \quad \mathbf{N}(2) = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$$

O esboço pedido está na Figura 1.

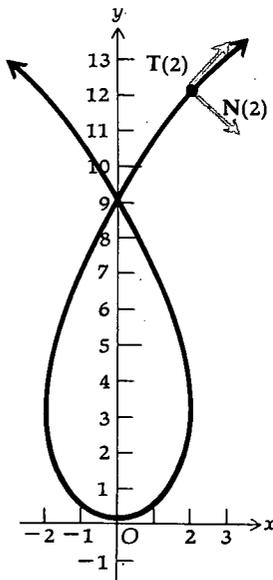


FIGURA 1

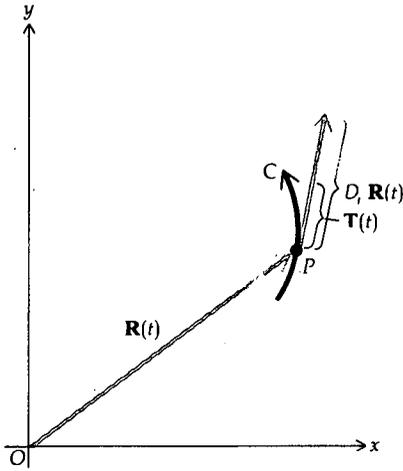


FIGURA 2

De (1),

$$D_t \mathbf{R}(t) = \|D_t \mathbf{R}(t)\| \mathbf{T}(t) \tag{3}$$

Essa equação expressa o vetor  $D_t \mathbf{R}(t)$  como o produto de um escalar pelo vetor tangente unitário. A Figura 2 mostra parte de uma curva  $C$  com a representação posicional de  $\mathbf{R}(t)$  e as representações de  $\mathbf{T}(t)$  e  $D_t \mathbf{R}(t)$  cujos pontos iniciais estão no ponto  $P$  em  $C$ .

Agora usaremos (3) para calcular  $D_t^2 \mathbf{R}(t)$ , aplicando o Teorema 14.4.8.

$$D_t^2 \mathbf{R}(t) = (D_t \|D_t \mathbf{R}(t)\|) \mathbf{T}(t) + \|D_t \mathbf{R}(t)\| (D_t \mathbf{T}(t)) \tag{4}$$

De (2),

$$D_t \mathbf{T}(t) = \|D_t \mathbf{T}(t)\| \mathbf{N}(t)$$

Substituindo em (4), obtemos

$$D_t^2 \mathbf{R}(t) = (D_t \|D_t \mathbf{R}(t)\|) \mathbf{T}(t) + (\|D_t \mathbf{R}(t)\| \|D_t \mathbf{T}(t)\|) \mathbf{N}(t) \tag{5}$$

Essa equação expressa o vetor  $D_t^2 \mathbf{R}(t)$  como a soma do vetor tangente unitário multiplicado por um escalar e do vetor normal unitário multiplicado por um escalar. O coeficiente de  $\mathbf{T}(t)$  no segundo membro de (5) é a componente de  $D_t^2 \mathbf{R}(t)$  na direção do vetor tangente unitário. O coeficiente de  $\mathbf{N}(t)$  no segundo membro de (5) é a componente de  $D_t^2 \mathbf{R}(t)$  na direção do vetor normal unitário.

A Figura 3 mostra a representação posicional de  $\mathbf{R}(t)$  e a mesma parte da curva  $C$ , mostrada na Figura 2. Também na Figura 3 estão as representações dos seguintes vetores, todos eles tendo os pontos iniciais no ponto  $P$  em  $C$ :

$$D_t^2 \mathbf{R}(t) \quad \mathbf{T}(t) \quad (D_t \|D_t \mathbf{R}(t)\|) \mathbf{T}(t) \quad \mathbf{N}(t) \quad (\|D_t \mathbf{R}(t)\| \|D_t \mathbf{T}(t)\|) \mathbf{N}(t)$$

Observe que a representação do vetor normal unitário  $\mathbf{N}(t)$  está no lado côncavo da curva. Esse fato está provado em geral, na Seção 14.7.

Algumas vezes, em vez de um parâmetro  $t$ , queremos usar o parâmetro  $s$ , que é o comprimento do arco compreendido entre um ponto arbitrariamente escolhido  $P_0(x_0, y_0)$  na curva  $C$  e o ponto  $P(x, y)$  na mesma curva. Vamos supor que  $s$  seja crescente quando  $t$  cresce; assim,  $s$  será positivo se o comprimento do arco for medido na direção crescente de  $t$  e será negativo, se o comprimento de arco for medido na direção oposta. Portanto,  $s$  é uma distância orientada. Também,  $\frac{ds}{dt} > 0$ . A cada valor de  $s$  corresponde um único ponto  $P$  sobre a curva  $C$ . Conseqüentemente, as coordenadas de  $P$  são funções de  $s$ , e  $s$  é uma função de  $t$ . Da Seção 14.5 temos

$$\frac{ds}{dt} > 0$$

substituindo em (3), obtemos

$$\|D_t \mathbf{R}(t)\| = \frac{ds}{dt}$$

Substituindo em (3), obtemos

$$D_t \mathbf{R}(t) = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}(t)$$

Se o parâmetro for  $s$  em vez de  $t$ , temos dessa equação, tomando  $t = s$  e levando em conta que  $\frac{ds}{ds} = 1$ ,

$$D_s \mathbf{R}(s) = \mathbf{T}(s)$$

Vamos enunciar esse resultado como um teorema.

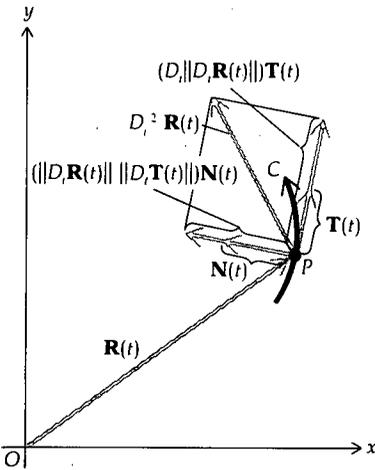


FIGURA 3

## 14.6.3 TEOREMA

Se a equação vetorial de uma curva  $C$  for  $\mathbf{R}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j}$ , onde  $s$  é a medida do comprimento de arco entre um dado ponto  $P_0$  em  $C$  e o ponto  $P$ , então o vetor tangente unitário de  $C$  em  $P$  será dado por

$$\mathbf{T}(s) = D_s \mathbf{R}(s)$$

se existir.

Suponha agora que as equações paramétricas de uma curva  $C$  envolvam um parâmetro  $t$ , e queremos encontrar as equações paramétricas de  $C$ , com  $s$ , o comprimento de arco medido a partir de um ponto fixo, como parâmetro. Frequentemente as operações envolvidas são bastante complicadas. Mas, o método usado será ilustrado no exemplo a seguir.

**EXEMPLO 2** Suponha que as equações paramétricas da curva  $C$  sejam

$$x = t^3 \quad e \quad y = t^2 \quad t \geq 0$$

Ache as equações paramétricas de  $C$  tendo  $s$  como um parâmetro, onde  $s$  é o comprimento de arco medido a partir do ponto onde  $t = 0$ .

**Solução** O ponto onde  $t = 0$  é a origem. Uma equação vetorial de  $C$  é

$$\mathbf{R}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

Como  $\frac{ds}{dt} = \|D_t \mathbf{R}(t)\|$ , diferenciamos o vetor acima e obtemos

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{R}(t) &= 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \\ \|D_t \mathbf{R}(t)\| &= \sqrt{9t^4 + 4t^2} \\ &= \sqrt{t^2} \sqrt{9t^2 + 4} \\ &= t\sqrt{9t^2 + 4} \quad (\text{pois } t \geq 0) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= t\sqrt{9t^2 + 4} \\ s &= \int t\sqrt{9t^2 + 4} dt \\ &= \frac{1}{18} \int \sqrt{9t^2 + 4} (18t dt) \\ &= \frac{1}{27} (9t^2 + 4)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Como  $s = 0$  quando  $t = 0$ , obtemos  $C = -\frac{8}{27}$ . Logo,

$$s = \frac{1}{27} (9t^2 + 4)^{3/2} - \frac{8}{27}$$

Resolvendo para  $t$  em termos de  $s$ , temos

$$\begin{aligned} (9t^2 + 4)^{3/2} &= 27s + 8 \\ 9t^2 + 4 &= (27s + 8)^{2/3} \end{aligned}$$

Como  $t \geq 0$ ,

$$t = \frac{1}{3} \sqrt{(27s + 8)^{2/3} - 4}$$

Substituindo esse valor de  $t$  nas equações paramétricas de  $C$ , obtemos

$$x = \frac{1}{27} [(27s + 8)^{2/3} - 4]^{3/2} \quad e \quad y = \frac{1}{9} [(27s + 8)^{2/3} - 4] \quad (6)$$

Como  $D_s \mathbf{R}(s) = \mathbf{T}(s)$ , então se  $\mathbf{R}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{T}(s) = \left(\frac{dx}{ds}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{dy}{ds}\right)\mathbf{j}$ . Assim, como  $\mathbf{T}(s)$  é um vetor unitário,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \quad (7)$$

A equação (7) pode ser usada para testar as equações (6). Esse teste será deixado como exercício (veja o Exercício 17).

### EXERCÍCIOS 14.6

Nos Exercícios de 1 a 10, ache, para a curva dada,  $\mathbf{T}(t)$  e  $\mathbf{N}(t)$  e, em  $t = t_1$ , faça um esboço de uma parte da curva e trace as representações de  $\mathbf{T}(t_1)$  e  $\mathbf{N}(t_1)$  com ponto inicial em  $t = t_1$ .

1.  $x = \frac{1}{3}t^3 - t$ ,  $y = t^2$ ;  $t_1 = 2$
2.  $x = \frac{1}{2}t^2$ ,  $y = \frac{1}{3}t^3$ ;  $t_1 = 1$
3.  $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$ ;  $t_1 = 0$
4.  $\mathbf{R}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}$ ;  $t_1 = 0$
5.  $\mathbf{R}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j}$ ;  $t_1 = \frac{1}{2}\pi$
6.  $x = e^t \sin t$ ,  $y = e^t \cos t$ ;  $t_1 = 0$
7.  $x = \cos kt$ ,  $y = \sin kt$ ,  $k > 0$ ;  $t_1 = \pi/k$
8.  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ ;  $t_1 = \pi$
9.  $\mathbf{R}(t) = \ln \cos t\mathbf{i} + \ln \sin t\mathbf{j}$ ,  $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ ;  $t_1 = \frac{1}{4}\pi$
10.  $\mathbf{R}(t) = t \cos t\mathbf{i} + t \sin t\mathbf{j}$ ;  $t_1 = 0$

Nos Exercícios de 11 a 16, ache  $\mathbf{T}(t)$  e  $\mathbf{N}(t)$ .

11.  $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$
  12.  $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + \cosh t\mathbf{j}$ ;  $t \geq 0$
  13.  $\mathbf{R}(t) = \sin^3 t\mathbf{i} + \cos^3 t\mathbf{j}$ ;  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$
  14.  $\mathbf{R}(t) = \sqrt{1+t^2}\mathbf{i} + t\mathbf{j}$
  15.  $\mathbf{R}(t) = 4t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$
  16.  $\mathbf{R}(t) = (1+t)\mathbf{i} + \ln \cos t\mathbf{j}$
17. Teste as equações (6) da solução do Exemplo 2, usando a equação (7).

Nos Exercícios de 18 a 23, ache as equações paramétricas da curva tendo o comprimento de arco  $s$  como parâmetro, onde  $s$  é medido a partir do ponto onde  $t = 0$ . Comprove o seu resultado usando a equação (7).

18.  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$
19.  $x = 2 + \cos t$ ,  $y = 3 + \sin t$
20.  $x = 2(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = 2(\sin t - t \cos t)$
21.  $y = x^{3/2}$
22.  $x = t^2 - 1$ ,  $y = \frac{1}{3}t^3$
23. Um vértice da hipociclóide de quatro vértices:

$$\mathbf{R}(t) = a \cos^3 t\mathbf{i} + a \sin^3 t\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi.$$

24. Dada a cicloide  $x = 2(t - \sin t)$ ,  $y = 2(1 - \cos t)$ , expresse o comprimento de arco  $s$  como uma função de  $t$ , onde  $s$  é medido a partir do ponto onde  $t = 0$ .
25. Dada a curva com equações paramétricas  $x = e^t \cos t$  e  $y = e^t \sin t$ , expresse o comprimento de arco  $s$  como uma função de  $t$ , onde  $s$  é medido a partir do ponto onde  $t = 0$ .
26. Se a equação vetorial da curva  $C$  for  $\mathbf{R}(t) = 2 \sin t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j}$ , ache o co-seno do ângulo entre os vetores  $\mathbf{R}(\frac{1}{6}\pi)$  e  $\mathbf{T}(\frac{1}{6}\pi)$ .
27. Se a curva  $C$  tiver  $\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$  como equação vetorial, ache o co-seno do ângulo entre os vetores  $\mathbf{R}(2)$  e  $\mathbf{T}(2)$ .
28. Se a curva  $C$  tiver  $\mathbf{R}(t) = (4 - 3t)\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$  como equação vetorial, ache a medida em radianos do ângulo entre os vetores  $\mathbf{N}(1)$  e  $D_t^2\mathbf{R}(1)$ .

## 14.7 CURVATURA

A geometria diferencial e o movimento curvilíneo (movimento ao longo de uma trajetória curva) envolvem o estudo de curvas através do cálculo de funções com valores vetoriais. Um conceito importante nesse estudo é o de *curvatura*, que dá a taxa de variação da direção de uma curva em relação à variação em seu comprimento. Relacionado com esse conceito está o ângulo que dá a direção do vetor tangente unitário associado à curva  $C$ . Portanto, seja  $\phi$  o ângulo, em radianos, medido a partir da direção do eixo  $x$  positivo no sentido anti-horário até a direção do vetor tangente unitário  $\mathbf{T}(t)$ ; veja a Figura 1. Calculamos  $D_\phi \mathbf{T}(t)$ . Como  $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$ , segue da equação (5) da Seção 14.1 que

$$\mathbf{T}(t) = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}$$

Diferenciando em relação a  $\phi$ , obtemos

$$D_\phi \mathbf{T}(t) = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}$$

Uma vez que  $D_\phi \mathbf{T}(t) = \sqrt{(-\sin \phi)^2 + (\cos \phi)^2}$ , que é 1,  $D_\phi \mathbf{T}(t)$  é um vetor unitário. Mais tarde, nesta seção, mostraremos a relação entre o vetor  $D_\phi \mathbf{T}(t)$  e o vetor normal unitário  $\mathbf{N}(t)$ .

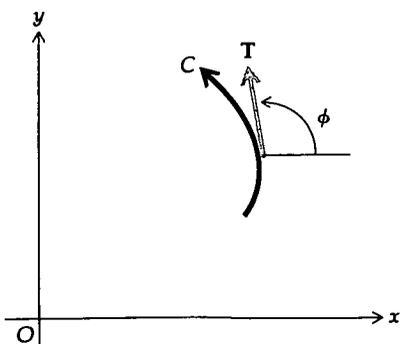


FIGURA 1

Para chegar à definição de curvatura, vamos considerar o vetor  $D_s \mathbf{T}(t)$ , onde  $s$  é o comprimento de arco medido desde um ponto arbitrariamente escolhido em  $C$  ao ponto  $P$ , com  $s$  crescente quando  $t$  cresce. Pela regra da cadeia (Teorema 14.4.9),

$$D_s \mathbf{T}(t) = D_\phi \mathbf{T}(t) \frac{d\phi}{ds}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|D_s \mathbf{T}(t)\| &= \left\| D_\phi \mathbf{T}(t) \frac{d\phi}{ds} \right\| \\ &= \|D_\phi \mathbf{T}(t)\| \left| \frac{d\phi}{ds} \right| \end{aligned}$$

Como  $D_\phi \mathbf{T}(t)$  é um vetor unitário,  $\|D_\phi \mathbf{T}(t)\| = 1$ ; assim,

$$\boxed{\|D_s \mathbf{T}(t)\| = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|} \tag{1}$$

O número  $\left| \frac{d\phi}{ds} \right|$  é o valor absoluto da taxa de variação da medida do ângulo que dá a direção do vetor tangente unitário  $\mathbf{T}(t)$  num ponto da curva em relação à medida de arco ao longo da curva. Esse número é o que definiremos como a curvatura da curva no ponto; contudo, antes de dar a definição formal, vamos mostrar que ele é consistente com a nossa noção intuitiva de curvatura. Por exemplo, num ponto  $P$  em  $C$ ,  $\phi$  é a medida em radianos do ângulo que dá a direção do vetor  $\mathbf{T}(t)$ , e  $s$  é o comprimento de arco em  $C$  desde  $P_0$  até  $P$ . Seja  $Q$  o ponto em  $C$  para o qual a medida em radianos do ângulo que dá a direção de  $\mathbf{T}(t + \Delta t)$  em  $Q$  é  $\phi + \Delta\phi$ , e  $s + \Delta s$  é o comprimento de arco de  $P_0$  a  $Q$ . Então, o comprimento de arco de  $P$  a  $Q$  será  $\Delta s$  e a razão  $\Delta\phi/\Delta s$  parece ser uma boa medida do que consideramos intuitivamente ser a *curvatura média* ao longo do arco  $PQ$ .

► **ILUSTRAÇÃO 1** Veja a Figura 2(a), (b), (c) e (d): em (a)  $\Delta\phi > 0$  e  $\Delta s > 0$ ; em (b)  $\Delta\phi > 0$  e  $\Delta s < 0$ ; em (c)  $\Delta\phi < 0$  e  $\Delta s > 0$ ; e em (d)  $\Delta\phi < 0$  e  $\Delta s < 0$ .

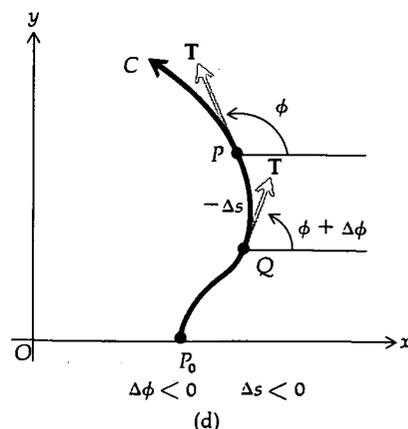
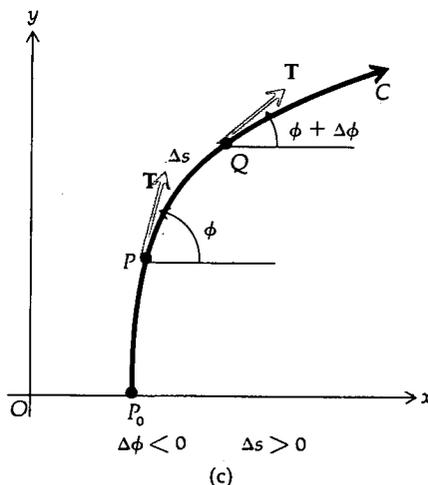
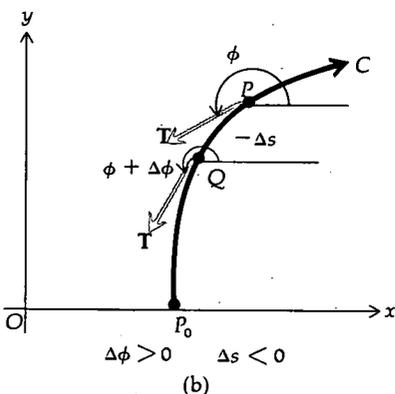
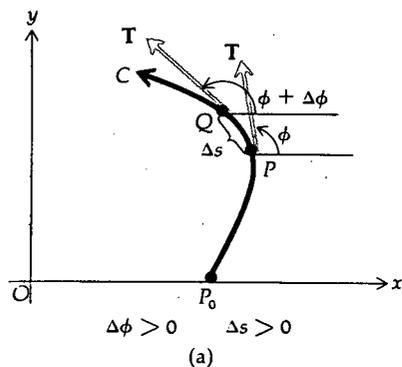


FIGURA 2

Vamos definir agora o *vetor curvatura*, seu módulo e a curvatura de uma curva em um ponto.

## 14.7.1 DEFINIÇÃO

Se  $\mathbf{T}(t)$  for o vetor tangente unitário à curva  $C$  no ponto  $P$ ,  $s$  for o comprimento de arco medido a partir de um ponto arbitrariamente escolhido em  $C$  até  $P$ , e  $s$  for crescente quando  $t$  cresce, então o **vetor curvatura** de  $C$  em  $P$ , denotado por  $\mathbf{K}(t)$ , será dado por

$$\mathbf{K}(t) = D_s \mathbf{T}(t)$$

A **curvatura** de  $C$  em  $P$ , denotada por  $K(t)$ , é o módulo do vetor curvatura, isto é

$$K(t) = \|D_s \mathbf{T}(t)\|$$

Observe que substituindo (1) na fórmula para  $K(t)$  da Definição 14.7.1, poderíamos também definir a curvatura  $K(t)$  como sendo

$$K(t) = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$$

Para encontrar o vetor curvatura e a curvatura para uma determinada curva é conveniente ter uma fórmula que expresse o vetor curvatura em termos das derivadas em relação a  $t$ . Pela regra da cadeia,

$$D_t \mathbf{T}(t) = D_s \mathbf{T}(t) \frac{ds}{dt}$$

Da Secção 14.5,  $\frac{ds}{dt} = \|D_t \mathbf{R}(t)\|$ . Assim,

$$D_t \mathbf{T}(t) = [D_s \mathbf{T}(t)] \|D_t \mathbf{R}(t)\|$$

$$D_s \mathbf{T}(t) = \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|}$$

Substituindo na fórmula para  $\mathbf{K}(t)$  da Definição 14.7.1, obtemos

$$\mathbf{K}(t) = \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \quad (2)$$

Como  $K(t) = \|\mathbf{K}(t)\|$ , a curvatura é dada por

$$K(t) = \left\| \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \right\| \quad (3)$$

**EXEMPLO 1** Dada a circunferência com raio  $a$ :

$$x = a \cos t \quad y = a \sin t \quad a > 0$$

ache o vetor curvatura e a curvatura em qualquer  $t$ .

**Solução** A equação vetorial da circunferência é

$$\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$$

Assim,

$$D_t \mathbf{R}(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} \quad \|D_t \mathbf{R}(t)\| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} = a$$

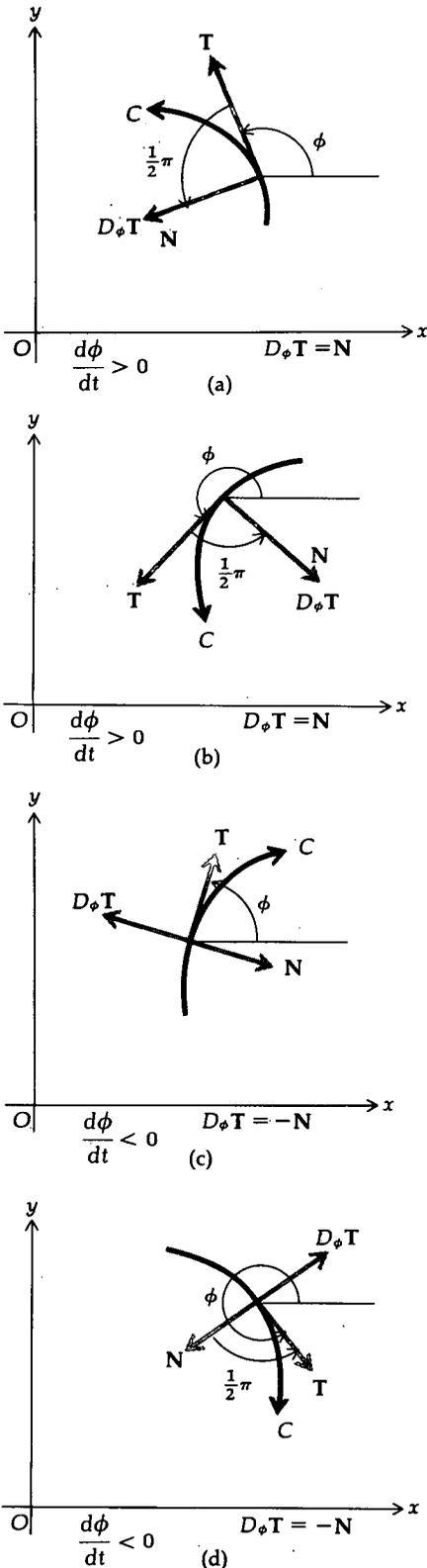


FIGURA 3

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{D_t \mathbf{R}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} & D_t \mathbf{T}(t) &= -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} \\ &= -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} \\ \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} &= -\frac{\cos t}{a} \mathbf{i} - \frac{\sin t}{a} \mathbf{j} \end{aligned}$$

Portanto, o vetor curvatura e a curvatura são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t) &= -\frac{1}{a} \cos t \mathbf{i} - \frac{1}{a} \sin t \mathbf{j} & K(t) &= \|\mathbf{K}(t)\| \\ & & &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

O resultado do Exemplo 1 estabelece que a curvatura de uma circunferência é constante, como seria de se esperar. Além disso, é o inverso do raio.

Vamos agora retornar ao vetor unitário  $D_\phi \mathbf{T}(t)$  definido por

$$D_\phi \mathbf{T}(t) = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j} \tag{4}$$

Como  $\mathbf{T}(t)$  tem módulo constante, segue do Teorema 14.4.11 que  $D_\phi \mathbf{T}(t)$  é ortogonal a  $\mathbf{T}(t)$ . Substituindo  $-\sin \phi$  por  $\cos(\frac{1}{2}\pi + \phi)$  e  $\cos \phi$  por  $\sin(\frac{1}{2}\pi + \phi)$ , escrevemos (4) como

$$D_\phi \mathbf{T}(t) = \cos(\frac{1}{2}\pi + \phi) \mathbf{i} + \sin(\frac{1}{2}\pi + \phi) \mathbf{j}$$

Assim, o vetor  $D_\phi \mathbf{T}(t)$  é um vetor unitário ortogonal a  $\mathbf{T}(t)$ , fazendo um ângulo com  $\mathbf{T}(t)$  de  $\frac{1}{2}\pi$ , no sentido anti-horário. O vetor normal unitário  $\mathbf{N}(t)$  também é ortogonal a  $\mathbf{T}(t)$ . Pela regra da cadeia,

$$D_t \mathbf{T}(t) = D_\phi \mathbf{T}(t) \frac{d\phi}{dt}$$

Como  $\mathbf{N}(t)$  e  $D_t \mathbf{T}(t)$  têm o mesmo sentido, segue dessa equação que o sentido de  $\mathbf{N}(t)$  será o mesmo de  $D_\phi \mathbf{T}(t)$  se  $\frac{d\phi}{dt} > 0$  (isto é, se  $\mathbf{T}(t)$  gira no sentido anti-horário quando  $t$  for crescente), e o sentido de  $\mathbf{N}(t)$  é oposto ao de  $D_\phi \mathbf{T}(t)$  se  $\frac{d\phi}{dt} < 0$  (isto é, se  $\mathbf{T}(t)$  gira no sentido horário quando  $t$  for crescente). Como ambos  $D_\phi \mathbf{T}(t)$  e  $\mathbf{N}(t)$  são vetores unitários, concluímos que

$$D_\phi \mathbf{T}(t) = \begin{cases} \mathbf{N}(t) & \text{se } \frac{d\phi}{dt} > 0 \\ -\mathbf{N}(t) & \text{se } \frac{d\phi}{dt} < 0 \end{cases}$$

► **ILUSTRAÇÃO 2** Na Figura 3(a), (b), (c) e (d) várias situações são mostradas; em (a) e (b),  $\frac{d\phi}{dt} > 0$ , e em (c) e (d),  $\frac{d\phi}{dt} < 0$ . A direção positiva ao longo da curva  $C$  está indicada pela ponta da seta em  $C$ . Em cada figura estão desenhados os ângulos medidos em  $\theta$  rad e as representações dos vetores  $\mathbf{T}(t)$ ,  $D_\phi \mathbf{T}(t)$  e  $\mathbf{N}(t)$ .

Observe, na Figura 3, que a representação do vetor normal unitário  $\mathbf{N}(t)$  está sempre no lado côncavo da curva.

Suponhamos que exista uma curva  $C$  e que num dado ponto  $P$  a curvatura exista, sendo  $K(t)$ , onde  $K(t) \neq 0$ . Consideremos a circunferência que é tangente à curva  $C$  em  $P$  e tem curvatura  $K(t)$  em  $P$ . Do Exemplo 1, o raio dessa circunferência é  $1/K(t)$  e o centro está sobre a reta perpendicular à reta tangente na direção de  $\mathbf{N}(t)$ . Essa circunferência é chamada de **circunferência de curvatura** e seu raio é o **raio da curvatura** de  $C$  em  $P$ . A circunferência de curvatura é chamada, às vezes, de **circunferência osculadora**.

## 14.7.2 DEFINIÇÃO

Se  $K(t)$  for a curvatura de uma curva  $C$  num ponto  $P$  e  $K(t) \neq 0$ , então o **raio de curvatura** de  $C$  em  $P$ , denotado por  $\rho(t)$ , será definido por

$$\rho(t) = \frac{1}{K(t)}$$

**EXEMPLO 2** Dado que uma equação vetorial de uma curva  $C$  é

$$\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$$

- (a) Ache o vetor tangente unitário, a curvatura e o raio de curvatura em  $t = 1$ .  
 (b) Faça um esboço de parte da curva, do vetor tangente unitário e da circunferência de curvatura em  $t = 1$ .

**Solução**

$$D_t \mathbf{R}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \quad \|D_t \mathbf{R}(t)\| = 2\sqrt{1+t^2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{D_t \mathbf{R}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$D_t \mathbf{T}(t) = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} \mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t) &= \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \\ &= -\frac{t}{2(1+t^2)^2} \mathbf{i} + \frac{1}{2(1+t^2)^2} \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(t) &= \|\mathbf{K}(t)\| \\ &= \sqrt{\frac{t^2}{4(1+t^2)^4} + \frac{1}{4(1+t^2)^4}} \\ &= \frac{1}{2(1+t^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$(a) \quad \mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \quad K(1) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad \rho(1) = 4\sqrt{2}$$

- (b) A Figura 4 mostra o esboço pedido. A Tabela 1 dá os valores de  $x$  e de  $y$  quando  $t$  é  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$  e  $2$ .

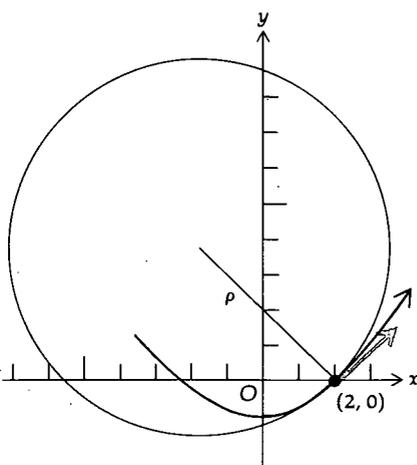


FIGURA 4

Tabela 1

$t$	$x$	$y$
-2	-4	3
-1	-2	0
0	0	-1
1	2	0
2	4	3

Vamos obter agora uma fórmula para calcular a curvatura diretamente das equações paramétricas da curva,  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ . Como  $K(t) = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$ , calculamos primeiro  $\frac{d\phi}{ds}$ .

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

Com a hipótese de que  $s$  é crescente quando  $t$  cresce,  $\frac{ds}{dt} > 0$ . Assim,

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \quad (5)$$

Para encontrar  $\frac{d\phi}{dt}$  observamos que sendo  $\phi$  a medida em radianos do ângulo que dá a direção do vetor tangente temos,  $\text{tg } \phi = \frac{dy}{dx}$ . Logo,

$$\text{tg } \phi = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Derivando implicitamente em relação a  $t$  ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \sec^2 \phi \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\sec^2 \phi \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Como  $\sec^2 \phi = 1 + \text{tg}^2 \phi$ , temos

$$\sec^2 \phi = 1 + \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

Substituindo essa expressão de  $\sec^2 \phi$  em (6), temos

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Substituindo o resultado em (5), e como  $K(t) = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$ , temos

$$K(t) = \frac{\left| \left( \frac{dx}{dt} \right) \left( \frac{d^2y}{dt^2} \right) - \left( \frac{dy}{dt} \right) \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right) \right|}{\left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (7)$$

**EXEMPLO 3** Ache a curvatura da curva do Exemplo 2 usando a fórmula (7).

**Solução** As equações paramétricas de  $C$  são  $x = 2t$  e  $y = t^2 - 1$ . Logo,

$$\frac{dx}{dt} = 2 \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \frac{dy}{dt} = 2t \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2$$

Assim sendo, de (7),

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{|2(2) - 2t(0)|}{[(2)^2 + (2t)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{4}{(4 + 4t^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Suponha que a equação cartesiana de uma curva seja dada em uma das duas formas  $y = F(x)$  ou  $x = G(y)$ . Casos especiais da fórmula (7) podem ser usados para encontrar a curvatura da curva em tais situações.

Se  $y = F(x)$  for uma equação de uma curva  $C$ , um conjunto de equações paramétricas de  $C$  será  $x = t$  e  $y = F(t)$ . Então,

$$\frac{dx}{dt} = 1 \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Substituindo em (7), obtemos

$$K = \frac{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (8)$$

Da mesma forma, se uma equação de uma curva  $C$  for  $x = G(y)$ ,

$$K = \frac{\left| \frac{d^2x}{dy^2} \right|}{\left[ 1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

**EXEMPLO 4** Se uma curva  $C$  tem uma equação

$$y = \frac{1}{x}$$

ache o raio de curvatura de  $C$  no ponto  $(1, 1)$ , e faça um esboço da curva e da circunferência de curvatura em  $(1, 1)$ .

**Solução**

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$$

Calculamos  $K$  a partir de (8) e então  $\rho = 1/K$ .

$$K = \frac{\left| \frac{2}{x^3} \right|}{\left[ 1 + \frac{1}{x^4} \right]^{3/2}} \quad \rho = \frac{(x^4 + 1)^{3/2}}{2|x^3|}$$

$$= \frac{2|x^3|}{(x^4 + 1)^{3/2}}$$

Logo, em  $(1, 1)$ ,  $\rho = \sqrt{2}$ . O esboço pedido está na Figura 5.

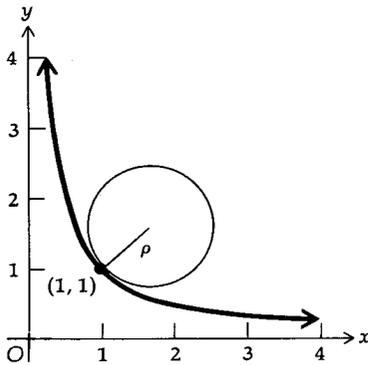


FIGURA 5

### EXERCÍCIOS 14.7

Nos Exercícios de 1 a 4, ache a curvatura  $K$  e o raio de curvatura  $\rho$  no ponto onde  $t = t_1$ . Use a fórmula (3) para encontrar  $K$ . Faça um esboço mostrando uma parte da curva, o vetor tangente unitário e a circunferência de curvatura em  $t = t_1$ .

1.  $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j}$ ;  $t_1 = 1$
2.  $\mathbf{R}(t) = (t^2 - 2t)\mathbf{i} + (t^3 - t)\mathbf{j}$ ;  $t_1 = 1$
3.  $\mathbf{R}(t) = 2e^t\mathbf{i} + 2e^{-t}\mathbf{j}$ ;  $t_1 = 0$
4.  $\mathbf{R}(t) = \sin t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j}$ ;  $t_1 = \frac{1}{2}\pi$

Nos Exercícios 5 e 6, ache a curvatura  $K$  usando a fórmula (7). Então ache  $K$  e  $\rho$  no ponto onde  $t = t_1$  e faça um esboço mostrando uma parte da curva, o vetor tangente unitário e a circunferência de curvatura em  $t = t_1$ .

5.  $x = \frac{1}{1+t}$ ,  $y = \frac{1}{1-t}$ ;  $t_1 = 0$
6.  $x = e^t + e^{-t}$ ,  $y = e^t - e^{-t}$ ;  $t_1 = 0$

Nos Exercícios de 7 a 14, ache a curvatura  $K$  e o raio de curvatura  $\rho$  no ponto dado. Faça um esboço mostrando uma parte da curva, parte da reta tangente e a circunferência de curvatura no ponto dado.

7.  $y = 2\sqrt{x}$ ;  $(0, 0)$
8.  $y^2 = x^3$ ;  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$
9.  $y = e^x$ ;  $(0, 1)$
10.  $y = \ln x$ ;  $(e, 1)$

11.  $x = \sin y$ ;  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\pi)$
12.  $4x^2 + 9y^2 = 36$ ;  $(0, 2)$
13.  $x = \sqrt{y-1}$ ;  $(2, 5)$
14.  $x = \operatorname{tg} y$ ;  $(1, \frac{1}{4}\pi)$

Nos Exercícios de 15 a 22, ache o raio de curvatura num ponto genérico da curva.

15.  $y = \sin^{-1} x$
16.  $y = \ln \sec x$
17.  $4x^2 - 9y^2 = 16$
18.  $x = \operatorname{tg}^{-1} y$
19.  $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$
20.  $\mathbf{R}(t) = e^t \sin t + e^t \cos t\mathbf{j}$
21. A cicloide  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$
22. A tratriz  $x = t - a \operatorname{tgh} \frac{t}{a}$ ,  $y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}$

23. Mostre que a curvatura da catenária  $y = a \cosh(x/a)$  num ponto qualquer  $(x, y)$  da curva é  $a/y^2$ . Trace a circunferência de curvatura em  $(0, a)$ . Mostre que a curvatura  $K$  é um máximo absoluto no ponto  $(0, a)$ , sem se referir a  $K'(x)$ .

Nos Exercícios de 24 a 28, ache um ponto na curva dada no qual a curvatura é um máximo absoluto.

24.  $y = e^x$
25.  $y = 6x - x^2$
26.  $y = \sin x$
27.  $\mathbf{R}(t) = (2t - 3)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$
28.  $y = x^2 - 2x + 3$

29. Ache uma equação da circunferência de curvatura de  $y = e^x$  no ponto  $(0, 1)$ .

30. Se uma equação polar de uma curva for  $r = F(\theta)$ , prove que a curvatura  $K$  será dada pela fórmula

$$K = \frac{\left| r^2 + 2 \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \left( \frac{d^2r}{d\theta^2} \right) \right|}{\left[ r^2 + \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

Nos Exercícios de 31 a 34, ache a curvatura  $K$  e o raio de curvatura  $\rho$  no ponto indicado. Use a fórmula do Exercício 30 para achar  $K$ .

31.  $r = 4 \cos 2\theta; \theta = \frac{1}{12}\pi$       32.  $r = 1 - \sin \theta; \theta = 0$

33.  $r = a \sec^2 \frac{1}{2}\theta; \theta = \frac{2}{3}\pi$       34.  $r = a\theta; \theta = 1$

35. O centro da circunferência de curvatura de uma curva  $C$  em um ponto  $P$  é chamado de *centro de curvatura em  $P$* . Prove que as coordenadas do centro de curvatura de uma curva em

$P(x, y)$  são dadas por

$$x_c = x - \frac{\left( \frac{dy}{dx} \right) \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad y_c = y + \frac{\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Nos Exercícios de 36 a 38, ache a curvatura  $K$ , o raio de curvatura  $\rho$  e o centro de curvatura no ponto dado. Faça um esboço da curva e a circunferência de curvatura.

36.  $y = \ln x; (1, 0)$

37.  $y = x^4 - x^2; (0, 0)$

38.  $y = \cos x; (\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$

Nos Exercícios de 39 a 42, ache as coordenadas do centro de curvatura num ponto qualquer.

39.  $y^2 = 4px$

40.  $y^3 = a^2x$

41.  $\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$

42.  $\mathbf{R}(t) = a \cos^3 t \mathbf{i} + a \sin^3 t \mathbf{j}$

43. Mostre que a curvatura de uma linha reta é zero em qualquer ponto da reta.

## 14.8 MOVIMENTO PLANO

Nossa discussão anterior sobre movimento de uma partícula ficou restrita ao movimento retilíneo. Definimos então a velocidade e a aceleração de uma partícula em movimento ao longo de uma linha reta. Considere agora o movimento de uma partícula ao longo de uma curva no plano, chamado de **movimento curvilíneo**.

Suponha que  $C$  seja uma curva plana com equações paramétricas  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ , onde  $t$  denota o tempo. Então,

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

é uma equação vetorial de  $C$ . Enquanto  $t$  varia, o ponto final  $P(f(t), g(t))$  de  $\overrightarrow{OP}$  move-se ao longo da curva  $C$ . A posição após  $t$  unidades de tempo para uma partícula movendo-se ao longo de  $C$  é o ponto  $P(f(t), g(t))$ . O **vetor velocidade** da partícula no instante  $t$  é definido como sendo  $\mathbf{R}'(t)$ , sendo denotado por  $\mathbf{V}(t)$ .

### 14.8.1 DEFINIÇÃO

Seja  $C$  a curva tendo equações paramétricas  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ . Se uma partícula estiver se movendo ao longo de  $C$  de tal forma que sua posição em qualquer instante  $t$  seja o ponto  $(x, y)$ , então a **velocidade instantânea** da partícula no instante  $t$  será determinada pelo vetor velocidade

$$\mathbf{V}(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

se  $f'(t)$  e  $g'(t)$  existirem.

Como a direção de  $\mathbf{R}'(t)$  no ponto  $P(f(t), g(t))$  é ao longo da reta tangente à curva  $C$  em  $P$ , o vetor velocidade  $\mathbf{V}(t)$  tem o mesmo sentido de  $\mathbf{R}'(t)$  em  $P$ .

O módulo do vetor velocidade é uma medida da **velocidade escalar** da partícula no instante  $t$  sendo dada por

$$\|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \quad (1)$$

Note que a velocidade é um vetor e a velocidade escalar é um escalar. Conforme foi mostrado na Secção 14.5, a expressão do segundo membro de (1) é  $ds/dt$ .

Assim sendo, a velocidade escalar é a taxa de variação de  $s$  em relação a  $t$ , e escrevemos

$$\|V(t)\| = \frac{ds}{dt}$$

O vetor **aceleração** da partícula no instante  $t$  é denotado por  $A(t)$ , sendo definido como a derivada do vetor velocidade ou, equivalentemente, a derivada segunda do vetor posição.

#### 14.8.2 DEFINIÇÃO

A **aceleração instantânea** no instante  $t$  de uma partícula movendo-se ao longo de uma curva  $C$ , tendo como equações paramétricas  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ , é determinada pelo vetor aceleração

$$A(t) = V'(t) \Leftrightarrow A(t) = R''(t)$$

onde  $R(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$  e  $R''(t)$  existe.

A Figura 1 mostra as representações do vetor velocidade e do vetor aceleração cujo ponto inicial é o ponto  $P$  em  $C$ .

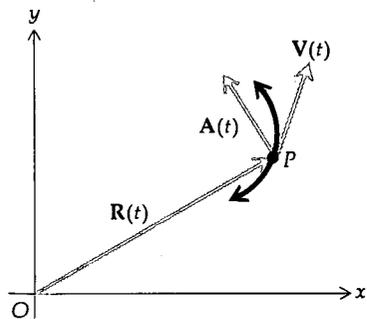


FIGURA 1

**EXEMPLO 1** Uma partícula está se movendo ao longo da curva tendo como equações paramétricas

$$x = 4 \cos \frac{1}{2}t \quad \text{e} \quad y = 4 \sin \frac{1}{2}t$$

Se  $x$  e  $y$  são medidos em centímetros, ache a velocidade escalar e o módulo do vetor aceleração da partícula em  $t$  segundos. Faça um esboço da trajetória da partícula, e trace as representações do vetor velocidade e do vetor aceleração tendo como ponto inicial  $t = \frac{1}{3}\pi$ .

**Solução** Uma equação vetorial de  $C$  é

$$R(t) = 4 \cos \frac{1}{2}t \mathbf{i} + 4 \sin \frac{1}{2}t \mathbf{j}$$

$$V(t) = R'(t)$$

$$= -2 \sin \frac{1}{2}t \mathbf{i} + 2 \cos \frac{1}{2}t \mathbf{j}$$

$$\|V(t)\| = \sqrt{(-2 \sin \frac{1}{2}t)^2 + (2 \cos \frac{1}{2}t)^2}$$

$$= \sqrt{4 \sin^2 \frac{1}{2}t + 4 \cos^2 \frac{1}{2}t}$$

$$= 2$$

$$A(t) = V'(t)$$

$$= -\cos \frac{1}{2}t \mathbf{i} - \sin \frac{1}{2}t \mathbf{j}$$

$$\|A(t)\| = \sqrt{(-\cos \frac{1}{2}t)^2 + (-\sin \frac{1}{2}t)^2}$$

$$= 1$$

Logo, a velocidade escalar da partícula é constante, sendo 2 cm/s. O módulo do vetor aceleração também é constante, sendo 1 cm/s<sup>2</sup>.

Eliminando  $t$  entre as equações paramétricas de  $C$ , obtemos a equação cartesiana

$$x^2 + y^2 = 16$$

que é uma circunferência com seu centro na origem e raio 4. Agora encontraremos o vetor velocidade e o vetor aceleração para  $t = \frac{1}{3}\pi$ .

$$V(\frac{1}{3}\pi) = -2 \sin \frac{1}{6}\pi \mathbf{i} + 2 \cos \frac{1}{6}\pi \mathbf{j}$$

$$= -\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$$

$$A(\frac{1}{3}\pi) = -\cos \frac{1}{6}\pi \mathbf{i} - \sin \frac{1}{6}\pi \mathbf{j}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

A direção de  $V(\frac{1}{3}\pi)$  é dada por

$$\operatorname{tg} \theta_1 = -\sqrt{3} \quad \frac{1}{2}\pi < \theta_1 < \pi$$

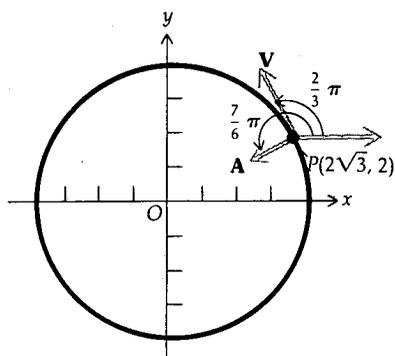


FIGURA 2

e a direção de  $\mathbf{A}(\frac{1}{3}\pi)$  é dada por

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \pi < \theta_2 < \frac{3}{2}\pi$$

Assim,  $\theta_1 = \frac{2}{3}\pi$  e  $\theta_2 = \frac{7}{6}\pi$ . A Figura 2 mostra a trajetória da partícula e as representações do vetor aceleração e do vetor velocidade, tendo ponto inicial onde  $t = \frac{1}{3}\pi$ .

**EXEMPLO 2** A posição de uma partícula em movimento no instante  $t$  é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + 3e^t\mathbf{j}$$

Ache  $\mathbf{V}(t)$ ,  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\|\mathbf{V}(t)\|$ ,  $\|\mathbf{A}(t)\|$ . Faça um esboço da trajetória da partícula e das representações do vetor velocidade e do vetor aceleração, tendo ponto inicial onde  $t = \frac{1}{2}$ .

**Solução**

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \mathbf{R}'(t) & \mathbf{A}(t) &= \mathbf{V}'(t) \\ &= -2e^{-2t}\mathbf{i} + 3e^t\mathbf{j} & &= 4e^{-2t}\mathbf{i} + 3e^t\mathbf{j} \\ \|\mathbf{V}(t)\| &= \sqrt{4e^{-4t} + 9e^{2t}} & \|\mathbf{A}(t)\| &= \sqrt{16e^{-4t} + 9e^{2t}} \\ \|\mathbf{V}(\frac{1}{2})\| &= \sqrt{4e^{-2} + 9e} & \|\mathbf{A}(\frac{1}{2})\| &= \sqrt{16e^{-2} + 9e} \\ &\approx 5,00 & &\approx 5,16 \end{aligned}$$

As equações paramétricas da trajetória da partícula são

$$x = e^{-2t} \quad \text{e} \quad y = 3e^t$$

Eliminamos  $t$  entre essas equações, obtendo

$$e^{2t} = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad e^{2t} = \frac{y^2}{9}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{y^2}{9}$$

$$xy^2 = 9$$

Como  $x > 0$  e  $y > 0$ , a trajetória da partícula é a parte da curva  $xy^2 = 9$  no primeiro quadrante. A Figura 3 mostra a trajetória da partícula e as representações do vetor velocidade e do vetor aceleração quando  $t = \frac{1}{2}$ . A inclinação da representação de  $\mathbf{V}(\frac{1}{2})$  é  $\frac{3}{2}e^{3/2} \approx -6,7$ , e a inclinação da representação de  $\mathbf{A}(\frac{1}{2})$  é  $\frac{3}{4}e^{3/2} \approx 3,4$ .

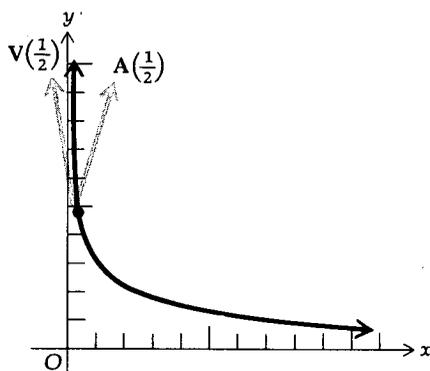


FIGURA 3

Vamos deduzir agora as equações do movimento de um projétil, supondo que esse movimento aconteça num plano vertical. Vamos supor também que a única força atuando sobre o projétil seja seu peso, que tem seu sentido voltado para baixo e uma intensidade de  $mg$  N, onde  $m$  é sua massa e  $g$  m/s<sup>2</sup> é a aceleração constante causada pela gravidade. Estamos desprezando a força atribuída à resistência do ar (que não apresenta efeitos sensíveis para corpos pesados movendo-se com pequenas velocidades escalares). O sentido positivo é tomado verticalmente para cima e horizontalmente para a direita.

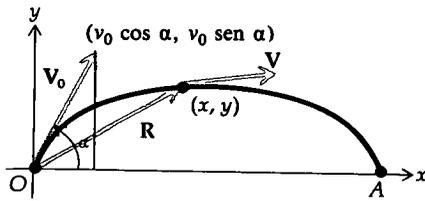


FIGURA 4

Suponha, então, que um projétil seja atirado por um revólver, com um ângulo de elevação medido em  $\alpha$  rad. Seja  $v_0$  o número de metros por segundo da velocidade escalar inicial ou *velocidade na boca da arma*. Os eixos coordenados estão dispostos de tal maneira que a arma esteja localizada na origem. Consulte a Figura 4. O vetor velocidade inicial,  $\mathbf{V}_0$ , do projétil é dado por

$$\mathbf{V}_0 = v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \sin \alpha \mathbf{j} \quad (2)$$

Seja  $t$  s o tempo decorrido desde que a arma foi disparada, seja  $x$  a distância horizontal percorrida pelo projétil entre o instante inicial e  $t$  s, e  $y$  m, a distância vertical percorrida pelo projétil entre o instante inicial e  $t$  s.  $\mathbf{R}(t)$  é o vetor posição do projétil em  $t$  s,  $\mathbf{V}(t)$  é o vetor velocidade do projétil em  $t$  s, e  $\mathbf{A}(t)$  é o vetor aceleração do projétil em  $t$  s.

Como  $x$  é uma função de  $t$ , escrevemos  $x(t)$ . Da mesma forma,  $y$  é uma função de  $t$  e escrevemos  $y(t)$ . Então,

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t)$$

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t)$$

Como a única força atuando no projétil tem uma intensidade de  $mg$  N e está dirigida para baixo, então, se  $\mathbf{F}$  denotar essa força,

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j} \quad (3)$$

A segunda lei do movimento de Newton afirma que a força que age sobre um corpo é igual a “massa vezes aceleração”. Assim,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A}$$

Do estabelecido acima e de (3),

$$m\mathbf{A} = -mg\mathbf{j}$$

$$\mathbf{A} = -g\mathbf{j}$$

Como  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t)$ , temos, do resultado,

$$\mathbf{V}'(t) = -g\mathbf{j}$$

Integrando ambos os membros em relação a  $t$ , obtemos

$$\mathbf{V}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1 \quad (4)$$

onde  $\mathbf{C}_1$  é um vetor constante de integração.

Quando  $t = 0$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0$ . Assim  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{V}_0$ . Logo, de (4),

$$\mathbf{V}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{V}_0$$

ou, como  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t)$ ,

$$\mathbf{R}'(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{V}_0$$

Integrando ambos os lados dessa equação vetorial em relação a  $t$ , obtemos

$$\mathbf{R}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{V}_0t + \mathbf{C}_2$$

onde  $\mathbf{C}_2$  é um vetor constante de integração.

Quando  $t = 0$ ,  $\mathbf{R} = 0$  pois o projétil está na origem, no começo. Assim,  $\mathbf{C}_2 = 0$ . Logo,

$$\mathbf{R}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{V}_0t$$

Substituindo o valor de  $\mathbf{V}_0$  de (2) no resultado acima, obtemos

$$\mathbf{R}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + (v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \sin \alpha \mathbf{j})t$$

$$\mathbf{R}(t) = tv_0 \cos \alpha \mathbf{i} + (tv_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2)\mathbf{j} \quad (5)$$

A equação (5) dá o vetor posição do projétil no instante em que o tempo decorrido é de  $t$  s. A partir dessa equação podemos discutir o movimento do projétil. Em geral estamos interessados nas seguintes questões:

1. Qual é o alcance do projétil? O alcance é a distância  $|OA|$  ao longo do eixo  $x$  (veja a Figura 4).
2. Qual é o tempo total de voo, isto é, o tempo que o projétil leva para ir de  $O$  até  $A$ ?
3. Qual é a altura máxima do projétil?
4. Qual é a equação cartesiana da curva percorrida pelo projétil?
5. Qual é o vetor velocidade do projétil no impacto?

Essas questões estão respondidas no exemplo a seguir.

---

**EXEMPLO 3** Um projétil é atirado de uma arma com um ângulo de elevação cuja medida em radianos é  $\frac{1}{6}\pi$ . Sua velocidade na boca da arma é 480 m/s. Ache (a) o vetor posição do projétil em qualquer instante; (b) o tempo de voo; (c) o alcance; (d) a altura máxima; (e) o vetor velocidade no impacto; (f) o vetor posição e o vetor velocidade em 2 s; (g) a velocidade escalar em 2 s; e (h) a equação cartesiana da curva percorrida pelo projétil.

**Solução** De (2) com  $v_0 = 480$  e  $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ , o vetor velocidade inicial é

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= 480 \cos \frac{1}{6}\pi \mathbf{i} + 480 \sin \frac{1}{6}\pi \mathbf{j} \\ &= 240\sqrt{3}\mathbf{i} + 240\mathbf{j} \end{aligned}$$

(a) Podemos obter o vetor posição em  $t$  s, aplicando (5); obtemos então

$$\mathbf{R}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + (240t - \frac{1}{2}gt^2)\mathbf{j}$$

Fazendo  $g = 9,8$  temos

$$\mathbf{R}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + (240t - 4,9t^2)\mathbf{j} \quad (6)$$

Assim, se  $(x, y)$  for a posição do projétil em  $t$  s,

$$x = 240\sqrt{3}t \quad \text{e} \quad y = 240t - 4,9t^2 \quad (7)$$

(b) Para determinar o tempo de voo, precisamos encontrar  $t$  quando  $y = 0$ . Tomando  $y = 0$  na segunda equação em (7), temos

$$240t - 4,9t^2 = 0$$

$$t(240 - 4,9t) = 0$$

$$t = 0 \quad t = 49$$

O valor  $t = 0$  ocorre quando o projétil é disparado. O valor  $t = 49$  dá o tempo de voo. Assim sendo, o tempo de voo é de 49 s.

- (c) Para achar o alcance, determinamos  $x$  para  $t = 49$ . Da primeira equação em (7) com  $t = 49$  obtemos  $x = 11.760\sqrt{3}$ . Logo, o alcance é  $11.760\sqrt{3} \text{ m} \approx 20.369 \text{ m}$ .
- (d) A altura máxima é obtida quando a componente vertical do vetor velocidade é 0, isto é, quando  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Calculamos  $\frac{dy}{dt}$  a partir da segunda equação de (7) e obtemos

$$\frac{dy}{dt} = 240 - 9,8t$$

Expressando  $\frac{dy}{dt} = 0$  obtemos  $t = 24,5$ , que é a metade do tempo total de voo. Quando  $t = 24,5$ ,  $y \approx 2.938,8$ . Assim sendo, a altura máxima obtida é de  $2.938,8 \text{ m}$ .

- (e) Como o tempo de voo é  $49 \text{ s}$ , o vetor velocidade no impacto é  $\mathbf{V}(49)$ . Como  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t)$ , então, de (6),

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(t) &= 240\sqrt{3}\mathbf{i} + (240 - 9,8t)\mathbf{j} \\ \mathbf{V}(49) &= 240\sqrt{3}\mathbf{i} - 240,2\mathbf{j}\end{aligned}\quad (8)$$

- (f) Se  $t = 2$  em (6) e (8), temos

$$\mathbf{R}(2) = 480\sqrt{3}\mathbf{i} + 460,4\mathbf{j} \quad \mathbf{V}(2) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} + 220,4\mathbf{j}$$

- (g)  $\|\mathbf{V}(2)\| = \sqrt{(240\sqrt{3})^2 + (220,4)^2}$   
 $\cong \sqrt{(415,7)^2 - (220,4)^2}$   
 $\cong 470,5 \text{ m/s}$

Logo, em  $2 \text{ s}$  a velocidade escalar é  $470,5 \text{ m/s}$ .

- (h) Para encontrar a equação cartesiana da curva percorrida pelo projétil, eliminamos  $t$  entre as equações (7). Substituindo o valor de  $t$  da primeira equação na segunda, temos

$$y = 240\left(\frac{x}{240\sqrt{3}}\right) - 4,9\left(\frac{x}{240\sqrt{3}}\right)^2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \left(\frac{4,9}{240\sqrt{3}}\right)x^2$$

que é uma equação de uma parábola.

## EXERCÍCIOS 14.8

Nos Exercícios de 1 a 8, uma partícula está se movendo ao longo da curva, tendo as equações paramétricas dadas, onde  $t$  s é o tempo. Ache: (a) o vetor velocidade  $\mathbf{V}(t)$ ; (b) o vetor aceleração  $\mathbf{A}(t)$ ; (c) a velocidade escalar em  $t = t_1$ ; (d) o módulo do vetor aceleração em  $t = t_1$ . Faça um esboço da trajetória da partícula e trace as representações do vetor velocidade e do vetor aceleração em  $t = t_1$ .

- $x = t^2 + 4$ ,  $y = t - 2$ ;  $t_1 = 3$
- $x = \ln(t - 2)$ ,  $y = t^3 - 1$ ;  $t_1 = 3$
- $x = 5 \cos 2t$ ,  $y = 3 \sin 2t$ ;  $t_1 = \frac{1}{4}\pi$
- $x = 2/t$ ,  $y = -\frac{1}{4}t$ ;  $t_1 = 4$
- $x = t$ ,  $y = \ln \sec t$ ;  $t_1 = \frac{1}{4}\pi$

6.  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ ;  $t_1 = \frac{1}{3}\pi$

7.  $x = \sin t$ ,  $y = \tan t$ ;  $t_1 = \frac{1}{6}\pi$

8.  $x = e^{2t}$ ,  $y = e^{3t}$ ;  $t_1 = 0$

Nos Exercícios de 9 a 16, a posição de uma partícula no instante  $t$  s é determinada por uma equação vetorial. Ache: (a)  $\mathbf{V}(t_1)$ ; (b)  $\mathbf{A}(t_1)$ ; (c)  $\|\mathbf{V}(t_1)\|$ ; (d)  $\|\mathbf{A}(t_1)\|$ . Faça um esboço de uma parte da trajetória da partícula contendo a posição da partícula em  $t = t_1$  e trace as representações de  $\mathbf{V}(t_1)$  e  $\mathbf{A}(t_1)$ , tendo como ponto inicial aquele dado por  $t = t_1$ .

9.  $\mathbf{R}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}$ ;  $t_1 = 3$

10.  $\mathbf{R}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$ ;  $t_1 = -1$

11.  $\mathbf{R}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{2t} \mathbf{j}$ ;  $t_1 = \ln 2$   
 12.  $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 3t) \mathbf{i} + (1 - 3t^2) \mathbf{j}$ ;  $t_1 = \frac{1}{2}$   
 13.  $\mathbf{R}(t) = \cos 2t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j}$ ;  $t_1 = \pi$   
 14.  $\mathbf{R}(t) = e^{-t} \mathbf{i} + e^{2t} \mathbf{j}$ ;  $t_1 = \ln 2$   
 15.  $\mathbf{R}(t) = 2(1 - \cos t) \mathbf{i} + 2(1 - \sin t) \mathbf{j}$ ;  $t_1 = \frac{5}{6}\pi$   
 16.  $\mathbf{R}(t) = \ln(t + 2) \mathbf{i} + \frac{1}{3}t^2 \mathbf{j}$ ;  $t_1 = 1$

Nos Exercícios de 17 a 20, ache o vetor posição  $\mathbf{R}(t)$ .

17.  $\mathbf{V}(t) = \frac{1}{(t-1)^2} \mathbf{i} - (t+1) \mathbf{j}$ , e  $\mathbf{R}(0) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$   
 18.  $\mathbf{V}(t) = (2t-1) \mathbf{i} + 3t^{-2} \mathbf{j}$ , e  $\mathbf{R}(1) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$   
 19.  $\mathbf{A}(t) = e^{-t} \mathbf{i} + 2e^{2t} \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{V}(0) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ , e  $\mathbf{R}(0) = 3\mathbf{j}$   
 20.  $\mathbf{A}(t) = 2 \cos 2t \mathbf{i} + 2 \sin 2t \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{V}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ , e  $\mathbf{R}(0) = \frac{1}{2} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \mathbf{j}$   
 21. Um projétil é atirado por uma arma, num ângulo de elevação de  $45^\circ$ , com uma velocidade na boca da arma de 2.500 cm/s. Ache (a) o alcance do projétil; (b) a altura máxima atingida; (c) a velocidade no impacto.  
 22. Um projétil é atirado por uma arma com um ângulo de elevação de  $60^\circ$ . A velocidade na boca da arma é de 160 m/s. Ache (a) o vetor posição do projétil em  $t$  s; (b) o tempo de voo; (c) o alcance; (d) a altura máxima atingida; (e) a velocidade no impacto; (f) a velocidade escalar em 4 s.  
 23. Um projétil é atirado do alto de um edifício por uma arma, formando um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal. Se a velocidade na boca da arma é 1.600 cm/s, ache o tempo de voo e a distância do ponto onde cai o projétil até a base do edifício.

24. A velocidade na boca de uma arma é de 160 m/s. Sob que ângulo de elevação deve ser disparada a arma para que o projétil atinja um objeto no mesmo nível que a arma e a uma distância de 400 m dela?  
 25. Qual é a velocidade na boca de uma arma, se um projétil disparado por ela tem um alcance de 2.000 m e atinge uma altura máxima de 1.000 m?  
 26. Uma bola é atirada horizontalmente, de cima de um penhasco com 256 m de altura, com uma velocidade inicial de 50 m/s. Ache o tempo de voo da bola e a distância entre a base do penhasco e o ponto de queda.  
 27. Uma pessoa atira uma bola com velocidade escalar inicial de 50 m/s e com um ângulo de elevação de  $60^\circ$  em direção a um alto edifício, distante 25 m da pessoa. Se a mão da pessoa está a 1 m do chão, mostre que bola atinge o prédio e ache a direção da bola no momento em que ela atingir o edifício.  
 28. Do alto de um edifício com 60 m de altura, uma menina joga uma pedra em direção ao chão, fazendo um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal e a uma velocidade inicial de 4 m/s. Determine a distância no chão entre a base do edifício e o ponto onde cai a pedra.  
 29. Resolva o Exercício 28 se a menina joga a pedra horizontalmente, com a velocidade escalar inicial de 4 m/s.  
 30. A que ângulo de elevação deve ser disparada uma arma para obter o máximo alcance para uma dada velocidade na boca da arma?

## 14.9 COMPONENTES NORMAL E TANGENCIAL DA ACELERAÇÃO (Suplementar)

Se uma partícula está se movendo ao longo de uma curva  $C$  tendo a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t) \mathbf{i} + g(t) \mathbf{j}$$

o vetor velocidade num ponto  $P$  é dado por

$$\mathbf{V}(t) = D_t \mathbf{R}(t) \quad (1)$$

Da Secção 14.6, se  $\mathbf{T}(t)$  for o vetor tangente unitário em  $P$  e se  $s$  for o comprimento de arco de  $C$  desde um ponto fixo  $P_0$  até  $P$ , com  $s$  crescente quando  $t$  cresce,

$$D_t \mathbf{R}(t) = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}(t)$$

Substituindo a equação acima em (1), temos

$$\mathbf{V}(t) = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}(t)$$

Essa igualdade expressa o vetor velocidade em um ponto como um escalar vezes o vetor tangente unitário no ponto. O coeficiente de  $\mathbf{T}(t)$  é chamado de **componente tangencial do vetor velocidade** e é  $\frac{ds}{dt}$ . Obteremos em seguida a expressão do vetor aceleração em um ponto, em termos de um vetor tangente à direção do movimento e de um vetor normal à direção do movimento.

O vetor aceleração em  $P$  é dado por

$$\mathbf{A}(t) = D_t^2 \mathbf{R}(t) \quad (2)$$

De (5) da Secção 14.6,

$$D_t^2 \mathbf{R}(t) = (D_t \|D_t \mathbf{R}(t)\|) \mathbf{T}(t) + (\|D_t \mathbf{R}(t)\| \|D_t \mathbf{T}(t)\|) \mathbf{N}(t) \quad (3)$$

Da Secção 14.5,

$$\frac{ds}{dt} = \|D_t \mathbf{R}(t)\| \quad (4)$$

Diferenciando em relação a  $t$  ambos os membros de (4) obtemos

$$\frac{d^2s}{dt^2} = D_t \|D_t \mathbf{R}(t)\| \quad (5)$$

Além disso,

$$\|D_t \mathbf{R}(t)\| \|D_t \mathbf{T}(t)\| = \|D_t \mathbf{R}(t)\|^2 \left\| \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \right\| \quad (6)$$

Aplicando (4) acima e a equação (3) da Secção 14.7 ao segundo membro de (6) temos

$$\|D_t \mathbf{R}(t)\| \|D_t \mathbf{T}(t)\| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 K(t) \quad (7)$$

Substituindo (2), (5) e (7) em (3) obtemos

$$\mathbf{A}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T}(t) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 K(t) \mathbf{N}(t) \quad (8)$$

A igualdade (8) expressa o vetor aceleração como a soma de um escalar vezes o vetor tangente unitário e um escalar vezes o vetor normal unitário; isto é, converte  $\mathbf{A}(t)$  na soma de dois vetores, um na direção tangente à do movimento e o outro na direção normal à do movimento. O coeficiente de  $\mathbf{T}(t)$  é chamado de **componente tangencial do vetor aceleração**, sendo denotado por  $A_T(t)$ , enquanto que o coeficiente de  $\mathbf{N}(t)$  é chamado de **componente normal do vetor aceleração**, sendo denotado por  $A_N(t)$ . Assim,

$$A_T(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (9)$$

e

$$A_N(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 K(t) \Leftrightarrow A_N(t) = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho(t)} \quad (10)$$

Como  $\mathbf{A}(t) = D_t \mathbf{V}(t)$ ,  $\mathbf{A}(t)$  é a taxa de variação de  $\mathbf{V}(t)$ . A variação em  $\mathbf{V}(t)$  pode ser causada ou por uma variação em seu módulo ou em sua direção. Como  $\|\mathbf{V}(t)\|$  é a medida da velocidade escalar da partícula no instante  $t$  unidades e  $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{V}(t)\|$ , então  $A_T(t)$  é a taxa de variação da medida da velocidade escalar da partícula; isto é,  $A_T(t)$  está relacionada com a mudança no módulo de  $\mathbf{V}(t)$ . Como  $A_N(t)$  envolve a curvatura  $K(t)$ ,  $A_N(t)$  está relacionada com a variação na direção de  $\mathbf{V}(t)$ . Esses resultados são importantes em Mecânica. Da segunda lei do movimento de Newton temos

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A} \quad (11)$$

onde  $\mathbf{F}$  é o vetor força aplicado a um objeto móvel,  $m$  é a medida constante da massa do objeto e  $\mathbf{A}$  é o vetor aceleração do objeto. Substituindo (8) em (11) e tomando  $v = \frac{ds}{dt}$  temos

$$\mathbf{F}(t) = m \frac{dv}{dt} \mathbf{T}(t) + mv^2 K(t)\mathbf{N}(t)$$

Assim, no movimento curvilíneo a componente normal de  $\mathbf{F}$  é

$$mv^2 K(t) \Leftrightarrow \frac{mv^2}{\rho(t)}$$

que é a intensidade da força normal à curva necessária para manter o objeto na curva. Por exemplo, se um automóvel está indo ao longo de uma curva em alta velocidade escalar, então a força normal deve ter uma grande intensidade, a fim de manter o carro na estrada. Também, se a curva for fechada, a medida do raio de curvatura será pequena; assim, o valor da intensidade da força normal deve ser grande.

Substituindo (9) e (10) em (8), temos

$$\mathbf{A}(t) = A_T(t)\mathbf{T}(t) + A_N(t)\mathbf{N}(t)$$

de onde segue que

$$\|\mathbf{A}(t)\| = \sqrt{[A_T(t)]^2 + [A_N(t)]^2}$$

Resolvendo em termos de  $A_N(t)$  e notando de (10) que  $A_N(t)$  é não-negativo, temos

$$A_N(t) = \sqrt{\mathbf{A}(t)^2 - [A_T(t)]^2}$$

**EXEMPLO 1** Uma partícula move-se ao longo de uma curva com a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$$

Ache as componentes tangencial e normal do vetor aceleração.

**Solução**

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= D_t \mathbf{R}(t) & \mathbf{A}(t) &= D_t \mathbf{V}(t) \\ &= \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} & &= e^t \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{1 + e^{2t}} \quad \|\mathbf{A}(t)\| = e^t$$

Como  $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{V}(t)\|$ ,  $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + e^{2t}}$  e  $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{e^{2t}}{\sqrt{1 + e^{2t}}}$ . Logo,

$$\begin{aligned} A_T(t) &= \frac{e^{2t}}{\sqrt{1 + e^{2t}}} & A_N(t) &= \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2} \\ & & &= \sqrt{e^{2t} - \frac{e^{4t}}{1 + e^{2t}}} \\ & & &= \frac{e^t}{\sqrt{1 + e^{2t}}} \end{aligned}$$

**EXEMPLO 2** Uma partícula está se movendo ao longo da curva com equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{3}t^3 - t\right)\mathbf{j}$$

Ache cada um dos seguintes vetores:  $\mathbf{V}(t)$ ,  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{T}(t)$  e  $\mathbf{N}(t)$ . Ache também os seguintes escalares:  $\|\mathbf{V}(t)\|$ ,  $A_T(t)$ ,  $A_N(t)$  e  $K(t)$ . Ache os valores específicos quando  $t = 2$ . Faça um esboço mostrando uma parte da curva no ponto onde  $t = 2$  e trace as representações de  $\mathbf{V}(2)$ ,  $\mathbf{A}(2)$ ,  $A_T(2)\mathbf{T}(2)$  e  $A_N(2)\mathbf{N}(2)$ , tendo como ponto inicial o ponto onde  $t = 2$ .

**Solução** Como  $\mathbf{V}(t) = D_t\mathbf{R}(t)$  e  $\mathbf{A}(t) = D_t\mathbf{V}(t)$ , temos

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(t) &= 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} & \mathbf{A}(t) &= 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \\ \|\mathbf{V}(t)\| &= \sqrt{4t^2 + (t^2 - 1)^2} & \|\mathbf{A}(t)\| &= \sqrt{4 + 4t^2} \\ &= \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} & &= 2\sqrt{1 + t^2} \\ &= t^2 + 1 & &\end{aligned}$$

Logo,  $\frac{ds}{dt} = t^2 + 1$ . Assim,

$$\begin{aligned}A_T(t) &= \frac{d^2s}{dt^2} & A_N(t) &= \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2} \\ &= 2t & &= \sqrt{4 + 4t^2 - 4t^2} \\ & & &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{V}(t)}{\|\mathbf{V}(t)\|} \\ &= \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{j}\end{aligned}$$

Para calcular  $\mathbf{N}(t)$  usamos as seguintes fórmulas que decorrem de (8):

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{(D_t s)^2 K(t)} [\mathbf{A}(t) - (D_t^2 s)\mathbf{T}(t)] \quad (12)$$

$$\mathbf{A}(t) - (D_t^2 s)\mathbf{T}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - 2t \left( \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{j} \right)$$

$$\mathbf{A}(t) - (D_t^2 s)\mathbf{T}(t) = \frac{2}{t^2 + 1} [(1 - t^2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}] \quad (13)$$

De (12),  $\mathbf{N}(t)$  é um escalar vezes o vetor em (13). Como  $\mathbf{N}(t)$  é um vetor unitário, podemos obter  $\mathbf{N}(t)$  dividindo o vetor em (13) pelo seu módulo. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(t) &= \frac{(1 - t^2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}}{\sqrt{(1 - t^2)^2 + (2t)^2}} \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\mathbf{i} + \frac{2t}{1 + t^2}\mathbf{j}\end{aligned}$$

A curvatura  $K(t)$  é encontrada através da primeira equação em (10). Como  $\frac{ds}{dt} = t^2 + 1$ , obtemos

$$K(t) = \frac{2}{(t^2 + 1)^2}$$

Os vetores pedidos e os escalares em  $t = 2$  são os seguintes:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(2) &= 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} & \mathbf{A}(2) &= 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} \\ \|\mathbf{V}(2)\| &= 5 & A_T(2) &= 4 \\ \mathbf{T}(2) &= \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j} & \mathbf{N}(2) &= -\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} \\ A_N(2) &= 2 & K(2) &= \frac{2}{25} \end{aligned}$$

O esboço aparece na Figura 1.

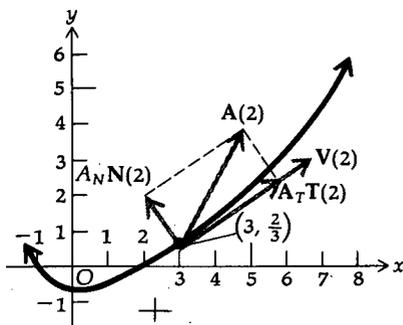


FIGURA 1

**EXERCÍCIOS 14.9**

Nos Exercícios de 1 a 4, uma partícula está se movendo ao longo da curva, tendo a equação vetorial dada. Ache os vetores  $\mathbf{V}(t)$ ,  $\mathbf{A}(t)$  e os escalares  $A_T(t)$  e  $A_N(t)$ .

1.  $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$
2.  $\mathbf{R}(t) = 2 \sin 4t\mathbf{i} + 2 \cos 4t\mathbf{j}$
3.  $\mathbf{R}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}; t \geq 0$
4.  $\mathbf{R}(t) = (t^3 - 3t)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$

Nos Exercícios de 5 a 8, uma partícula está se movendo ao longo da curva, tendo a equação vetorial dada. Ache  $\mathbf{V}(t_1)$ ,  $\mathbf{A}(t_1)$ ,  $A_T(t_1)$  e  $A_N(t_1)$  para o valor dado de  $t_1$ .

5.  $\mathbf{R}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}; t_1 = 0$
6.  $\mathbf{R}(t) = \cos^2 t\mathbf{i} + \sin^2 t\mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{6}\pi$
7.  $\mathbf{R}(t) = \sin^3 t\mathbf{i} + \cos^3 t\mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{4}\pi$
8.  $\mathbf{R}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}; t_1 = \ln 2$

Nos Exercícios 9 e 10, ache os seguintes escalares:  $\|\mathbf{V}(t)\|$ ,  $A_T(t)$ ,  $A_N(t)$  e  $K(t)$ .

9.  $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}; t \geq 0$
10.  $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 4)\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j}$

Nos Exercícios de 11 a 16, uma partícula está se movendo ao longo da curva, tendo a equação vetorial dada. Em cada exercício, ache os vetores  $\mathbf{V}(t)$ ,  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{T}(t)$  e  $\mathbf{N}(t)$ , e os seguintes escalares para um valor arbitrário de  $t$ :  $\|\mathbf{V}(t)\|$ ,  $A_T(t)$ ,  $A_N(t)$  e  $K(t)$ . Ache também os valores particulares quando  $t = t_1$ . Em  $t = t_1$  faça

um esboço de parte da curva e trace as representações dos vetores  $\mathbf{V}(t_1)$ ,  $\mathbf{A}(t_1)$ ,  $A_T(t_1)\mathbf{T}(t_1)$  e  $A_N(t_1)\mathbf{N}(t_1)$ .

11.  $\mathbf{R}(t) = (2t + 3)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}; t_1 = 2$
12.  $\mathbf{R}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}; t_1 = 1$
13.  $\mathbf{R}(t) = 5 \cos 3t\mathbf{i} + 5 \sin 3t\mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{3}\pi$
14.  $\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j}; t_1 = 1$
15.  $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}; t_1 = 0$
16.  $\mathbf{R}(t) = \cos t^2\mathbf{i} + \sin t^2\mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Nos Exercícios 17 e 18, uma partícula está se movendo ao longo da curva, tendo a equação cartesiana dada. No ponto dado ache (a) o vetor posição, (b) o vetor velocidade, (c) o vetor aceleração, (d)  $A_T$  e (e)  $A_N$ .

17.  $y = 4x^2; (1, 4)$
18.  $y^2 = x^3; (4, 8)$

19. Uma partícula está se movendo ao longo da parábola  $y^2 = 8x$  e sua velocidade escalar é constante. Ache cada um dos seguintes, quando a partícula está em (2,4): o vetor posição, o vetor velocidade, o vetor aceleração, o vetor tangente unitário, o vetor normal unitário,  $A_T$  e  $A_N$ .

20. Uma partícula está se movendo ao longo do ramo superior da hipérbole  $y^2 - x^2 = 9$ , de forma que  $\frac{dx}{dt}$  seja uma constante positiva. Quando a partícula estiver em (4,5) obtenha: o vetor posição, o vetor velocidade, o vetor aceleração, o vetor tangente unitário, o vetor normal unitário,  $A_T$  e  $A_N$ .

**EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 14**

Nos Exercícios de 1 a 18,  $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}$  e  $\mathbf{C} = 9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ .

1. Ache  $3\mathbf{B} - 7\mathbf{A}$ .
2. Ache  $5\mathbf{B} - 3\mathbf{C}$ .
3. Ache  $\|3\mathbf{B} - 7\mathbf{A}\|$ .
4. Ache  $\|5\mathbf{B} - 3\mathbf{C}\|$ .
5. Ache  $\|3\mathbf{B}\| - \|7\mathbf{A}\|$ .
6. Ache  $\|5\mathbf{B}\| - \|3\mathbf{C}\|$ .
7. Ache  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ .
8. Ache  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ .

9. Ache um vetor unitário tendo a mesma direção que  $2\mathbf{A} + \mathbf{B}$ .
10. Ache os vetores unitários que são ortogonais a  $\mathbf{B}$ .
11. Ache escalares  $h$  e  $k$ , tais que  $\mathbf{A} = h\mathbf{B} + k\mathbf{C}$ .
12. Ache escalares  $h$  e  $k$ , tais que  $h\mathbf{A} + k\mathbf{B} = -\mathbf{C}$ .
13. Ache a projeção escalar de  $\mathbf{A}$  em  $\mathbf{B}$ .
14. Ache a projeção escalar de  $\mathbf{C}$  em  $\mathbf{A}$ .

15. Ache o vetor projeção de **A** em **B**.
16. Ache o vetor projeção de **C** em **A**.
17. Ache as componentes de **B** na direção de **A**.
18. Ache  $\cos \alpha$  se  $\alpha$  for o ângulo entre **A** e **C**.
19. Duas forças com 50 N e 70 N de intensidade formam um ângulo de  $60^\circ$  entre si e são aplicadas a um objeto no mesmo ponto. Encontre (a) a intensidade da força resultante e (b) o ângulo formado com a força de 50 N.
20. Determine o ângulo entre duas forças de 112 N e 136 N aplicadas em um mesmo ponto de um objeto, se a força resultante tem intensidade igual a 168 N.
21. Uma força é representada por um vetor **F** tendo um módulo de 30 N e um ângulo de direção cuja medida em radianos é  $\frac{3}{4}\pi$ . Se a distância for medida em metros, ache o trabalho realizado pela força ao deslocar uma partícula ao longo de uma reta, entre os pontos (3, 6) e (-2, 7).
22. A bússola de um avião marca um rumo de  $107^\circ$  e sua velocidade escalar é 340 km/h. Se houver um vento soprando do oeste a 58 km/h, quais serão: (a) a velocidade escalar do avião no solo e (b) seu trajeto?

Nos Exercícios 23 e 24, para a função com valores vetoriais, ache (a) o domínio de **R**; (b)  $\lim_{t \rightarrow 1} \mathbf{R}(t)$ ; (c)  $D_t \mathbf{R}(t)$ .

$$23. \mathbf{R}(t) = \frac{1}{t+1} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{t-1}}{t-1} \mathbf{j} \quad 24. \mathbf{R}(t) = |t-1| \mathbf{i} + \ln t \mathbf{j}$$

Nos Exercícios 25 e 26, ache  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , sem eliminar o parâmetro.

$$25. x = 9t^2 - 1, y = 3t + 1 \quad 26. x = e^{2t}, y = e^{-3t}$$

Nos Exercícios 27 e 28, ache equações das retas tangentes horizontal e vertical, e faça um esboço do gráfico descrito pelo par de equações paramétricas dadas.

$$27. x = 12 - t^2, y = 12t - t^3$$

$$28. x = \frac{2at^2}{1+t^2}, y = \frac{2at^2}{1+t^3}, a > 0 \text{ (a cissóide de Diocles)}$$

29. Se  $\mathbf{R}(t) = \ln(t^2 - 1) \mathbf{i} - 2t^{-3} \mathbf{j}$ , ache  $\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}''(t)$ .
30. Ache o comprimento de arco da curva tendo equações paramétricas  $x = t^2, y = t^3$ , de  $t = 1$  a  $t = 2$ .
31. Ache o comprimento de arco da curva  $\mathbf{R}(t) = (2-t) \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$ , de  $t = 0$  a  $t = 3$ .
32. Ache o comprimento de arco da curva  $r = 3 \sec \theta$ , de  $\theta = 0$  a  $\theta = \frac{1}{4}\pi$ .
33. (a) Mostre que a curva definida pelas equações paramétricas  $x = a \sin t$  e  $y = b \cos t$  é uma elipse. (b) Se  $s$  é a medida do comprimento de arco da elipse da parte (a), mostre que

$$s = 4 \int_0^{\pi/2} a \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

onde  $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2 < 1$ . Essa integral é chamada uma *integral elíptica* e não pode ser calculada em termos de funções elementares.

34. Faça um esboço do gráfico da equação vetorial  $\mathbf{R}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}$ , e ache uma equação cartesiana do gráfico.
35. Mostre que a curvatura da curva  $y = \ln x$  em qualquer ponto  $(x, y)$  é  $x/(x^2 + 1)^{3/2}$ . Mostre também que a curvatura máxima absoluta é  $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ , a qual ocorre no ponto  $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\ln 2)$ .
36. Ache a curvatura em todos os pontos do ramo da hipérbole definida por  $x = a \cosh t, y = b \sinh t$ . Mostre também que a curvatura tem um máximo absoluto no vértice.
37. Ache o raio de curvatura em todos os pontos da curva  $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t)$ .
38. Ache a curvatura, o raio de curvatura e o centro de curvatura da curva  $y = e^{-x}$  no ponto (0, 1).
39. Ache a curvatura e o raio de curvatura da curva  $\mathbf{R}(t) = 3t^2 \mathbf{i} + (t^3 - 3t) \mathbf{j}$  no ponto onde  $t = 2$ .
40. Se  $\mathbf{R}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{i} + e^{-\lambda t} \mathbf{j}$ , onde  $\lambda$  é uma constante, mostre que  $\mathbf{R}(t)$  satisfaz a equação  $\mathbf{R}''(t) - \lambda^2 \mathbf{R}(t) = \mathbf{0}$ .
41. Uma partícula está se movendo ao longo de uma curva tendo a equação vetorial  $\mathbf{R}(t) = 3t \mathbf{i} + (4t - t^2) \mathbf{j}$ . (a) Ache uma equação cartesiana da trajetória da partícula. (b) Ache o vetor velocidade e o vetor aceleração. (c) Ache  $\mathbf{V}(1)$  e  $\mathbf{A}(1)$ .
42. Siga as instruções do Exercício 41, se  $\mathbf{R}(t) = 2e^t \mathbf{i} + 3e^{-t} \mathbf{j}$ .
43. Para a hipociclóide de quatro vértices,  $x = a \cos^3 t$  e  $y = a \sin^3 t$ , ache  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{d^2y}{dx^2}$  sem eliminar o parâmetro.
44. Se uma partícula está se movendo ao longo de uma curva, sob que condições terão o mesmo sentido ou sentidos opostos os vetores aceleração e tangente unitário?

Nos Exercícios 45 e 46, para a curva dada ache  $\mathbf{T}(t)$  e  $\mathbf{N}(t)$ , e em  $t = t_1$  faça um esboço de parte da curva e trace as representações de  $\mathbf{T}(t_1)$  e  $\mathbf{N}(t_1)$  tendo como ponto inicial  $t = t_1$ .

$$45. \mathbf{R}(t) = (e^t + e^{-t}) \mathbf{i} + 2t \mathbf{j}; t_1 = 2$$

$$46. \mathbf{R}(t) = 3(\cos t + t \sin t) \mathbf{i} + 3(\sin t - t \cos t) \mathbf{j}, t > 0; t_1 = \frac{1}{2}\pi$$

47. Dada a curva com equações paramétricas  $x = 4t, y = \frac{1}{3}(2t + 1)^{3/2}, t \geq 0$ , ache as equações paramétricas tendo como parâmetro o comprimento do arco  $s$ , medido a partir do ponto onde  $t = 0$ . Teste seu resultado usando a expressão (7) da Seção 14.6.
48. Ache a medida em radianos do ângulo de elevação segundo o qual uma arma deveria ser disparada, a fim de obter o máximo alcance para uma dada velocidade na boca da arma.
49. Ache uma fórmula para obter a altura máxima atingida por um projétil disparado por uma arma, tendo uma velocidade na boca da arma de  $v_0$  m/s e um ângulo de elevação de  $\alpha$  rad.
50. Uma menina joga uma bola horizontalmente, do topo de um penhasco com 88,2 m de altura, a uma velocidade escalar inicial de 9,8 m/s. Ache (a) o tempo de voo, e (b) a distância do penhasco ao ponto onde a bola atinge o chão.
51. Prove, usando a análise vetorial, que as diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio.

52. Ache o vetor posição  $\mathbf{R}(t)$ , se o vetor aceleração

$$\mathbf{A}(t) = t^2\mathbf{i} - \frac{1}{t^2}\mathbf{j} \text{ e } \mathbf{V}(1) = \mathbf{j}, \text{ e } \mathbf{R}(1) = \frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}.$$

53. Uma *epiciclóide* é a curva traçada por um ponto  $P$  sobre a circunferência de raio  $b$  que rola externamente sobre uma circunferência fixa de raio  $a$ . Dado que a origem está no centro da circunferência fixa, que  $A(a, 0)$  é um dos pontos no qual o ponto  $P$  dado entra em contato com a circunferência fixa,  $B$  é o ponto móvel de tangência entre as duas circunferências e o parâmetro  $t$  é a medida em radianos do ângulo  $AOB$ , prove que as equações paramétricas da epiciclóide são

$$x = (a + b) \cos t - b \cos \frac{a + b}{b} t$$

e

$$y = (a + b) \sin t - b \sin \frac{a + b}{b} t$$

54. Dados o triângulo  $ABC$ , os pontos  $D, E$  e  $F$  sobre os lados  $AB, BC$  e  $AC$ , respectivamente, e

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}); \mathbf{V}(\overrightarrow{BE}) = \frac{1}{3}\mathbf{V}(\overrightarrow{BC}); \mathbf{V}(\overrightarrow{CF}) = \frac{1}{3}\mathbf{V}(\overrightarrow{CA})$$

$$\text{Prove que } \mathbf{V}(\overrightarrow{AE}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{BF}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{CD}) = \mathbf{0}.$$

*Os Exercícios de 55 a 58 referem-se à Seção Suplementar 14.9. Nos exercícios 55 e 56, ache (a) o vetor velocidade e o vetor aceleração, (b) a velocidade escalar e (c) as componentes normal e tangencial da aceleração.*

55.  $\mathbf{R}(t) = \cosh 2t\mathbf{i} + \sinh 2t\mathbf{j}$

56.  $\mathbf{R}(t) = (2\operatorname{tg}^{-1} t - t)\mathbf{i} + \ln(1 + t^2)\mathbf{j}$

57. Ache as componentes normal e tangencial do vetor aceleração para a partícula do Exercício 41.

58. Ache as componentes normal e tangencial do vetor aceleração para a partícula do Exercício 42.

# QUINZE

## Vetores em um Espaço Tridimensional e Geometria Analítica Sólida

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta$$

Neste capítulo tratamos de vetores no espaço tridimensional. A Geometria Sólida também é incluída, pois sua discussão é simplificada com o uso de vetores. Começamos na Seção 15.1, estabelecendo um sistema de coordenadas num espaço semelhante àquele no plano. Na Seção 15.2, aplicamos as definições e teoremas dados na Seção 14.1, para vetores no plano, a um espaço tridimensional. Os tópicos de Geometria Sólida aparecem nas Seções 15.3, 15.4, 15.6 e 15.7. Esses tópicos incluem *planos*, *retas*, *cilindros*, *superfícies de revolução* e *superfícies quádricas*. O *produto vetorial*, discutido na Seção 15.5, é uma operação vetorial para vetores tridimensionais, que nós não efetuamos para vetores no plano.

*Funções com valores vetoriais* no espaço tridimensional, juntamente com uma breve introdução à *Geometria Diferencial* de curvas e superfícies, são apresentadas na Secção 15.8. *Coordenadas cilíndricas e esféricas* são generalizações de coordenadas polares a espaços tridimensionais. Serão discutidas na Secção 15.9, para que possam ser utilizadas em aplicações na Engenharia, no Capítulo 18.

## 15.1 O ESPAÇO NUMÉRICO TRIDIMENSIONAL

Até aqui estivemos interessados com a reta numérica  $R$  (o espaço numérico unidimensional) e o plano numérico  $R^2$  (o espaço numérico bidimensional). Identificamos os números reais em  $R$  com os pontos de um eixo horizontal e os pares numéricos reais em  $R^2$  com os pontos de um plano geométrico. Da mesma forma, vamos introduzir agora o conjunto de todas as triplas ordenadas de números reais.

### 15.1.1 DEFINIÇÃO

O conjunto de todas as triplas ordenadas de números reais é chamado de **espaço numérico tridimensional**, sendo denotado por  $R^3$ . Cada tripla ordenada  $(x, y, z)$  é chamada de um **ponto** no espaço numérico tridimensional.

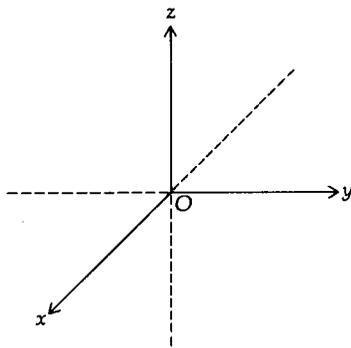


FIGURA 1

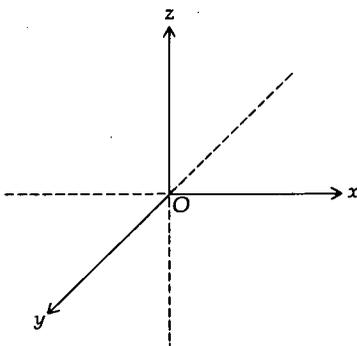


FIGURA 2

Para representar  $R^3$  no espaço geométrico tridimensional, consideremos as distâncias orientadas de um ponto a três planos mutuamente perpendiculares. Os planos foram formados considerando primeiro três retas mutuamente perpendiculares que se interceptam em um ponto, o qual denominaremos **origem**, sendo denotado pela letra  $O$ . Essas retas, chamadas de eixos coordenados, são designadas como os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Usualmente, os eixos  $x$  e  $y$  são tomados no plano horizontal e o eixo  $z$  é vertical. Uma direção positiva é escolhida em cada eixo. Se as direções positivas forem escolhidas como na Figura 1, o sistema de coordenadas será chamado de **dextrogiro**.\* Essa terminologia decorre do fato de que se a mão direita for colocada de tal forma que o polegar aponte na direção positiva do eixo  $x$  e o indicador aponte na direção positiva do eixo  $y$ , então o dedo médio estará apontando na direção positiva do eixo  $z$ . Se o dedo médio estiver apontando na direção negativa do eixo  $z$ , então o sistema de coordenadas será chamado de **sinistrogiro**.\*\* Um sistema sinistrogiro está na Figura 2. Em geral usaremos o sistema dextrogiro. Os três eixos determinam três planos coordenados: o plano  $xy$  contendo os eixos  $x$  e  $y$ , o plano  $xz$ , contendo os eixos  $x$  e  $z$  e o plano  $yz$ , contendo os eixos  $y$  e  $z$ .

Uma tripla ordenada de números reais  $(x, y, z)$  está associada a cada ponto  $P$  do espaço geométrico tridimensional. A distância orientada de  $P$  até o plano  $yz$  é chamada de **coordenada  $x$** , a distância orientada de  $P$  ao plano  $xz$  é chamada de **coordenada  $y$**  e a **coordenada  $z$**  é a distância orientada de  $P$  ao plano  $xy$ . Essas três coordenadas são chamadas de **coordenadas cartesianas retangulares** do ponto e há uma correspondência biunívoca (chamada de **sistema de coordenadas cartesianas retangulares**) entre todas as triplas ordenadas de números reais e os pontos no espaço tridimensional geométrico. Assim sendo, identificamos  $R^3$  com o espaço tridimensional geométrico e a tripla ordenada  $(x, y, z)$  será um ponto. O ponto  $(3, 2, 4)$  está mostrado na Figura 3 e o ponto  $(4, -2, -5)$  está na Figura 4. Os três planos coordenados dividem o espaço em oito partes, denominadas **octantes**. O primeiro octante é aquele onde todas as três coordenadas são positivas.

N. do T.: \* Também denominado *sistema direto* ou *positivo*.

\*\* Também denominado *sistema retrógrado* ou *negativo*.

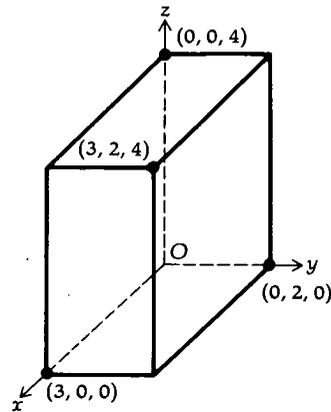


FIGURA 3

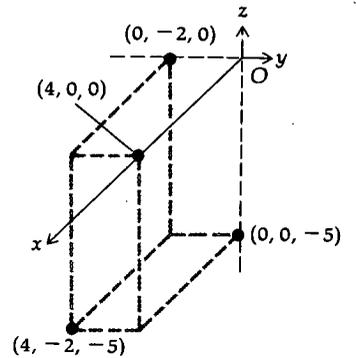


FIGURA 4

Uma reta é paralela a um plano se e somente se a distância de qualquer ponto da reta ao plano for a mesma.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Uma reta paralela ao plano  $yz$ , uma paralela ao plano  $xz$  e uma paralela ao plano  $xy$  estão nas Figuras 5, 6 e 7, respectivamente. ◀

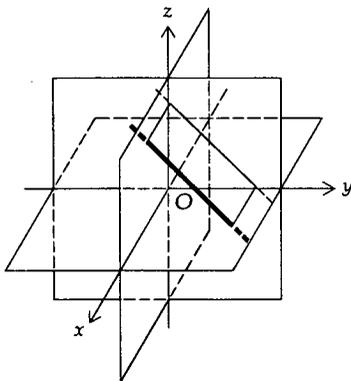


FIGURA 5

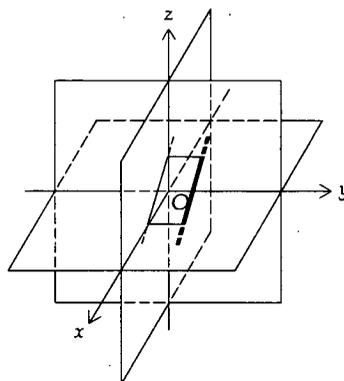


FIGURA 6

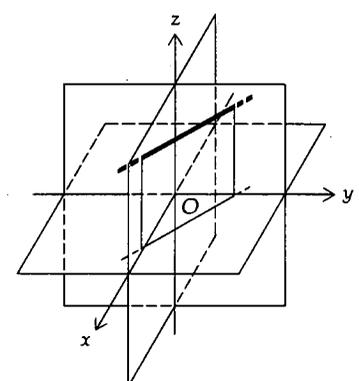


FIGURA 7

Consideraremos todas as retas contidas num dado plano como sendo paralelas a ele e, nesse caso, a distância de qualquer ponto da reta ao plano é zero. O seguinte teorema segue imediatamente.

### 15.1.2 TEOREMA

- (i) Uma reta é paralela ao plano  $yz$  se e somente se todos os pontos da reta tiverem a mesma coordenada  $x$ .
- (ii) Uma reta é paralela ao plano  $xz$  se e somente se todos os pontos da reta tiverem a mesma coordenada  $y$ .
- (iii) Uma reta é paralela ao plano  $xy$  se e somente se todos os pontos da reta tiverem a mesma coordenada  $z$ .

No espaço tridimensional, se uma reta for paralela a dois dos planos que se interceptam, ela será paralela à reta de intersecção dos dois planos. Também, se uma dada reta for paralela a uma segunda reta, então a reta dada será paralela a qualquer plano que contenha a segunda reta. O Teorema 15.1.3 segue desses fatos de Geometria Sólida e do Teorema 15.1.2.

## 15.1.3 TEOREMA

- (i) Uma reta será paralela ao eixo  $x$  se e somente se todos os pontos da reta tiverem uma mesma coordenada  $y$  e uma mesma coordenada  $z$ .
- (ii) Uma reta será paralela ao eixo  $y$  se e somente se todos os pontos da reta tiverem uma mesma coordenada  $x$  e uma mesma coordenada  $z$ .
- (iii) Uma reta será paralela ao eixo  $z$  se e somente se todos os pontos da reta tiverem uma mesma coordenada  $x$  e uma mesma coordenada  $y$ .

► **ILUSTRAÇÃO 2** Uma reta paralela ao eixo  $x$ , uma reta paralela ao eixo  $y$  e uma reta paralela ao eixo  $z$  estão nas Figuras 8, 9 e 10, respectivamente. ◀

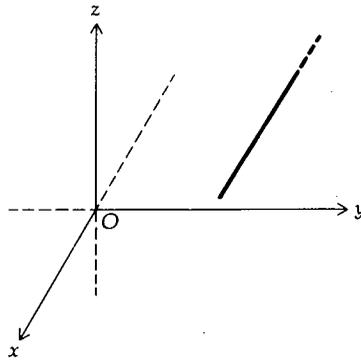


FIGURA 8

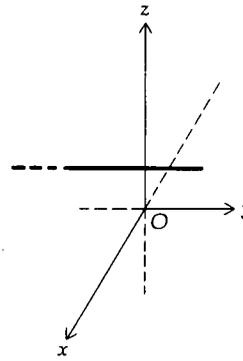


FIGURA 9

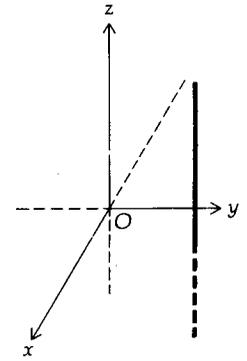


FIGURA 10

As fórmulas para encontrar a distância orientada de um ponto a outro sobre uma reta paralela ao eixo coordenado seguem da definição de distância orientada, dada na Secção 1.2, e estão enunciadas no teorema a seguir.

## 15.1.4 TEOREMA

- (i) Se  $A(x_1, y, z)$  e  $B(x_2, y, z)$  forem dois pontos sobre uma reta paralela ao eixo  $x$ , então a distância orientada de  $A$  a  $B$ , denotada por  $\overline{AB}$ , será dada por

$$\overline{AB} = x_2 - x_1$$

- (ii) Se  $C(x, y_1, z)$  e  $D(x, y_2, z)$  forem dois pontos sobre uma reta paralela ao eixo  $y$ , então a distância orientada de  $C$  a  $D$ , denotada por  $\overline{CD}$ , será dada por

$$\overline{CD} = y_2 - y_1$$

- (iii) Se  $E(x, y, z_1)$  e  $F(x, y, z_2)$  forem dois pontos sobre uma reta paralela ao eixo  $z$ , então a distância orientada de  $E$  a  $F$ , denotada por  $\overline{EF}$ , será dada por

$$\overline{EF} = z_2 - z_1$$

► **ILUSTRAÇÃO 3** A distância orientada  $\overline{PQ}$  do ponto  $P(2, -5, -4)$  ao ponto  $Q(2, -3, -4)$  é dada pelo Teorema 15.1.4(ii).

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (-3) - (-5) \\ &= 2 \end{aligned}$$

O teorema a seguir dá uma fórmula para achar a distância não-orientada entre dois pontos no espaço tridimensional. ◀

## 15.1.5 TEOREMA

A distância não-orientada entre os pontos  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  é dada por

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

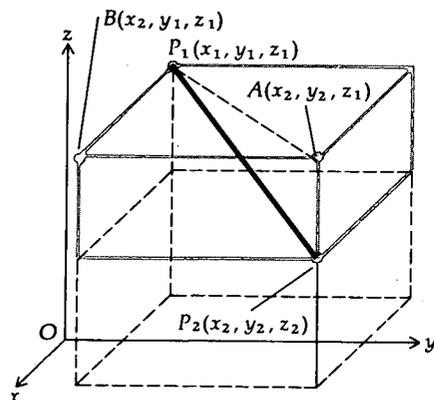


FIGURA 11

**Prova** Construa um paralelepípedo retangular tendo  $P_1$  e  $P_2$  como vértices opostos e faces paralelas aos planos coordenados (veja a Figura 11).

Pelo teorema de Pitágoras,

$$|P_1P_2|^2 = |P_1A|^2 + |AP_2|^2 \quad (1)$$

Como

$$|P_1A|^2 = |P_1B|^2 + |BA|^2$$

obtemos, substituindo na equação (1),

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BA|^2 + |AP_2|^2$$

Aplicando o Teorema 15.1.4(i), (ii) e (iii) ao segundo membro de (3), obtemos

$$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \blacksquare$$

**EXEMPLO 1** Ache a distância não-orientada entre os pontos  $P(-3, 4, -1)$  e  $Q(2, 5, -4)$ .

**Solução** Do Teorema 15.1.5,

$$\begin{aligned} |PQ| &= \sqrt{(2 + 3)^2 + (5 - 4)^2 + (-4 + 1)^2} \\ &= \sqrt{35} \end{aligned}$$

A fórmula para a distância entre dois pontos em  $R^3$  é uma mera extensão da fórmula correspondente para a distância entre dois pontos em  $R^2$ . É importante notar que a distância não-orientada entre dois pontos  $x_2$  e  $x_1$  em  $R$  é dada por

$$|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$$

As fórmulas para as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta são deduzidas formando-se triângulos semelhantes e procedendo de modo análogo ao caso bidimensional. As fórmulas são dadas no teorema a seguir e a prova será deixada como exercício (veja o Exercício 18).

## 15.1.6 TEOREMA

As coordenadas do ponto médio do segmento de reta com extremos  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  são dadas por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

## 15.1.7 DEFINIÇÃO

O gráfico de uma equação em  $R^3$  é o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  cujas coordenadas são números que satisfazem a equação.

O gráfico de uma equação em  $R^3$  é chamado de **superfície**. Uma superfície particular é a *esfera*, que definiremos a seguir.

15.1.8 DEFINIÇÃO

Uma esfera é o conjunto de todos os pontos no espaço tridimensional, equidistantes de um ponto fixo. O ponto fixo é chamado de **centro** da esfera e a medida da distância constante é chamada de **raio** da esfera.

15.1.9 TEOREMA

Uma equação da esfera de raio  $r$  e centro em  $(h, k, l)$  é

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2 \quad (2)$$

**Prova** Seja  $C$  o ponto  $(h, k, l)$  (veja a Figura 12). O ponto  $P(x, y, z)$  é um ponto da esfera se e somente se

$$|\overline{CP}| = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2} = r$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação acima, obtemos o resultado desejado. ■

Se o centro da esfera estiver na origem, então  $h = 0, k = 0, l = 0$ , e, portanto, uma equação dessa esfera será

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Se expandirmos os termos de (2) e os reagruparmos, teremos

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2hx - 2ky - 2lz + (h^2 + k^2 + l^2 - r^2) = 0$$

Essa equação é da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (3)$$

onde  $G, H, I$  e  $J$  são constantes. A equação (3) é chamada de **forma geral** da equação de uma esfera, enquanto que (2) é chamada de **forma centro-raio**. Como toda esfera tem um centro e um raio, sua equação pode ser posta na forma centro-raio e, portanto, na forma geral.

Pode ser mostrado que toda equação da forma (3) pode ser escrita na forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = K \quad (4)$$

onde

$$h = -\frac{1}{2}G \quad k = -\frac{1}{2}H \quad l = -\frac{1}{2}I \quad K = \frac{1}{4}(G^2 + H^2 + I^2 - 4J)$$

A demonstração deste fato será deixada como exercício (veja o Exercício 19).

Se  $K > 0$ , então (4) será da forma da equação (2); assim, o gráfico da equação será uma esfera, tendo seu centro em  $(h, k, l)$  e raio  $\sqrt{K}$ . Se  $K = 0$ , o gráfico da equação será o ponto  $(h, k, l)$ . Se  $K < 0$ , o gráfico será o conjunto vazio, pois uma soma de quadrados de três números reais é não-negativa. Vamos apresentar esse resultado como um teorema.

15.1.10 TEOREMA

O gráfico de toda equação do segundo grau em  $x, y$  e  $z$ , da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

é uma esfera, um ponto ou um conjunto vazio.

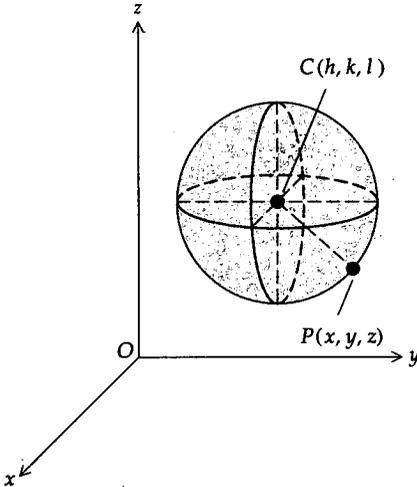


FIGURA 12

**EXEMPLO 2** Faça um esboço do gráfico da equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z = 2$$

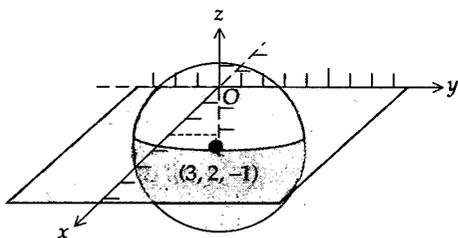


FIGURA 13

**Solução** Reagrupando os termos e completando os quadrados, temos

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1 = 2 + 9 + 4 + 1$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 16$$

Assim, o gráfico é uma esfera, tendo o seu centro em  $(3, 2, -1)$  e raio 4. Um esboço do gráfico está na Figura 13.

**EXEMPLO 3** Ache uma equação da esfera tendo os pontos  $A(-5, 6, -2)$  e  $B(9, -4, 0)$  como extremos de um diâmetro.

**Solução** O centro da esfera é o ponto médio do segmento de reta  $AB$ . Seja  $C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  esse ponto. Então, pelo Teorema 15.1.6, temos que

$$\bar{x} = \frac{9 - 5}{2} \quad \bar{y} = \frac{-4 + 6}{2} \quad \bar{z} = \frac{0 - 2}{2}$$

$$= 2 \quad = 1 \quad = -1$$

Assim,  $C$  é o ponto  $(2, 1, -1)$ . O raio da esfera é  $|\overline{CB}|$ . Assim,

$$r = \sqrt{(9 - 2)^2 + (-4 - 1)^2 + (0 + 1)^2}$$

$$= \sqrt{75}$$

Logo, do Teorema 15.1.9, uma equação da esfera é

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 75$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 69 = 0$$

### EXERCÍCIOS 15.1

Nos Exercícios de 1 a 5, os pontos  $A$  e  $B$  dados são vértices opostos de um paralelepípedo retangular, tendo suas faces paralelas aos planos coordenados. Em cada exercício, (a) faça um esboço da figura, (b) ache as coordenadas dos seis outros vértices, (c) ache o comprimento da diagonal  $AB$ .

1.  $A(0, 0, 0)$ ;  $B(7, 2, 3)$
2.  $A(1, 1, 1)$ ;  $B(3, 4, 2)$
3.  $A(-1, 1, 2)$ ;  $B(2, 3, 5)$
4.  $A(2, -1, -3)$ ;  $B(4, 0, -1)$
5.  $A(1, -1, 0)$ ;  $B(3, 3, 5)$

6. O vértice oposto a um canto de um salão está 8 m a leste, 5 m ao sul e 3 m para cima do primeiro canto. (a) Faça um esboço da figura; (b) determine o comprimento da diagonal que liga dois vértices opostos; (c) ache as coordenadas dos oito vértices do salão.

Nos Exercícios de 7 a 11, ache (a) a distância não-orientada entre os pontos  $A$  e  $B$  e (b) o ponto médio do segmento de reta que une os pontos  $A$  e  $B$ .

7.  $A(3, 4, 2)$ ;  $B(1, 6, 3)$
8.  $A(4, -3, 2)$ ;  $B(-2, 3, -5)$
9.  $A(2, -4, 1)$ ;  $B(\frac{1}{2}, 2, 3)$
10.  $A(-2, -\frac{1}{2}, 5)$ ;  $B(5, 1, -4)$
11.  $A(-5, 2, 1)$ ;  $B(3, 7, -2)$

12. Mostre que os três pontos  $(1, -1, 3)$ ,  $(2, 1, 7)$ , e  $(4, 2, 6)$  são os vértices de um triângulo retângulo e ache sua área.
13. Uma reta é traçada pelo ponto  $(6, 4, 2)$ , perpendicular ao

plano  $yz$ . Ache as coordenadas do ponto sobre a reta a uma distância de 10 unidades do ponto  $(0, 4, 0)$ .

14. Resolva o Exercício 13 se a reta for perpendicular ao plano  $xy$ .
15. Prove que os três pontos  $(-3, 2, 4)$ ,  $(6, 1, 2)$  e  $(-12, 3, 6)$  são colineares, usando a fórmula da distância.
16. Ache os vértices do triângulo cujos lados têm os pontos médios em  $(3, 2, 3)$ ,  $(-1, 1, 5)$  e  $(0, 3, 4)$ .
17. Para o triângulo com vértices em  $A(2, -5, 3)$ ,  $B(-1, 7, 0)$  e  $C(-4, 9, 7)$ , ache (a) o comprimento de cada lado e (b) o ponto médio de cada lado.
18. Prove o Teorema 15.1.6.
19. Mostre que toda equação da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

pode ser posta na forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = K$$

Nos Exercícios de 20 a 25, determine o gráfico da equação dada.

20.  $x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 6z - 25 = 0$
21.  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$
22.  $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - 3z + 2 = 0$
23.  $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = 0$
24.  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 4z + 13 = 0$
25.  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 19 = 0$

Nos Exercícios de 26 a 28, ache uma equação da esfera satisfazendo as condições dadas.

- 26. Um diâmetro é o segmento de reta tendo extremidades em  $(6, 2, -5)$  e  $(-4, 0, 7)$ .
- 27. Ela é concêntrica com a esfera de equação  $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8z - 9 = 0$  e tem raio 3.
- 28. Ela contém os pontos  $(0, 0, 4)$ ,  $(2, 1, 3)$  e  $(0, 2, 6)$  e tem seu centro no plano  $yz$ .

- 29. Prove analiticamente que as quatro diagonais unindo vértices opostos de um paralelepípedo retangular se interceptam ao meio.
- 30. Se  $P, Q, R$  e  $S$  são quatro pontos no espaço tridimensional e  $A, B, C$  e  $D$  são os pontos médios de  $PQ, QR, RS$  e  $SP$ , respectivamente, prove analiticamente que  $ABCD$  é um paralelogramo.
- 31. Prove analiticamente que as quatro diagonais de um cubo têm o mesmo comprimento.

## 15.2 VETORES NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Definimos um vetor no plano como um par ordenado de números reais. Agora aplicaremos essa definição a um vetor no espaço tridimensional.

### 15.2.1 DEFINIÇÃO

Um **vetor no espaço tridimensional** é uma tripla ordenada de números reais  $\langle x, y, z \rangle$ . Os números  $x, y$  e  $z$  são chamados de **componentes** do vetor  $\langle x, y, z \rangle$ .

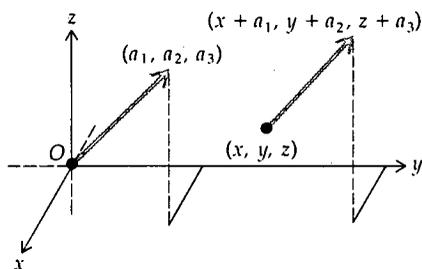


FIGURA 1

Seja  $V_3$  o conjunto de triplas ordenadas  $\langle x, y, z \rangle$  para as quais  $x, y$  e  $z$  são números reais. Nesse capítulo, um vetor estará sempre em  $V_3$ , a não ser que seja explicitamente dito de outra maneira.

Um vetor em  $V_3$  pode ser representado, como fizemos para vetores em  $V_2$ , por um segmento de reta orientado. Se  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ , então o segmento de reta orientado, tendo seu ponto inicial na origem e seu ponto final no ponto  $(a_1, a_2, a_3)$ , será chamado de **representação posicional** de  $\mathbf{A}$ . Um segmento de reta orientado, tendo seu ponto inicial em  $(x, y, z)$  e seu ponto final em  $(x + a_1, y + a_2, z + a_3)$  será também uma representação do vetor  $\mathbf{A}$ . Veja a Figura 1.

O **vetor zero** é o vetor  $\langle 0, 0, 0 \rangle$ , sendo denotado por  $\mathbf{0}$ . Qualquer ponto é uma representação do vetor zero.

O **módulo\*** de um vetor é o comprimento de qualquer uma de suas representações. Se o vetor  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ , o módulo de  $\mathbf{A}$  será denotado por  $\|\mathbf{A}\|$ , e segue que

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

A **direção** e o **sentido** de um vetor não-nulo em  $V_3$  são dados por três ângulos, chamados **ângulos de direção** do vetor.

### 15.2.2 DEFINIÇÃO

Os **ângulos de direção** de um vetor não-nulo são os três ângulos que têm a menor medida não-negativa em radianos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  medidos a partir dos eixos positivos  $x, y$  e  $z$ , respectivamente, até a representação posicional do vetor.

A medida em radianos de cada ângulo de direção de um vetor é maior ou igual a zero e menor ou igual a  $\pi$ . Os ângulos de direção com medidas  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  em radianos do vetor  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  estão na Figura 2. Nessa figura, as componentes de  $\mathbf{A}$  são todas de números positivos e os ângulos de direção desse vetor têm todos medida positiva em radianos, menores do que  $\frac{1}{2}\pi$ . Na figura, vemos que o triângulo  $POR$  é retângulo e

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|}$$

Pode ser provado que a mesma fórmula é válida se  $\frac{1}{2}\pi \leq \alpha \leq \pi$ . Fórmulas análogas podem ser encontradas para  $\cos \beta$  e  $\cos \gamma$ , e temos que

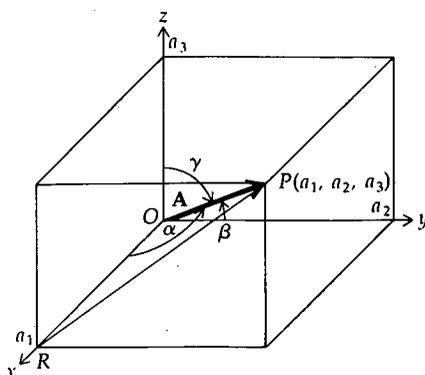


FIGURA 2

N. do T.: Também denominado *norma* em Matemática e, às vezes, *magnitude* ou *intensidade* do vetor em Física.

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|} \quad \cos \beta = \frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|} \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{\|\mathbf{A}\|} \quad (1)$$

Os três números  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  e  $\cos \gamma$  são chamados de **co-senos diretores** do vetor  $\mathbf{A}$ . O vetor nulo não tem ângulos de direção e, portanto, não possui co-senos diretores.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Encontraremos o módulo e os co-senos diretores do vetor  $\mathbf{A} = \langle 3, 2, -6 \rangle$ .

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\| &= \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-6)^2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Das fórmulas (1),

$$\cos \alpha = \frac{3}{7} \quad \cos \beta = \frac{2}{7} \quad \cos \gamma = -\frac{6}{7} \quad \blacktriangleleft$$

Se o módulo de um vetor e seus co-senos diretores forem conhecidos, o vetor por (1) ficará univocamente determinado e segue que

$$a_1 = \|\mathbf{A}\| \cos \alpha \quad a_2 = \|\mathbf{A}\| \cos \beta \quad a_3 = \|\mathbf{A}\| \cos \gamma \quad (2)$$

Os três co-senos diretores de um vetor não são independentes uns dos outros, como veremos no teorema a seguir.

### 15.2.3 TEOREMA

Se  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  e  $\cos \gamma$  forem os co-senos diretores de um vetor, então

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

**Prova** Se  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ , então os co-senos diretores de  $\mathbf{A}$  serão dados por (1) e

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{a_1^2}{\|\mathbf{A}\|^2} + \frac{a_2^2}{\|\mathbf{A}\|^2} + \frac{a_3^2}{\|\mathbf{A}\|^2} \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{\|\mathbf{A}\|^2} \\ &= \frac{\|\mathbf{A}\|^2}{\|\mathbf{A}\|^2} \\ &= 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

► **ILUSTRAÇÃO 2** Verificaremos o Teorema 15.2.3 para o vetor da Ilustração 1.

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 \\ &= \frac{9}{49} + \frac{4}{49} + \frac{36}{49} \\ &= \frac{49}{49} \\ &= 1 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

O vetor  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  é um vetor unitário se  $\|\mathbf{A}\| = 1$ , e das fórmulas (1) as componentes de um vetor unitário são seus co-senos diretores.

As operações de adição, subtração e multiplicação escalar de vetores em  $V_3$  recebem definições análogas às correspondentes definições para vetores em  $V_2$ .

15.2.4 DEFINIÇÃO

Se  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ , então a soma desses vetores será dada por

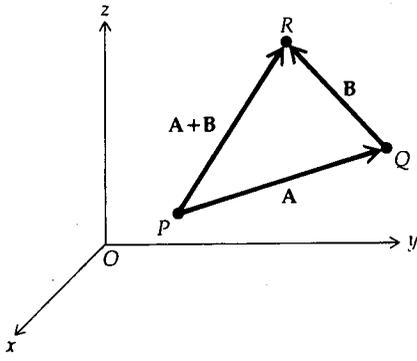
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$


FIGURA 3

**EXEMPLO 1** Dados  $\mathbf{A} = \langle 5, -2, 6 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle 8, -5, -4 \rangle$ , ache  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ .

**Solução**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle 5 + 8, (-2) + (-5), 6 + (-4) \rangle \\ &= \langle 13, -7, 2 \rangle \end{aligned}$$

A interpretação geométrica da soma de dois vetores em  $V_3$  é análoga àquela que foi dada para vetores em  $V_2$ . Veja a Figura 3. Se  $P$  for o ponto  $(x, y, z)$  e  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ , e  $\overline{PQ}$  for uma representação de  $\mathbf{A}$ , então  $Q$  será o ponto  $(x + a_1, y + a_2, z + a_3)$ . Seja  $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$  e seja  $\overline{QR}$  uma representação de  $\mathbf{B}$ . Então,  $R$  é o ponto  $(x + (a_1 + b_1), y + (a_2 + b_2), z + (a_3 + b_3))$ . Logo,  $\overline{PR}$  é a representação do vetor  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  e a lei do paralelogramo é válida.

15.2.5 DEFINIÇÃO

Se  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ , então o vetor  $\langle -a_1, -a_2, -a_3 \rangle$  é definido como o oposto de  $\mathbf{A}$ , denotado por  $-\mathbf{A}$ .

15.2.6 DEFINIÇÃO

A diferença de dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , denotada por  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ , é definida como sendo

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Das Definições 15.2.5 e 15.2.6, segue que se  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ , então  $-\mathbf{B} = \langle -b_1, -b_2, -b_3 \rangle$  e

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

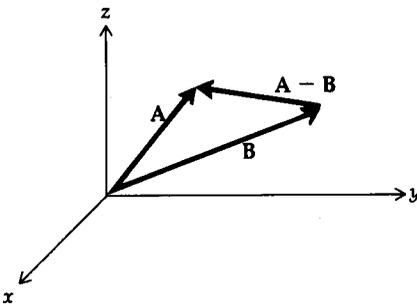


FIGURA 4

**EXEMPLO 2** Para os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  do Exemplo 1, ache  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ .

**Solução**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \langle 5, -2, 6 \rangle - \langle 8, -5, -4 \rangle \\ &= \langle 5, -2, 6 \rangle + \langle -8, 5, 4 \rangle \\ &= \langle -3, 3, 10 \rangle \end{aligned}$$

A diferença entre dois vetores em  $V_3$  também é interpretada geometricamente como em  $V_2$ . Veja a Figura 4. Uma representação do vetor  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  é obtida se escolhermos representações de  $\mathbf{A}$  e de  $\mathbf{B}$  com o mesmo ponto inicial. Então, uma representação do vetor  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  é o segmento orientado do ponto final da representação de  $\mathbf{B}$  ao ponto final da representação de  $\mathbf{A}$ .

A Figura 5 mostra os pontos  $P(a_1, a_2, a_3)$  e  $Q(b_1, b_2, b_3)$  e os segmentos orientados  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{OP}$  e  $\overline{OQ}$ . Observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overline{PQ}) &= \mathbf{V}(\overline{OQ}) - \mathbf{V}(\overline{OP}) \\ &= \langle b_1, b_2, b_3 \rangle - \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{V}(\overline{PQ}) = \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3 \rangle$$

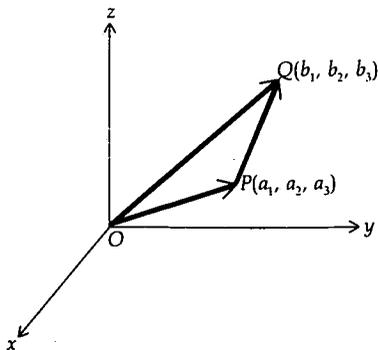


FIGURA 5

► **ILUSTRAÇÃO 3** A Figura 6 mostra o segmento de reta orientado  $\overrightarrow{PQ}$ , onde  $P$  é o ponto  $(1, 3, 5)$  e  $Q$  é o ponto  $(2, -1, 4)$ .

$$\begin{aligned} V(\overrightarrow{PQ}) &= \langle 2 - 1, -1 - 3, 4 - 5 \rangle \\ &= \langle 1, -4, -1 \rangle \end{aligned}$$

**15.2.7 DEFINIÇÃO**

Se  $c$  for um escalar e  $\mathbf{A}$  um vetor  $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ , então o produto de  $c$  e  $\mathbf{A}$ , denotado por  $c\mathbf{A}$ , será um vetor, dado por

$$\begin{aligned} c\mathbf{A} &= c\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \\ &= \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle \end{aligned}$$

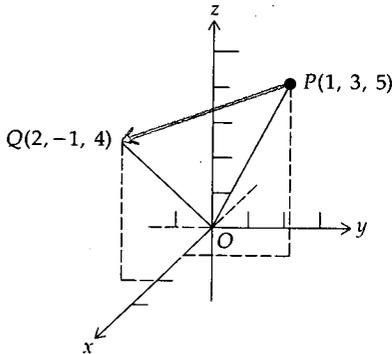


FIGURA 6

**EXEMPLO 3** Dado  $\mathbf{A} = \langle -4, 7, -2 \rangle$ , ache  $3\mathbf{A}$  e  $-5\mathbf{A}$ .

**Solução**

$$\begin{aligned} 3\mathbf{A} &= 3\langle -4, 7, -2 \rangle & -5\mathbf{A} &= (-5)\langle -4, 7, -2 \rangle \\ &= \langle -12, 21, -6 \rangle & &= \langle 20, -35, 10 \rangle \end{aligned}$$

Suponha que  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  seja um vetor não-nulo, tendo por co-senos diretores  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  e  $\cos \gamma$ , e seja  $c$  qualquer escalar não-nulo. Então  $c\mathbf{A} = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$ ; e se  $\cos \alpha_1$ ,  $\cos \beta_1$  e  $\cos \gamma_1$  forem os co-senos diretores de  $c\mathbf{A}$ , teremos nas expressões (1),

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{ca_1}{\|c\mathbf{A}\|} & \cos \beta_1 &= \frac{ca_2}{\|c\mathbf{A}\|} & \cos \gamma_1 &= \frac{ca_3}{\|c\mathbf{A}\|} \\ \cos \alpha_1 &= \frac{c}{|c|} \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|} & \cos \beta_1 &= \frac{c}{|c|} \frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|} & \cos \gamma_1 &= \frac{c}{|c|} \frac{a_3}{\|\mathbf{A}\|} \\ \cos \alpha_1 &= \frac{c}{|c|} \cos \alpha & \cos \beta_1 &= \frac{c}{|c|} \cos \beta & \cos \gamma_1 &= \frac{c}{|c|} \cos \gamma \end{aligned} \quad (3)$$

Assim, se  $c > 0$ , segue das expressões (3) que os co-senos diretores do vetor  $c\mathbf{A}$  serão os mesmos que os co-senos diretores de  $\mathbf{A}$ . E se  $c < 0$ , os co-senos diretores de  $c\mathbf{A}$  serão os opostos dos co-senos diretores de  $\mathbf{A}$ . Logo, se  $c$  for um escalar não-nulo, então o vetor  $c\mathbf{A}$  terá o seu módulo igual a  $|c|$  vezes o módulo de  $\mathbf{A}$ . Se  $c > 0$ ,  $c\mathbf{A}$  terá a mesma direção e sentido que  $\mathbf{A}$ , enquanto que se  $c < 0$ ,  $c\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}$  terão direção e sentido opostos.

As operações de adição de vetores, bem como a multiplicação por escalar de vetores em  $V_3$ , satisfazem propriedades idênticas àquelas dadas no Teorema 14.1.8. Elas serão dadas no teorema a seguir, cuja prova será deixada como um exercício (veja os Exercícios 19 e 20). Desse fato e da Definição 14.1.9, segue que  $V_3$  é um espaço vetorial real. Os três vetores unitários

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

formam uma base para o espaço vetorial  $V_3$ , pois todo vetor  $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  pode ser escrito em termos deles, da seguinte forma:

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\langle 1, 0, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1, 0 \rangle + a_3\langle 0, 0, 1 \rangle$$

Logo, se  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ , também podemos escrever

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad (4)$$

Como em uma base de  $V_3$  temos três elementos,  $V_3$  é um espaço tridimensional.

Substituindo (2) em (4), temos que

$$\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| \cos \alpha \mathbf{i} + \|\mathbf{A}\| \cos \beta \mathbf{j} + \|\mathbf{A}\| \cos \gamma \mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| (\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}) \quad (5)$$

A expressão (5) possibilita-nos expressar qualquer vetor não-nulo em termos de seu módulo e co-senos diretores.

**EXEMPLO 4** Exprese o vetor da Ilustração 1 em termos do seu módulo e co-senos diretores.

**Solução** Na Ilustração 1, temos que  $\mathbf{A} = \langle 3, 2, -6 \rangle$ ,  $\|\mathbf{A}\| = 7$ ,  $\cos \alpha = \frac{3}{7}$ ,  $\cos \beta = \frac{2}{7}$  e  $\cos \gamma = -\frac{6}{7}$ . Logo, de (5),

$$\mathbf{A} = 7\left(\frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}\right)$$

### 15.2.8 TEOREMA

Se  $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  for um vetor não-nulo, então o vetor unitário  $\mathbf{U}$ , tendo a mesma direção e sentido que  $\mathbf{A}$ , será dado por

$$\mathbf{U} = \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|} \mathbf{i} + \frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|} \mathbf{j} + \frac{a_3}{\|\mathbf{A}\|} \mathbf{k}$$

A demonstração do Teorema 15.2.8 é análoga à que foi dada no Teorema 14.1.10 para um vetor em  $V_2$  e será deixada como exercício (veja o Exercício 46).

**EXEMPLO 5** Dados os pontos  $R(2, -1, 3)$  e  $S(3, 4, 6)$ , ache o vetor unitário que tem a mesma direção e sentido que  $\mathbf{V}(\overline{RS})$ .

**Solução**

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overline{RS}) &= \langle 3, 4, 6 \rangle - \langle 2, -1, 3 \rangle & \|\mathbf{V}(\overline{RS})\| &= \sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2} \\ &= \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k} & &= \sqrt{35} \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 15.2.9, o vetor unitário pedido é

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{35}} \mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{35}} \mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{35}} \mathbf{k}$$

A definição de produto escalar de dois vetores em  $V_3$  é uma extensão da definição dada para vetores em  $V_2$ .

### 15.2.9 DEFINIÇÃO

Se  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ , então o produto escalar de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , denotado por  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , será dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1, b_2, b_3 \rangle \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned}$$

► **ILUSTRAÇÃO 4** Se  $\mathbf{A} = \langle 4, 2, -6 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle -5, 3, -2 \rangle$ , então

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle 4, 2, -6 \rangle \cdot \langle -5, 3, -2 \rangle \\ &= 4(-5) + 2(3) + (-6)(-2) \\ &= -20 + 6 + 12 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Para os vetores unitários  $i$ ,  $j$  e  $k$ ,

$$i \cdot i = 1 \quad j \cdot j = 1 \quad k \cdot k = 1$$

$$i \cdot j = 0 \quad i \cdot k = 0 \quad j \cdot k = 0$$

As leis para o produto escalar são as mesmas que aquelas dos Teoremas 14.2.2 e 14.2.3 para vetores em  $V_2$ . As demonstrações serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios 27 e 28).

Vamos definir agora o ângulo entre dois vetores e então expressar o produto escalar em termos do co-seno da medida em radianos desse ângulo.

### 15.2.10 DEFINIÇÃO

Sejam  $A$  e  $B$  dois vetores não-nulos em  $V_3$ , tais que  $A$  não seja um múltiplo escalar de  $B$ . Se  $\overline{OP}$  for a representação posicional de  $A$  e  $\overline{OQ}$  a representação posicional de  $B$ , então o **ângulo entre os vetores  $A$  e  $B$**  será definido como o ângulo de medida positiva entre  $\overline{OP}$  e  $\overline{OQ}$ , interno ao triângulo  $POQ$ . Se  $A = cB$ , onde  $c$  é um escalar, então se  $c > 0$ , o ângulo entre os vetores terá medida de 0 rad e se  $c < 0$ , o ângulo entre os vetores será  $\pi$  rad.

A Figura 7 mostra o ângulo  $\theta$  entre os dois vetores, quando  $A$  não for um múltiplo escalar de  $B$ .

### 15.2.11 TEOREMA

Se  $\theta$  for o ângulo entre os vetores não-nulos  $A$  e  $B$  em  $V_3$ , então

$$A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos \theta$$

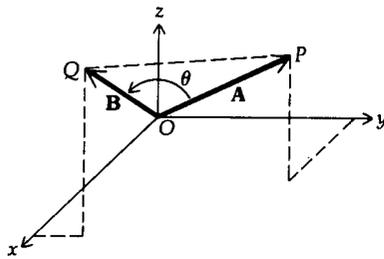


FIGURA 7

A demonstração do Teorema 15.2.11 é semelhante à do Teorema 14.2.5 para vetores em  $V_2$  e será deixada como exercício (veja o Exercício 47).

A definição de vetores *paralelos* em  $V_3$  é análoga à Definição 14.2.6 para vetores em  $V_2$ ; isto é, dois vetores em  $V_3$  são **paralelos** se e somente se um dos vetores for um múltiplo escalar do outro. Da mesma forma que vetores em  $V_2$ , podemos provar dessa definição e do Teorema 15.2.11 que dois vetores não-nulos em  $V_3$  serão paralelos se e somente se a medida em radianos do ângulo entre eles for 0 ou  $\pi$ .

A definição de vetores *ortogonais* em  $V_3$  corresponde à Definição 14.2.7 para vetores em  $V_2$ ; isto é, se  $A$  e  $B$  forem dois vetores em  $V_3$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **ortogonais** se e somente se  $A \cdot B = 0$ .

**EXEMPLO 6** Prove, usando vetores, que os pontos  $A(4, 9, 1)$ ,  $B(-2, 6, 3)$  e  $C(6, 3, -2)$  são os vértices de um triângulo retângulo.

**Solução** O triângulo  $CAB$  aparece na Figura 8. Da figura, parece que o ângulo reto está em  $A$ . Vamos encontrar  $V(\overline{AB})$  e  $V(\overline{AC})$  e se o produto escalar desses vetores for zero, então o ângulo entre eles será reto.

$$\begin{aligned} V(\overline{AB}) &= \langle -2 - 4, 6 - 9, 3 - 1 \rangle & V(\overline{AC}) &= \langle 6 - 4, 3 - 9, -2 - 1 \rangle \\ &= \langle -6, -3, 2 \rangle & &= \langle 2, -6, -3 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\overline{AB}) \cdot V(\overline{AC}) &= \langle -6, -3, 2 \rangle \cdot \langle 2, -6, -3 \rangle \\ &= -12 + 18 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo,  $V(\overline{AB})$  e  $V(\overline{AC})$  são ortogonais; assim, o ângulo em  $A$  do triângulo  $CAB$  é um ângulo reto e, portanto,  $CAB$  é um triângulo retângulo.

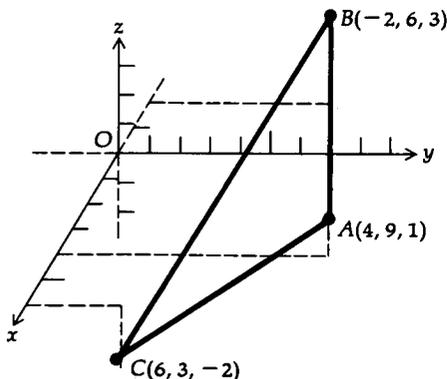


FIGURA 8

Se  $\mathbf{U}$  for um vetor unitário na direção e sentido de  $\mathbf{A}$  e  $\theta$  for o ângulo entre  $\mathbf{A}$  (ou  $\mathbf{U}$ ) e um vetor  $\mathbf{B}$ , então, do Teorema 15.2.11,

$$\begin{aligned}\mathbf{U} \cdot \mathbf{B} &= \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{B}\| \cos \theta \\ &= \|\mathbf{B}\| \cos \theta\end{aligned}$$

Como ocorre com os vetores em  $V_2$ ,  $\|\mathbf{B}\| \cos \theta$  é a **projeção escalar** de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$  e a **componente** de  $\mathbf{B}$  na direção de  $\mathbf{A}$ .

A fórmula do Teorema 14.2.9 dando a projeção escalar de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$  é válida para vetores em  $V_3$  e a demonstração é idêntica àquela para vetores em  $V_2$ . Assim, a projeção escalar de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$  é

$$\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|} \quad (6)$$

O Teorema 14.2.10, para vetores em  $V_2$ , dá uma fórmula para calcular o **vetor projeção** do vetor  $\mathbf{B}$  sobre o vetor  $\mathbf{A}$ . Esse teorema e sua prova são idênticos para vetores em  $V_3$ , sendo o vetor

$$\left( \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2} \right) \mathbf{A} \quad (7)$$

**EXEMPLO 7** Dados os vetores

$$\mathbf{A} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

Ache: (a)  $\cos \theta$ , se  $\theta$  for o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ ; (b) a componente de  $\mathbf{B}$  na direção de  $\mathbf{A}$ ; (c) o vetor projeção de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$ .

**Solução** Primeiro vamos calcular  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\|\mathbf{A}\|$  e  $\|\mathbf{B}\|$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle 6, -3, 2 \rangle \cdot \langle 2, 1, -3 \rangle & \|\mathbf{A}\| &= \sqrt{36 + 9 + 4} & \|\mathbf{B}\| &= \sqrt{4 + 1 + 9} \\ &= 12 - 3 - 6 & &= \sqrt{49} & &= \sqrt{14} \\ &= 3 & &= 7 & &= 7\end{aligned}$$

(a) Do Teorema 15.2.11,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|} \\ &= \frac{3}{7\sqrt{14}}\end{aligned}$$

(b) A componente de  $\mathbf{B}$  na direção de  $\mathbf{A}$  é a projeção escalar de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$ , que é

$$\begin{aligned}\|\mathbf{B}\| \cos \theta &= \sqrt{14} \left( \frac{3}{7\sqrt{14}} \right) \\ &= \frac{3}{7}\end{aligned}$$

(c) De (7), o vetor projeção de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$  é

$$\begin{aligned}\left( \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2} \right) \mathbf{A} &= \frac{3}{49} (6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \\ &= \frac{18}{49}\mathbf{i} - \frac{9}{49}\mathbf{j} + \frac{6}{49}\mathbf{k}\end{aligned}$$

**EXEMPLO 8** Ache a distância do ponto  $P(4, 1, 6)$  à reta que passa pelos pontos  $A(8, 3, 2)$  e  $B(2, -3, 5)$ .

**Solução** A Figura 9 mostra o ponto  $P$  e um esboço da reta que passa por  $A$  e  $B$ . O ponto  $M$  é o pé da perpendicular de  $P$  à reta pelos pontos  $A$  e  $B$ . Sejam  $d$  unidades a distância  $|PM|$ . Assim, do teorema de Pitágoras,

$$d = \sqrt{|\overline{AP}|^2 - |\overline{AM}|^2} \quad (8)$$

Para aplicar (8), precisamos calcular  $|\overline{AP}|$ , que é o módulo de  $\mathbf{V}(\overline{AP})$ , e  $|\overline{AM}|$ , que é a projeção escalar de  $\mathbf{V}(\overline{AP})$  sobre  $\mathbf{V}(\overline{AB})$ . Vamos achar primeiro  $\mathbf{V}(\overline{AP})$  e  $\mathbf{V}(\overline{AB})$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overline{AP}) &= \langle 4 - 8, 1 - 3, 6 - 2 \rangle & \mathbf{V}(\overline{AB}) &= \langle 2 - 8, -3 - 3, 5 - 2 \rangle \\ &= \langle -4, -2, 4 \rangle & &= \langle -6, -6, 3 \rangle \end{aligned}$$

Calculamos  $|\overline{AP}|$  encontrando  $\|\mathbf{V}(\overline{AP})\|$  e calculamos  $|\overline{AM}|$  usando (6) com  $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overline{AB})$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overline{AP})$ .

$$\begin{aligned} |\overline{AP}| &= \|\mathbf{V}(\overline{AP})\| & |\overline{AM}| &= \frac{\mathbf{V}(\overline{AB}) \cdot \mathbf{V}(\overline{AP})}{\|\mathbf{V}(\overline{AB})\|} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 4^2} & &= \frac{\langle -6, -6, 3 \rangle \cdot \langle -4, -2, 4 \rangle}{\sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 3^2}} \\ &= \sqrt{36} & &= \frac{24 + 12 + 12}{\sqrt{81}} \\ &= 6 & &= \frac{48}{9} \end{aligned}$$

Substituindo esses valores de  $|\overline{AP}|$  e  $|\overline{AM}|$  em (8), obtemos

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{6^2 - \left(\frac{48}{9}\right)^2} \\ &= 6\sqrt{1 - \frac{64}{81}} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{17} \end{aligned}$$

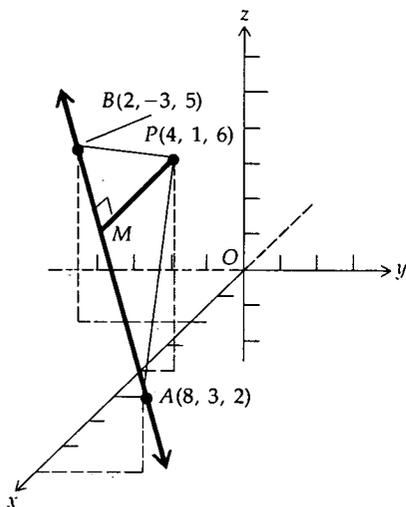


FIGURA 9

### EXERCÍCIOS 15.2

Nos Exercícios de 1 a 6,  $\mathbf{A} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ ,  $\mathbf{B} = \langle 4, -3, -1 \rangle$ ,  $\mathbf{C} = \langle -5, -3, 5 \rangle$  e  $\mathbf{D} = \langle -2, 1, 6 \rangle$ .

1. Ache: (a)  $\mathbf{A} + 5\mathbf{B}$ ; (b)  $7\mathbf{C} - 5\mathbf{D}$ ; (c)  $\|7\mathbf{C}\| - \|5\mathbf{D}\|$ ; (d)  $\|7\mathbf{C} - 5\mathbf{D}\|$ .
2. Ache: (a)  $2\mathbf{A} - \mathbf{C}$ ; (b)  $\|2\mathbf{A}\| - \|\mathbf{C}\|$ ; (c)  $4\mathbf{B} + 6\mathbf{C} - 2\mathbf{D}$ ; (d)  $\|4\mathbf{B}\| + \|6\mathbf{C}\| - \|2\mathbf{D}\|$ .
3. Ache: (a)  $\mathbf{C} + 3\mathbf{D} - 8\mathbf{A}$ ; (b)  $\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| (\mathbf{C} - \mathbf{D})$ .
4. Ache: (a)  $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C} - 12\mathbf{D}$ ; (b)  $\|\mathbf{A}\| \mathbf{C} - \|\mathbf{B}\| \mathbf{D}$ .
5. Ache os escalares  $a$  e  $b$ , tais que  $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + b(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{0}$ .
6. Ache os escalares  $a$ ,  $b$  e  $c$ , tais que  $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \mathbf{D}$ .

Nos Exercícios de 7 a 10, ache os co-senos diretores do vetor  $\mathbf{V}(\overline{P_1P_2})$  e teste as respostas, verificando que a soma dos seus quadrados é 1.

7.  $P_1(3, -1, -4)$ ;  $P_2(7, 2, 4)$
8.  $P_1(-2, 6, 5)$ ;  $P_2(2, 4, 1)$
9.  $P_1(4, -3, -1)$ ;  $P_2(-2, -4, -8)$
10.  $P_1(1, 3, 5)$ ;  $P_2(2, -1, 4)$

11. Use os pontos  $P_1$  e  $P_2$  do Exercício 7 e ache o ponto  $Q$ , tal que  $\mathbf{V}(\overline{P_1P_2}) = 3\mathbf{V}(\overline{P_1Q})$ .
12. Use os pontos  $P_1$  e  $P_2$  do Exercício 10 e ache o ponto  $R$ , tal que  $\mathbf{V}(\overline{P_1R}) = -2\mathbf{V}(\overline{P_2R})$ .
13. Dados  $P_1(3, 2, -4)$  e  $P_2(-5, 4, 2)$ , ache o ponto  $P_3$ , tal que  $4\mathbf{V}(\overline{P_1P_2}) = -3\mathbf{V}(\overline{P_2P_3})$ .
14. Dados  $P_1(7, 0, -2)$  e  $P_2(2, -3, 5)$ , ache o ponto  $P_3$ , tal que  $\mathbf{V}(\overline{P_1P_3}) = 5\mathbf{V}(\overline{P_2P_3})$ .

Nos Exercícios 15 e 16, expresse o vetor dado em termos de seu módulo e co-senos diretores.

15. (a)  $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ; (b)  $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
16. (a)  $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ; (b)  $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

Nos Exercícios 17 e 18, ache os vetores unitários tendo a mesma direção e sentido que  $\mathbf{V}(\overline{P_1P_2})$ .

17. (a)  $P_1(4, -1, -6)$  e  $P_2(5, 7, -2)$ ;  
(b)  $P_1(-2, 5, 3)$  e  $P_2(-4, 7, 5)$

18. (a)  $P_1(3, 0, -1)$  e  $P_2(-3, 8, -1)$ ;  
 (b)  $P_1(-8, -5, 2)$  e  $P_2(-3, -9, 4)$

Nos Exercícios 19 e 20, prove a propriedade se  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  forem quaisquer vetores em  $V_3$  e  $c$  e  $d$  forem quaisquer escalares.

19. (a)  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$  (lei comutativa)  
 (b) Há um vetor  $\mathbf{0}$  em  $V_3$  para o qual  $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$   
 (existência de identidade aditiva)  
 (c) Há um vetor  $-\mathbf{A}$  em  $V_3$  tal que  $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$   
 (existência do oposto)  
 (d)  $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$  (lei distributiva)  
 20. (a)  $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$  (lei associativa)  
 (b)  $(cd)\mathbf{A} = c(d\mathbf{A})$  (lei associativa)  
 (c)  $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$  (lei distributiva)

Nos Exercícios de 21 a 26,  $\mathbf{A} = \langle -4, -2, 4 \rangle$ ;  $\mathbf{B} = \langle 2, 7, -1 \rangle$ ;  
 $\mathbf{C} = \langle 6, -3, 0 \rangle$  e  $\mathbf{D} = \langle 5, 4, -3 \rangle$ .

21. Ache: (a)  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ ; (b)  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})$ ; (c)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ ;  
 (d)  $(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}$ .  
 22. Ache: (a)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ ; (b)  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ ;  
 (c)  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}$ ; (d)  $(2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}) \cdot (4\mathbf{C} - \mathbf{D})$ .  
 23. Ache: (a)  $\cos \theta$ , se  $\theta$  for o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$ ; (b) a componente de  $\mathbf{C}$  na direção de  $\mathbf{A}$ ; (c) o vetor projeção de  $\mathbf{C}$  sobre  $\mathbf{A}$ .  
 24. Ache: (a)  $\cos \theta$ , se  $\theta$  for o ângulo entre  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$ ; (b) a componente de  $\mathbf{B}$  na direção de  $\mathbf{D}$ ; (c) o vetor projeção de  $\mathbf{B}$  em  $\mathbf{D}$ .  
 25. Ache: (a) a projeção escalar de  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbf{B}$ ; (b) o vetor projeção de  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbf{B}$ .  
 26. Ache: (a) a projeção escalar de  $\mathbf{D}$  sobre  $\mathbf{C}$ ; (b) o vetor projeção de  $\mathbf{D}$  sobre  $\mathbf{C}$ .

Nos Exercícios 27 e 28, prove a lei da multiplicação por escalar se  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  forem quaisquer vetores em  $V_3$  e  $c$  for um escalar.

27. (a)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  (lei comutativa)  
 (b)  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$  (lei distributiva)  
 28. (a)  $c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (c\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$ ; (b)  $\mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = 0$ ; (c)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \|\mathbf{A}\|^2$   
 29. Ache a distância do ponto  $(2, -1, -4)$  à reta que passa pelos pontos  $(3, -2, 2)$  e  $(-9, -6, 6)$ .  
 30. Ache a distância do ponto  $(3, 2, 1)$  à reta que passa pelos pontos  $(1, 2, 9)$  e  $(-3, -6, -3)$ .  
 31. Prove, usando vetores, que os pontos  $(2, 2, 2)$ ,  $(2, 0, 1)$ ,  $(4, 1, -1)$  e  $(4, 3, 0)$  são os vértices de um retângulo.  
 32. Prove, usando vetores, que os pontos  $(2, 2, 2)$ ,  $(0, 1, 2)$ ,  $(-1, 3, 3)$  e  $(3, 0, 1)$  são os vértices de um paralelogramo.  
 33. Ache a área do triângulo com vértices em  $(-2, 3, 1)$ ,  $(1, 2, 3)$  e  $(3, -1, 2)$ .  
 34. Prove, usando vetores, que os pontos  $(-2, 1, 6)$ ,  $(2, 4, 5)$  e  $(-1, -2, 1)$  são os vértices de um triângulo retângulo e ache a área do triângulo.  
 35. Se  $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  e  $\mathbf{C} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ , ache a componente de  $\mathbf{B}$  na direção de  $\mathbf{A} - 2\mathbf{C}$ .  
 36. Ache os co-senos dos ângulos do triângulo com vértices em  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(4, -1, 3)$  e  $C(1, 2, 3)$ .  
 37. Se uma força tiver a representação vetorial  $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ , ache o trabalho realizado pela força ao deslocar um objeto do ponto  $P_1(-2, 4, 3)$  até o ponto  $P_2(1, -3, 5)$ , ao longo

de uma linha reta. A intensidade da força é medida em newtons (N) e a distância em metros. (Sugestão: releia a Seção 14.2.)

38. Se uma força tiver a representação vetorial  $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ , ache o trabalho realizado por uma força ao deslocar um objeto de um ponto  $P_1(4, 1, 3)$  até o ponto  $P_2(-5, 6, 2)$ , ao longo de uma linha reta. A intensidade da força é medida em newtons (N) e a distância em metros. (Veja a sugestão do Exercício 37.)  
 39. Uma força, representada pelo vetor  $\mathbf{F}$ , tem uma magnitude de 10 N e como co-senos diretores  $\cos \alpha = \frac{1}{6}\sqrt{6}$  e  $\cos \beta = \frac{1}{6}\sqrt{6}$ . Se a força desloca um objeto da origem até o ponto  $(7, -4, 2)$ , ao longo de uma linha reta, ache o trabalho realizado. A distância é medida em metros. (Veja a sugestão do Exercício 37.)  
 40. Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem vetores não-nulos, prove que o vetor  $\mathbf{A} - c\mathbf{B}$  é ortogonal a  $\mathbf{B}$ , se  $c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / \|\mathbf{B}\|^2$ .  
 41. Se  $\mathbf{A} = 12\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$  e  $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ , use o resultado do Exercício 40 para encontrar o valor do escalar  $c$ , tal que  $\mathbf{B} - c\mathbf{A}$  seja ortogonal a  $\mathbf{A}$ .  
 42. Para os vetores do Exercício 41, use o resultado do Exercício 40 de modo a encontrar o valor do escalar  $d$ , tal que o vetor  $\mathbf{A} - d\mathbf{B}$  seja ortogonal a  $\mathbf{B}$ .  
 43. Prove que se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem vetores, então os vetores  $\|\mathbf{B}\|\mathbf{A} + \|\mathbf{A}\|\mathbf{B}$  e  $\|\mathbf{B}\|\mathbf{A} - \|\mathbf{A}\|\mathbf{B}$  serão ortogonais.  
 44. Prove que se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem vetores não-nulos e  $\mathbf{C} = \|\mathbf{B}\|\mathbf{A} + \|\mathbf{A}\|\mathbf{B}$ , então o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  terá a mesma medida que o ângulo entre  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ .  
 45. Se as medidas em radianos dos ângulos de direção de um vetor são iguais, qual será o valor comum? Prove sua resposta.  
 46. Prove o Teorema 15.2.8.  
 47. Prove o Teorema 15.2.11.  
 48. Dizemos que três vetores em  $V_3$  são *independentes* se e somente se sua representação posicional não estiver num plano e dizemos que três vetores  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  e  $\mathbf{E}_3$  formam uma base para o espaço vetorial  $V_3$  se e somente se qualquer vetor em  $V_3$  puder ser escrito como uma combinação linear de  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  e  $\mathbf{E}_3$ . Um teorema pode ser provado, estabelecendo que três vetores do espaço vetorial  $V_3$  formam uma base se e somente se eles forem independentes. Mostre que esse teorema é válido para os vetores  $\langle 1, 0, 0 \rangle$ ,  $\langle 1, 1, 0 \rangle$  e  $\langle 1, 1, 1 \rangle$ , fazendo o seguinte: (a) verifique se os vetores são independentes, pois suas representações posicionais não são coplanares; (b) comprove que os vetores formam uma base, mostrando que qualquer vetor  $\mathbf{A}$  de  $V_3$  pode ser escrito como

$$\mathbf{A} = r\langle 1, 0, 0 \rangle + s\langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 1, 1, 1 \rangle \quad (9)$$

onde  $r$ ,  $s$  e  $t$  são escalares. (c) Se  $\mathbf{A} = \langle 6, -2, 5 \rangle$ , ache os valores de  $r$ ,  $s$  e  $t$  para os quais (9) é válido.

49. Veja o Exercício 48. (a) Prove que os vetores  $\langle 2, 0, 1 \rangle$ ,  $\langle 0, -1, 0 \rangle$  e  $\langle 1, -1, 0 \rangle$  formam uma base para  $V_3$ , mostrando que todo vetor  $\mathbf{A}$  pode ser escrito como

$$\mathbf{A} = r\langle 2, 0, 1 \rangle + s\langle 0, -1, 0 \rangle + t\langle 1, -1, 0 \rangle \quad (10)$$

onde  $r$ ,  $s$  e  $t$  são escalares. (b) Se  $\mathbf{A} = \langle -2, 3, 5 \rangle$ , ache os valores de  $r$ ,  $s$  e  $t$  para os quais (10) é válido.

50. Releia a primeira sentença do Exercício 48. Um teorema pode ser provado, estabelecendo que três vetores formam uma base do espaço vetorial  $V_3$  se e somente se eles forem independentes. Mostre que esse teorema é válido para os três vetores  $F_1 = \langle 1, 0, 1 \rangle$ ,  $F_2 = \langle 1, 1, 1 \rangle$  e  $F_3 = \langle 2, 1, 2 \rangle$ , fazendo

o seguinte: (a) comprove que os vetores  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  não são independentes, pois suas representações posicionais são coplanares; (b) comprove que os vetores não formam uma base, uma vez que todo vetor em  $V_3$  não pode ser escrito como uma combinação linear de  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ .

## 15.3 PLANOS

O gráfico de uma equação em duas variáveis,  $x$  e  $y$ , é uma curva no plano  $xy$ . O tipo mais simples de curva no espaço bidimensional é uma linha reta, sendo a forma da equação geral de uma linha reta  $Ax + By + C = 0$ , que é uma equação do primeiro grau. No espaço tridimensional, o gráfico de uma equação em três variáveis,  $x$ ,  $y$  e  $z$  é uma superfície. O tipo mais simples de superfície é um *plano*, e veremos que uma equação de um plano é uma equação do primeiro grau em três variáveis.

### 15.3.1 DEFINIÇÃO

Se  $N$  for um vetor não-nulo e se  $P_0$  for um ponto dado, então o conjunto de todos os pontos  $P$  para os quais  $\mathbf{V}(\overline{P_0P})$  e  $N$  são ortogonais, será definido como um **plano** que passa por  $P_0$ , tendo  $N$  como um **vetor normal**.

A Figura 1 mostra parte de um plano que passa pelo ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e a representação do vetor normal  $N$ , tendo seu ponto inicial em  $P_0$ .

Em Geometria Analítica Plana, podemos obter uma equação de uma reta se forem dados um ponto da reta e sua direção (inclinação). De forma análoga, em Geometria Analítica Sólida, uma equação de um plano pode ser determinada se conhecermos um ponto do plano e a direção de um vetor normal.

### 15.3.2 TEOREMA

Se  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  for um ponto de um plano e  $\langle a, b, c \rangle$  for o vetor normal ao plano, então uma equação do plano será

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

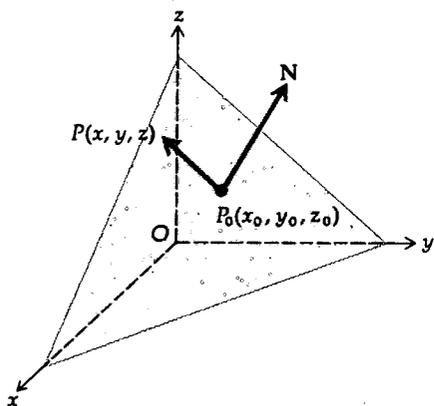


FIGURA 1

**Prova** Consulte a Figura 1, onde  $N = \langle a, b, c \rangle$ . Seja  $P(x, y, z)$  um ponto qualquer do plano.  $\mathbf{V}(\overline{P_0P})$  é o vetor tendo  $P_0P$  como sua representação; assim,

$$\mathbf{V}(\overline{P_0P}) = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle \quad (1)$$

Da Definição 15.3.1 e do fato que o produto escalar de dois vetores ortogonais é zero, temos

$$\mathbf{V}(\overline{P_0P}) \cdot \langle a, b, c \rangle = 0$$

De (1) e da igualdade acima,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

que é a equação pedida. ■

**EXEMPLO 1** Ache uma equação do plano que contenha o ponto  $(2, 1, 3)$  e que tenha  $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$  como um vetor normal.

**Solução** Usando o Teorema 15.3.2 onde o ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  é  $(2, 1, 3)$  e o vetor  $\langle a, b, c \rangle$  é  $\langle 3, -4, 1 \rangle$ , temos que a equação pedida é

$$3(x - 2) - 4(y - 1) + (z - 3) = 0$$

$$3x - 4y + z - 5 = 0$$

## 15.3.3 TEOREMA

Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  forem não-nulos, o gráfico de uma equação da forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

será um plano e  $\langle a, b, c \rangle$  será um vetor normal ao plano.

**Prova** Suponha que  $b \neq 0$ . Então, o ponto  $(0, -d/b, 0)$  está no gráfico da equação, pois suas coordenadas satisfazem a equação. Esta pode ser escrita como

$$a(x - 0) + b\left(y + \frac{d}{b}\right) + c(z - 0) = 0$$

que, do Teorema 15.3.2, é uma equação de um plano que passa pelo ponto  $(0, -d/b, 0)$  e para o qual  $\langle a, b, c \rangle$  é um vetor normal. Isto prova o teorema, se  $b \neq 0$ . Um argumento similar pode ser aplicado se  $b = 0$  e  $a \neq 0$  ou então  $c \neq 0$ . ■

As equações dos Teoremas 15.3.2 e 15.3.3 são chamadas de equações *cartesianas* de um plano. A equação do Teorema 15.3.2 é análoga à forma ponto-inclinação da equação da reta em duas dimensões. A equação do Teorema 15.3.3 é a forma geral da equação do primeiro grau em três variáveis, sendo denominada *equação linear*.

Um plano fica determinado por três pontos não-colineares, por uma reta e um ponto que não esteja nela, por duas retas que se interceptam ou por duas retas paralelas.

**EXEMPLO 2** Ache uma equação do plano que passa pelos pontos  $P(1, 3, 2)$ ,  $Q(3, -2, 2)$  e  $R(2, 1, 3)$ .

**Solução** Do Teorema 15.3.3, o gráfico de uma equação linear

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (2)$$

é um plano. Se essa equação estiver satisfeita pelas coordenadas dos pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , o plano irá conter os pontos. Substituindo  $x$ ,  $y$  e  $z$  em (2) pelas coordenadas dos três pontos, vamos obter as três equações

$$a + 3b + 2c + d = 0$$

$$3a - 2b + 2c + d = 0$$

$$2a + b + 3c + d = 0$$

Resolvendo esse sistema de equações para  $a$ ,  $b$  e  $c$  em termos de  $d$ , iremos obter

$$a = -\frac{5}{9}d \quad b = -\frac{2}{9}d \quad c = \frac{1}{9}d$$

Substituindo  $a$ ,  $b$  e  $c$  em (2) por esses valores, teremos

$$-\frac{5}{9}dx - \frac{2}{9}dy + \frac{1}{9}dz + d = 0$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por  $-9/d$ , iremos obter

$$5x + 2y - z - 9 = 0$$

que é a equação pedida.

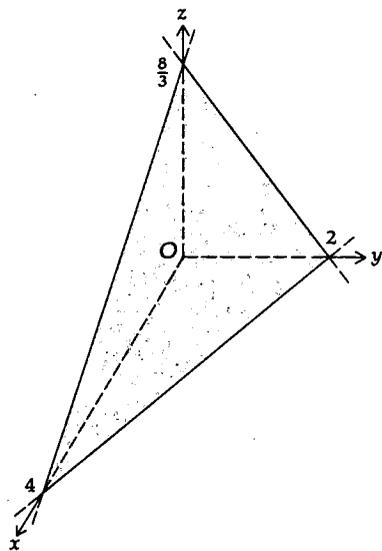


FIGURA 2

Para traçar um esboço de um plano a partir de sua equação é conveniente encontrar os pontos nos quais o plano intercepta os eixos coordenados. A coordenada  $x$  do ponto no qual o plano intercepta o eixo  $x$  é chamada de *intercepto  $x$*  do plano; a coordenada  $y$  do ponto no qual o plano intercepta o eixo  $y$  é chamada de *intercepto  $y$*  do plano; e o *intercepto  $z$*  do plano é a coordenada  $z$  do ponto no qual o plano intercepta o eixo  $z$ .

► **ILUSTRAÇÃO 1** Queremos traçar um esboço do plano com a equação

$$2x + 4y + 3z = 8$$

Substituindo  $y$  e  $z$  por zero, obtemos  $x = 4$ ; assim sendo, o intercepto  $x$  do plano é 4. De forma similar, obtemos os interceptos  $y$  e  $z$  que são 2 e  $\frac{8}{3}$ , respectivamente. Ligando os pontos correspondentes a esses interceptos temos um esboço do plano, conforme aparece na Figura 2. Observe que somente uma parte do plano está na figura. ◀

► **ILUSTRAÇÃO 2** Para traçar um esboço do plano com a equação

$$3x + 2y - 6z = 0$$

note primeiro que como a equação está satisfeita quando  $x$ ,  $y$  e  $z$  são iguais a zero, o plano intercepta cada eixo na origem. Se  $x = 0$  na equação dada, obtemos  $y - 3z = 0$ , que é uma reta no plano  $yz$ ; essa é a reta de intersecção do plano  $yz$  com o plano dado. Analogamente, a reta de intersecção do plano  $xz$  com o plano dado é obtida ao expressarmos  $y = 0$ , resultando  $x - 2z = 0$ . Traçando um esboço de cada uma dessas duas retas e traçando um segmento de reta de um ponto de uma reta a um ponto da outra reta, obtemos a Figura 3. ◀

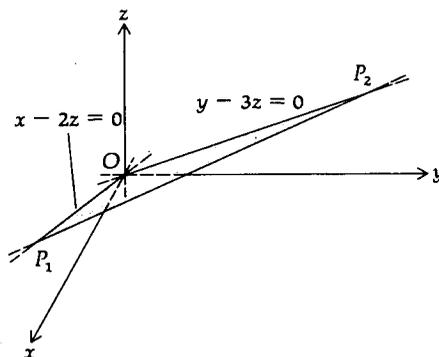


FIGURA 3

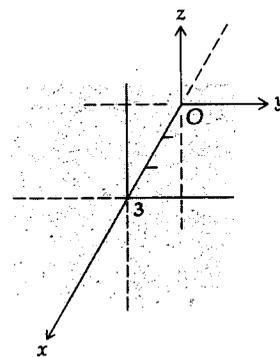


FIGURA 4

Na Ilustração 2, a reta no plano  $yz$  e a reta no plano  $xz$ , usadas para fazer o esboço do plano, são chamadas de **traços** do plano dado no plano  $yz$  e  $xz$ , respectivamente. A equação  $x = 0$  é uma equação do plano  $yz$ , pois o ponto  $(x, y, z)$  estará no plano  $yz$  se e somente se  $x = 0$ . Analogamente,  $y = 0$  e  $z = 0$  são as equações dos planos  $xz$  e  $xy$ , respectivamente.

Um plano paralelo ao plano  $yz$  tem uma equação da forma  $x = k$ , onde  $k$  é uma constante. A Figura 4 mostra um esboço do plano que tem por equação  $x = 3$ . Um plano paralelo ao plano  $xz$  tem uma equação de forma  $y = k$  e

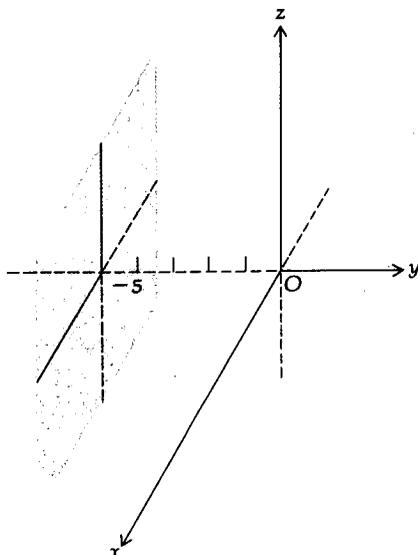


FIGURA 5

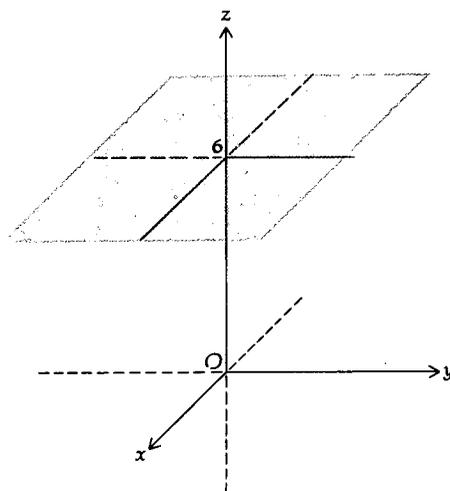


FIGURA 6

um plano paralelo ao plano  $xy$  tem uma equação da forma  $z = k$ . As Figuras 5 e 6 mostram esboços de planos com as equações  $y = -5$  e  $z = 6$ , respectivamente.

## 15.3.4 DEFINIÇÃO

O **ângulo entre dois planos** é definido como o ângulo entre os vetores normais aos dois planos.

Há dois ângulos entre os dois planos. Se um desses ângulos for  $\theta$ , o outro será o complementar de  $\theta$ .

**EXEMPLO 3** Ache a medida em radianos do ângulo entre os planos

$$5x - 2y + 5z - 12 = 0 \quad \text{e} \quad 2x + y - 7z + 11 = 0$$

**Solução** Seja  $N_1$  o vetor normal ao primeiro plano e  $N_2$  o vetor normal ao segundo plano. Então,

$$N_1 = 5i - 2j + 5k \quad N_2 = 2i + j - 7k$$

Da Definição 15.3.4, o ângulo entre os dois planos é o ângulo entre  $N_1$  e  $N_2$ . Assim, do Teorema 15.2.11, se  $\theta$  for a medida em radianos desse ângulo,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{N_1 \cdot N_2}{\|N_1\| \|N_2\|} \\ &= \frac{\langle 5, -2, 5 \rangle \cdot \langle 2, 1, -7 \rangle}{\sqrt{25 + 4 + 25} \sqrt{4 + 1 + 49}} \\ &= \frac{10 - 2 - 35}{\sqrt{54} \sqrt{54}} \\ &= -\frac{27}{54} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Logo,  $\theta = \frac{2}{3}\pi$ . Um ângulo agudo entre dois planos é o complementar de  $\theta$ , que é  $\frac{1}{3}\pi$ .

### 15.3.5 DEFINIÇÃO

Dois planos são **paralelos** se e somente se seus vetores normais forem paralelos.

Lembre-se de que dois vetores são paralelos se e somente se um dos vetores for um múltiplo escalar do outro. Assim, da Definição 15.3.5 segue que se  $N_1$  for o vetor normal a um plano e  $N_2$  o vetor normal ao outro, então os dois planos serão paralelos se e somente se

$$N_1 = kN_2$$

onde  $k$  é uma constante. A Figura 7 mostra esboços de dois planos paralelos e as representações de alguns de seus vetores normais.

### 15.3.6 DEFINIÇÃO

Dois planos são **perpendiculares** se e somente se seus valores normais forem ortogonais.

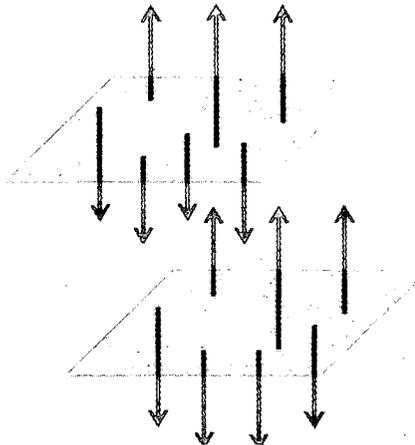


FIGURA 7

Da Definição 15.3.6 e do fato de que dois vetores são ortogonais se e somente se seu produto escalar for zero, segue então que dois planos tendo vetores normais  $N_1$  e  $N_2$  são perpendiculares se e somente se

$$N_1 \cdot N_2 = 0 \quad (3)$$

**EXEMPLO 4** Ache uma equação do plano contendo o ponto  $(4, 0, -2)$  e perpendicular a cada um dos planos

$$x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad 2x + y - 4z - 5 = 0$$

**Solução** Seja  $M$  o plano pedido e  $\langle a, b, c \rangle$ ,  $a \neq 0$ , o vetor normal de  $M$ . Seja  $M_1$  o plano tendo a equação  $x - y + z = 0$ . Pelo Teorema 15.3.3,  $\langle 1, -1, 1 \rangle$  é um vetor normal a  $M_1$ . Como  $M$  e  $M_1$  são perpendiculares, segue de (3) que

$$\begin{aligned} \langle a, b, c \rangle \cdot \langle 1, -1, 1 \rangle &= 0 \\ a - b + c &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Seja  $M_2$  o plano tendo a equação  $2x + y - 4z - 5 = 0$ . Então,  $\langle 2, 1, -4 \rangle$  é um vetor normal a  $M_2$ . Como  $M$  e  $M_2$  são perpendiculares,

$$\begin{aligned} \langle a, b, c \rangle \cdot \langle 2, 1, -4 \rangle &= 0 \\ 2a + b - 4c &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo essa equação e (4) simultaneamente para  $b$  e  $c$  em termos de  $a$ , obtemos  $b = 2a$  e  $c = a$ . Logo, um vetor normal a  $M$  é  $\langle a, 2a, a \rangle$ . Como  $(4, 0, -2)$  é um ponto em  $M$ , segue, do Teorema 15.3.2, que uma equação de  $M$  é

$$a(x - 4) + 2a(y - 0) + a(z + 2) = 0$$

Como  $a \neq 0$ , dividimos por  $a$  e combinamos os termos para obter

$$x + 2y + z - 2 = 0$$

Considere agora o plano tendo a equação  $ax + by + d = 0$  e o plano  $xy$  cuja equação é  $z = 0$ . Os vetores normais a esses planos são  $\langle a, b, 0 \rangle$  e  $\langle 0, 0, 1 \rangle$ , respectivamente. Como  $\langle a, b, 0 \rangle \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle = 0$ , os dois planos são perpendicula-

res. Isso significa que um plano cuja equação não tem termo em  $z$  é perpendicular ao plano  $xy$ . A Figura 8 ilustra isso. De forma análoga, concluímos que um plano tendo uma equação sem o termo em  $x$  é perpendicular ao plano  $yz$  (veja a Figura 9) e um plano tendo uma equação sem o termo em  $y$  é perpendicular ao plano  $xz$  (veja a Figura 10).

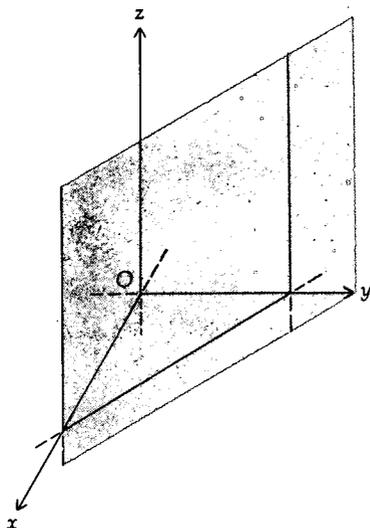


FIGURA 8

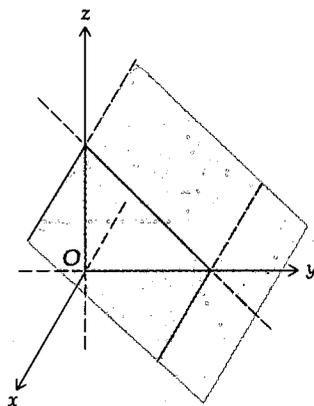


FIGURA 9

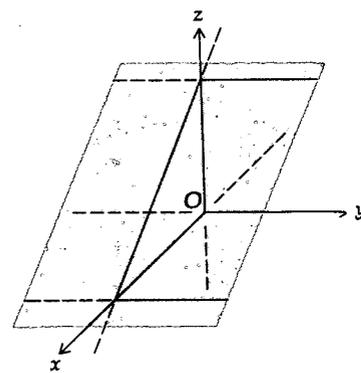


FIGURA 10

Podemos usar vetores para achar a distância de um ponto a um plano. O exemplo a seguir ilustra tal procedimento.

**EXEMPLO 5** Ache a distância entre o ponto  $(1, 4, 6)$  e o plano

$$2x - y + 2z + 10 = 0$$

**Solução** Seja  $P$  o ponto  $(1, 4, 6)$  e escolha um ponto  $Q$  qualquer no plano. Para simplificar, seja  $Q$  o ponto onde o plano intercepta o eixo  $x$ , isto é, o ponto  $(-5, 0, 0)$ . O vetor cuja representação é  $\overline{PQ}$  é dado por

$$\mathbf{V}(\overline{PQ}) = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

Um vetor normal ao plano dado é

$$\mathbf{N} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

O oposto de  $\mathbf{N}$  também é um vetor normal ao plano dado e

$$-\mathbf{N} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Não estamos certos sobre qual dos dois vetores,  $\mathbf{N}$  ou  $-\mathbf{N}$ , faz com  $\mathbf{V}(\overline{PQ})$  o menor ângulo. Seja  $\mathbf{N}'$  aquele vetor entre  $\mathbf{N}$  e  $-\mathbf{N}$  que faz com  $\mathbf{V}(\overline{PQ})$  um ângulo com medida em radianos  $\theta < \frac{1}{2}\pi$ . Na Figura 11 há uma parte do plano dado contendo o ponto  $Q(-5, 0, 0)$ , a representação do vetor  $\mathbf{N}'$  tendo seu ponto inicial em  $Q$ , o ponto  $P(1, 4, 6)$ , o segmento de reta orientado  $\overline{PQ}$  e o ponto  $R$ , que é o pé da perpendicular de  $P$  ao plano. Para simplificar, os eixos coordenados não foram incluídos nesta figura. A distância  $|\overline{RP}|$  é a distância pedida, que indicaremos por  $d$ . Como  $d$  é uma distância não-orientada, é não-negativa. Vemos, da Figura 11, que  $d$  é o valor absoluto da projeção escalar de  $\mathbf{V}(\overline{PQ})$  sobre  $\mathbf{N}'$ . Assim, de (6) na Seção 15.2, obtemos

$$d = \frac{|\mathbf{N}' \cdot \mathbf{V}(\overline{PQ})|}{\|\mathbf{N}'\|}$$

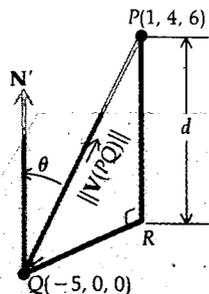


FIGURA 11

Como temos o valor absoluto do produto escalar no numerador e o módulo de  $N'$  no denominador, podemos substituir  $N'$  por  $N$  e teremos

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\mathbf{N} \cdot \mathbf{V}(\overline{PQ})|}{\|\mathbf{N}\|} \\ &= \frac{|\langle 2, -1, 2 \rangle \cdot \langle -6, -4, -6 \rangle|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \\ &= \frac{|-12 + 4 - 12|}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

### EXERCÍCIOS 15.3

Nos Exercícios de 1 a 6, ache uma equação do plano contendo o ponto  $P$  dado e tendo o vetor  $N$  dado como um vetor normal.

1.  $P(3, 1, 2)$ ;  $N = \langle 1, 2, -3 \rangle$
2.  $P(-3, 2, 5)$ ;  $N = \langle 6, -3, -2 \rangle$
3.  $P(0, -1, 2)$ ;  $N = \langle 0, 1, -1 \rangle$
4.  $P(-1, 8, 3)$ ;  $N = \langle -7, -1, 1 \rangle$
5.  $P(2, 1, -1)$ ;  $N = -i + 3j + 4k$
6.  $P(1, 0, 0)$ ;  $N = i + k$

Nos Exercícios 7 e 8, ache uma equação do plano que contenha os três pontos dados.

7.  $(3, 4, 1)$ ,  $(1, 7, 1)$ ,  $(-1, -2, 5)$
8.  $(0, 0, 2)$ ,  $(2, 4, 1)$ ,  $(-2, 3, 3)$

Nos Exercícios de 9 a 14, faça um esboço do plano dado e ache dois vetores unitários normais ao plano.

9.  $2x - y + 2z - 6 = 0$
10.  $4x - 4y + 2z - 9 = 0$
11.  $4x + 3y - 12z = 0$
12.  $y + 2z - 4 = 0$
13.  $3x + 2z - 6 = 0$
14.  $z = 5$

Nos Exercícios de 15 a 20, ache uma equação do plano satisfazendo as condições dadas.

15. Perpendicular à reta que passa pelos pontos  $(2, 2, -4)$  e  $(7, -1, 3)$  e contendo o ponto  $(-5, 1, 2)$ .
16. Paralelo ao plano  $4x - 2y + z - 1 = 0$  e contendo o ponto  $(2, 6, -1)$ .
17. Perpendicular ao plano  $x + 3y - z - 7 = 0$  e contendo os pontos  $(2, 0, 5)$  e  $(0, 2, -1)$ .
18. Perpendicular a cada um dos planos  $x - y + z = 0$  e  $2x + y - 4z - 5 = 0$  e contendo o ponto  $(4, 0, -2)$ .
19. Perpendicular ao plano  $yz$ , contendo o ponto  $(2, 1, 1)$  e fazendo um ângulo com o plano  $2x - y + 2z - 3 = 0$  com medida de  $\cos^{-1} \frac{2}{3}$  rad.
20. Contendo o ponto  $P(-\frac{3}{2}, 5, -2)$  e perpendicular às representações do vetor  $\mathbf{V}(OP)$ .

Nos Exercícios de 21 a 23, ache o co-seno do ângulo entre os dois planos dados.

21.  $2x - y - 2z - 5 = 0$  e  $6x - 2y + 3z + 8 = 0$
22.  $2x - 5y + 3z - 1 = 0$  e  $y - 5z + 3 = 0$
23.  $3x + 4y = 0$  e  $4x - 7y + 4z - 6 = 0$

24. Ache a distância do ponto  $(2, 2, -4)$  ao plano  $2x + 2y - z - 6 = 0$ .
25. Ache a distância do ponto  $(-2, 6, 3)$  ao plano  $5x + 11y + 2z - 30 = 0$ .
26. Ache a distância perpendicular entre os planos paralelos  $4x - 8y - z + 9 = 0$  e  $4x - 8y - z - 6 = 0$ .
27. Ache a distância perpendicular entre os planos paralelos  $4y - 3z - 6 = 0$  e  $8y - 6z - 27 = 0$ .
28. Prove que a distância não-orientada do ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  ao plano  $ax + by + cz + d = 0$  é dada por

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

29. Prove que a distância perpendicular entre os planos paralelos  $ax + by + cz + d_1 = 0$  e  $ax + by + cz + d_2 = 0$  é dada por

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

30. Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  forem interceptos não-nulos de um plano nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, prove que a equação do plano será

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Esta é a chamada *forma interceptual* da equação do plano.

**15.4 RETAS EM  $R^3$**

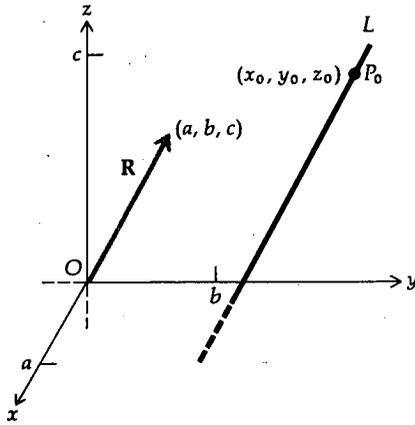


FIGURA 1

Seja  $L$  uma reta em  $R^3$  tal que contenha um dado ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e seja paralela às representações de um dado vetor  $\mathbf{R} = \langle a, b, c \rangle$ . A Figura 1 mostra um esboço da reta  $L$  e a representação posicional do vetor  $\mathbf{R}$ . A reta  $L$  é o conjunto de pontos  $P(x, y, z)$ , tal que  $\mathbf{V}(\overline{P_0P})$  seja paralela ao vetor  $\mathbf{R}$ . Assim,  $P$  está sobre a reta  $L$  se e somente se existir um escalar não-nulo  $t$ , tal que

$$\mathbf{V}(\overline{P_0P}) = t\mathbf{R}$$

Como  $\mathbf{V}(\overline{P_0P}) = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$ , obtemos dessa equação

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = t\langle a, b, c \rangle$$

de onde segue que

$$x - x_0 = ta \quad y - y_0 = tb \quad z - z_0 = tc$$

$x = x_0 + ta$	$y = y_0 + tb$	$z = z_0 + tc$	(1)
----------------	----------------	----------------	-----

Seja o parâmetro  $t$  um número real qualquer (isto é,  $t$  assume todos os valores no intervalo  $(-\infty, +\infty)$ ), podendo o ponto  $P$  ser qualquer ponto da reta  $L$ . Assim sendo, as equações (1) representam a reta  $L$ ; essas equações são chamadas de **equações paramétricas** da reta.

► **ILUSTRAÇÃO 1** De (1), as equações paramétricas da reta  $L$  que é paralela às representações do vetor  $\mathbf{R} = \langle 11, 8, 10 \rangle$  e que contém o ponto  $(8, 12, 6)$  são

$$x = 8 + 11t \quad y = 12 + 8t \quad z = 6 + 10t$$

A Figura 2 mostra um esboço da reta e a representação posicional de  $\mathbf{R}$ . ◀

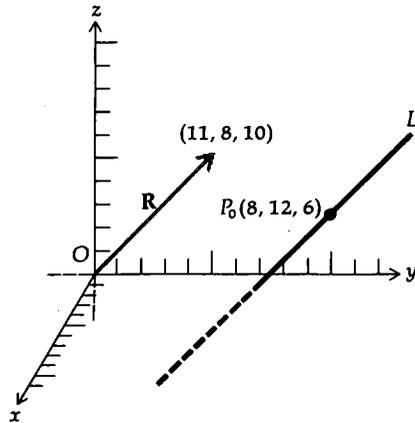


FIGURA 2

Se nenhum dos números  $a, b$  e  $c$  for zero, podemos eliminar  $t$  das equações (1) e obter

$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$	(2)
---	-----

Essas equações são chamadas de **equações simétricas** da reta. As equações (2) são equivalentes ao sistema de três equações

$$\begin{aligned} b(x - x_0) &= a(y - y_0) \\ c(x - x_0) &= a(z - z_0) \\ c(y - y_0) &= b(z - z_0) \end{aligned}$$

Na realidade, as três equações não são independentes, pois cada uma delas pode ser deduzida das outras duas. Cada uma delas é uma equação de um plano que contém a reta  $L$ , representada pelas equações (2). Dois planos, quaisquer que sejam dentre os três, têm por intersecção a reta  $L$ ; assim sendo, cada par das equações define a reta. Há, contudo, um número ilimitado de planos contendo a reta dada e como qualquer par deles determinará a reta, há um número ilimitado de pares que a representam.

O vetor  $\mathbf{R} = \langle a, b, c \rangle$  determina a direção da reta com as equações simétricas (2), e os números  $a, b$  e  $c$  são chamados de **números direcionais\*** da reta. Todo vetor paralelo a  $\mathbf{R}$  tem a mesma direção e mesmo sentido ou sentido oposto

N. do T.: Também chamados números diretores ou números de direção.

ao de  $\mathbf{R}$ ; assim sendo, esse vetor pode ser usado em lugar de  $\mathbf{R}$ , na discussão acima. Como as componentes de qualquer vetor paralelo a  $\mathbf{R}$  são proporcionais às componentes de  $\mathbf{R}$ , qualquer conjunto de três números proporcionais a  $a$ ,  $b$  e  $c$  também serve como um conjunto de números direcionais para a reta. Assim sendo, uma reta tem um número ilimitado de conjuntos de números direcionais. Um conjunto de números direcionais de uma reta é escrito entre colchetes como  $[a, b, c]$ .

► **ILUSTRAÇÃO 2** Se  $[2, 3, -4]$  representar um conjunto de números direcionais de uma reta, outros conjuntos de números direcionais da mesma reta poderão ser representados por  $[4, 6, -8]$ ,  $[1, \frac{3}{2}, -2]$  e  $[2/\sqrt{29}, 3/\sqrt{29}, -4/\sqrt{29}]$ .

► **ILUSTRAÇÃO 3** Um conjunto de números direcionais da reta da Ilustração 1 é  $[11, 8, 10]$  e a reta contém o ponto  $(8, 12, 6)$ . Assim, de (2), as equações simétricas da reta são

$$\frac{x - 8}{11} = \frac{y - 12}{8} = \frac{z - 6}{10}$$

**EXEMPLO 1** Ache dois conjuntos de equações simétricas da reta que passa pelos pontos  $(-3, 2, 4)$  e  $(6, 1, 2)$ .

**Solução** Seja  $P_1$  o ponto  $(-3, 2, 4)$  e  $P_2$  o ponto  $(6, 1, 2)$ . Então, a reta pedida é paralela às representações do vetor  $\mathbf{V}(\overline{P_1 P_2})$ , e assim as componentes desse vetor constituem um conjunto de números direcionais da reta.  $\mathbf{V}(\overline{P_1 P_2}) = \langle 9, -1, -2 \rangle$ . Tomando  $P_0$  como o ponto  $(-3, 2, 4)$  temos, de (2), as equações

$$\frac{x + 3}{9} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 4}{-2}$$

Outro conjunto de equações simétricas da reta, obtido ao tomarmos  $P_0$  como o ponto  $(6, 1, 2)$ , é

$$\frac{x - 6}{9} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 2}{-2}$$

Se um dos números  $a$ ,  $b$  ou  $c$  for zero, não usamos equações simétricas (2). Entretanto, suponha, por exemplo, que  $b = 0$  e nem  $a$ , nem  $c$  sejam nulos. Então, as equações da reta são

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{e} \quad y = y_0$$

Uma reta tendo essas equações simétricas está no plano  $y = y_0$  e, logo, é paralela ao plano  $xz$ . A Figura 3 mostra uma reta como essa.

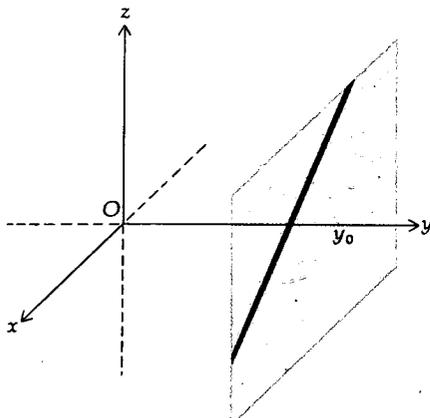


FIGURA 3

**EXEMPLO 2** Dados os dois planos

$$x + 3y - z - 9 = 0 \quad \text{e} \quad 2x - 3y + 4z + 3 = 0$$

Para a reta de intersecção desses planos, ache (a) um conjunto de equações simétricas, (b) um conjunto de equações paramétricas e (c) a direção dos co-senos diretores de um vetor cujas representações são paralelas a ele.

**Solução**

(a) Um conjunto de equações simétricas é da forma (2). Para obter tais equações, resolvemos o par de equações dadas para  $x$  e  $y$ , em termos de  $z$ . Os cálculos são os seguintes:

$$\begin{array}{rcl} x + 3y - z - 9 = 0 & & 2x + 6y - 2z - 18 = 0 \\ 2x - 3y + 4z + 3 = 0 (+) & & 2x - 3y + 4z + 3 = 0 (-) \\ \hline 3x & + & 3z - 6 = 0 \\ & & 9y - 6z - 21 = 0 \end{array}$$

$$x = -z + 2 \qquad y = \frac{2}{3}z + \frac{7}{3}$$

Resolvendo cada equação para  $z$ , obtemos

$$\frac{x-2}{-1} = z \qquad \frac{y-\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}} = z$$

Assim, um conjunto de equações simétricas é

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{z-0}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y-\frac{7}{3}}{2} = \frac{z-0}{3}$$

(b) Um conjunto de equações paramétricas é obtido ao igualarmos cada uma das razões da parte (a) a  $t$ , obtendo

$$\frac{x-2}{-3} = t \qquad \frac{y-\frac{7}{3}}{2} = t \qquad \frac{z-0}{3} = t$$

$$x = 2 - 3t \qquad y = \frac{7}{3} + 2t \qquad z = 3t$$

(c) Das equações simétricas na parte (a), um conjunto de números direcionais da reta é  $[-3, 2, 3]$ . Portanto, o vetor  $\langle -3, 2, 3 \rangle$  tem suas representações paralelas à reta. Como  $\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{22}$ , os co-senos diretores desse vetor são

$$\cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{22}} \qquad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{22}} \qquad \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{22}}$$

**EXEMPLO 3** Ache as equações da reta que passa pelo ponto  $(1, -1, 1)$  perpendicular à reta

$$3x = 2y = z \tag{3}$$

e paralela ao plano

$$x + y - z = 0 \tag{4}$$

**Solução** Seja  $[a, b, c]$  um conjunto de números direcionais da reta pedida. As equações (3) podem ser escritas como

$$\frac{x-0}{\frac{1}{3}} = \frac{y-0}{\frac{1}{2}} = \frac{z-0}{1}$$

que são as equações simétricas da reta. Um conjunto de números direcionais dessa reta é  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1]$ . Como a reta pedida é perpendicular a essa reta, segue que os vetores  $\langle a, b, c \rangle$  e  $\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \rangle$  são ortogonais.

Assim,

$$\begin{aligned}\langle a, b, c \rangle \cdot \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \rangle &= 0 \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c &= 0\end{aligned}\quad (5)$$

Um vetor normal ao plano (4) é  $\langle 1, 1, -1 \rangle$ . Como a reta pedida é paralela a esse plano, ela é perpendicular às representações do vetor normal. Assim sendo, os vetores  $\langle a, b, c \rangle$  e  $\langle 1, 1, -1 \rangle$  são ortogonais, portanto

$$\begin{aligned}\langle a, b, c \rangle \cdot \langle 1, 1, -1 \rangle &= 0 \\ a + b - c &= 0\end{aligned}$$

Supondo  $c \neq 0$ , resolvemos essa equação e (5) simultaneamente para  $a$  e  $b$  em termos de  $c$  e obtemos  $a = 9c$  e  $b = -8c$ . A reta pedida tem, então, o conjunto de números direcionais  $[9c, -8c, c]$  e contém o ponto  $(1, -1, 1)$ . Logo, as equações simétricas da reta são

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{9c} = \frac{y+1}{-8c} = \frac{z-1}{c} \\ \Leftrightarrow \frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z-1}{1}\end{aligned}$$

No exemplo a seguir usamos o conceito de **retas reversas**, que são duas retas que não estão no plano.

**EXEMPLO 4** Se  $l_1$  for a reta que passa por  $A(1, 2, 7)$  e  $B(-2, 3, -4)$  e  $l_2$  for a reta que passa por  $C(2, -1, 4)$  e  $D(5, 7, -3)$ , prove que  $l_1$  e  $l_2$  são retas reversas.

**Solução** Para mostrar que as duas retas não estão num único plano, demonstramos que elas não se interceptam e não são paralelas. As equações paramétricas da reta são

$$x = x_0 + ta \quad y = y_0 + tb \quad z = z_0 + tc$$

onde  $[a, b, c]$  é um conjunto de números direcionais da reta e  $(x_0, y_0, z_0)$  é qualquer ponto da reta. Como  $\mathbf{V}(\overline{AB}) = \langle -3, 1, -11 \rangle$ , um conjunto de números direcionais de  $l_1$  é  $[-3, 1, -11]$ . Tomando  $A$  como o ponto  $P_0$ , temos as equações paramétricas de  $l_1$

$$x = 1 - 3t \quad y = 2 + t \quad z = 7 - 11t \quad (6)$$

Como  $\mathbf{V}(\overline{CD}) = \langle 3, 8, -7 \rangle$  e  $l_2$  contém o ponto  $C$ , as equações paramétricas de  $l_2$  são

$$x = 2 + 3s \quad y = -1 + 8s \quad z = 4 - 7s \quad (7)$$

Como os conjuntos de números direcionais não são proporcionais,  $l_1$  e  $l_2$  não são paralelas. Para que as retas se interceptem, deve haver um valor de  $t$  e um valor de  $s$  que coincidam no mesmo ponto  $(x_1, y_1, z_1)$  para ambos os conjuntos de equações (6) e (7). Assim sendo, equacionamos os primeiros membros das respectivas equações e obtemos

$$1 - 3t = 2 + 3s$$

$$2 + t = -1 + 8s$$

$$7 - 11t = 4 - 7s$$

Resolvendo simultaneamente as duas primeiras equações, obtemos  $s = \frac{8}{27}$  e  $t = -\frac{17}{27}$ . Esse conjunto de valores não satisfaz a terceira equação; logo as duas retas não se interceptam. Portanto,  $l_1$  e  $l_2$  são retas reversas.

## EXERCÍCIOS 15.4

Nos Exercícios de 1 a 8, ache as equações simétrica e paramétrica da reta que satisfaz as condições dadas.

1. Passa pelos pontos (1, 2, 1) e (5, -1, 1).
2. Passa pelo ponto (5, 3, 2) com números direcionais [4, 1, -1].
3. Passa pela origem e é perpendicular à reta

$$\frac{1}{4}(x - 10) = \frac{1}{3}y = \frac{1}{2}z$$

por intersecção.

4. Passa pela origem e é perpendicular às retas que têm por números direcionais [4, 2, 1] e [-3, -2, 1].
5. É perpendicular às retas com números direcionais [-5, 1, 2] e [2, -3, -4] no ponto (-2, 0, 3).
6. Passa pelo ponto (-3, 1, -5) e é perpendicular ao plano  $4x - 2y + z - 7 = 0$ .
7. Passa pelo ponto (4, -5, 20) e é perpendicular ao plano  $x + 3y - 6z - 8 = 0$ .
8. Passa pelo ponto (2, 0, -4) e é paralela a cada um dos planos  $2x + y - z = 0$  e  $x + 3y + 5z = 0$ .
9. Ache um conjunto de equações simétricas para a reta

$$\begin{cases} 4x - 3y + z - 2 = 0 \\ 2x + 5y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

10. Mostre que as retas

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{x-3}{-2} = \frac{y+14}{5} = \frac{z-8}{-3}$$

são coincidentes.

11. Prove que a reta  $\frac{1}{2}(x - 3) = \frac{1}{3}(y + 2) = \frac{1}{4}(z + 1)$  está no plano  $x - 2y + z = 6$ .
12. Prove que a reta  $x + 1 = -\frac{1}{2}(y - 6) = z$  está no plano  $3x + y - z = 3$ .

Os planos que passam por uma reta e são perpendiculares aos planos coordenados são chamados de **planos projetores da reta**. Nos Exercícios de 13 a 16, ache as equações dos planos projetores da reta dada e faça um esboço da reta.

13.  $\begin{cases} 3x - 2y + 5z - 30 = 0 \\ 2x + 3y - 10z - 6 = 0 \end{cases}$
14.  $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y - 3z + 14 = 0 \end{cases}$
15.  $\begin{cases} x - 2y - 3z + 6 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$
16.  $\begin{cases} 2x - y + z - 7 = 0 \\ 4x - y + 3z - 13 = 0 \end{cases}$

17. Ache o co-seno do menor ângulo entre o vetor cujas representações são paralelas à reta  $x = 2y + 4$ ,  $z = -y + 4$  e o vetor cujas representações são paralelas à reta  $x = y + 7$ ,  $2z = y + 2$ .

18. Ache uma equação do plano contendo o ponto (6, 2, 4) e a reta  $\frac{1}{5}(x - 1) = \frac{1}{6}(y + 2) = \frac{1}{7}(z - 3)$ .

Nos Exercícios 19 e 20, ache uma equação do plano que contém as retas concorrentes (que se interceptam).

$$19. \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x + 2y + z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$20. \frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \quad \text{e} \quad \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

21. Mostre que as retas

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

são paralelas e ache uma equação do plano determinado por elas.

22. Mostre que as retas

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-2} = z+4 \quad \text{e} \quad \frac{x-3}{-5} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

são paralelas e ache uma equação do plano determinado por elas.

23. Ache as coordenadas do ponto de intersecção entre a reta  $\frac{1}{4}(x - 2) = -\frac{1}{2}(y + 3) = \frac{1}{7}(z - 1)$  e o plano  $5x - y + 2z - 12 = 0$ .
24. Ache as equações da reta que passa pelo ponto (1, -1, 1), é perpendicular à reta  $3x = 2y = z$  e paralela ao plano  $x + y - z = 0$ .
25. Ache as equações da reta que passa pelo ponto (3, 6, 4), intercepta o eixo  $z$  e é paralela ao plano  $x - 3y + 5z - 6 = 0$ .
26. Ache a distância da origem à reta  $x = -2 + \frac{6}{7}t$ ,  $y = 7 - \frac{2}{7}t$ ,  $z = 4 + \frac{3}{7}t$ .
27. Ache a distância entre o ponto (-1, 3, -1) e a reta  $x - 2z = 7$ ,  $y = 1$ .
28. Ache as equações da reta que passa pela origem, é perpendicular às retas  $x = y - 5$ ;  $z = 2y - 3$  e intercepta a reta  $y = 2x + 1$ ,  $z = x + 2$ .
29. Prove que as retas

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-3} \quad \text{e} \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+3}{2}$$

são reversas.

30. Ache as equações da reta que passa pelo ponto (3, -4, -5) e intercepta cada uma das reversas do Exercício 29.
31. Quais são as equações simétricas de uma reta se dois números direcionais  $a$  e  $b$  são nulos?

## 15.5 PRODUTO VETORIAL

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem dois vetores não-paralelos, as representações desses vetores com o mesmo ponto inicial determinarão um plano, como está indicado na Figura 1. Vamos mostrar que um vetor cujas representações são perpendiculares a esse plano é obtido por uma operação chamada de *produto vetorial* de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Primeiro vamos definir essa operação para depois considerarmos suas propriedades algébricas e geométricas.

## 15.5.1 DEFINIÇÃO

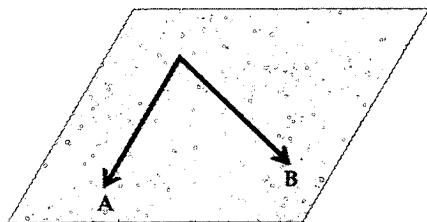


FIGURA 1.

Se  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ , então o produto vetorial de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , denotado por  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , é dado por

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

A operação de obtenção do produto vetorial é chamada de **multiplicação vetorial**.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Se  $\mathbf{A} = \langle 2, 1, -3 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle 3, -1, 4 \rangle$ , então, da Definição 15.5.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \langle 2, 1, -3 \rangle \times \langle 3, -1, 4 \rangle \\ &= \langle (1)(4) - (-3)(-1), (-3)(3) - (2)(4), (2)(-1) - (1)(3) \rangle \\ &= \langle 4 - 3, -9 - 8, -2 - 3 \rangle \\ &= \langle 1, -17, -5 \rangle \\ &= \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \end{aligned}$$

Há uma regra mnemônica para guardar a fórmula que faz uso da notação de determinantes. Um determinante de segunda ordem é definido pela equação

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais. Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3(5) - (6)(-2) \\ = 27$$

Assim sendo, a fórmula pode ser escrita como

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

O segundo membro da expressão acima pode ser escrito simbolicamente como

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

que é a notação para um determinante de terceira ordem. No entanto, observe que a primeira linha contém vetores, e não números reais, como é usual em determinantes, o que indica o caráter heurístico dessa notação.

► **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos usar a regra mnemônica com determinantes para encontrar o produto vetorial dos vetores da Ilustração 1.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= [(1)(4) - (-3)(-1)]\mathbf{i} - [(2)(4) - (-3)(3)]\mathbf{j} + [(2)(-1) - (1)(3)]\mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \end{aligned}$$

**15.5.2 TEOREMA**

Se  $\mathbf{A}$  for um vetor qualquer em  $V_3$ , então

- (i)  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$
- (ii)  $\mathbf{0} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$
- (iii)  $\mathbf{A} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$

**Prova de (i)** Se  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ , então pela Definição 15.5.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{A} &= \langle a_2a_3 - a_3a_2, a_3a_1 - a_1a_3, a_1a_2 - a_2a_1 \rangle \\ &= \langle 0, 0, 0 \rangle \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

As demonstrações de (ii) e (iii) serão deixadas como exercício (veja o Exercício 13). ■

Aplicando a Definição 15.5.1 a pares dos vetores unitários  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ , obteremos o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \end{aligned}$$

Para lembrar das fórmulas acima, primeiro observe que o produto vetorial de cada um dos vetores unitários  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ou  $\mathbf{k}$  por si mesmo é o vetor nulo. Os outros seis produtos vetoriais podem ser obtidos da Figura 2, com a aplicação da seguinte regra: o produto vetorial de dois vetores consecutivos no sentido horário é o vetor seguinte e o produto de dois vetores no sentido anti-horário é o anterior a eles.

Pode ser facilmente observado que o produto vetorial de dois vetores não é comutativo, pois em particular  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \times \mathbf{i}$ . Temos contudo, que  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$  e  $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ ; assim,  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{i})$ . Em geral, se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem vetores quaisquer em  $V_3$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$ ; isso será enunciado e provado como teorema.

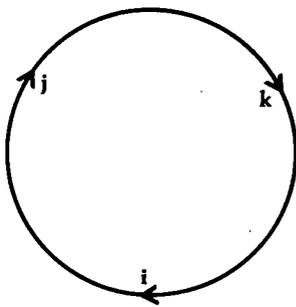


FIGURA 2

**15.5.3 TEOREMA**

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem vetores quaisquer em  $V_3$ ,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$$

**Prova** Se  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  e  $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ , então, da Definição 15.5.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle \\ &= -\langle a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_1 - a_1b_2 \rangle \\ &= -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \end{aligned}$$

■

A multiplicação vetorial não é associativa. Isso pode ser visto no seguinte exemplo:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) &= \mathbf{i} \times \mathbf{k} & (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} &= \mathbf{0} \times \mathbf{j} \\ &= -\mathbf{j} & &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$$

A multiplicação vetorial é distributiva em relação à adição de vetores, conforme pode ser visto no teorema a seguir.

#### 15.5.4 TEOREMA

Se  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  forem vetores quaisquer em  $V_3$ , então

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

Para demonstrar o Teorema 15.5.4, seja  $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ,  $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$  e  $\mathbf{C} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ , então mostre que as componentes do vetor no primeiro membro de (2) são as mesmas componentes do vetor no segundo membro. Os detalhes serão deixados como exercícios (veja o Exercício 35).

#### 15.5.5 TEOREMA

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem dois vetores quaisquer em  $V_3$  e  $c$  for um escalar, então

- (i)  $(c\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (c\mathbf{B})$ ;
- (ii)  $(c\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = c(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ .

A demonstração do Teorema 15.5.5 será deixada como exercício (veja o Exercício 36).

Os Teoremas 15.5.4 e 15.5.5 podem ser aplicados para calcularmos o produto vetorial de dois vetores, usando as leis da Álgebra, desde que a ordem dos vetores na multiplicação vetorial não seja alterada, pois isso não é permitido pelo Teorema 15.5.3. A ilustração a seguir demonstra esse procedimento.

► **ILUSTRAÇÃO 3** Vamos encontrar o produto vetorial dos vetores na Ilustração 1, aplicando os Teoremas 15.5.4 e 15.5.5.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \\ &= 6(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) - 2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + 8(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 3(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) - 1(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \\ &\quad + 4(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) - 9(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + 3(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) - 12(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\ &= 6(\mathbf{0}) - 2(\mathbf{k}) + 8(-\mathbf{j}) + 3(-\mathbf{k}) - 1(\mathbf{0}) + 4(\mathbf{i}) - 9(\mathbf{j}) + 3(-\mathbf{i}) - 12(\mathbf{0}) \\ &= -2\mathbf{k} - 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + 4\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 3\mathbf{i} \\ &= \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \end{aligned}$$

O método usado na Ilustração 3 mostra uma maneira de encontrarmos o produto vetorial, sem a necessidade de recorrermos à fórmula da Definição 15.5.1 ou de usarmos a notação heurística de determinantes. Na realidade, todas as etapas mostradas na solução não precisam ser incluídas, pois os vários produtos vetoriais de vetores unitários podem ser obtidos imediatamente, ao usarmos a Figura 2 e a regra correspondente.

Há dois *produtos triplos* que deveremos considerar. Um deles é o produto  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ , chamado de **produto escalar triplo** dos vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ . De fato, os parênteses não são necessários, pois  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  é um escalar e, assim sendo,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$  pode ser interpretado de uma única maneira.

## 15.5.6 TEOREMA

Se  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  forem vetores de  $V_3$ , então

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

O Teorema 15.5.6 pode ser provado se supusermos que

$$\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \quad \mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle \quad \mathbf{C} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$$

e então mostrarmos que o escalar à esquerda da equação é igual ao escalar à sua direita. Os detalhes serão propostos como exercício (veja o Exercício 37).

► **ILUSTRAÇÃO 4** Vamos verificar o Teorema 15.5.6 se

$$\mathbf{A} = \langle 1, -1, 2 \rangle \quad \mathbf{B} = \langle 3, 4, -2 \rangle \quad \mathbf{C} = \langle -5, 1, -4 \rangle$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \times \mathbf{C} &= (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \\ &= 3\mathbf{k} - 12(-\mathbf{j}) - 20(-\mathbf{k}) - 16\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 2(-\mathbf{i}) \\ &= -14\mathbf{i} + 22\mathbf{j} + 23\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \langle 1, -1, 2 \rangle \cdot \langle -14, 22, 23 \rangle \\ &= -14 - 22 + 46 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \\ &= 4\mathbf{k} - 2(-\mathbf{j}) - 3(-\mathbf{k}) + 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8(-\mathbf{i}) \\ &= -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \langle -6, 8, 7 \rangle \cdot \langle -5, 1, -4 \rangle \\ &= 30 + 8 - 28 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Isso comprova o teorema para esses três vetores. ◀

O outro produto triplo é  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ , chamado de **produto vetorial triplo**.

## 15.5.7 TEOREMA

Se  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  forem vetores em  $V_3$ , então

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

A demonstração do Teorema 15.5.7 é semelhante à do Teorema 15.5.6. Usando as componentes dos vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , podemos mostrar que o vetor à esquerda da igualdade é igual ao vetor à sua direita. Os cálculos serão pedidos no Exercício 38.

► **ILUSTRAÇÃO 5** Verificaremos o Teorema 15.5.7 para os vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  da Ilustração 4. Como  $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = -14\mathbf{i} + 22\mathbf{j} + 23\mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -14 & 22 & 23 \end{vmatrix} \\ &= -23\mathbf{i} - 28\mathbf{j} + 22\mathbf{k} - 14\mathbf{k} - 44\mathbf{i} - 23\mathbf{j} \\ &= -67\mathbf{i} - 51\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} &= \langle 1, -1, 2 \rangle \cdot \langle -5, 1, -4 \rangle & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \langle 1, -1, 2 \rangle \cdot \langle 3, 4, -2 \rangle \\ &= -5 - 1 - 8 & &= 3 - 4 - 4 \\ &= -14 & &= -5 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} &= -14\langle 3, 4, -2 \rangle - (-5)\langle -5, 1, -4 \rangle \\ &= \langle -42, -56, 28 \rangle - \langle 25, -5, 20 \rangle \\ &= \langle -67, -51, 8 \rangle \\ &= -67\mathbf{i} - 51\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \end{aligned}$$

Comparando esse resultado com (1), vemos que o Teorema 15.5.7 está comprovado para esses três vetores. ◀

O teorema a seguir é usado para dar uma interpretação geométrica do produto vetorial.

### 15.5.8 TEOREMA

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem dois vetores em  $V_3$  e  $\theta$  for a medida em radianos do ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , então

$$\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \operatorname{sen} \theta$$

**Prova** Do Teorema 14.2.3(iii), aplicado a vetores em  $V_3$

$$\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|^2 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (2)$$

Do Teorema 15.5.6, tomando  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  como os vetores, temos que:

$$(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{W} = \mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W})$$

Se nessa equação expressarmos  $\mathbf{U} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{B}$  e  $\mathbf{W} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , temos

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]$$

Aplicando o Teorema 15.5.7 ao vetor entre colchetes à direita, obtemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}] \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ &= \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Do Teorema 15.2.11, se  $\theta$  for o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \cos \theta$$

Substituindo essa equação em (3), temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

Substituindo (2) na relação acima, e como  $1 - \cos^2 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta$ , temos

$$\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

Como  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $\operatorname{sen} \theta \geq 0$ . Logo, tomamos a raiz quadrada de ambos os membros e obtemos

$$\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \operatorname{sen} \theta \quad \blacksquare$$

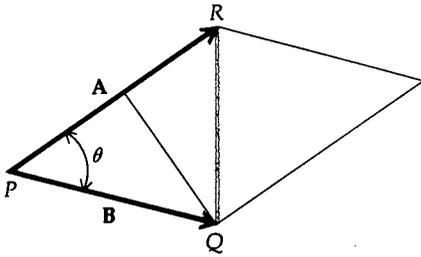


FIGURA 3

Vamos considerar agora uma interpretação geométrica de  $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$ . Seja  $\overline{PR}$  uma representação de  $\mathbf{A}$  e seja  $\overline{PQ}$  uma representação de  $\mathbf{B}$ . Então, o ângulo entre os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  é o ângulo em  $P$  do triângulo  $RPQ$  (veja a Figura 3). Seja  $\theta$  a medida em radianos desse ângulo. Portanto, a área do paralelogramo tendo  $\overline{PR}$  e  $\overline{PQ}$  como lados adjacentes é  $\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \sin \theta$ , pois a altura do paralelogramo tem comprimento  $\|\mathbf{B}\| \sin \theta$  e o comprimento da base é  $\|\mathbf{A}\|$ . Assim, do Teorema 15.5.8, segue que  $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$  é a área desse paralelogramo.

**EXEMPLO 1** Mostre que o quadrilátero tendo vértices em  $P(1, -2, 3)$ ,  $Q(4, 3, -1)$ ,  $R(2, 2, 1)$  e  $S(5, 7, -3)$  é um paralelogramo e ache a sua área.

**Solução** A Figura 4 mostra o quadrilátero  $PQSR$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overline{PQ}) &= \langle 4 - 1, 3 + 2, -1 - 3 \rangle & \mathbf{V}(\overline{PR}) &= \langle 2 - 1, 2 + 2, 1 - 3 \rangle \\ &= \langle 3, 5, -4 \rangle & &= \langle 1, 4, -2 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overline{RS}) &= \langle 5 - 2, 7 - 2, -3 - 1 \rangle & \mathbf{V}(\overline{QS}) &= \langle 5 - 4, 7 - 3, -3 + 1 \rangle \\ &= \langle 3, 5, -4 \rangle & &= \langle 1, 4, -2 \rangle \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{V}(\overline{PQ}) = \mathbf{V}(\overline{RS})$  e  $\mathbf{V}(\overline{PR}) = \mathbf{V}(\overline{QS})$ , segue que  $\overline{PQ}$  é paralelo a  $\overline{RS}$  e  $\overline{PR}$  é paralelo a  $\overline{QS}$ . Logo,  $PQSR$  é um paralelogramo.

Seja  $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overline{PR})$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overline{PQ})$ ; então,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \\ &= 3(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + 5(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - 4(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 12(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + 20(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) - 16(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\ &\quad - 6(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) - 10(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + 8(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\ &= 3(\mathbf{0}) + 5(\mathbf{k}) - 4(-\mathbf{j}) + 12(-\mathbf{k}) + 20(\mathbf{0}) - 16(\mathbf{i}) - 6(\mathbf{j}) - 10(-\mathbf{i}) + 8(\mathbf{0}) \\ &= -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| &= \sqrt{36 + 4 + 49} \\ &= \sqrt{89} \end{aligned}$$

Logo, a área do paralelogramo é  $\sqrt{89}$ .

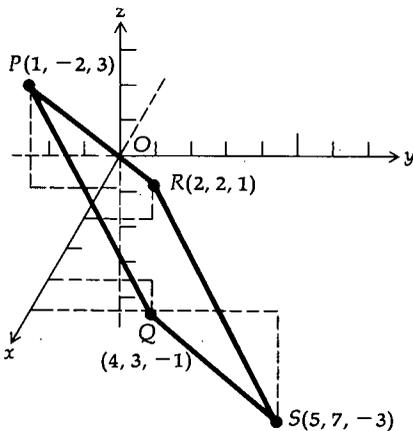


FIGURA 4

O teorema a seguir que fornece um método para determinar se dois vetores em  $V_3$  são paralelos, decorre do Teorema 15.5.8.

### 15.5.9 TEOREMA

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem dois vetores em  $V_3$ ,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  serão paralelos se e somente se  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ .

**Prova** Se um dos dois vetores  $\mathbf{A}$  ou  $\mathbf{B}$  for o vetor nulo, então, do Teorema 15.5.2,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ . Como o vetor nulo é paralelo a qualquer vetor, o teorema é válido.

Se nem  $\mathbf{A}$  nem  $\mathbf{B}$  forem o vetor nulo,  $\|\mathbf{A}\| \neq 0$  e  $\|\mathbf{B}\| \neq 0$ . Logo, pelo Teorema 15.5.8,  $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = 0$  se e somente se  $\sin \theta = 0$ . Como  $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = 0$  se e somente se  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$  e  $\sin \theta = 0$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) se e somente se  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , podemos concluir que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \text{ se e somente se } \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi$$

Por outro lado, dois vetores não-nulos são paralelos se e somente se o ângulo entre eles for 0 ou  $\pi$ . Assim, segue o teorema. ■

## 15.5.10 TEOREMA

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem dois vetores em  $V_3$ , então o vetor  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  será ortogonal a ambos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ .

**Prova** Do Teorema 15.5.6,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

Do Teorema 15.5.2(i),  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ . Logo, da equação acima,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \mathbf{0} \cdot \mathbf{B} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como o produto escalar de  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  é zero, segue que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  são ortogonais.

Também, do Teorema 15.5.6,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{B}$$

Aplicando de novo o Teorema 15.5.2(i), obtemos  $\mathbf{B} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ ; assim, da equação acima,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como o produto escalar de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  por  $\mathbf{B}$  é zero,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  e  $\mathbf{B}$  são ortogonais e o teorema está provado. ■

Do Teorema 15.5.10 podemos concluir que se as representações dos vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  têm o mesmo ponto inicial, então a representação de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  será perpendicular ao plano formado pelas representações de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ .

**EXEMPLO 2** Dados os pontos  $P(-1, -2, -3)$ ,  $Q(-2, 1, 0)$  e  $R(0, 5, 1)$ , ache o vetor unitário cujas representações são perpendiculares ao plano que passa por  $P$ ,  $Q$  e  $R$ .

**Solução** Seja  $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overline{PQ})$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overline{PR})$ . Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \langle -2 + 1, 1 + 2, 0 + 3 \rangle & \mathbf{B} &= \langle 0 + 1, 5 + 2, 1 + 3 \rangle \\ &= \langle -1, 3, 3 \rangle & &= \langle 1, 7, 4 \rangle \end{aligned}$$

O plano que passa pelos pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  é o plano formado por  $\overline{PQ}$  e  $\overline{PR}$  que são, respectivamente, as representações dos vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Logo, qualquer representação do vetor  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  será perpendicular a esse plano.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \\ &= -9\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 10\mathbf{k} \end{aligned}$$

O vetor pedido é um vetor unitário, paralelo a  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ . Para achar esse vetor unitário, aplicamos o Teorema 15.2.8 e dividimos  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  por  $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$ , obtendo

$$\frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|} = -\frac{9}{\sqrt{230}} \mathbf{i} + \frac{7}{\sqrt{230}} \mathbf{j} - \frac{10}{\sqrt{230}} \mathbf{k}$$

Os dois exemplos que seguem mostram o uso do produto vetorial para encontrarmos uma equação de um plano. Esses exemplos envolvem o uso das mesmas informações usadas nos Exemplos 2 e 4 da Seção 15.3, respectivamente.

**EXEMPLO 3** Ache uma equação do plano que passa pelos pontos  $P(1, 3, 2)$ ,  $Q(3, -2, 2)$  e  $R(2, 1, 3)$ .

**Solução**  $\mathbf{V}(\overline{QR}) = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$  e  $\mathbf{V}(\overline{PR}) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Um vetor normal ao plano pedido é o produto vetorial  $\mathbf{V}(\overline{QR}) \times \mathbf{V}(\overline{PR})$ , que é

$$(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Assim, se  $P_0 = (1, 3, 2)$  e  $\mathbf{N} = \langle 5, 2, -1 \rangle$ , do Teorema 15.3.2 uma equação do plano é

$$5(x - 1) + 2(y - 3) - (z - 2) = 0$$

$$5x + 2y - z - 9 = 0$$

Esse resultado está de acordo com o Exemplo 2 da Seção 15.3.

**EXEMPLO 4** Ache uma equação do plano que contém o ponto  $(4, 0, -2)$  e é perpendicular a cada um dos planos

$$x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad 2x + y - 4z - 5 = 0$$

**Solução** Pelo Teorema 15.3.3, um vetor normal ao plano  $x - y + z = 0$  é  $\langle 1, -1, 1 \rangle$  e um vetor normal ao plano  $2x + y - 4z - 5 = 0$  é  $\langle 2, 1, -4 \rangle$ . Assim, um vetor normal ao plano pedido é ortogonal a ambos  $\langle 1, -1, 1 \rangle$  e  $\langle 2, 1, -4 \rangle$ . Pelo Teorema 15.5.10 tal vetor é

$$\begin{aligned} \langle 1, -1, 1 \rangle \times \langle 2, 1, -4 \rangle &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \end{aligned}$$

O plano pedido contém o ponto  $(4, 0, -2)$  e tem  $\langle 3, 6, 3 \rangle$  como vetor normal. Do Teorema 15.3.2, uma equação desse plano é

$$3(x - 4) + 6(y - 0) + 3(z + 2) = 0$$

$$x + 2y + z - 2 = 0$$

Essa equação está de acordo com o resultado obtido no Exemplo 4 da Seção 15.3

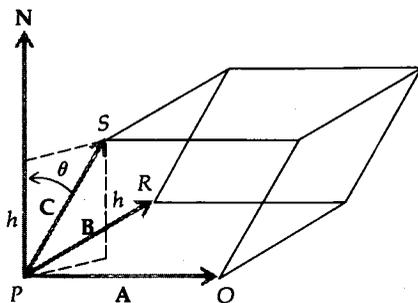


FIGURA 5

Uma interpretação geométrica do produto escalar triplo é obtida se considerarmos um paralelepípedo com arestas  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{PR}$  e  $\overline{PS}$  e expressarmos  $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overline{PQ})$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overline{PR})$  e  $\mathbf{C} = \mathbf{V}(\overline{PS})$ . Veja a Figura 5. O vetor  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  é normal ao plano de  $\overline{PQ}$  e  $\overline{PR}$ . O vetor  $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  também é normal a esse plano. Não temos certeza de qual desses vetores  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  ou  $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  forma com  $\mathbf{C}$  o menor ângulo. Seja  $\mathbf{N}$  o vetor dentre  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  e  $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  que faz com  $\mathbf{C}$  um ângulo cuja medida em radianos é  $\theta < \frac{1}{2}\pi$ . Então, as representações de  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{C}$  tendo seu ponto inicial em  $P$  estarão do mesmo lado do plano de  $\overline{PQ}$  e  $\overline{PR}$ , como mostra a Figura 5. A área da base do paralelepípedo é  $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$ . Se  $h$  for a altura do paralelepípedo e  $V$  o seu volume, teremos

$$V = \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|h \quad (4)$$

Considere agora o produto escalar  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}$ . Pelo Teorema 15.2.11,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C} = \|\mathbf{N}\| \|\mathbf{C}\| \cos \theta$$

Mas  $h = \|\mathbf{C}\| \cos \theta$ ; assim,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C} = \|\mathbf{N}\| h \tag{5}$$

Como  $\mathbf{N}$  é  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  ou  $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ , segue que  $\|\mathbf{N}\| = \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$ . Assim, de (5),

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{C} = \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| h$$

Comparando essa relação e (4), temos

$$V = \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}$$

Segue então que a medida do volume do paralelepípedo é  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$  ou  $-(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ ; isto é, a medida do volume do paralelepípedo é o valor absoluto do produto escalar triplo  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ .

**EXEMPLO 5** Ache o volume do paralelepípedo tendo vértices  $P(5, 4, 5)$ ,  $Q(4, 10, 6)$ ,  $R(1, 8, 7)$  e  $S(2, 6, 9)$  e arestas  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{PR}$  e  $\overline{PS}$ .

**Solução** A Figura 6 mostra o paralelepípedo. Seja  $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overline{PQ})$ , então  $\mathbf{A} = \langle -1, 6, 1 \rangle$ . Seja  $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overline{PR})$ , então  $\mathbf{B} = \langle -4, 4, 2 \rangle$ . Seja  $\mathbf{C} = \mathbf{V}(\overline{PS})$ , então  $\mathbf{C} = \langle -3, 2, 4 \rangle$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (-\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \\ &= 8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 20\mathbf{k} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} &= \langle 8, -2, 20 \rangle \cdot \langle -3, 2, 4 \rangle \\ &= -24 - 4 + 80 \\ &= 52 \end{aligned}$$

Portanto, o volume é 52 em unidades de volume.

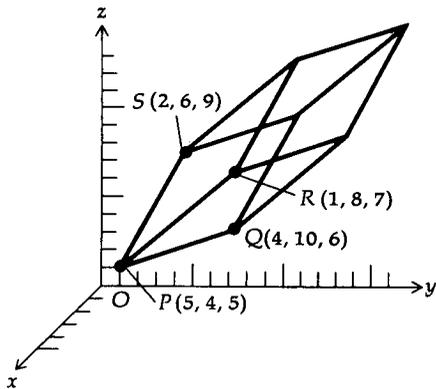


FIGURA 6

**EXEMPLO 6** Ache a distância entre as duas retas reversas  $l_1$  e  $l_2$  do Exemplo 4 da Seção 15.4.

**Solução** A reta  $l_1$  contém os pontos  $A(1, 2, 7)$  e  $B(-2, 3, -4)$ . A reta  $l_2$  contém os pontos  $C(2, -1, 4)$  e  $D(5, 7, -3)$ . Como  $l_1$  e  $l_2$  são reversas, existem planos paralelos  $P_1$  e  $P_2$  que contêm as retas  $l_1$  e  $l_2$ , respectivamente. Veja a Figura 7. Seja  $d$  a distância entre os planos  $P_1$  e  $P_2$ . A distância entre  $l_1$  e  $l_2$  também é  $d$ . Um vetor normal aos dois planos será

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}(\overline{AB}) \times \mathbf{V}(\overline{CD})$$

Seja  $\mathbf{U}$  um vetor normal na direção de  $\mathbf{N}$ . Então,

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{V}(\overline{AB}) \times \mathbf{V}(\overline{CD})}{\|\mathbf{V}(\overline{AB}) \times \mathbf{V}(\overline{CD})\|} \tag{6}$$

Agora consideremos dois pontos, um em cada plano (por exemplo,  $B$  e  $C$ ). Então, a projeção escalar de  $\mathbf{V}(\overline{CB})$  sobre  $\mathbf{N}$  será  $\mathbf{V}(\overline{CB}) \cdot \mathbf{U}$

$$d = |\mathbf{V}(\overline{CB}) \cdot \mathbf{U}| \tag{7}$$

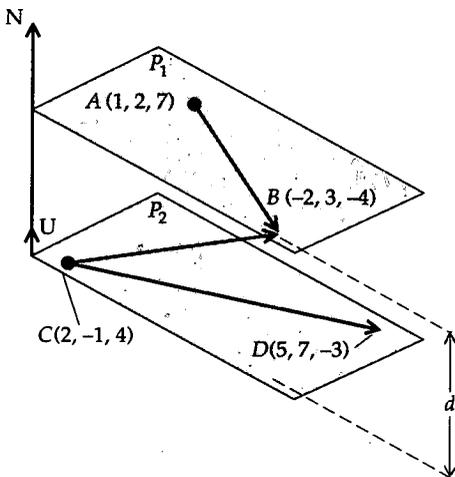


FIGURA 7

Agora faremos os cálculos

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overline{AB}) &= \langle -2 - 1, 3 - 2, -4 - 7 \rangle & \mathbf{V}(\overline{CD}) &= \langle 5 - 2, 7 + 1, -3 - 4 \rangle \\ &= \langle -3, 1, -11 \rangle & &= \langle 3, 8, -7 \rangle \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overline{AB}) \times \mathbf{V}(\overline{CD}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -11 \\ 3 & 8 & -7 \end{vmatrix} \\ &= 27(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Logo, de (6),

$$\mathbf{U} = \frac{27(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})}{\sqrt{27^2(3^2 + 2^2 + 1^2)}}$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \quad (8)$$

Além disso,

$$\mathbf{V}(\overline{CB}) = \langle -2 - 2, 3 + 1, -4 - 4 \rangle$$

$$\mathbf{V}(\overline{CB}) = \langle -4, 4, -8 \rangle$$

Substituindo essa equação e (8) em (7), obtemos

$$\begin{aligned} d &= \left| \langle -4, 4, -8 \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \langle 3, -2, -1 \rangle \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} |-12 - 8 + 8| \\ &= \frac{12}{\sqrt{14}} \\ &\approx 3,21 \end{aligned}$$

## EXERCÍCIOS 15.5

Nos Exercícios de 1 a 12,  $\mathbf{A} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ ,  $\mathbf{B} = \langle 4, -3, -1 \rangle$ ,  $\mathbf{C} = \langle -5, -3, 5 \rangle$ ,  $\mathbf{D} = \langle -2, 1, 6 \rangle$ ,  $\mathbf{E} = \langle 4, 0, -7 \rangle$  e  $\mathbf{F} = \langle 0, 2, 1 \rangle$ .

- Ache  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ .
- Ache  $\mathbf{D} \times \mathbf{E}$ .
- Ache  $(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{F})$ .
- Ache  $(\mathbf{C} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{D} \times \mathbf{F})$ .
- Verifique o Teorema 15.5.3 para os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ .
- Verifique o Teorema 15.5.4 para os vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ .
- Verifique o Teorema 15.5.5(i) para os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  e  $c = 3$ .
- Verifique o Teorema 15.5.5(ii) para os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  e  $c = 3$ .
- Verifique o Teorema 15.5.6 para os vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ .
- Verifique o Teorema 15.5.7 para os vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ .
- Ache  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} - \mathbf{D})$  e  $(\mathbf{D} - \mathbf{C}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})$  e verifique que são iguais.
- Ache  $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| \|\mathbf{C} \times \mathbf{D}\|$ .
- Prove o Teorema 15.5.2(ii) e (iii).
- Dados os dois vetores  $\mathbf{A} = \frac{4}{9}\mathbf{i} + \frac{7}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}$  e  $\mathbf{B} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$  e sendo  $\theta$  o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , ache  $\sin \theta$  de duas maneiras: (a) usando o produto vetorial (Teorema 15.5.8); (b) usando o produto escalar e uma identidade trigonométrica.
- Siga as instruções do Exercício 14 para os dois vetores unitários

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

16. Mostre que o quadrilátero com vértices em  $(-2, 1, -1)$ ,  $(1, 1, 3)$ ,  $(-5, 4, 0)$  e  $(8, 4, -4)$  é um paralelogramo e ache sua área.
17. Mostre que o quadrilátero com vértices em  $(1, -2, 3)$ ,  $(4, 3, -1)$ ,  $(2, 2, 1)$  e  $(5, 7, -3)$  é um paralelogramo e ache sua área.
18. Ache a área do paralelogramo  $PQRS$  se  $\mathbf{V}(\overline{PQ}) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$  e  $\mathbf{V}(\overline{PS}) = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ .
19. Ache a área do triângulo tendo vértices em  $(0, 2, 2)$ ,  $(8, 8, -2)$  e  $(9, 12, 6)$ .
20. Ache a área do triângulo tendo vértices em  $(4, 5, 6)$ ,  $(4, 4, 5)$  e  $(3, 5, 5)$ .

Nos Exercícios 21 e 22, use o produto vetorial para encontrar uma equação do plano contendo os três pontos dados.

21.  $(-2, 2, 2)$ ,  $(-8, 1, 6)$ ,  $(3, 4, -1)$
22.  $(2, 3, 0)$ ,  $(2, 0, 4)$ ,  $(0, 3, 4)$
23. Faça o Exercício 18 nos Exercícios 15.3, usando produto vetorial.
24. Ache um vetor unitário cujas representações são perpendiculares ao plano que contém  $\overline{PQ}$  e  $\overline{PR}$  se  $\overline{PQ}$  for uma representação do vetor  $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  e  $\overline{PR}$  for uma representação do vetor  $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ .

Nos Exercícios de 25 a 27, ache um vetor unitário cujas representações são perpendiculares ao plano que passa pelos pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , dados

25.  $P(5, 2, -1)$ ,  $Q(2, 4, -2)$ ,  $R(11, 1, 4)$
26.  $P(-2, 1, 0)$ ,  $Q(2, -2, -1)$ ,  $R(-5, 0, 2)$
27.  $P(1, 4, 2)$ ,  $Q(3, 2, 4)$ ,  $R(4, 3, 1)$

28. Ache o volume do paralelepípedo com arestas  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{PR}$  e  $\overline{PS}$  se os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  forem, respectivamente,  $(1, 3, 4)$ ,  $(3, 5, 3)$ ,  $(2, 1, 6)$  e  $(2, 2, 5)$ .
29. Ache o volume do paralelepípedo  $PQRS$  se os vetores  $\mathbf{V}(\overline{PQ})$ ,  $\mathbf{V}(\overline{PR})$  e  $\mathbf{V}(\overline{PS})$  forem, respectivamente,  $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$  e  $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .
30. Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  forem dois vetores quaisquer em  $V_3$ , prove que  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

Nos Exercícios 31 e 32, ache a distância entre as duas retas reversas.

$$31. \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-3}$$

$$32. \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{-3} \quad \text{e} \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{2}$$

33. Sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$  três pontos não-alinhados em  $R^3$  e sejam  $\overline{OP}$ ,  $\overline{OQ}$  e  $\overline{OR}$  as representações posicionais dos vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , respectivamente. Prove que as representações do vetor  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A}$  são perpendiculares ao plano contendo os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$ .
34. Ache uma equação do plano contendo os pontos finais das representações dos vetores  $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ,  $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  e  $5\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ .
35. Prove o Teorema 15.5.4.      36. Prove o Teorema 15.5.5.
37. Prove o Teorema 15.5.6.      38. Prove o Teorema 15.5.7.
39. Seja  $\overline{OP}$  a representação posicional do vetor  $\mathbf{A}$ ,  $\overline{OQ}$  a representação posicional do vetor  $\mathbf{B}$  e  $\overline{OR}$  a representação posicional do vetor  $\mathbf{C}$ . Prove que a área do triângulo  $PQR$  é  $\frac{1}{2} \|(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{C} - \mathbf{A})\|$ .

## 15.6 CILINDROS E SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Conforme mencionado previamente, o gráfico de uma equação em três variáveis é uma **superfície**. Uma superfície será representada por uma equação se as coordenadas de cada ponto na superfície satisfizerem a equação e se todo ponto cujas coordenadas satisfazem a equação estiver na superfície. Já discutimos dois tipos de superfície, um plano e uma esfera. Outro tipo de superfície, que é razoavelmente simples, é um cilindro. Você já deve estar familiarizado com cilindros circulares retos, de seus estudos anteriores. Vamos considerar agora uma superfície cilíndrica mais genérica.

### 15.6.1 DEFINIÇÃO

Um **cilindro** é uma superfície gerada por uma reta que se move ao longo de uma curva plana dada, de tal forma que ela se mantenha paralela a uma reta fixa não pertencente ao plano da curva dada. A reta móvel é chamada de **geratriz** do cilindro e a curva plana dada é denominada **diretriz** do cilindro. Qualquer posição de uma geratriz é chamada de **determinante** do cilindro.

Essa discussão está restrita a cilindros com uma diretriz, num plano coordenado e determinantes perpendiculares a esse plano. Se as determinantes de um cilindro forem perpendiculares ao plano da diretriz, dizemos que elas são perpendiculares ao plano.

O cilindro circular reto é aquele para o qual a diretriz é uma circunferência em um plano perpendicular ao cilindro.

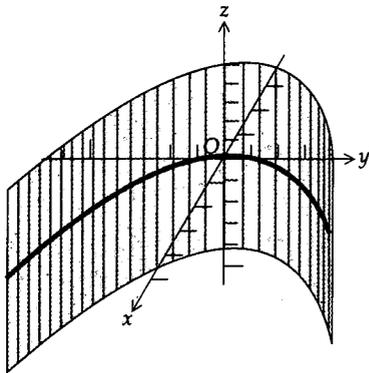


FIGURA 1

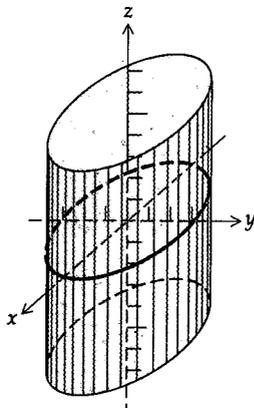


FIGURA 2

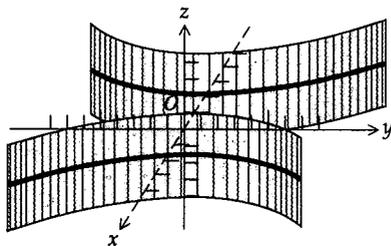


FIGURA 3

► **ILUSTRAÇÃO 1** Na Figura 1 há um cilindro cuja diretriz é a parábola  $y^2 = 8x$ , no plano  $xy$  e cujas determinantes são paralelas ao eixo  $z$ . O cilindro é chamado de **cilindro parabólico**. Um **cilindro elíptico** está na Figura 2; sua diretriz é a elipse  $9x^2 + 16y^2 = 144$ , no plano  $xy$  e suas determinantes são paralelas ao eixo  $z$ . A figura 3 mostra um **cilindro hiperbólico**, tendo como diretriz a hipérbole  $25x^2 - 4y^2 = 100$ , no plano  $xy$  e determinantes paralelas ao eixo  $z$ . ◀

Considere o problema de encontrar uma equação de um cilindro tendo diretriz em um plano coordenado e determinantes paralelas ao eixo coordenado não pertencente ao plano da diretriz. Especificamente, considere a diretriz no plano  $xy$  e as determinantes paralelas ao eixo  $z$ . Consulte a Figura 4. Suponha que uma equação da diretriz no plano  $xy$  seja  $y = f(x)$ . Se o ponto  $(x_0, y_0, 0)$  no plano  $xy$  satisfizer essa equação, então todo ponto  $(x_0, y_0, z)$  do espaço tridimensional, onde  $z$  é um número real qualquer, irá satisfazer a mesma equação, pois  $z$  não aparece nela. Os pontos com representações  $(x_0, y_0, z)$  estão todos na reta paralela ao eixo  $z$ , passando pelo ponto  $(x_0, y_0, 0)$ . Essa reta é uma determinante do cilindro. Logo, todo ponto cujas coordenadas  $x$  e  $y$  satisfazem a equação  $y = f(x)$  está no cilindro. Inversamente, se o ponto  $P(x, y, z)$  estiver no cilindro (veja a Figura 5), então o ponto  $(x, y, 0)$  estará na diretriz do cilindro, no plano  $xy$  e assim as coordenadas  $x$  e  $y$  de  $P$  satisfazem a equação  $y = f(x)$ . Logo, se  $y = f(x)$  for considerada como equação de um gráfico no espaço tridimensional, o gráfico será um cilindro com determinantes paralelas ao eixo  $z$  e cuja diretriz é a curva  $y = f(x)$  no plano  $z = 0$ . Uma discussão similar ocorre quando a diretriz estiver nos outros planos coordenados. Os resultados estão resumidos no teorema a seguir.

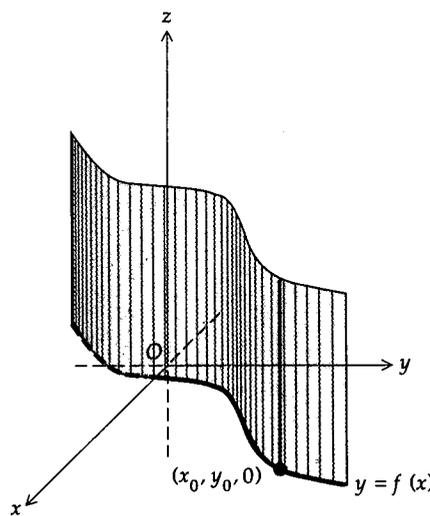


FIGURA 4

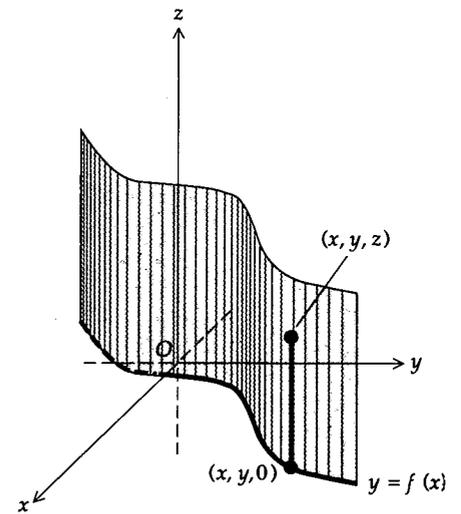


FIGURA 5

**15.6.2 TEOREMA**

No espaço tridimensional, o gráfico de uma equação em duas das três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  é um cilindro cujas determinantes são paralelas ao eixo associado com a variável que está ausente e cuja diretriz é uma curva no plano associado com as variáveis que aparecem na equação.

► **ILUSTRAÇÃO 2** Segue, do Teorema 15.6.2, que uma equação do cilindro parabólico da Figura 1 é  $y^2 = 8x$ , considerada como uma equação em  $R^3$ . Analogamente, as equações do cilindro elíptico da Figura 2 e do cilindro hiperbólico da Figura 3 são, respectivamente,

$$9x^2 + 16y^2 = 144 \quad \text{e} \quad 25x^2 - 4y^2 = 100$$

ambas consideradas como equações em  $R^3$ . ◀

Uma **secção transversal** de uma superfície em um plano é o conjunto de todos os pontos da superfície que estejam no plano dado. Se um plano for paralelo ao plano da diretriz de um cilindro, a secção transversal do cilindro será igual à diretriz. Por exemplo, a secção transversal do cilindro elíptico da Figura 2 em qualquer plano paralelo ao plano  $xy$  é uma elipse.

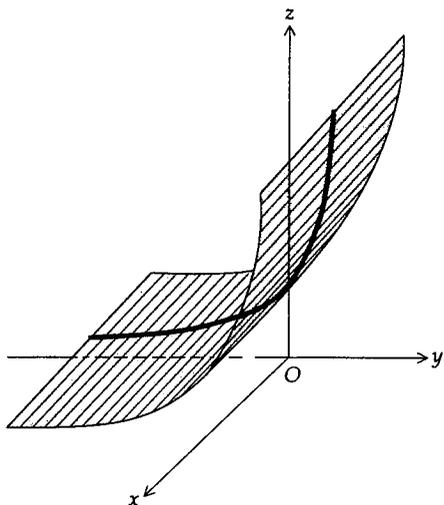


FIGURA 6

**EXEMPLO 1** Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes equações: (a)  $y = \ln z$ ; (b)  $z^2 = x^3$ .

**Solução**

(a) O gráfico é um cilindro cuja diretriz, estando no plano  $yz$ , é a curva  $y = \ln z$  e cujas determinantes são paralelas ao eixo  $x$ . Um esboço do gráfico está na Figura 6.

(b) O gráfico é um cilindro cuja diretriz está no plano  $xz$  e cujas determinantes são paralelas ao eixo  $y$ . Uma equação da diretriz é  $z^2 = x^3$ , no plano  $xz$ . Um esboço do gráfico está na Figura 7.

**15.6.3 DEFINIÇÃO**

Se uma curva plana girar em torno de uma reta fixa situada no plano da curva, a superfície gerada será chamada de **superfície de revolução**. A reta fixa será denominada **eixo** da superfície de revolução e a curva plana será a **curva geratriz**.

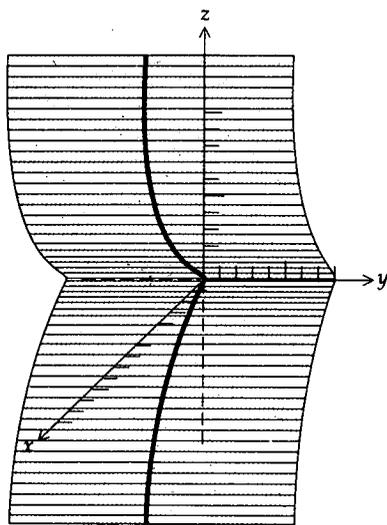


FIGURA 7

A Figura 8 mostra uma superfície de revolução cuja curva geratriz é a curva  $C$  no plano  $yz$  e cujo eixo é  $z$ . Uma esfera é exemplo de uma superfície de revolução, pois pode ser gerada com a rotação de uma semicircunferência em torno de um diâmetro.

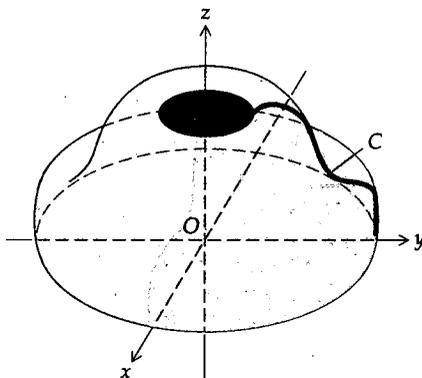


FIGURA 8

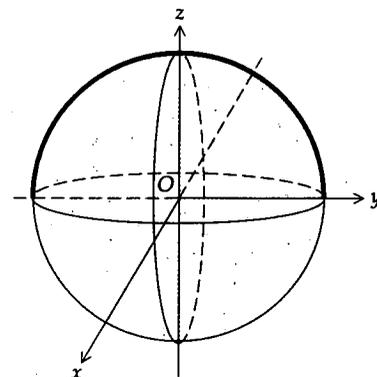


FIGURA 9

► **ILUSTRAÇÃO 3** A Figura 9 mostra uma esfera que pode ser gerada com a rotação da semicircunferência  $y^2 + z^2 = r^2, z \geq 0$ , em torno do eixo  $y$ .

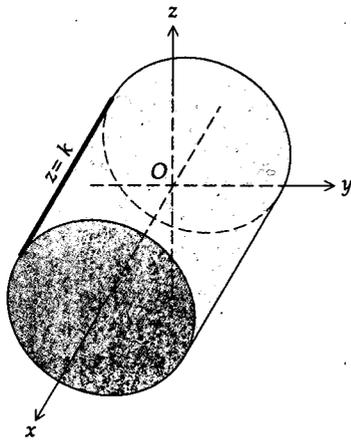


FIGURA 10

Outro exemplo de superfície de revolução é o cilindro circular reto para o qual a curva geradora e o eixo são retas paralelas. Se a curva geradora for a reta  $z = k$  no plano  $xz$  e o eixo for o eixo  $x$ , obtemos o cilindro circular reto da Figura 10. ◀

Vamos achar uma equação da superfície gerada pela revolução da curva no plano  $yz$ , em torno do eixo  $y$  tendo a equação bidimensional

$$z = f(y) \tag{1}$$

Consulte a Figura 11. Seja  $P(x, y, z)$  um ponto qualquer da superfície de revolução. Vamos passar por  $P$  um plano perpendicular ao eixo  $y$  e denotar o ponto de intersecção desse plano com o eixo  $y$  por  $Q(0, y, 0)$ . Seja  $P_0(0, y, z_0)$  o ponto de intersecção do plano com a curva geradora. Como a secção transversal da superfície com o plano que passa por  $P$  é uma circunferência,  $P$  está na superfície se e somente se

$$|\overline{QP}|^2 = |\overline{QP_0}|^2$$

Como  $|\overline{QP}| = \sqrt{x^2 + z^2}$  e  $|\overline{QP_0}| = z_0$ , obtemos dessa equação

$$x^2 + z^2 = z_0^2 \tag{2}$$

O ponto  $P_0$  está na curva geradora; assim suas coordenadas devem satisfazer (1). Logo,

$$z_0 = f(y)$$

Dessa equação e de (2), o ponto  $P$  está na superfície de revolução se e somente se

$$x^2 + z^2 = [f(y)]^2 \tag{3}$$

Essa é a equação desejada para a superfície de revolução. Como (3) é equivalente a

$$\pm \sqrt{x^2 + z^2} = f(y)$$

podemos obter (3) substituindo  $z$  em (1) por  $\pm \sqrt{x^2 + z^2}$ .

Da mesma forma, podemos mostrar que se a curva no plano  $yz$  com equação bidimensional

$$y = g(z) \tag{4}$$

for girada em torno do eixo  $z$ , uma equação da superfície de revolução gerada será obtida ao substituirmos  $y$  em (4) por  $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$ . Observações análogas são feitas quando uma curva em qualquer plano coordenado for girada em torno de um dos eixos coordenados contido naquele plano. Resumindo, os gráficos das seguintes equações são superfícies de revolução em torno do eixo indicado:  $x^2 + y^2 = [F(z)]^2$ , eixo  $z$ ;  $x^2 + z^2 = [F(y)]^2$ , eixo  $y$ ;  $y^2 + z^2 = [F(x)]^2$ , eixo  $x$ . Em cada caso, as secções transversais das superfícies em planos perpendiculares aos eixos são circunferências com centros no eixo.

**EXEMPLO 2** Ache uma equação da superfície de revolução gerada ao girarmos a parábola  $y^2 = 4x$  no plano  $xy$ , em torno do eixo  $x$ . Faça um esboço do gráfico da superfície.

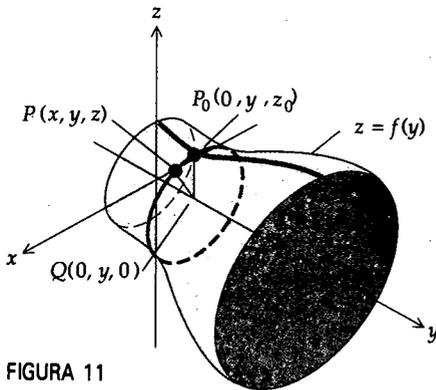


FIGURA 11

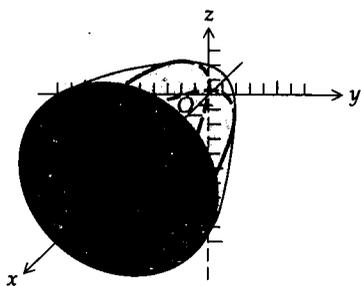


FIGURA 12

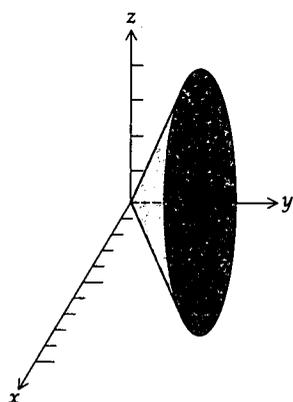


FIGURA 13

**Solução** Na equação da parábola, substituímos  $y$  por  $\pm \sqrt{y^2 + z^2}$ , obtendo

$$y^2 + z^2 = 4x$$

Um esboço do gráfico está na Figura 12. A mesma superfície é gerada se a parábola  $z^2 = 4x$ , no plano  $xz$ , for girada em torno do eixo  $x$ .

A superfície obtida no Exemplo 2 é chamada de **parabolóide de revolução**. Se uma elipse for girada em torno de um de seus eixos, a superfície obtida será denominada **elipsóide de revolução**. Obtemos um **hiperbolóide de revolução** quando uma hipérbole for girada em torno de um eixo.

**EXEMPLO 3** Faça um esboço da superfície  $x^2 + z^2 - 4y^2 = 0$ , se  $y \geq 0$ .

**Solução** A equação dada é da forma  $x^2 + z^2 = [F(y)]^2$ ; assim, seu gráfico é uma superfície de revolução tendo  $y$  como eixo. Resolvendo em  $y$  a equação dada, obtemos

$$2y = \pm \sqrt{x^2 + z^2}$$

Logo, a curva geradora pode ser a reta  $2y = x$  no plano  $xy$ , ou a reta  $2y = z$  no plano  $yz$ . Traçando esboços das duas curvas geradoras possíveis e usando o fato de que as seções transversais da superfície em planos perpendiculares ao eixo  $y$  são circunferências com centro no eixo  $y$ , obtemos a superfície mostrada na Figura 13 (observe que como  $y \geq 0$ , há somente uma parte do cone).

A superfície obtida no Exemplo 3 é chamada de **cone circular reto**.

## EXERCÍCIOS 15.6

Nos Exercícios de 1 a 4, faça um esboço da seção transversal do cilindro dado no plano indicado.

1.  $4x^2 + y^2 = 16$ ; plano  $xy$
2.  $4z^2 - y^2 = 4$ ; plano  $yz$
3.  $z = e^x$ ; plano  $xz$
4.  $x = |y|$ ; plano  $xy$

Nos Exercícios de 5 a 12, faça um esboço do cilindro, tendo as equações dadas.

5.  $4x^2 + 9y^2 = 36$
6.  $z = \sin y$
7.  $y = |z|$
8.  $x^2 - z^2 = 4$
9.  $z = 2x^2$
10.  $z^2 = 4y^2$
11.  $y = \cosh x$
12.  $x^2 = y^3$

Nos Exercícios de 13 a 20, ache uma equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva plana dada em torno do eixo indicado. Faça um esboço da superfície.

13.  $x^2 = 4y$  no plano  $xy$ , em torno do eixo  $y$ .
14.  $x^2 + 4z^2 = 16$  no plano  $xz$ , em torno do eixo  $z$ .
15.  $x^2 + 4z^2 = 16$  no plano  $xz$ , em torno do eixo  $x$ .

16.  $x^2 = 4y$  no plano  $xy$ , em torno do eixo  $x$ .
17.  $y = 3z$  no plano  $yz$ , em torno do eixo  $y$ .
18.  $9y^2 - 4z^2 = 144$  no plano  $yz$ , em torno do eixo  $z$ .
19.  $y = \sin x$  no plano  $xy$ , em torno do eixo  $x$ .
20.  $y^2 = z^3$  no plano  $yz$ , em torno do eixo  $z$ .

Nos Exercícios de 21 a 28, ache a curva geradora e o eixo da superfície de revolução dada. Faça um esboço da superfície.

21.  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$
22.  $x^2 + z^2 = y$
23.  $x^2 + y^2 - z^2 = 4$
24.  $y^2 + z^2 = e^{2x}$
25.  $x^2 + z^2 = |y|$
26.  $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$
27.  $9x^2 - y^2 + 9z^2 = 0$
28.  $4x^2 + 4y^2 - z = 9$
29. A trajetória

$$x = t - a \operatorname{tgh} \frac{t}{a} \quad y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}$$

de  $x = -a$  a  $x = 2a$  é girada em torno do eixo  $x$ . Faça um esboço da superfície de revolução.

## 15.7 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Aprendemos no Capítulo 10 que o gráfico de uma equação do segundo grau nas variáveis  $x$  e  $y$ ,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é uma secção cônica. O gráfico de uma equação do segundo grau nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (1)$$

é chamado de **superfície quádrica**. O tipo mais simples de superfícies quádricas constitui os cilindros parabólico, elíptico e hiperbólico que foram discutidos na secção anterior. Há mais seis tipos de superfícies quádricas que iremos considerar agora. Escolhemos os eixos coordenados de modo que as equações estejam em sua forma mais simples. Na discussão de cada uma dessas superfícies iremos nos referir a secções transversais das superfícies em planos paralelos aos planos coordenados. Essas secções transversais ajudam a visualizar a superfície.

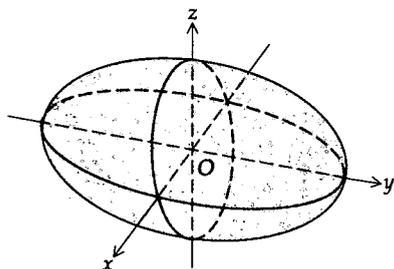


FIGURA 1

## O elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são positivos (veja a Figura 1).

Se em (2)  $z$  for substituído por zero, obtemos a secção transversal do elipsóide no plano  $xy$ , que é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para obter a secção transversal da superfície com os planos  $z = k$ , substituímos  $z$  por  $k$  na equação do elipsóide, obtendo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

Se  $|k| < c$ , a secção transversal é uma elipse e os comprimentos dos semi-eixos decrescem para zero quando  $|k|$  cresce para o valor  $c$ . Se  $|k| = c$ , a intersecção do plano  $z = k$  com o elipsóide é um único ponto  $(0, 0, k)$ . Se  $|k| > c$ , não há intersecção. A discussão é análoga se considerarmos secções transversais formadas por planos paralelos a cada um dos outros planos coordenados.

Os números  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os comprimentos dos semi-eixos do elipsóide. Se dois números quaisquer desses três forem iguais, teremos um elipsóide de revolução que também será chamado de **esferóide**. Um esferaide para o qual o terceiro número seja maior do que os outros dois iguais é chamado de **prolato** (alongado nos pólos). O esferaide prolato tem o formato de uma bola de futebol americano. Um esferaide **oblato** será obtido se o terceiro número for menor do que os outros dois, que são iguais. Se todos os três números  $a$ ,  $b$  e  $c$  na equação de um elipsóide forem iguais, o elipsóide será uma **esfera**.

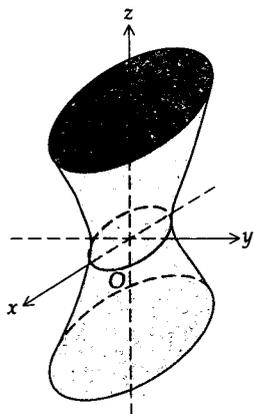


FIGURA 2

## O hiperbolóide elíptico de uma folha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3)$$

onde  $a$ ,  $b$ , e  $c$  são positivos (veja a Figura 2).

As secções transversais em planos  $z = k$  são as elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

Quando  $k = 0$ , os comprimentos dos semi-eixos da elipse são os menores e aumentam à medida que  $|k|$  aumenta. As secções transversais nos planos  $x = k$  são as hipérbolés

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

Se  $|k| < a$ , o eixo transverso da hipérbole é paralelo ao eixo  $y$ , e se  $|k| > a$ , o eixo transverso é paralelo ao eixo  $z$ . Se  $k = a$ , a hipérbole degenera em duas retas:

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

De forma análoga, as secções transversais nos planos  $y = k$  também são hipérbolés. O eixo desse hiperbolóide é  $z$ .

Se  $a = b$ , a superfície é um hiperbolóide de revolução para o qual o eixo é a reta contendo os eixos conjugados.

#### O hiperbolóide elíptico de duas folhas

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(4)

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são positivos (veja a Figura 3).

Substituindo  $z$  por  $k$  em (4), obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$$

Se  $|k| < c$ , não há intersecção do plano  $z = k$  com a superfície; logo, entre os planos  $z = -c$  e  $z = c$  não há pontos da superfície. Se  $|k| = c$ , a intersecção do plano  $z = k$  com a superfície é um único ponto  $(0, 0, k)$ . Quando  $|k| > c$ , a secção transversal da superfície no plano  $z = k$  é uma elipse, e os comprimentos dos semi-eixo aumentam quando  $|k|$  aumenta.

As secções transversais da superfície nos planos  $x = k$  são as hipérbolés

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2}$$

cujos eixos transversos são paralelos ao eixo  $z$ . De forma análoga, as secções transversais nos planos  $y = k$  são as hipérbolés

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2}$$

para as quais os eixos transversos também são paralelos ao eixo  $z$ .

Se  $a = b$ , a superfície é um hiperbolóide de revolução no qual o eixo é a reta contendo o eixo transverso da hipérbole.

Cada uma das três superfícies quádricas anteriores é simétrica a cada um dos planos coordenados e simétrica em relação à origem. Seus gráficos são chama-

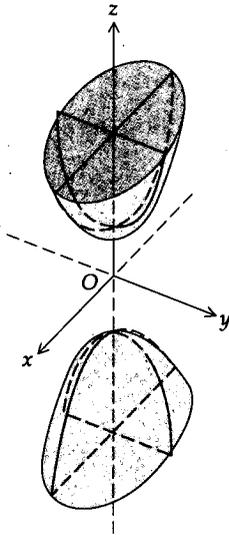


FIGURA 3

dos de **quádricas centrais** e seu centro está na origem. O gráfico de qualquer equação da forma

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são positivos, é uma quádrica central.

**EXEMPLO 1** Faça um esboço do gráfico da equação

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 100$$

e dê o nome da superfície.

**Solução** Dividindo ambos os termos da equação por 100, obtemos

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 1$$

que é da mesma forma que (3), se trocarmos  $y$  por  $z$ . Logo, a superfície é um hiperbolóide elíptico de uma folha cujo eixo é  $y$ . As secções transversais nos planos  $y = k$  são as elipses

$$\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1 + \frac{k^2}{100}$$

As secções transversais nos planos  $x = k$  são as hipérboloes

$$\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{100} = 1 - \frac{k^2}{25}$$

e as secções transversais nos planos  $z = k$  são as hipérboloes

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1 - \frac{k^2}{4}$$

Um esboço da superfície está na Figura 4.

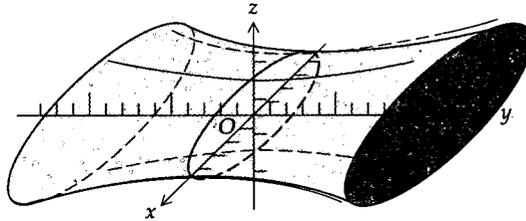


FIGURA 4

**EXEMPLO 2** Faça um esboço do gráfico da equação

$$4x^2 - 25y^2 - z^2 = 100$$

e dê o nome da superfície.

**Solução** Dividindo ambos os membros da equação por 100 podemos escrever a equação dada como

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{100} = 1$$

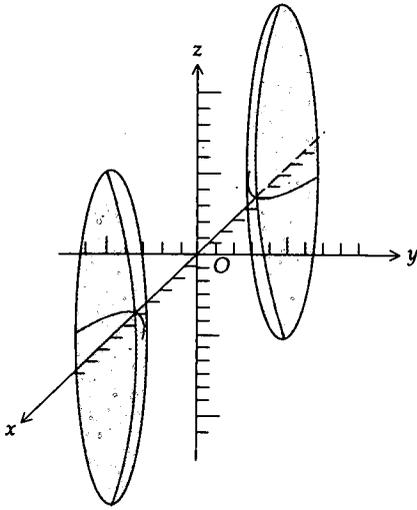


FIGURA 5

que é da mesma forma que (4) com  $x$  e  $z$  trocados um pelo outro; assim, a superfície é um hiperbolóide elíptico de duas folhas cujo eixo é  $x$ . As seções transversais nos planos  $x = k$ , onde  $|k| > 5$ , são as elipses

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{100} = \frac{k^2}{25} - 1$$

Os planos  $x = k$ , onde  $|k| < 5$ , não interceptam a superfície. As seções transversais nos planos  $y = k$  são as hipérboleres

$$\frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{100} = 1 + \frac{k^2}{4}$$

e as seções transversais nos planos  $z = k$  são as hipérboleres

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1 + \frac{k^2}{100}$$

O esboço pedido está na Figura 5.

As duas quádricas a seguir são chamadas de quádricas não-centrais.

**O parabolóide elíptico**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c}$$

(5)

onde  $a$  e  $b$  são positivos e  $c \neq 0$ . A Figura 6 mostra a superfície, se  $c > 0$ . Substituindo  $k$  por  $z$  em (5), obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k}{c}$$

Quando  $k = 0$ , essa equação torna-se  $b^2x^2 + a^2y^2 = 0$ , que representa um único ponto, a origem. Se  $k \neq 0$  e  $k$  e  $c$  tiverem o mesmo sinal, a equação será de uma elipse. Assim, concluímos que as seções transversais da superfície nos planos  $z = k$ , onde  $k$  e  $c$  têm o mesmo sinal, são elipses e os comprimentos dos semi-eixos aumentam quando  $|k|$  cresce. Se  $k$  e  $c$  tiverem sinais opostos, os planos  $z = k$  não interceptam a superfície. As seções transversais da superfície com os planos  $x = k$  e  $y = k$  são parábolas. Quando  $c > 0$ , as parábolas abrem-se para cima, conforme mostra a Figura 6; quando  $c < 0$ , as parábolas abrem-se para baixo.

Se  $a = b$ , a superfície é um parabolóide de revolução.

**O parabolóide hiperbólico**

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$$

(6)

onde  $a$  e  $b$  são positivos e  $c \neq 0$ . A superfície está na Figura 7 para  $c > 0$ .

As seções transversais da superfície nos planos  $z = k$ , onde  $k \neq 0$ , são hipérboleres com seus eixos transversos paralelos ao eixo  $y$  se  $k$  e  $c$  tiverem o mesmo sinal, e paralelos ao eixo  $x$  se  $k$  e  $c$  tiverem sinais opostos. A seção transversal da superfície no plano  $z = 0$  consiste em duas retas passando pela origem. As seções transversais nos planos  $x = k$  são parábolas abrindo-se para cima se  $c > 0$ , e para baixo se  $c < 0$ . As seções transversais nos planos  $y = k$  são parábolas abrindo-se para baixo se  $c > 0$ , e para cima se  $c < 0$ .

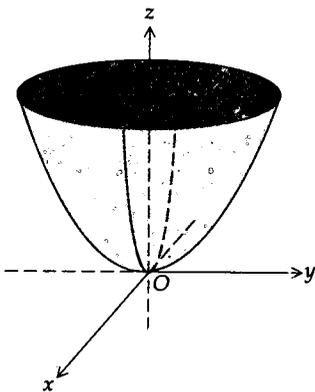


FIGURA 6

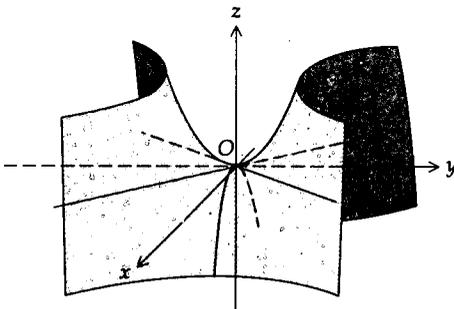


FIGURA 7

**EXEMPLO 3** Faça um esboço do gráfico da equação

$$3y^2 + 12z^2 = 16x$$

e dê o nome da superfície.

**Solução** As equações dadas podem ser escritas como

$$\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = \frac{x}{3}$$

que é da mesma forma que (5), com  $x$  e  $z$  trocados um pelo outro. Logo, o gráfico da equação é um parabolóide elíptico cujo eixo é  $x$ . As secções transversais nos planos  $x = k$ , onde  $k > 0$ , são as elipses

$$\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = \frac{k}{3}$$

Os planos  $x = k$ , onde  $k < 0$ , não interceptam a superfície. As secções transversais nos planos  $y = k$  são as parábolas  $12z^2 = 16x - 3k^2$ , e as secções transversais nos planos  $z = k$  são as parábolas  $3y^2 = 16x - 12k^2$ . A Figura 8 mostra um esboço do parabolóide elíptico.

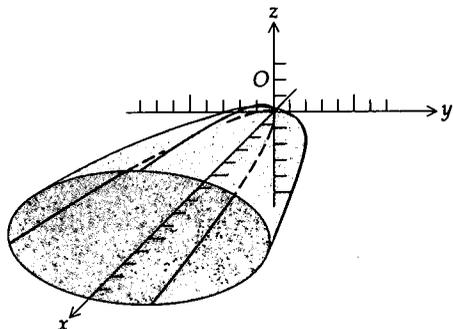


FIGURA 8

**EXEMPLO 4** Faça um esboço do gráfico da equação

$$3y^2 - 12z^2 = 16x$$

e dê o nome da superfície.

**Solução** Se a equação dada for escrita como

$$\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = \frac{x}{3}$$

ela será da mesma forma que (6), com  $x$  e  $z$  trocados entre si. A superfície será, então, um parabolóide hiperbólico. As secções transversais nos planos  $x = k$ , onde  $k \neq 0$ , são as hipérbolas

$$\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = \frac{k}{3}$$

A secção transversal no plano  $yz$  consiste em duas retas  $y = 2z$  e  $y = -2z$ . Nos planos  $z = k$ , as secções transversais são as parábolas  $3y^2 = 16x + 12k^2$ ; nos planos  $y = k$ , as secções transversais são as parábolas  $12z^2 = 3k^2 - 16x$ . Um esboço do parabolóide hiperbólico está na Figura 9.

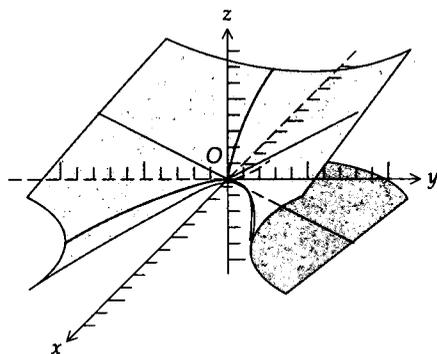


FIGURA 9

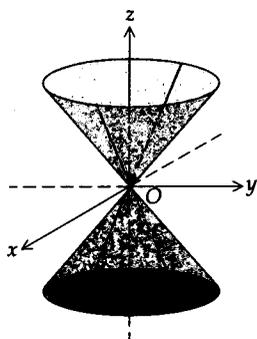


FIGURA 10

### O cone elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (7)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são positivos (veja a Figura 10).

A intersecção do plano  $z = 0$  com a superfície é um único ponto, a origem. As secções transversais da superfície nos planos  $z = k$ , onde  $k \neq 0$ , são elipses, e os comprimentos dos semi-eixos aumentam quando  $k$  cresce. As secções trans-

versais nos planos  $x = 0$  e  $y = 0$  são pares de retas concorrentes. Nos planos  $x = k$  e  $y = k$ , onde  $k \neq 0$ , as secções transversais são hipérbolas.

**EXEMPLO 5** Faça um esboço do gráfico da equação

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 0$$

e dê o nome da superfície.

**Solução** A equação dada pode ser escrita como

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 0$$

que é da mesma forma que (7), com  $y$  e  $z$  trocados entre si. Logo, a superfície é um cone elíptico, tendo  $y$  como seu eixo. A superfície intercepta o plano  $y = 0$  apenas na origem. A intersecção da superfície com o plano  $x = 0$  é o par de retas concorrentes  $y = \pm 5z$ , e a intersecção com o plano  $z = 0$  é o par de retas concorrentes  $y = \pm 2x$ . As secções transversais nos planos  $y = k$ , onde  $k \neq 0$ , são as elipses

$$\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{4} = \frac{k^2}{100}$$

Nos planos  $x = k$  e  $z = k$ , onde  $k \neq 0$ , as secções transversais são, respectivamente, as hipérbolas

$$\frac{y^2}{100} - \frac{z^2}{4} = \frac{k^2}{25} \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{25} = \frac{k^2}{4}$$

A Figura 11 mostra um esboço da superfície.

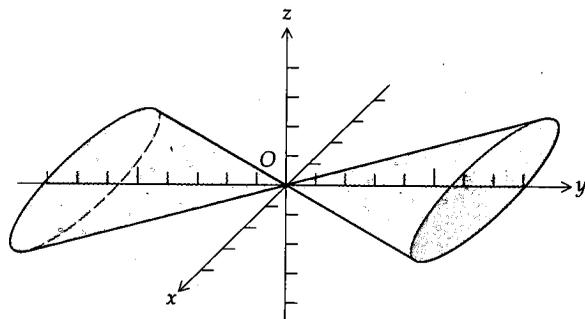


FIGURA 11

A equação (1) é a equação geral do segundo grau em  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Pode ser mostrado que por translação e rotação dos três eixos coordenados (esse estudo está fora do contexto desse livro), tal equação pode ser reduzida a uma das seguintes formas:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad (8)$$

$$Ax^2 + By^2 + Iz = 0 \quad (9)$$

Os gráficos das equações do segundo grau serão de um dos seis tipos de quádricas citados ou degeneram em cilindro, plano, reta, ponto ou conjunto vazio.

As curvas não-degeneradas, associadas a equações da forma (8), são as quádricas centrais e o cone elíptico, enquanto que as equações da forma (9) são quádricas não-centrais. A seguir são dados exemplos de alguns casos degenerados:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= 0; \text{ dois planos, } x - y = 0 \text{ e } x + y = 0 \\z^2 &= 0; \text{ um plano, o plano } xy \\x^2 + y^2 &= 0; \text{ uma reta, o eixo } z \\x^2 + y^2 + z^2 &= 0; \text{ um único ponto, a origem} \\x^2 + y^2 + z^2 + 1 &= 0; \text{ o conjunto vazio}\end{aligned}$$

### EXERCÍCIOS 15.7

Nos Exercícios de 1 a 6, dê o nome da superfície dada.

1.  $9x^2 - 4y^2 + 36z^2 = 36$
2.  $4x^2 - 16y^2 + 9z^2 = 0$
3.  $5x^2 - 2z^2 - 3y = 0$
4.  $25x^2 = 4y^2 + z^2 + 100$
5.  $4y^2 - 25x^2 = 100$
6.  $3y^2 + 7z^2 = 6x$

Nos Exercícios de 7 a 18, faça um esboço do gráfico da equação dada e dê o nome da superfície.

7.  $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$
8.  $4x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$
9.  $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$
10.  $4x^2 - 9y^2 + z^2 = 36$
11.  $x^2 = y^2 - z^2$
12.  $x^2 = y^2 + z^2$
13.  $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{25} = 4y$
14.  $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{36} = 4$
15.  $\frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{25} = 9y$
16.  $x^2 = 2y + 4z$
17.  $x^2 + 16z^2 = 4y^2 - 16$
18.  $9y^2 - 4z^2 + 18x = 0$

19. Ache os valores de  $k$  para os quais a intersecção do plano  $x + ky = 1$  com o hiperbolóide elíptico de duas folhas  $y^2 - x^2 - z^2 = 1$  é (a) uma elipse e (b) uma hipérbole.
20. Ache o vértice e o foco da parábola que é a intersecção do plano  $y = 2$  com o parabolóide hiperbólico

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = \frac{z}{9}.$$

21. Ache o vértice e o foco da parábola que é a intersecção do plano  $x = 1$  com o parabolóide hiperbólico

$$\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{9} = \frac{y}{3}.$$

22. Ache a área da secção plana formada pela intersecção do plano  $y = 3$  com o sólido limitado pelo elipsóide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

23. Mostre que a intersecção da superfície  $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 36$  com o plano  $x + z = 9$  é uma circunferência.

24. Mostre que a intersecção do parabolóide hiperbólico

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \text{ com o plano } z = bx + ay \text{ consiste em duas retas concorrentes.}$$

Nos Exercícios de 25 a 27, use o método das secções planas paralelas (Secção 6.1) para achar o volume do sólido dado. A medida da área da região limitada pela elipse com semi-eixos  $a$  e  $b$  é  $\pi ab$ .

25. O sólido limitado pelo elipsóide  $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ .

26. O sólido limitado pelo elipsóide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

27. O sólido limitado pelo plano  $z = h$ , onde  $h > 0$ , e o parabolóide elíptico  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ , onde  $c > 0$ .

## 15.8 CURVAS EM $R^3$

Vamos considerar agora funções com valores vetoriais no espaço tridimensional.

### 15.8.1 DEFINIÇÃO

Sejam  $f_1, f_2$  e  $f_3$  três funções da variável real  $t$  e com valores reais. Então, para todo número  $t$  no domínio comum a  $f_1, f_2$  e  $f_3$ , há um vetor  $\mathbf{R}$  definido por

$$\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

e  $\mathbf{R}$  é chamada de função com valores vetoriais.

O gráfico de uma função com valores vetoriais no espaço tridimensional é obtido de forma análoga ao que foi feito para uma função com valores vetoriais no espaço bidimensional, na Secção 14.3 Quando  $t$  assume todos os valo-

Table 1

$t$	$x$	$y$	$z$
0	$a$	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	0	$b$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\pi$	$-a$	0	$\pi$
$\frac{3\pi}{2}$	0	$-b$	$\frac{3\pi}{2}$

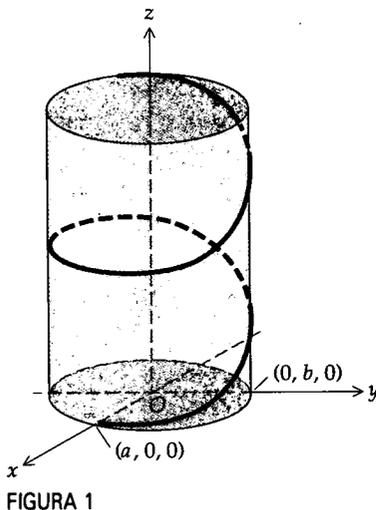


FIGURA 1

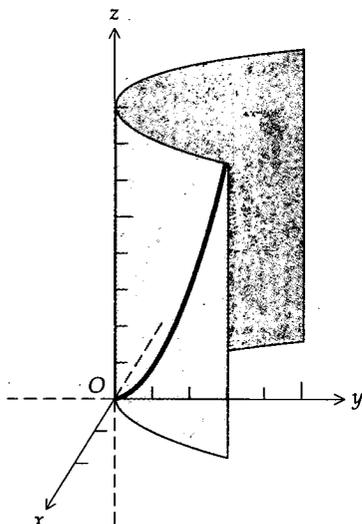


FIGURA 2

res no domínio de  $\mathbf{R}$ , o ponto final da representação posicional do vetor  $\mathbf{R}(t)$  traça uma curva  $C$ , e essa curva é chamada de gráfico de  $\mathbf{R}$ . Um ponto na curva  $C$  tem a representação cartesiana  $(x, y, z)$ , onde

$$x = f_1(t) \quad y = f_2(t) \quad z = f_3(t) \quad (1)$$

Essas equações são chamadas de **equações paramétricas** de  $C$ , enquanto que a Definição 15.8.1 é chamada de uma **equação vetorial** de  $C$ . Eliminando  $t$  das equações (1), obtemos duas equações em  $x, y$  e  $z$  que são chamadas de **equações cartesianas** de  $C$ . Cada uma delas é a equação de uma superfície e a curva  $C$  é a intersecção de duas superfícies. As equações de qualquer par de superfícies transversais em  $C$  podem ser tomadas como as equações cartesianas de  $C$ .

► **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos traçar um esboço da curva com a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

As equações paramétricas da curva dada são

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t \quad z = t$$

Para eliminar  $t$  das duas primeiras equações, escrevemos

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t$$

Somando membro a membro, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Logo, a curva está inteiramente no cilindro elíptico cuja diretriz é uma elipse no plano  $xy$  e cujas determinantes são paralelas ao eixo  $z$ . A Tabela 1 dá os valores de  $x, y$  e  $z$  para certos valores de  $t$ . Um esboço da curva está na Figura 1.

A curva da Ilustração 1 é chamada de **hélice**. Se  $a = b$ , a hélice é uma **hélice circular** e está no cilindro circular reto  $x^2 + y^2 = a^2$ .

► **ILUSTRAÇÃO 2** A curva tendo a equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$$

é chamada de **cúbica retorcida**. As equações paramétricas da cúbica retorcida são

$$x = t \quad y = t^2 \quad z = t^3$$

Eliminando  $t$  das duas primeiras equações, obtemos  $y = x^2$  que é um cilindro cuja diretriz no plano  $xy$  é uma parábola. A cúbica retorcida está sobre esse cilindro. A Figura 2 mostra um esboço do cilindro e uma parte da cúbica retorcida de  $t = 0$  a  $t = 2$ .

A Definição 14.4.1, relativa ao limite de uma função com valores vetoriais em duas dimensões, pode ser estendida a funções com valores vetoriais em três dimensões, como segue. Se

$$\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

então

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \mathbf{R}(t) = \lim_{t \rightarrow t_1} f_1(t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_1} f_2(t)\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_1} f_3(t)\mathbf{k}$$

se  $\lim_{t \rightarrow t_1} f_1(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_1} f_2(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow t_1} f_3(t)$  existirem.

As definições de continuidade (14.4.2) e da derivada (14.4.3) de funções com valores vetoriais em  $V_2$  são as mesmas para aquelas em  $V_3$ . A prova do teorema a seguir é análoga à prova do Teorema 14.4.4, sendo deixada como exercício (veja o Exercício 13).

15.8.2 TEOREMA

Se  $\mathbf{R}$  for uma função com valores vetoriais, definida por

$$\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

e se  $\mathbf{R}'(t)$  existir, então

$$\mathbf{R}'(t) = f_1'(t)\mathbf{i} + f_2'(t)\mathbf{j} + f_3'(t)\mathbf{k}$$

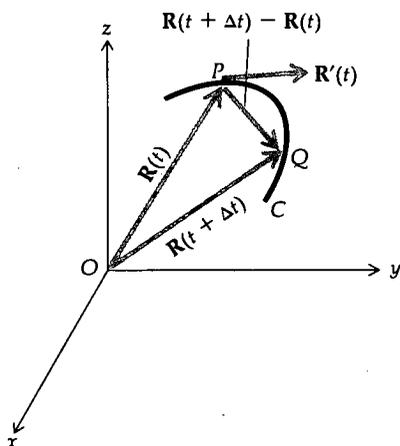


FIGURA 3

A interpretação geométrica da derivada de  $\mathbf{R}$  é a mesma que aquela dada para a derivada de uma função com valores vetoriais em  $R^2$ . A Figura 3 mostra parte da curva  $C$ , que é o gráfico de  $\mathbf{R}$ . Na figura,  $\overline{OP}$  é a representação posicional de  $\mathbf{R}(t)$ ,  $\overline{OQ}$  é a representação posicional de  $\mathbf{R}(t + \Delta t)$  e assim  $\overline{PQ}$  é uma representação do vetor  $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$ . Quando  $\Delta t$  tende a zero, o vetor  $[\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)]/\Delta t$  tem uma representação aproximando-se de um segmento de reta orientado, tangente à curva  $C$  em  $P$ .

A definição de **vetor tangente unitário** é análoga à Definição 14.6.1 para vetores no plano. Assim, se  $\mathbf{T}(t)$  for o vetor tangente unitário ao gráfico de  $\mathbf{R}$ , então

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t \mathbf{R}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \tag{2}$$

► **ILUSTRAÇÃO 3** Vamos encontrar o vetor tangente unitário para a cúbica retorcida da Ilustração 2.

$$\text{Como } \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k},$$

$$D_t \mathbf{R}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k} \quad \|D_t \mathbf{R}(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

De (2), então

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}} (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})$$

Logo, em particular,

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{14}} \mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{14}} \mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{14}} \mathbf{k}$$

A Figura 4 mostra a representação de  $\mathbf{T}(1)$  no ponto  $(1,1,1)$ .

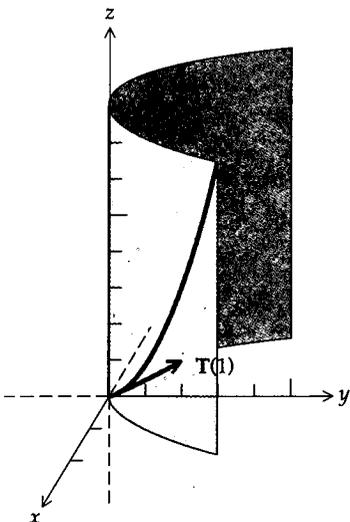


FIGURA 4

Os Teoremas 14.4.6, 14.4.7 e 14.4.8, relativos às derivadas de somas e produtos de duas funções com valores vetoriais bidimensionais, também valem para vetores em três dimensões. O seguinte teorema referente à derivada do produto vetorial de duas funções com valores vetoriais é similar à fórmula correspondente para a derivada do produto de duas funções com valores reais; contu-

do, é importante manter a ordem correta das funções com valores vetoriais, pois o produto vetorial não é comutativo.

## 15.8.3 TEOREMA

Se  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{Q}$  forem funções com valores vetoriais, então

$$D_t[\mathbf{R}(t) \times \mathbf{Q}(t)] = \mathbf{R}(t) \times \mathbf{Q}'(t) + \mathbf{R}'(t) \times \mathbf{Q}(t)$$

para todos os valores de  $t$  para os quais  $\mathbf{R}'(t)$  e  $\mathbf{Q}'(t)$  existem.

A demonstração do Teorema 15.8.3 será deixada como exercício (veja o Exercício 14).

O comprimento de um arco de uma curva  $C$  no espaço tridimensional pode ser definido exatamente da mesma maneira como foi feito no caso de uma curva no plano (veja a Definição 14.5.1). Se  $C$  for a curva com equações paramétricas (1),  $f_1', f_2'$  e  $f_3'$  forem contínuas no intervalo fechado  $[a, b]$  e nenhum par de valores de  $t$  resultar no mesmo ponto  $(x, y, z)$  em  $C$ , então podemos provar (como foi feito para o plano) um teorema similar ao Teorema 14.5.3, o qual estabelece que o comprimento de arco  $L$ , da curva  $C$  entre o ponto  $(f_1(a), f_2(a), f_3(a))$  e o ponto  $(f_1(b), f_2(b), f_3(b))$  é determinado por

$$L = \int_a^b \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2} dt \quad (3)$$

Se  $s$  for a medida do comprimento de arco de  $C$  entre um ponto fixo  $(f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0))$  e um ponto variável  $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  e  $s$  crescer com  $t$  crescente, então  $s$  será uma função de  $t$ , dada por

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{[f_1'(u)]^2 + [f_2'(u)]^2 + [f_3'(u)]^2} du$$

Conforme foi mostrado na Seção 14.5 para curvas planas

$$\frac{ds}{dt} = \|D_t \mathbf{R}(t)\|$$

e o comprimento de arco,  $L$  unidades, dado por (3), também pode ser determinado por

$$L = \int_a^b \|D_t \mathbf{R}(t)\| dt \quad (4)$$

**EXEMPLO 1** Dada a hélice circular

$$\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

onde  $a > 0$ , encontre o comprimento de arco de  $t = 0$  a  $t = 2\pi$ .

**Solução**

$$D_t \mathbf{R}(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Assim, de (4),

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + 1} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + 1} dt \\ &= 2\pi \sqrt{a^2 + 1} \end{aligned}$$

Então, o comprimento de arco é  $2\pi\sqrt{a^2 + 1}$  unidades.

As definições do **vetor curvatura**  $\mathbf{K}(t)$  e da **curvatura**  $K(t)$  da curva  $C$  de  $R^3$  num ponto  $P$  são as mesmas que foram dadas na Definição 14.7.1 para curvas planas. Logo, se  $\mathbf{T}(t)$  for o vetor tangente unitário a  $C$  em  $P$  e  $s$  for a medida do comprimento de arco de um ponto escolhido arbitrariamente em  $C$  até  $P$ , onde  $s$  cresce com  $t$  crescente, então

$$\mathbf{K}(t) = D_s \mathbf{T}(t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{K}(t) = \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|}} \quad (5)$$

e

$$K(t) = \|D_s \mathbf{T}(t)\|$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K(t) = \left\| \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \right\|}$$

Tomando o produto escalar de  $\mathbf{K}(t)$  por  $\mathbf{T}(t)$  e usando (5), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{T}(t) &= \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \cdot \mathbf{T}(t) \\ &= \frac{1}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} D_t \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

O Teorema 14.4.11 estabelece que se uma função com valores vetoriais no plano tem módulo constante, ela será ortogonal à sua derivada. Esse teorema, bem como sua demonstração, também valem para vetores em três dimensões. Logo, como  $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$ , podemos concluir de (6) que  $\mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0$ . Assim sendo, o vetor curvatura e o vetor tangente unitário de uma curva em um ponto são ortogonais.

O **vetor normal unitário** é definido como sendo o vetor unitário com a mesma direção e sentido do vetor curvatura, desde que o vetor curvatura não seja nulo. Assim, se  $\mathbf{N}(t)$  denotar o vetor normal unitário à curva  $C$  num ponto  $P$  e se  $\mathbf{K}(t) \neq 0$ , temos

$$\boxed{\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{K}(t)}{\|\mathbf{K}(t)\|}} \quad (7)$$

De (7) e da discussão anterior, segue que o vetor normal unitário e o vetor tangente unitário são ortogonais. Assim, o ângulo entre esses dois vetores tem uma medida de  $\frac{1}{2}\pi$  rad e, do Teorema 15.5.8,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)\| &= \|\mathbf{T}(t)\| \|\mathbf{N}(t)\| \sin \frac{1}{2}\pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, o produto vetorial de  $\mathbf{T}(t)$  e  $\mathbf{N}(t)$  é um vetor unitário. Pelo Teorema 15.5.10,  $\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$  é ortogonal a ambos  $\mathbf{T}(t)$  e  $\mathbf{N}(t)$ ; logo, o vetor  $\mathbf{B}(t)$ , definido por

$$\boxed{\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)} \quad (8)$$

é um vetor unitário ortogonal a  $\mathbf{T}(t)$  e  $\mathbf{N}(t)$  e é chamado de **vetor binormal unitário** à curva  $C$  no ponto  $P$ .

Os três vetores unitários mutuamente ortogonais,  $\mathbf{T}(t)$ ,  $\mathbf{N}(t)$  e  $\mathbf{B}(t)$  de uma curva  $C$  são chamados de **triedro móvel** de  $C$  (veja a Figura 5).

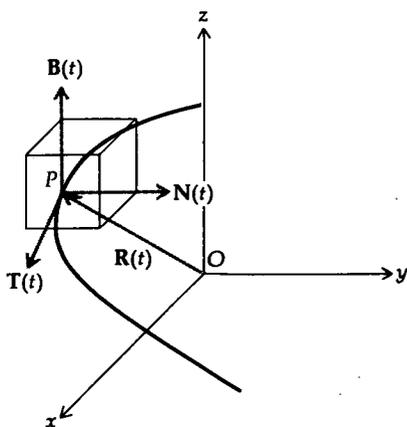


FIGURA 5

**EXEMPLO 2** Ache o triedro móvel e a curvatura em qualquer ponto da hélice circular do Exemplo 1.

**Solução** A equação vetorial da hélice circular é

$$\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

Assim,  $D_t \mathbf{R}(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$  e  $\|D_t \mathbf{R}(t)\| = \sqrt{a^2 + 1}$ . De (2),

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (-a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Logo,

$$D_t \mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (-a \cos t \mathbf{i} - a \sin t \mathbf{j})$$

Aplicando (5), obtemos

$$\mathbf{K}(t) = \frac{1}{a^2 + 1} (-a \cos t \mathbf{i} - a \sin t \mathbf{j})$$

Como a curvatura  $K(t) = \|\mathbf{K}(t)\|$ , temos

$$K(t) = \frac{a}{a^2 + 1}$$

Assim, a curvatura da hélice circular é constante. De (7),

$$\mathbf{N}(t) = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$$

Aplicando (8), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (-a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (\sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + a \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Um estudo geral de curvas e superfícies usando o Cálculo é dado num curso de Geometria Diferencial. O uso de Cálculo de Vetores enriquece esse assunto. A discussão anterior é apenas uma breve introdução.

Vamos considerar agora, resumidamente, o movimento de uma partícula ao longo de uma curva no espaço tridimensional. Se o parâmetro  $t$  na equação vetorial

$$\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k} \quad (9)$$

medir o tempo, então a posição em  $t$  de uma partícula que se move ao longo da curva  $C$ , tendo equação vetorial (9), será o ponto  $P(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ . O vetor velocidade,  $\mathbf{V}(t)$ , e o vetor aceleração,  $\mathbf{A}(t)$ , são definidos como no plano. O vetor  $\mathbf{R}(t)$  é chamado vetor posição e

$$\mathbf{V}(t) = D_t \mathbf{R}(t) \quad \mathbf{A}(t) = D_t \mathbf{V}(t)$$

A velocidade escalar de uma partícula em  $t$  é o módulo do vetor velocidade. Como  $\|D_t \mathbf{R}(t)\| = ds/dt$

$$\|\mathbf{V}(t)\| = \frac{ds}{dt}$$

**EXEMPLO 3** Uma partícula está se movendo ao longo de uma curva com equações paramétricas

$$x = 3t \quad y = t^2 \quad z = \frac{2}{3}t^3$$

Ache os vetores velocidade e aceleração e a velocidade escalar da partícula em  $t = 1$ . Faça um esboço de parte da curva em  $t = 1$  e trace representações dos vetores velocidade e aceleração em  $t = 1$ .

**Solução** Uma equação vetorial da curva é dada por

$$\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= D_t \mathbf{R}(t) & \mathbf{A}(t) &= D_t \mathbf{V}(t) \\ &= 3\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k} & &= 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{9 + 4t^2 + 4t^4}$$

Assim,

$$\mathbf{V}(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \mathbf{A}(1) = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \quad \|\mathbf{V}(1)\| = \sqrt{17}$$

O esboço pedido está na Figura 6.

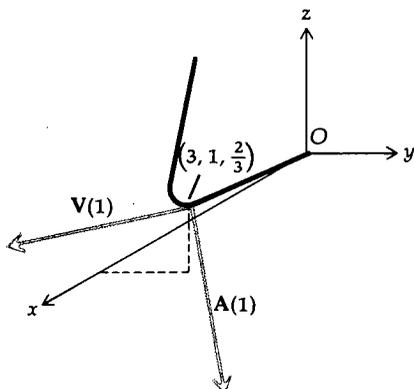


FIGURA 6

### EXERCÍCIOS 15.8

Nos Exercícios de 1 a 5, ache o vetor tangente unitário para a curva tendo a equação vetorial dada.

1.  $\mathbf{R}(t) = (t + 1)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (1 - 2t)\mathbf{k}$
2.  $\mathbf{R}(t) = \sin 2t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$
3.  $\mathbf{R}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$
4.  $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t + \frac{1}{3}t^3)\mathbf{j} + (t - \frac{1}{3}t^3)\mathbf{k}$
5.  $\mathbf{R}(t) = 2t \cos t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 2t \sin t\mathbf{k}$

6. Ache o vetor tangente unitário à curva tendo equação vetorial  $\mathbf{R}(t) = 4 \cosh 2t\mathbf{i} + 4 \sinh 2t\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$  no ponto onde  $t = 0$ .

Nos Exercícios de 7 a 11, ache o comprimento de arco da curva de  $t_1$  até  $t_2$ .

7. A curva do Exercício 1;  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = 2$ .
8. A curva do Exercício 2;  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 1$ .
9. A curva do Exercício 3;  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 3$ .
10. A curva do Exercício 4;  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 1$ .
11.  $\mathbf{R}(t) = 4t^{3/2}\mathbf{i} - 3 \sin t\mathbf{j} + 3 \cos t\mathbf{k}$ ;  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 2$ .
12. Prove que o vetor tangente unitário da hélice circular do Exemplo 1 faz um ângulo constante com o vetor unitário  $\mathbf{k}$ .
13. Prove o Teorema 15.8.2.
14. Prove o Teorema 15.8.3.
15. Escreva a equação vetorial da curva de intersecção das superfícies  $y = e^x$  e  $z = xy$ .

16. Escreva a equação vetorial da curva de intersecção das superfícies  $x = \ln(z^2 + 2)$  e  $y = xz^3$ .

17. Ache o co-seno do ângulo entre o vetor unitário  $\mathbf{j}$  e o vetor tangente unitário à curva  $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + 2 \sin 2t\mathbf{k}$  no ponto onde  $t = \pi$ .

18. Ache a curvatura em  $t = 1$  da curva  $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (4 + t)\mathbf{j} + (3 - 2t)\mathbf{k}$ .

19. Ache o triedro móvel e a curvatura no ponto onde  $t = 1$  da cúbica retorcida da Ilustração 2.

20. Ache o triedro móvel e a curvatura em um ponto qualquer da curva  $\mathbf{R}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \sinh t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ .

Nos Exercícios 21 a 24, ache o triedro móvel e a curvatura da curva dada em  $t = t_1$ , se existirem.

21. A curva do Exercício 1;  $t_1 = -1$ .
22. A curva do Exercício 2;  $t_1 = 0$ .
23. A curva do Exercício 3;  $t_1 = 0$ .
24. A curva do Exercício 4;  $t_1 = 1$ .

Nos Exercícios de 25 a 28, uma partícula move-se ao longo de uma curva dada. Ache o vetor velocidade, o vetor aceleração e a velocidade escalar em  $t = t_1$ . Faça um esboço da parte da curva em  $t = t_1$  e trace os vetores velocidade e aceleração.

25. A hélice circular do Exemplo 1;  $t_1 = \frac{1}{2}\pi$ .
26.  $x = t$ ,  $y = \frac{1}{2}t^2$ ,  $z = \frac{1}{3}t^3$ ;  $t_1 = 2$ .
27.  $x = e^{2t}$ ,  $y = e^{-2t}$ ,  $z = te^{2t}$ ;  $t_1 = 1$ .
28.  $x = \frac{1}{2}(t^2 + 1)^{-1}$ ,  $y = \ln(1 + t^2)$ ,  $z = \operatorname{tg}^{-1} t$ ;  $t_1 = 1$ .

29. Prove que se  $\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$  for a equação vetorial da curva  $C$  e  $K(t)$  for a curvatura de  $C$ , então

$$K(t) = \frac{\|D_t \mathbf{R}(t) \times D_t^2 \mathbf{R}(t)\|}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|^3}$$

30. Use a fórmula do Exercício 29 para mostrar que a curvatura da hélice circular do Exemplo 1 é  $a/(a^2 + 1)$ .

Nos Exercícios 31 e 32, ache a curvatura da curva dada no ponto indicado.

31.  $x = t, y = t^2, z = t^3$ ; na origem.

32.  $x = e^t, y = e^{-t}, z = t; t = 0$ .

33. Prove que se  $\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$  for uma equação vetorial da curva  $C$ ,  $K(t)$  for a curvatura de  $C$  no ponto  $P$  e  $s$  o comprimento de arco medido entre um ponto arbitrariamente escolhido em  $C$  até  $P$ , então  $D_s \mathbf{R}(t) \cdot D_s^2 \mathbf{R}(t) = -[K(t)]^2$ .

34. Umá partícula move-se ao longo de uma curva com equação vetorial  $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + \sinh 2t\mathbf{j} + \operatorname{sech} t\mathbf{k}$ . Prove que os vetores velocidade e aceleração são ortogonais entre si em  $t = 0$ .

35. Prove que se a velocidade escalar de uma partícula for constante, então os vetores velocidade e aceleração serão sempre ortogonais entre si.

36. Prove que a cúbica retorcida da Ilustração 2, se  $t \neq 0$ , nenhum par de vetores entre  $\mathbf{R}(t), \mathbf{V}(t)$  e  $\mathbf{A}(t)$  é ortogonal.

### 15.9 COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

A representação da **coordenada cilíndrica** de um ponto  $P$  é  $(r, \theta, z)$ , onde  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares da projeção de  $P$  em um plano polar e  $z$  é a distância orientada desse plano polar até  $P$ . Veja a Figura 1.

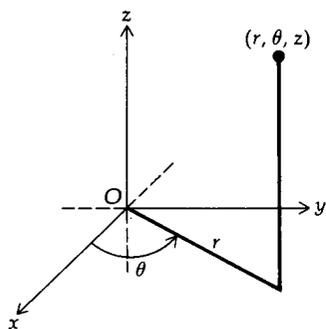


FIGURA 1

**EXEMPLO 1** Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes equações, onde  $c$  é uma constante: (a)  $r = c$ ; (b)  $\theta = c$ ; (c)  $z = c$ .

**Solução**

- (a) Para um ponto  $P(r, \theta, z)$  do gráfico de  $r = c$ ,  $\theta$  e  $z$  podem assumir quaisquer valores e  $r$  é uma constante. O gráfico é um cilindro circular reto, tendo  $|c|$  como raio e  $z$  como seu eixo. Um esboço do gráfico está na Figura 2.
- (b) Para todos os pontos  $P(r, \theta, z)$  do gráfico de  $\theta = c$ ,  $r$  e  $z$  podem assumir qualquer valor, enquanto que  $\theta$  permanece constante. O gráfico é um plano pelo eixo  $z$ . Veja a Figura 3 para um esboço do gráfico.
- (c) O gráfico de  $z = c$  é um plano paralelo ao plano polar e a uma distância orientada de  $c$  unidades. A Figura 4 mostra um esboço do gráfico.

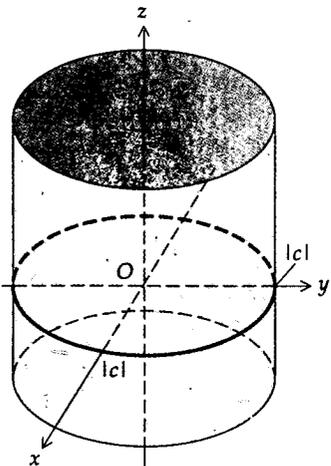


FIGURA 2

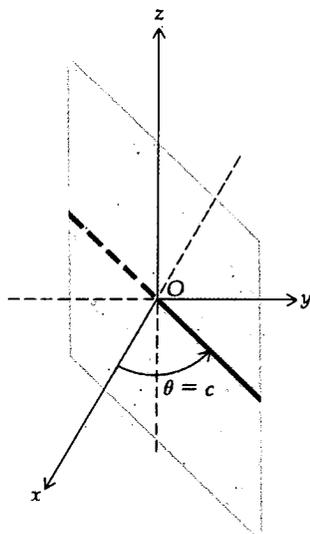


FIGURA 3

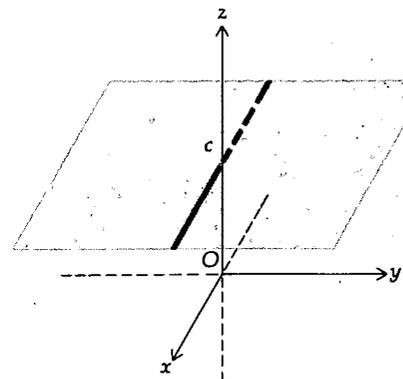


FIGURA 4

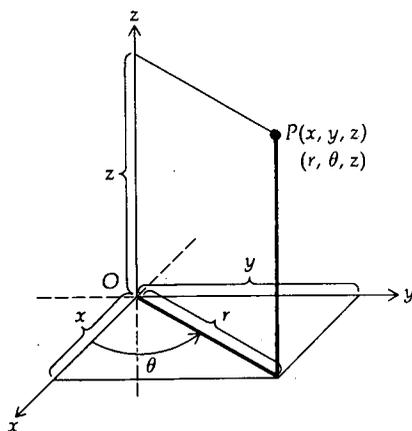


FIGURA 5

O nome “coordenadas cilíndricas” vem do fato de que o gráfico de  $r = c$  é um cilindro circular reto, como no Exemplo 1(a). Coordenadas cilíndricas são usadas em um problema físico quando há um eixo de simetria.

Suponha que sejam colocados um sistema de coordenadas cartesianas e um sistema de coordenadas cilíndricas tais que o plano  $xy$  seja o plano polar e o lado positivo do eixo  $x$  seja o eixo polar, conforme mostra a Figura 5. Então, o ponto  $P$  tem por coordenadas  $(x, y, z)$  e  $(r, \theta, z)$ , relacionadas pelas equações

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad (1)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad \text{se } x \neq 0 \quad z = z \quad (2)$$

**EXEMPLO 2** Ache uma equação em coordenadas cartesianas das seguintes superfícies, cujas equações estão expressas em coordenadas cilíndricas e identifique a superfície: (a)  $r = 6 \sin \theta$ ; (b)  $r(3 \cos \theta + 2 \sin \theta) + 6z = 0$ .

#### Solução

(a) Multiplicando ambos os lados da equação por  $r$ , obtemos  $r^2 = 6r \sin \theta$ .

Como  $r^2 = x^2 + y^2$  e  $r \sin \theta = y$ , então  $x^2 + y^2 = 6y$ . Essa equação pode ainda ser escrita como  $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ , mostrando que o seu gráfico é um cilindro circular reto cuja secção transversal no plano  $xy$  é a circunferência com centro em  $(0, 3)$  e raio 3.

(b) Substituindo  $r \cos \theta$  por  $x$  e  $r \sin \theta$  por  $y$ , obtemos a equação  $3x + 2y + 6z = 0$ . Assim, o gráfico é um plano passando pela origem e com  $\langle 3, 2, 6 \rangle$  como vetor normal.

**EXEMPLO 3** Ache uma equação em coordenadas cilíndricas para cada uma das seguintes superfícies, cujas equações são dadas em coordenadas cartesianas e identifique a superfície: (a)  $x^2 + y^2 = z$ ; (b)  $x^2 - y^2 = z$ .

#### Solução

(a) A equação é similar à equação (5) da Secção 15.7 sendo, portanto, o gráfico é um parabolóide elíptico. Se  $x^2 + y^2$  for substituído por  $r^2$ , a equação será  $r^2 = z$ .

(b) A equação é similar à (6) da Secção 15.7, se  $x$  for substituído por  $y$ . O gráfico é, portanto, um parabolóide hiperbólico, tendo  $z$  como eixo. Quando  $x$  for substituído por  $r \cos \theta$  e  $y$  por  $r \sin \theta$ , obtemos a equação  $r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = z$ ; uma vez que  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ , podemos escrever a equação como  $z = r^2 \cos 2\theta$ .

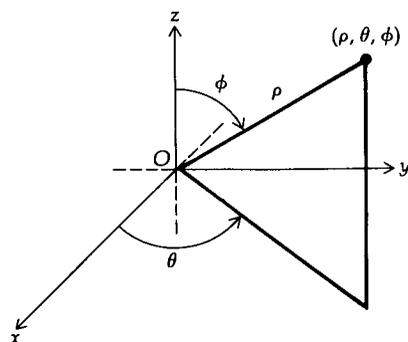


FIGURA 6

Num sistema de coordenadas esféricas há um plano polar e um eixo perpendicular ao plano polar, com a origem do eixo  $z$  na origem do plano polar. Um ponto é localizado por três números e a representação de um ponto  $P$  em **coordenadas esféricas** é  $(\rho, \theta, \phi)$ , onde  $\rho = |\overline{OP}|$ ,  $\theta$  é a medida em radianos do ângulo polar da projeção de  $P$  sobre o plano polar e  $\phi$  é a medida não-negativa em radianos do menor ângulo medido entre o lado positivo do eixo  $z$  e a reta  $OP$ . Veja a Figura 6. A origem tem como representação com coordenadas esféricas  $(0, \theta, \phi)$ , onde  $\theta$  e  $\phi$  podem ter qualquer valor. Se o ponto  $P(\rho, \theta, \phi)$  não for a origem, então  $\rho > 0$  e  $0 \leq \phi \leq \pi$ , onde  $\phi = 0$ , se  $P$  estiver no lado positivo do eixo  $z$ , e  $\phi = \pi$  se  $P$  estiver no lado negativo do eixo  $z$ .

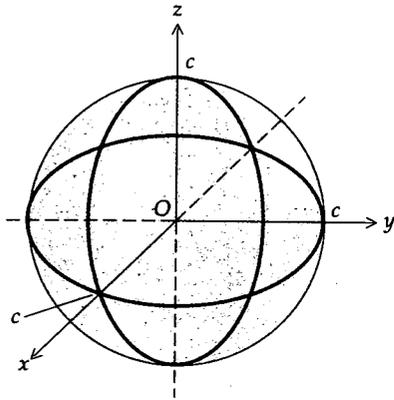


FIGURA 7

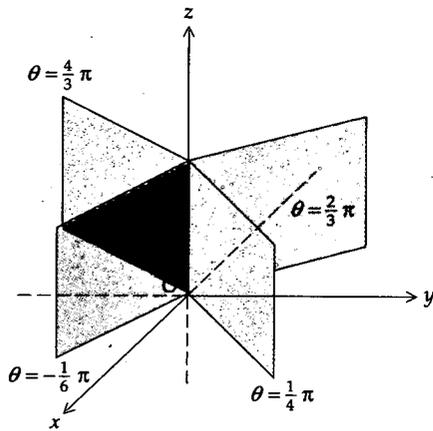


FIGURA 8

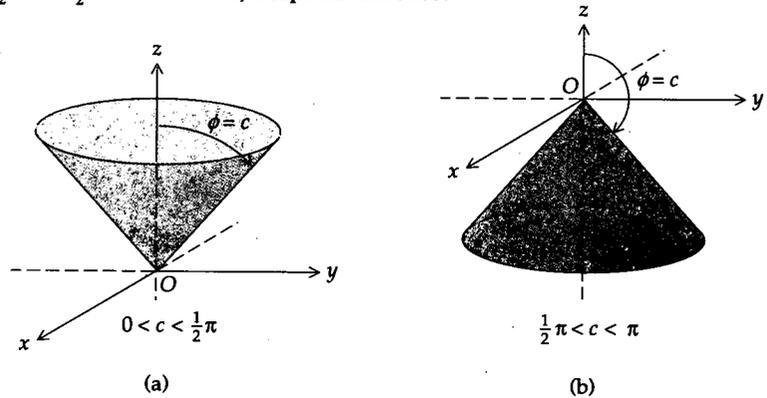


FIGURA 9

**EXEMPLO 4** Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes equações, onde  $c$  é uma constante: (a)  $\rho = c$  e  $c > 0$ ; (b)  $\theta = c$ ; (c)  $\phi = c$  e  $0 < c < \pi$ .

**Solução**

- (a) Todo ponto  $P(\rho, \theta, \phi)$  do gráfico de  $\rho = c$  tem o mesmo valor de  $\rho$ ,  $\theta$  pode ser qualquer número, e  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Segue que o gráfico é uma esfera de raio  $c$  e centro na origem. A Figura 7 mostra um esboço da esfera.
- (b) Para qualquer ponto  $P(\rho, \theta, \phi)$  no gráfico de  $\theta = c$ ,  $\rho$  pode ser qualquer número não-negativo e  $\phi$  qualquer número no intervalo fechado  $[0, \pi]$ , e  $\theta$  é constante. O gráfico é um semiplano contendo o eixo  $z$  e é obtido girando o semiplano  $x \geq 0$  do plano  $xz$  de um ângulo de  $c$  rad em torno do eixo  $z$ . A Figura 8 mostra esboços dos semiplanos para  $\theta = \frac{1}{4}\pi$ ,  $\theta = \frac{2}{3}\pi$ ,  $\theta = \frac{4}{3}\pi$  e  $\theta = -\frac{1}{6}\pi$ .
- (c) O gráfico de  $\phi = c$  contém todos os pontos  $P(\rho, \theta, \phi)$  para os quais  $\rho$  é qualquer número não-negativo,  $\theta$  é qualquer número e  $\phi$  é a constante  $c$ . O gráfico é a metade de um cone, tendo seu vértice na origem e o eixo  $z$  como eixo. A Figura 9 (a) e (b) mostra esboços do meio cone para  $0 < c < \frac{1}{2}\pi$  e  $\frac{1}{2}\pi < c < \pi$ , respectivamente.

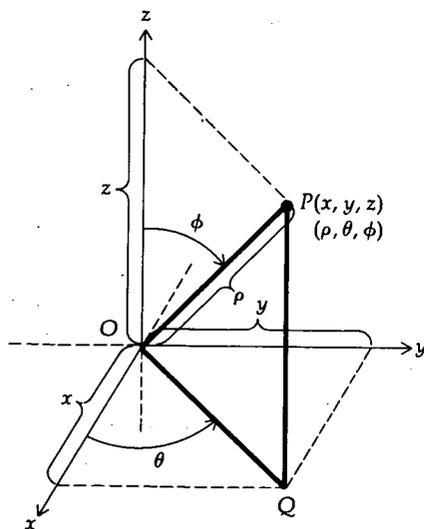


FIGURA 10

Como o gráfico de  $\rho = c$  é uma esfera, conforme foi visto no Exemplo 4 (a), temos o nome “coordenadas esféricas”. Em problemas físicos, onde existe um ponto de simetria, as coordenadas esféricas são frequentemente utilizadas.

Colocando juntos um sistema de coordenadas esféricas e um sistema de coordenadas cartesianas, conforme mostra a Figura 10, obtemos relações entre os dois tipos de coordenadas de um ponto  $P$  através de

$$x = |\overline{OQ}| \cos \theta \quad y = |\overline{OQ}| \sin \theta \quad z = |\overline{QP}|$$

Como  $|\overline{OQ}| = \rho \sin \phi$  e  $|\overline{QP}| = \rho \cos \phi$ , essas equações tornam-se

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi \tag{3}$$

Elevando ao quadrado cada uma das relações em (3) e somando

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \rho^2 \cos^2 \phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

**EXEMPLO 5** Ache uma equação em coordenadas cartesianas das seguintes superfícies, cujas equações estão expressas em coordenadas esféricas, e identifique a superfície: (a)  $\rho \cos \phi = 4$ ; (b)  $\rho \sin \phi = 4$ .

**Solução**

(a) Como  $z = \rho \cos \phi$ , a equação torna-se  $z = 4$ . Logo, o gráfico é um plano paralelo ao plano  $xy$  e 4 unidades acima dele.

(b) Para coordenadas esféricas  $\rho \geq 0$  e  $\sin \phi \geq 0$  (pois  $0 \leq \phi \leq \pi$ ); logo, elevando ao quadrado ambos os lados da equação dada, obtemos a equação equivalente  $\rho^2 \sin^2 \phi = 16$  a qual, por sua vez, equivale a

$$\begin{aligned}\rho^2(1 - \cos^2 \phi) &= 16 \\ \rho^2 - \rho^2 \cos^2 \phi &= 16\end{aligned}$$

Substituindo  $\rho^2$  por  $x^2 + y^2 + z^2$  e  $\rho \cos \phi$  por  $z$ , obtemos

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 - z^2 &= 16 \\ x^2 + y^2 &= 16\end{aligned}$$

Logo, o gráfico é o cilindro circular reto tendo o eixo  $z$  como seu eixo e raio 4.

**EXEMPLO 6** Ache uma equação em coordenadas esféricas para (a) o parabolóide elíptico do Exemplo 3(a); (b) o plano do Exemplo 2(b).

**Solução**

(a) Uma equação cartesiana do parabolóide elíptico do Exemplo 3(a) é  $x^2 + y^2 = z$ . Substituindo  $x$  por  $\rho \sin \phi \cos \theta$ ,  $y$  por  $\rho \sin \phi \sin \theta$  e  $z$  por  $\rho \cos \phi$ , obtemos

$$\begin{aligned}\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta &= \rho \cos \phi \\ \rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) &= \rho \cos \phi\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\rho = 0 \text{ e } \rho \sin^2 \phi = \cos \phi$$

A origem é o único ponto cujas coordenadas satisfazem  $\rho = 0$ . Como a origem  $(0, \theta, \frac{1}{2}\pi)$  está em  $\rho \sin^2 \phi = \cos \phi$ , descartamos a equação  $\rho = 0$ . Além disso,  $\sin \phi \neq 0$  pois não existe valor de  $\phi$  para o qual ambos  $\sin \phi$  e  $\cos \phi$  são nulos. Logo, a equação  $\rho \sin^2 \phi = \cos \phi$  pode ser escrita como  $\rho = \operatorname{cosec}^2 \phi \cos \phi$  ou, equivalentemente,  $\rho = \operatorname{cosec} \phi \cotg \phi$ .

(b) Uma equação cartesiana do plano do Exemplo 2(b) é  $3x + 2y + 6z = 0$ . Usando as relações (3), essa equação se torna

$$3\rho \sin \phi \cos \phi + 2\rho \sin \phi \sin \theta + 6\rho \cos \phi = 0$$

**EXERCÍCIOS 15.9**

- Ache as coordenadas cartesianas de um ponto com as coordenadas cilíndricas dadas: (a)  $(3, \frac{1}{2}\pi, 5)$ ; (b)  $(7, \frac{2}{3}\pi, -4)$ ; (c)  $(1, 1, 1)$
- Ache as coordenadas cilíndricas do ponto com as coordenadas cartesianas dadas: (a)  $(4, 4 - 2)$ ; (b)  $(-3\sqrt{3}, 3, 6)$ ; (c)  $(1, 1, 1)$ .
- Ache as coordenadas cartesianas do ponto cujas coordenadas esféricas são: (a)  $(4, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ ; (b)  $(4, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ ; (c)  $(\sqrt{6}, \frac{1}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi)$ .
- Ache um conjunto de coordenadas esféricas do ponto cujas coordenadas cartesianas são: (a)  $(1, -1, -\sqrt{2})$ ; (b)  $(-1, \sqrt{3}, 2)$ ; (c)  $(2, 2, 2)$ .

5. Ache um conjunto de coordenadas cilíndricas do ponto cujas coordenadas esféricas são: (a)  $(4, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ ; (b)  $(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi)$ ; (c)  $(2\sqrt{3}, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ .
6. Ache um conjunto de coordenadas esféricas do ponto cujas coordenadas cilíndricas são: (a)  $(3, \frac{1}{6}\pi, 3)$ ; (b)  $(3, \frac{1}{2}\pi, 2)$ ; (c)  $(2, \frac{5}{6}\pi, -4)$ .

Nos Exercícios de 7 a 12, encontre uma equação em coordenadas cilíndricas da superfície dada e identifique a superfície.

7.  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$       8.  $x^2 - y^2 = 9$   
 9.  $x^2 + y^2 = 3z$       10.  $9x^2 + 4y^2 = 36$   
 11.  $x^2 - y^2 = 3z^2$       12.  $x^2 + y^2 = z^2$

Nos Exercícios de 13 a 17, encontre uma equação em coordenadas esféricas da superfície dada e identifique a superfície.

13.  $x^2 + y^2 + z^2 - 9z = 0$       14.  $x^2 + y^2 = z^2$   
 15.  $x^2 + y^2 = 9$       16.  $x^2 + y^2 = 2z$   
 17.  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$

Nos Exercícios de 18 a 22, encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação é dada em coordenadas cilíndricas. Nos Exercícios 18 e 19, identifique a superfície.

18.  $r = 3 \cos \theta$       19. (a)  $r = 4$ ; (b)  $\theta = \frac{1}{4}\pi$   
 20.  $r = 3 + 2 \cos \theta$       21.  $r^2 \cos 2\theta = z^3$       22.  $z^2 \sin^3 \theta = r^3$

Nos Exercícios de 23 a 28, encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação é dada em coordenadas esféricas. Nos Exercícios de 23 a 25, identifique a superfície.

23. (a)  $\rho = 9$ ; (b)  $\theta = \frac{1}{4}\pi$ ; (c)  $\phi = \frac{1}{4}\pi$

24.  $\rho = 9 \sec \phi$       25.  $\rho = 6 \operatorname{cosec} \phi$   
 26.  $\rho = 3 \cos \phi$       27.  $\rho = 2 \operatorname{tg} \theta$   
 28.  $\rho = 6 \sin \phi \sin \theta + 3 \cos \phi$

29. A curva  $C$  em  $R^3$  tem as seguintes equações paramétricas em coordenadas cilíndricas:  $r = F_1(t)$ ,  $\theta = F_2(t)$ ,  $z = F_3(t)$ . Use a fórmula (3) da Seção 15.8 e as fórmulas (1) desta seção para provar que se  $L$  for o comprimento de arco da curva  $C$ , do ponto onde  $t = a$  até o ponto onde  $t = b$ , então

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

30. A curva  $C$  em  $R^3$  tem as seguintes equações paramétricas em coordenadas esféricas:  $\rho = G_1(t)$ ,  $\theta = G_2(t)$ ,  $\phi = G_3(t)$ . Use a fórmula (3) da Seção 15.8 e as fórmulas (3) desta seção para provar que se  $L$  unidades for o comprimento de arco da curva  $C$  do ponto onde  $t = a$  até o ponto onde  $t = b$ , então

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \sin^2 \phi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2} dt$$

31. (a) Mostre que as equações paramétricas da hélice circular do Exemplo 1, Seção 15.8, são  $r = a$ ,  $\theta = t$ ,  $z = t$ . (b) Use a fórmula do Exercício 29 para encontrar o comprimento de arco da hélice circular da parte (a), de  $t = 0$  a  $t = 2\pi$ . Teste o seu resultado com o do Exemplo 1, Seção 15.8.

32. Uma hélice cônica enrola-se num cone, da mesma forma que uma hélice circular enrola-se num cilindro. Use a fórmula do Exercício 30 para encontrar o comprimento de arco de  $t = 0$  a  $t = 2\pi$  da hélice cônica, tendo equações paramétricas  $\rho = t$ ,  $\theta = t$ ,  $\phi = \frac{1}{4}\pi$ .

## EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 15

1. Faça um esboço do gráfico de  $x = 3$  em  $R$ ,  $R^2$  e  $R^3$ .  
 2. Faça um esboço do conjunto de pontos que satisfazem simultaneamente as equações  $x = 6$  e  $y = 3$  em  $R^2$  e  $R^3$ .

Nos Exercícios de 3 a 12, descreva em palavras o conjunto de pontos em  $R^3$  que satisfazem a equação ou o par de equações dadas. Faça um esboço do gráfico.

3.  $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$       4.  $\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$       5.  $\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$   
 6.  $y^2 - z^2 = 0$       7.  $x = y$   
 8.  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$       9.  $x^2 + y^2 = 9z$   
 10.  $x^2 + y^2 = z^2$       11.  $x^2 - y^2 = z^2$       12.  $x^2 + z^2 = 4$

Nos Exercícios de 13 a 22,  $\mathbf{A} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{D} = 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$  e  $\mathbf{E} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ .

13. Ache  $6\mathbf{C} + 4\mathbf{D} - \mathbf{E}$ .      14. Ache  $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C}$ .  
 15. Ache  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ .      16. Ache  $(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) - (\mathbf{D} \times \mathbf{E})$ .  
 17. Ache  $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| \|\mathbf{D} \times \mathbf{E}\|$       18. Ache  $2\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + 3\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$   
 19. Ache a projeção escalar de  $\mathbf{A}$  em  $\mathbf{B}$ .  
 20. Ache a projeção escalar de  $\mathbf{C}$  em  $\mathbf{D}$ .  
 21. Ache o vetor projeção de  $\mathbf{E}$  em  $\mathbf{C}$ .  
 22. Ache o vetor projeção de  $\mathbf{D}$  em  $\mathbf{E}$ .

Nos Exercícios de 23 a 28, há somente uma maneira de obter uma expressão com sentido, inserindo-se parênteses. Faça isto e ache o vetor ou o escalar indicados se  $\mathbf{A} = (3, -2, 4)$ ,  $\mathbf{B} = (-5, 7, 2)$  e  $\mathbf{C} = (4, 6, -1)$ .

23.  $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{C}$       24.  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{BC}$   
 25.  $\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$       26.  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C}$   
 27.  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}$       28.  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A}$

29. Uma reta é traçada pelo ponto  $(-3, 5, 1)$  e é perpendicular ao plano  $xz$ . Ache as coordenadas dos pontos dessa reta a uma distância de 13 unidades de  $(-2, 0, 0)$ .  
 30. Ache uma equação da esfera tendo como diâmetro o segmento de reta cujos extremos são os pontos  $(3, 5, -4)$  e  $(-1, 7, 4)$ .  
 31. Ache uma equação da esfera concêntrica com a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 6z + 10 = 0$  e contendo o ponto  $(-4, 2, 5)$ .  
 32. Prove que os pontos  $(4, 1, -1)$ ,  $(2, 0, 1)$  e  $(4, 3, 0)$  são vértices de um triângulo retângulo e ache a área do triângulo.  
 33. Ache a curva geradora e o eixo da superfície de revolução cuja equação é  $x^2 + z^2 = e^{4y}$ .  
 34. Ache a equação de uma superfície de revolução gerada com a rotação da elipse  $9x^2 + 4z^2 = 36$  no plano  $xz$ , em torno do eixo  $x$ . Faça um esboço da superfície.

35. Determine o valor de  $c$  de tal forma que os vetores  $3i + cj - 3k$  e  $5i - 4j + k$  sejam ortogonais.
36. Mostre que há representações de três vetores  $\mathbf{A} = 5i + j - 3k$ ,  $\mathbf{B} = i + 3j - 2k$  e  $\mathbf{C} = -4i + 2j + k$ , as quais formam um triângulo.
37. Dados os pontos  $A(5, 9, -3)$  e  $B(-2, 4, -5)$ , ache (a) os co-senos diretores de  $\mathbf{V}(\overline{AB})$  e (b) o vetor unitário tendo a mesma direção que  $\mathbf{V}(\overline{AB})$ .
38. Se  $\mathbf{A} = i + j - k$ ,  $\mathbf{B} = 2i - j + k$ ,  $\mathbf{C} = 3i - 2j + 4k$  e  $\mathbf{D} = 5i + 6j - 8k$ , ache escalares  $a$ ,  $b$ , e  $c$  tais que  $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \mathbf{D}$ .
39. Se  $\mathbf{A} = (7, -1, 5)$  e  $\mathbf{B} = (-2, 3, 1)$ , ache (a) a projeção escalar de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$  e (b) o vetor projeção de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$ .
40. Ache uma equação do plano que contém os pontos  $(1, 7, -3)$  e  $(3, 1, 2)$  e que não intercepta o eixo  $x$ .
41. Ache uma equação do plano que passa pelos pontos  $(-1, 2, 1)$ ,  $(1, 4, 0)$  e  $(1, -1, 3)$  por dois métodos: (a) usando o produto vetorial; (b) sem usar o produto vetorial.
42. Ache uma equação do plano que contém o ponto  $(7, -2, -5)$  e é perpendicular à reta que passa pelos pontos  $(-3, 0, 4)$  e  $(3, 2, 1)$ .
43. Ache a distância da origem ao plano que passa pelo ponto  $(-6, 3, -2)$  e tem  $5i - 3j + 4k$  como vetor normal.
44. Ache dois vetores ortogonais a  $i - 3j + 4k$  e cujas representações são paralelas ao plano  $yz$ .
45. Ache a distância do ponto  $P(4, 6, -4)$  à reta que passa pelos pontos  $A(2, 2, 1)$  e  $B(4, 3, -1)$ .
46. Ache a distância entre o plano  $9x - 2y + 6z + 44 = 0$  e o ponto  $(-3, 2, 0)$ .
47. Se  $\theta$  for o ângulo entre os vetores  $\mathbf{A} = 2i + j + k$  e  $\mathbf{B} = 4i - 3j + 5k$ , ache  $\cos \theta$  de duas maneiras: (a) usando o produto escalar; (b) usando o produto vetorial e uma identidade trigonométrica.
48. Prove que as retas
- $$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{2} \text{ e } \frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-5}{1}$$
- são reversas e ache a distância entre elas.
49. Ache as equações simétrica e paramétrica da reta que passa pela origem e é perpendicular a cada uma das retas do Exercício 48.
50. Ache as equações simétrica e paramétrica da reta que passa pelos pontos  $(-3, 5, 2)$  e  $(-1, -3, 4)$ .
51. Mostre que as retas
- $$\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{4} \text{ e } \frac{x+1}{-6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-8}$$
- são coincidentes.
52. Ache uma equação do plano que contém a reta
- $$\frac{1}{2}(x-3) = -(y+5) = \frac{1}{3}(z+2)$$
- e o ponto  $(5, 0, -4)$ .
53. Ache a área da secção transversal do elipsóide
- $$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$
- no plano  $z = 4$ .
54. Ache a área do paralelogramo tal que dois de seus lados sejam as representações posicionais dos vetores  $2j - 3k$  e  $5i + 4k$ .
55. Ache o volume do paralelepípedo tendo vértices em  $(1, 3, 0)$ ,  $(2, -1, 3)$ ,  $(-2, 2, -1)$  e  $(-1, 1, 2)$ .
56. Ache o comprimento de arco da curva
- $$x = t \cos t \quad y = t \sin t \quad z = t$$
- de  $t = 0$  a  $t = \frac{1}{2}\pi$ .
57. Ache o comprimento de arco da curva
- $$\mathbf{R}(t) = (2 - 3t)\mathbf{i} + (4t - 1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$
- de  $t = 0$  a  $t = \frac{5}{2}$ .
58. Uma partícula move-se ao longo da curva com equações paramétricas
- $$x = \ln(t^2 + 1) \quad y = t^2 + 1 \quad z = \operatorname{tg}^{-1} t.$$
- Ache o vetor velocidade, o vetor aceleração e a velocidade escalar em  $t = 0$ .
59. Uma partícula move-se ao longo da curva do Exercício 56. Ache o vetor velocidade, o vetor aceleração e a velocidade escalar em  $t = \frac{1}{2}\pi$ . Faça um esboço da parte da curva em  $t = \frac{1}{2}\pi$  e trace em  $t$  as representações dos vetores velocidade e aceleração.
60. Ache o vetor tangente unitário e a curvatura em qualquer ponto da curva cuja equação vetorial é
- $$\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$
61. Ache o triedro móvel da curva
- $$\mathbf{R}(t) = 3 \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} - 3 \cos 2t\mathbf{k}$$
- no ponto onde  $t = \frac{1}{2}\pi$ .
62. Ache as coordenadas esféricas para o ponto cujas coordenadas cartesianas são  $(-3, \sqrt{3}, 2)$ .
63. Ache um conjunto de coordenadas cilíndricas para o ponto cujas coordenadas esféricas são  $(3, \pi, \frac{1}{3}\pi)$ .
64. Ache uma equação em coordenadas esféricas do gráfico de cada uma das equações: (a)  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ ; (b)  $4x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36$ .
65. Ache uma equação em coordenadas cilíndricas do gráfico de cada uma das equações: (a)  $(x + y)^2 + 1 = z$ ; (b)  $25x^2 + 4y^2 = 100$ .
66. Se  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{W}$  são três funções com valores vetoriais cujas derivadas em relação a  $t$  existem, prove que
- $$D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) \times \mathbf{W}(t)] = D_t\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) \times \mathbf{W}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot D_t\mathbf{Q}(t) \times \mathbf{W}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) \times D_t\mathbf{W}(t)$$
67. Se  $\mathbf{A}$  for um vetor qualquer, prove que
- $$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

# DEZESSEIS

## Cálculo Diferencial de Funções de mais de uma Variável

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{du}{dn} = \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dn}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dn}\right)$$

Na Secção 16.1 aplicamos o conceito de função a uma *função de  $n$  variáveis* e nas duas secções seguintes aplicamos à função de  $n$  variáveis os conceitos de *limite e continuidade*. A maior parte de nossa discussão restringe-se a funções de duas e três variáveis; no entanto, apresentamos as definições para funções de  $n$  variáveis e então mostramos as aplicações dessas definições a funções de duas e três variáveis. Também mostramos que quando cada uma dessas definições é aplicada a uma função de uma variável, temos a definição previamente dada.

Nosso tratamento de diferenciação de funções de várias variáveis começa na Secção 16.4, onde definimos as *derivadas parciais* de tal função. Então, na Secção 16.5, discutimos a *diferenciabilidade* dessas funções, bem como a *diferen-*

*cial total.* A versão da *regra da cadeia* com várias variáveis é apresentada na Secção 16.6, e as derivadas parciais de ordem superior são tratadas na Secção 16.7. As aplicações de diferenciação neste capítulo destinam-se a determinar taxas de variação e a calcular aproximações. Concluimos o capítulo com a Secção Suplementar 16.8, envolvendo a prova de um teorema, dando condições suficientes para a diferenciabilidade de uma função de duas variáveis.

## 16.1 FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

Vamos agora estender o conceito de função a funções de mais de uma variável independente. Tais funções ocorrem frequentemente em situações práticas. Por exemplo, a área aproximada da superfície do corpo de uma pessoa depende do seu peso e altura. O volume de um cilindro circular reto depende de seu raio e altura. De acordo com a lei do gás ideal, o volume ocupado por um gás confinado é diretamente proporcional à sua temperatura e inversamente proporcional à sua pressão. O custo de um determinado produto pode depender do custo do trabalho, preço de materiais e despesas gerais.

Para ampliar o conceito de função a funções de um número qualquer de variáveis, precisamos primeiro considerar pontos num espaço numérico  $n$ -dimensional. Da mesma forma que denotamos um ponto em  $R$  por um número real  $x$ , um ponto em  $R^2$  por um par ordenado de números reais  $(x, y)$  e um ponto em  $R^3$  por uma tripla ordenada de números reais  $(x, y, z)$ , um ponto no espaço numérico  $n$ -dimensional,  $R^n$ , é representado por uma ênupla de números reais, sendo comumente denotado por  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Em particular, se  $n = 1$ ,  $P = x$ ; se  $n = 2$ ,  $P = (x, y)$ ; se  $n = 3$ ,  $P = (x, y, z)$ , se  $n = 6$ ,  $P = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ .

### 16.1.1 DEFINIÇÃO

O conjunto de todas as ênuplas de números reais é chamado de **espaço numérico  $n$ -dimensional**, sendo denotado por  $R^n$ . Cada ênupla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é chamada de **ponto** no espaço numérico  $n$ -dimensional.

### 16.1.2 DEFINIÇÃO

Uma **função de  $n$  variáveis** é um conjunto de pares ordenados  $(P, w)$ , onde dois pares distintos não podem ter os primeiros elementos iguais\*.  $P$  é um ponto no espaço  $n$ -dimensional numérico e  $w$  é um número real. O conjunto de todos os valores possíveis de  $P$  é chamado de **domínio** da função, enquanto que o conjunto de todos os valores possíveis de  $w$  é chamado de **imagem** da função.

Dessa definição, o domínio de uma função de  $n$  variáveis é um conjunto de pontos em  $R^n$  e a imagem é um conjunto de números reais ou, equivalentemente, um conjunto de pontos em  $R$ . Quando  $n = 1$ , temos uma função de uma variável; assim, o domínio é um conjunto de pontos em  $R$  ou, equivalentemente, um conjunto de números reais e a imagem também é um conjunto de números reais. Assim, a Definição 1.4.1 é um caso particular de Definição 16.1.2. Se  $n = 2$ , temos uma função de duas variáveis e o domínio é um conjunto de pontos em  $R^2$  ou, equivalentemente, de pares ordenados de números reais  $(x, y)$ .

► **ILUSTRAÇÃO 1** Seja  $f$  a função de  $x$  e  $y$  dada pelos pares ordenados  $(P, z)$ , tal que

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

\* N. do R.: Isso significa que se  $(P, w_1)$  e  $(P, w_2)$  são dois pares de uma função, então  $w_1 = w_2$ , ou seja, em cada ponto  $P$  ela pode ter apenas um único valor correspondente,  $w_1 = w_2$ .

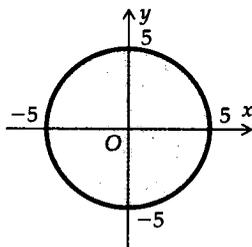


FIGURA 1

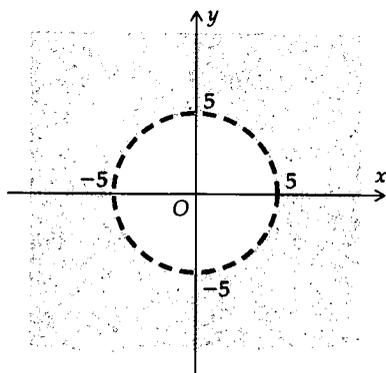


FIGURA 2

O domínio de  $f$  é o conjunto  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ . Esse conjunto consiste nos pontos do plano  $xy$  sobre a circunferência  $x^2 + y^2 = 25$  e no interior da região limitada pela circunferência. Na Figura 1 há um esboço do conjunto de pontos no domínio de  $f$ , mostrado como uma região sombreada em  $R^2$ .

Como  $z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$ , então  $0 \leq z \leq 5$ ; assim a imagem de  $f$  é o conjunto de todos os números reais no intervalo fechado  $[0, 5]$ . ◀

► **ILUSTRAÇÃO 2** A função  $g$  de duas variáveis  $x$  e  $y$  é o conjunto dos pares ordenados da forma  $(P, z)$ , para os quais temos

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$$

O domínio de  $g$  é o conjunto  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 25\}$ . Esse é o conjunto dos pontos que estão na região exterior limitada pela circunferência  $x^2 + y^2 = 25$ . Um esboço mostrando o domínio de  $g$  como uma região sombreada está na Figura 2. ◀

Se  $f$  for uma função de  $n$  variáveis, então, de acordo com a Definição 16.1.2,  $f$  será um conjunto de pares ordenados da forma  $(P, w)$ , onde  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é um ponto em  $R^n$  e  $w$ , um número real. O valor particular de  $w$  que corresponde a um ponto  $P$  é denotado pelo símbolo  $f(P)$  ou  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Especificamente, se  $n = 2$  e  $P = (x, y)$ , podemos representar o valor funcional por  $f(P)$  ou  $f(x, y)$ . Analogicamente, se  $n = 3$  e  $P = (x, y, z)$ , denotamos o valor funcional por  $f(P)$  ou  $f(x, y, z)$ . Note que se  $n = 1$ ,  $P = x$ ; logo, se  $f$  for uma função de uma variável,  $f(P) = f(x)$ . Assim sendo, essa notação é compatível com a notação de funções de uma variável.

Uma função  $f$  de  $n$  variáveis pode ser definida pela equação

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

As variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são chamadas de *variáveis independentes*, enquanto que  $w$  é denominada *variável dependente*.

► **ILUSTRAÇÃO 3** Seja  $f$  a função da Ilustração 1; isto é,

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Então,

$$\begin{aligned} f(3, -4) &= \sqrt{25 - 3^2 - (-4)^2} & f(-2, 1) &= \sqrt{25 - (-2)^2 - 1^2} \\ &= \sqrt{25 - 9 - 16} & &= \sqrt{25 - 4 - 1} \\ &= 0 & &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(u, 3v) &= \sqrt{25 - u^2 - (3v)^2} \\ &= \sqrt{25 - u^2 - 9v^2} \end{aligned}$$

**EXEMPLO 1** A função  $g$  está definida por

$$g(x, y, z) = x^3 - 4yz^2$$

Ache: (a)  $g(1, 3, -2)$ ; (b)  $g(2a, -4b, 3c)$ ; (c)  $g(x^2, y^2, z^2)$ ; (d)  $g(y, z, -x)$ .

**Solução**

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad g(1, 3, -2) &= 1^3 - 4(3)(-2)^2 & \text{(b)} \quad g(2a, -4b, 3c) &= (2a)^3 - 4(-4b)(3c)^2 \\ &= 1 - 48 & &= 8a^3 + 144bc^2 \\ &= -47 \end{aligned}$$

$$(c) \begin{aligned} g(x^2, y^2, z^2) &= (x^2)^3 - 4y^2(z^2)^2 \\ &= x^6 - 4y^2z^4 \end{aligned} \quad (d) \begin{aligned} g(y, z, -x) &= y^3 - 4z(-x)^2 \\ &= y^3 - 4x^2z \end{aligned}$$

## 16.1.3 DEFINIÇÃO

Se  $f$  for uma função com uma única variável e  $g$  uma função de duas variáveis, então a **função composta**  $f \circ g$  será a função de duas variáveis definida por

$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

e o domínio de  $f \circ g$  será o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$  no domínio de  $g$  para os quais  $g(x, y)$  está no domínio de  $f$ .

**EXEMPLO 2** Dada  $f(t) = \ln t$  e  $g(x, y) = x^2 + y$ , ache  $h(x, y)$  se  $h = f \circ g$ , e determine o domínio de  $h$ .

**Solução**

$$\begin{aligned} h(x, y) &= (f \circ g)(x, y) \\ &= f(g(x, y)) \\ &= f(x^2 + y) \\ &= \ln(x^2 + y) \end{aligned}$$

O domínio de  $g$  é o conjunto de todos os pontos em  $R^2$ , e o domínio de  $f$  é  $(0, +\infty)$ . Logo, o domínio de  $h$  é o conjunto  $\{(x, y) \mid x^2 + y > 0\}$ .

A Definição 16.1.3 pode ser estendida à função composta de  $n$  variáveis, pela definição a seguir.

## 16.1.4 DEFINIÇÃO

Se  $f$  for uma função de uma única variável e  $g$  for uma função de  $n$  variáveis, então a **função composta**  $f \circ g$  será a função de  $n$  variáveis definida por

$$(f \circ g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(g(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

e o domínio de  $f \circ g$  será o conjunto de todos os pontos  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  no domínio de  $g$  para os quais  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  está no domínio de  $f$ .

**EXEMPLO 3** Dada a função  $F(x) = \sin^{-1}x$  e  $G(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$ , ache a função  $F \circ G$  e seu domínio.

**Solução**

$$\begin{aligned} (F \circ G)(x, y, z) &= F(G(x, y, z)) \\ &= F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}) \\ &= \sin^{-1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4} \end{aligned}$$

O domínio de  $G$  é o conjunto  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - 4 \geq 0\}$  e o domínio de  $F$  é  $[-1, 1]$ . Assim, o domínio de  $F \circ G$  é o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  em  $R^3$ , para os quais  $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 4 \leq 1$  ou, equivalentemente,  $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 5$ .

Uma **função polinomial** de duas variáveis  $x$  e  $y$  é uma função  $f$  tal que  $f(x, y)$  seja a soma de termos da forma  $cx^ny^m$ , onde  $c$  é um número real e  $m$  e  $n$  são inteiros não-negativos. O **grau** da função polinomial é determinado pela maior soma,  $n + m$ , dos expoentes de  $x$  e  $y$  dos termos em que  $c \neq 0$ .

► **ILUSTRAÇÃO 4** (a) A função  $f$  definida por

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2y^2 - y^3$$

é uma função polinomial de grau 4, pois o termo de mais alto grau é  $2x^2y^2$ .

(b) Se

$$g(x, y) = 6x^3y^2 - 5xy^3 + 7x^2y - 2x^2 + y + 4$$

$g$  é uma função polinomial de grau 5. ◀

O gráfico de uma função  $f$  de uma única variável consiste no conjunto de pontos  $(x, y)$  em  $R^2$  para os quais  $y = f(x)$ . Analogamente, o gráfico de uma função de duas variáveis é um conjunto de pontos em  $R^3$ .

### 16.1.5 DEFINIÇÃO

Se  $f$  for uma função de duas variáveis, então o **gráfico** de  $f$  será o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  em  $R^3$  para os quais  $(x, y)$  é um ponto no domínio de  $f$  e  $z = f(x, y)$ .

Logo, o gráfico de uma função  $f$  de duas variáveis é uma superfície que representa o conjunto de todos os pontos no espaço tridimensional cujas coordenadas cartesianas são dadas por triplas ordenadas de números reais  $(x, y, z)$ . Como o domínio de  $f$  é um conjunto de pontos no plano  $xy$ , e como a cada par ordenado  $(x, y)$  no domínio de  $f$  corresponde um único valor de  $z$ , nenhuma reta perpendicular ao plano  $xy$  pode interceptar o gráfico de  $f$  em mais de um ponto.

► **ILUSTRAÇÃO 5** A função  $f$  da Ilustração 1 é o conjunto de todos os pares da forma  $(P, z)$ , tais que

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Assim sendo, o gráfico de  $f$  é o hemisfério sobre e acima do plano  $xy$ , tendo um raio de 5 unidades e cujo centro está na origem. Um esboço do gráfico desse hemisfério está na Figura 3. ◀

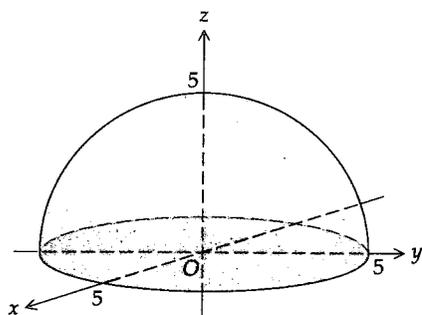


FIGURA 3

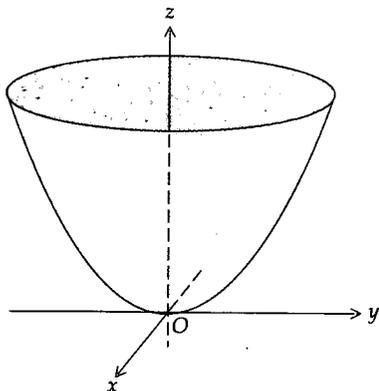


FIGURA 4

**EXEMPLO 4** Faça um esboço do gráfico da função  $f$  cujos valores funcionais são dados por  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

**Solução** O gráfico de  $f$  é a superfície cuja equação é  $z = x^2 + y^2$ . O traço da superfície no plano  $xy$  pode ser encontrado usando a equação  $z = 0$  simultaneamente com a equação da superfície. Obtemos então  $x^2 + y^2 = 0$ , que é a origem. Os traços nos planos  $xz$  e  $yz$  são encontrados usando as equações  $y = 0$  e  $x = 0$ , respectivamente, com a equação  $z = x^2 + y^2$ . Esses traços são as parábolas  $z = x^2$  e  $z = y^2$ . A secção transversal da superfície em um plano  $z = k$ , paralelo ao plano  $xy$ , é uma circunferência com centro no eixo  $z$  e raio  $\sqrt{k}$ . Com essas informações temos o esboço pedido na Figura 4.

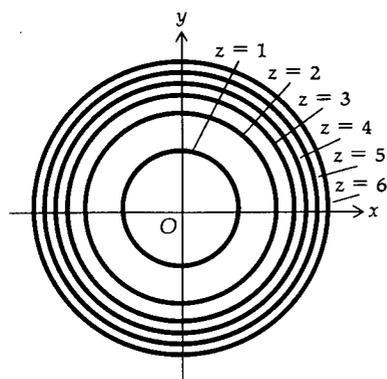


FIGURA 5

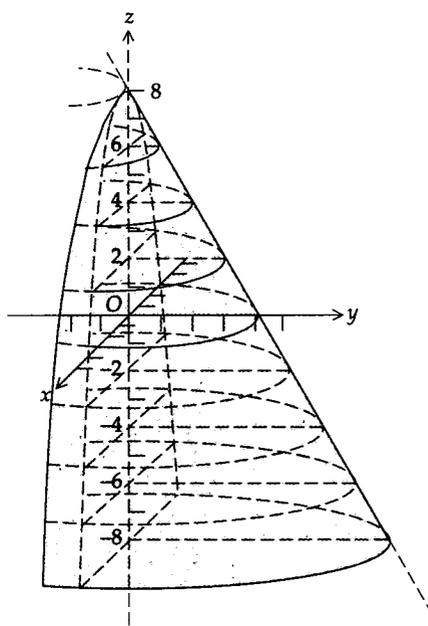


FIGURA 6

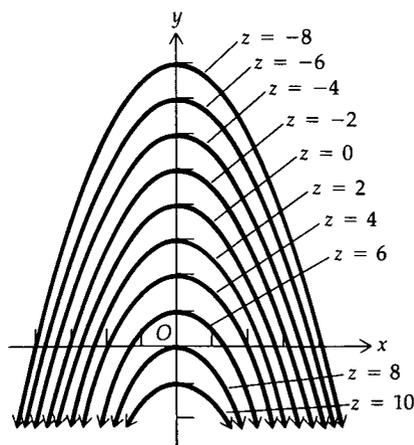


FIGURA 7

Outro método de representar uma função de duas variáveis geometricamente é similar à representação de uma paisagem tridimensional por um mapa topológico bidimensional. Suponha que a superfície  $z = f(x, y)$  seja interceptada por um plano  $z = k$  e que a curva de intersecção seja projetada no plano  $xy$ . A curva projetada tem por equação  $f(x, y) = k$  e é chamada de **curva de nível** (ou **curva de contorno**) da função  $f$  em  $k$ . Cada ponto da curva de nível corresponde a um único ponto na superfície que está  $k$  unidades acima, se  $k$  for positivo, ou  $k$  unidades abaixo, se  $k$  for negativo. Considerando diferentes valores para a constante  $k$ , obtemos um conjunto de curvas de nível chamado de **mapa de contorno**. O conjunto de todos os valores possíveis de  $k$  é a imagem da função  $f$  e cada curva de nível,  $f(x, y) = k$  no mapa de contorno consiste em pontos  $(x, y)$  no domínio de  $f$ , tendo o mesmo valor funcional  $k$ . Por exemplo, para a função  $f$  do Exemplo 4, as curvas de nível são circunferências com o centro na origem. As curvas de nível para  $z = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $6$  estão na Figura 5.

Um mapa de contorno mostra as variações de  $z$  com  $x$  e  $y$ . Em geral, as curvas de nível são mostradas para valores de  $z$  em intervalos constantes e os valores de  $z$  variam mais rapidamente quando as curvas de nível estão mais próximas; isto é, quando isso acontece, a superfície é íngreme e quando estão afastadas, a elevação da superfície está mudando lentamente. Em um mapa topográfico bidimensional de uma paisagem, uma noção geral da declividade é obtida considerando-se a distância entre as curvas de nível. Por outro lado, num mapa topográfico, seguindo um caminho sobre uma curva de nível, a elevação permanece constante.

**EXEMPLO 5** Seja  $f$  a função para a qual  $f(x, y) = 8 - x^2 - 2y$ . Faça um esboço do gráfico de  $f$  e um mapa de contorno de  $f$  mostrando suas curvas de nível em  $10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6$  e  $-8$ .

**Solução** Um esboço do gráfico de  $f$  aparece na Figura 6. É a superfície  $z = 8 - x^2 - 2y$ . O traço no plano  $xy$  é obtido fazendo  $z = 0$ , e que dá a parábola  $x^2 = -2(y - 4)$ . Com  $y = 0$  e  $x = 0$ , obtemos os traços nos planos  $xy$  e  $yz$ , que são, respectivamente, a parábola  $x^2 = -(z - 8)$  e a reta  $2y + z = 8$ . A secção transversal da superfície feita pelo plano  $z = k$  é uma parábola tendo seu vértice na reta  $2y + z = 8$ , no plano  $yz$  e abrindo-se para a esquerda. As secções transversais para  $z = 8, 6, 4, 2, -2, -4, -6$  e  $-8$  estão na figura.

As curvas de nível de  $f$  são as parábolas  $x^2 = -2(y - 4 + \frac{1}{2}k)$ . O mapa de contorno de  $f$  com esboços das curvas de nível pedidas está na Figura 7.

Para ilustrar o uso das curvas de nível, suponha que a temperatura em qualquer ponto de uma placa de metal plana seja dada pela função  $f$ ; isto é, se  $t$  graus for a temperatura, então no ponto  $(x, y)$ ,  $t = f(x, y)$ . Assim, as curvas com equações da forma  $f(x, y) = k$ , onde  $k$  é uma constante, são curvas nas quais a temperatura é constante. Essas são as curvas de nível de  $f$  e são chamadas de **isotermas**. Além disso, se  $V$  volts for a medida do potencial elétrico num ponto  $(x, y)$  qualquer do plano  $xy$ , e  $V = f(x, y)$ , então as curvas de nível de  $f$  serão chamadas de **curvas equipotenciais**, pois o potencial em todos os pontos da curva será o mesmo.

Para uma aplicação das curvas de nível em Economia, consideremos a produtividade (ou saída) de uma indústria que depende de várias entradas. Entre

elas podemos considerar o número de máquinas usadas na produção, o número de pessoas-hora disponíveis, o capital de giro, a quantidade de material usado e o espaço disponível. Suponha que os montantes das entradas sejam dados por  $x$  e  $y$ , sendo o montante das saídas dado por  $z$ , e  $z = f(x, y)$ . Tal função é chamada de **função de produção** e as curvas de nível de  $f$ , cujas equações são da forma  $f(x, y) = k$ , onde  $k$  é uma constante, são chamadas de **curvas de produção constante**.

**EXEMPLO 6** Seja  $f$  a função de produção para a qual

$$f(x, y) = 2x^{1/2}y^{1/2}$$

Faça um mapa de contorno de  $f$  mostrando as curvas de produção constante em 8, 6, 4 e 2.

**Solução** O mapa de contorno consiste nas curvas que são a intersecção da superfície

$$z = 2x^{1/2}y^{1/2} \quad (1)$$

com os planos  $z = k$ , onde  $k = 8, 6, 4$  e  $2$ . Substituindo  $z = k$  na equação (1) obtemos  $k = x^{1/2}y^{1/2}$  ou, equivalentemente,

$$xy = k^2 \quad x > 0 \quad e \quad y > 0 \quad (2)$$

A curva no plano  $xy$  representada por (2) é um ramo de uma hipérbole no primeiro quadrante. Com cada um dos números 6, 4 e 2 também obtemos um ramo de uma hipérbole no primeiro quadrante. Essas são as curvas de produção constante, apresentadas na Figura 8.

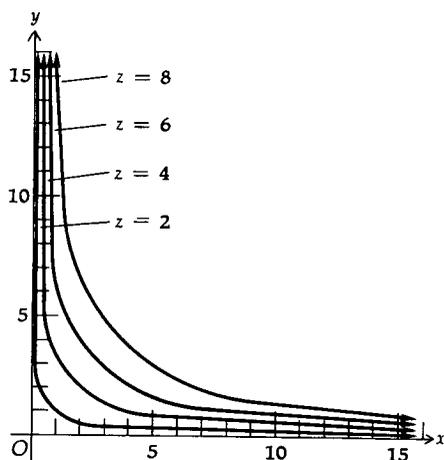


FIGURA 8

A seguinte definição estende, para uma função de  $n$  variáveis, a noção de gráfico de uma função.

#### 16.1.6 DEFINIÇÃO

Se  $f$  for uma função de  $n$  variáveis, então o **gráfico** de  $f$  será o conjunto de todos os pontos  $(x_1, x_2, \dots, x_n, w)$  em  $R^{n+1}$  para os quais  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é um ponto no domínio de  $f$  e  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Da mesma forma que estudamos curvas de nível para funções de duas variáveis, podemos considerá-las para funções de três variáveis. Se  $f$  for uma função cujo domínio é um conjunto de pontos em  $R^3$ , então, se  $k$  for um número na imagem de  $f$ , o gráfico da equação  $f(x, y, z) = k$  será uma superfície, a qual será chamada de **superfície de nível** de  $f$  em  $k$ . Toda superfície no espaço tridimensional pode ser considerada como uma superfície de nível de alguma função de três variáveis. Por exemplo, se a função  $g$  for definida pela equação  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ , então a superfície da Figura 4 será a superfície de nível de  $g$  em 0. Analogamente, a superfície com equação  $z - x^2 - y^2 + 5 = 0$  será uma superfície de nível de  $g$  em 5.

Programas computacionais podem ser usados para gerar superfícies que seria difícil ou impossível desenhar. Esses programas são chamados de **gráficos computacionais**. Muitos deles mostram secções transversais feitas por planos  $x = k$  e  $y = k$  para valores igualmente espaçados de  $k$ . Para demonstrar as superfícies diversas e intrincadas que surgem, mostramos os gráficos computacionais associados a funções específicas nas Figuras de 9 a 16.

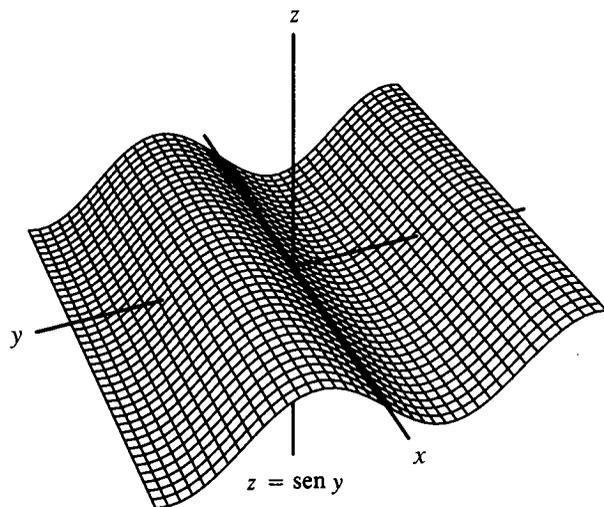


FIGURA 9

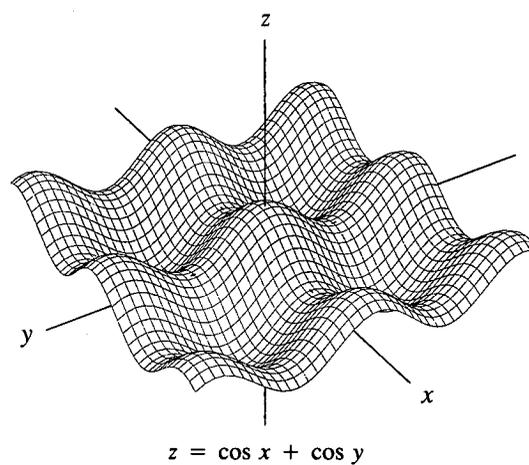


FIGURA 10

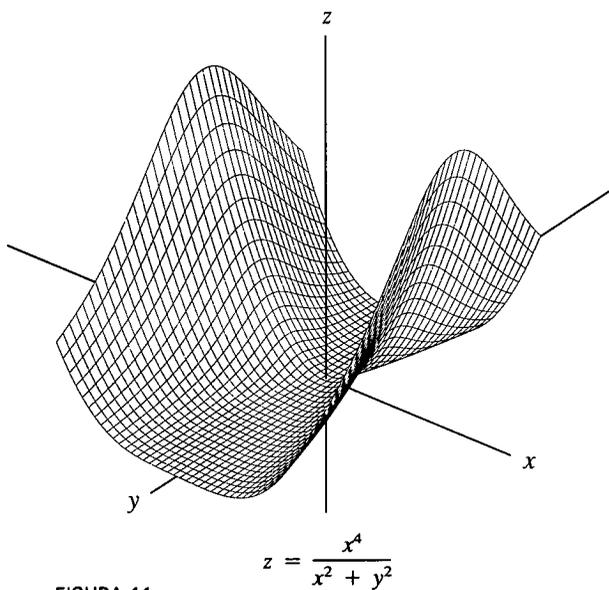


FIGURA 11

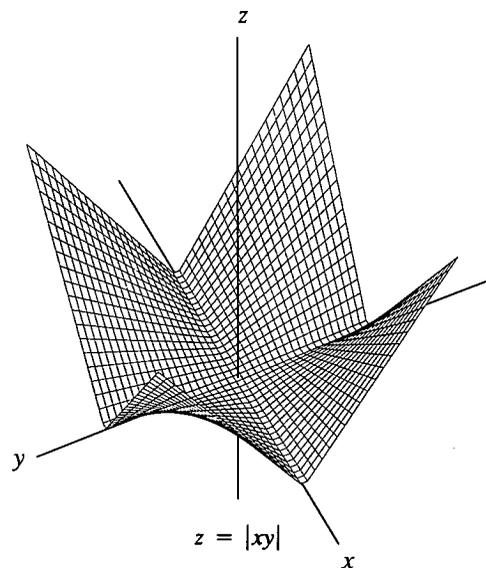


FIGURA 12

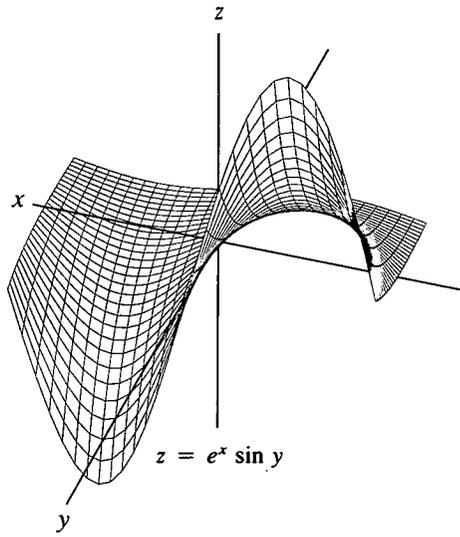


FIGURA 13

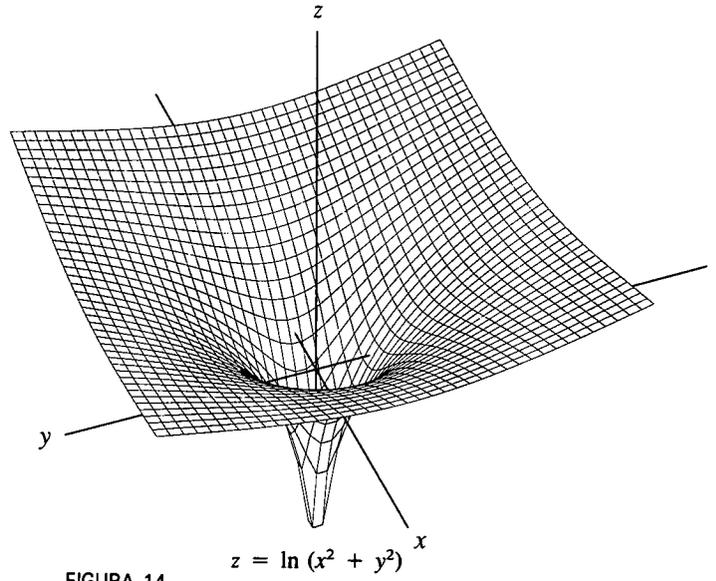


FIGURA 14

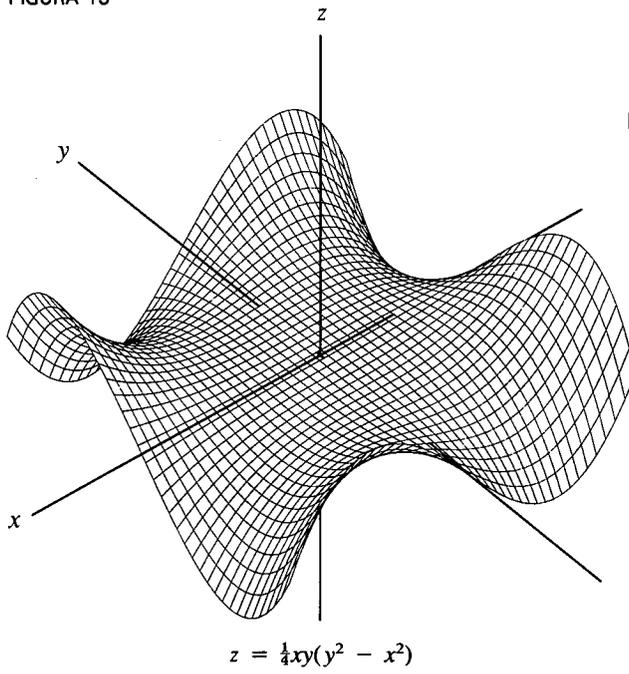


FIGURA 15

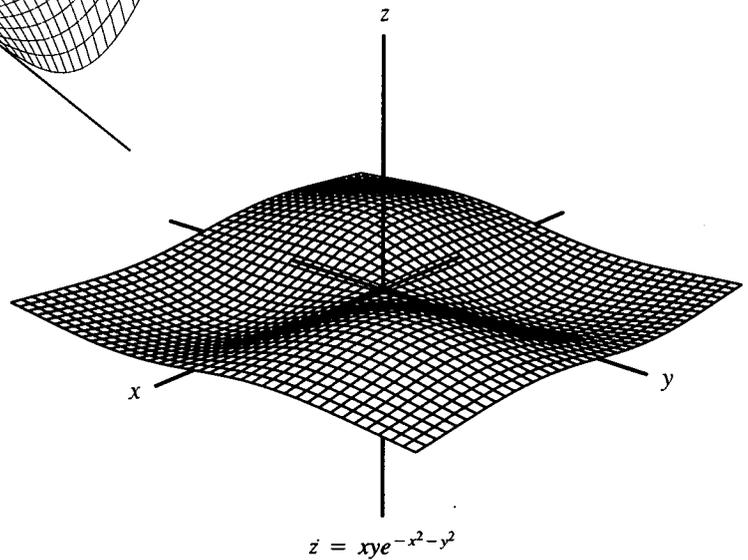


FIGURA 16

## EXERCÍCIOS 16.1

1. Seja a função  $f$  de duas variáveis  $x$  e  $y$  o conjunto dos pares ordenados da forma  $(P, z)$ , tal que

$$z = \frac{x+y}{x-y} \Leftrightarrow f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$$

Ache: (a)  $f(-3, 4)$ ; (b)  $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ; (c)  $f(x+1, y-1)$ ;  
(d)  $f(-x, y) - f(x, -y)$ .

2. Seja a função  $g$  de duas variáveis  $x$  e  $y$  o conjunto dos pares ordenados da forma  $(P, z)$ , tal que

$$z = \sqrt{x^2 - y} \Leftrightarrow g(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$$

Ache: (a)  $g(3, 5)$ ; (b)  $g(-4, -9)$ ; (c)  $g(x+2, 4x+4)$ ;

(d)  $g\left(\frac{1}{x}, \frac{-3}{x^2}\right)$ .

3. Seja a função  $g$  de três variáveis  $x, y$  e  $z$  o conjunto de todos os pares ordenados  $(P, w)$ , tal que

$$w = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} \Leftrightarrow g(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Ache: (a)  $g(1, -1, -1)$ ; (b)  $g(-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ; (c)  $g(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z)$ ;  
(d)  $[g(x, y, z)]^2 - [g(x+2, y+2, z)]^2$ .

4. Seja  $f$  uma função de três variáveis  $x, y$  e  $z$  que é o conjunto de todos os pares ordenados  $(P, w)$ , tal que

$$w = \frac{4}{x^2 + y^2 + z^2 - 9} \Leftrightarrow f(x, y, z) = \frac{4}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$$

Ache: (a)  $f(1, 2, 3)$ ; (b)  $f(2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ; (c)  $f\left(-\frac{2}{x}, \frac{2}{x}, -\frac{1}{x}\right)$ ;

(d)  $f(x+2, 1, x-2)$ .

Nos Exercícios de 5 a 20, determine o domínio da função  $f$  e faça um esboço mostrando como uma região em  $R^2$  seja o conjunto de pontos do domínio de  $f$ . Use curvas pontilhadas para indicar qualquer parte do limite que não esteja no domínio e curvas em linhas contínuas para indicar partes do limite no domínio.

5.  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$       6.  $f(x, y) = \frac{4}{4 - x^2 - y^2}$   
7.  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$       8.  $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2}$   
9.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$       10.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y^2 + 16}$   
11.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$       12.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 16}$   
13.  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$       14.  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}$   
15.  $f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$       16.  $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$   
17.  $f(x, y) = \cos^{-1}(x - y)$       18.  $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$   
19.  $f(x, y) = \ln(xy - 1)$       20.  $f(x, y) = \sin^{-1}(x + y)$

No Exercícios de 21 a 28, ache o domínio de  $f$  e descreva a região em  $R^3$  que seja o conjunto de pontos no domínio.

21.  $f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{x - y - z}$       22.  $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 - y}$

23.  $f(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2 - z^2}$

24.  $f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$

25.  $f(x, y, z) = \sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z$

26.  $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + \ln z$

27.  $f(x, y, z) = \ln(4 - x^2 - y^2) + |z|$

28.  $f(x, y, z) = xz \cos^{-1}(y^2 - 1)$

Nos Exercícios de 29 a 36, ache o domínio da função  $f$  e faça um esboço do gráfico.

29.  $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

30.  $f(x, y) = 6 - 2x + 2y$

31.  $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$

32.  $f(x, y) = \sqrt{100 - 25x^2 - 4y^2}$

33.  $f(x, y) = x^2 - y^2$

34.  $f(x, y) = 144 - 9x^2 - 16y^2$

35.  $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$

36.  $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

Nos Exercícios de 37 a 44 faça um esboço do mapa de contorno da função  $f$ , mostrando as curvas de nível de  $f$  nos números dados.

37. A função do Exercício 29 em 0, 1, 2, 3 e 4.

38. A função do Exercício 30 em 10, 6, 2, 0, -2, -6 e -10.

39. A função do Exercício 31 em 16, 12, 7, 0, -9 e -20.

40. A função do Exercício 32 em 0, 2, 4, 6, 8 e 10.

41. A função do Exercício 33 em 16, 9, 4, 0, -4, -9 e -16.

42. A função do Exercício 36 em 10, 8, 6, 5 e 0.

43. A função  $f$  para a qual  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  em 8, 6, 4, 2 e 0.

44. A função  $f$  para a qual  $f(x, y) = (x - 3)/(y + 2)$  em 4, 2, 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ , 0,  $-\frac{1}{4}$ ,  $-\frac{1}{2}$ , -1, -2 e -4.

Nos Exercícios 45 e 46 ache  $h(x, y)$  se  $h = f \circ g$ ; ache também o domínio de  $h$ .

45.  $f(t) = \sin^{-1} t$ ;  $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

46.  $f(t) = e^t$ ;  $g(x, y) = y \ln x$

47. Dada  $f(x, y) = x - y$ ,  $g(t) = \sqrt{t}$ ,  $h(s) = s^2$ . Ache (a)  $(g \circ f)(5, 1)$ ;  
(b)  $f(h(3), g(9))$ ; (c)  $f(g(x), h(y))$ ; (d)  $g((h \circ f)(x, y))$ ;  
(e)  $(g \circ h)(f(x, y))$ .

48. Dada  $f(x, y) = x/y^2$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $h(x) = \sqrt{x}$ . Ache (a)  $(h \circ f)(2, 1)$ ;  
(b)  $f(g(2), h(4))$ ; (c)  $f(g(\sqrt{x}), h(x^2))$ ; (d)  $h((g \circ f)(x, y))$ ;  
(e)  $(h \circ g)(f(x, y))$ .

49. O potencial elétrico no ponto  $(x, y)$  do plano  $xy$  é  $V(x, y)$  volts e  $V(x, y) = 4/\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ . Trace as curvas equipotenciais de  $V$  em 16, 12, 8, 4, 1,  $\frac{1}{2}$ , e  $\frac{1}{4}$ .

50. A função de produção de certa mercadoria tem valores funcionais  $f(x, y) = 4x^{1/3}y^{2/3}$ , onde  $x$  e  $y$  medem os insumos. Faça um mapa de contorno de  $f$  mostrando as curvas de produção constante em 16, 12, 8, 4 e 2.

51. Suponha que o número de unidades produzidas de certa mercadoria seja  $z$  e  $z = 6xy$ , onde  $x$  é o número de máquinas que foram usadas na produção e  $y$  é o número de pessoas-hora disponíveis. Então, a função  $f$ , definida por  $f(x, y) = 6xy$ ,

é uma função de produção. Trace o mapa de contorno de  $f$  mostrando as curvas de produção constantes para  $z$  igual a 30, 24, 18, 12 e 6.

52. A temperatura  $t$  em um ponto  $(x, y)$  de uma placa de metal plana é dada por  $t(x, y) = 4x^2 + 2y^2$ . Trace as isotermas de  $t$  em 12, 8, 4, 1 e 0.

Nos Exercícios 53 e 54, faça esboços das superfícies de nível da função  $f$  nos números dados.

53.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$  em 8, 4, 0, -4 e -8.

54.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  em 9, 4, 1 e 0.

## 16.2 LIMITES DE FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

Em  $R$ , a distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre dois números reais. Isto é,  $|x - a|$  é a distância entre os pontos  $x$  e  $a$ . Em  $R^2$ , a distância entre os pontos  $P(x, y)$  e  $P_0(x_0, y_0)$  é dada por  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . Em  $R^3$ , a distância entre dois pontos  $P(x, y, z)$  e  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  é dada por  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ . Em  $R^n$ , a distância entre dois pontos é definida analogamente.

### 16.2.1 DEFINIÇÃO

Se  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  forem dois pontos em  $R^n$ , então a distância entre  $P$  e  $A$ , denotada por  $\|P - A\|$ , será dada por

$$\|P - A\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$$

O símbolo  $\|P - A\|$  representa um número não-negativo, sendo lido como “a distância entre  $P$  e  $A$ ”.

Em  $R$ ,  $R^2$  e  $R^3$ , a fórmula da Definição 16.2.1 torna-se, respectivamente

$$\|x - a\| = |x - a|$$

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

### 16.2.2 DEFINIÇÃO

Se  $A$  for um ponto em  $R^n$  e  $r$  for um número positivo, então a **bola aberta**  $B(A; r)$  será definida como o conjunto de todos os pontos  $P$  em  $R^n$ , tais que  $\|P - A\| < r$ .

### 16.2.3 DEFINIÇÃO

Se  $A$  for um ponto em  $R^n$  e  $r$  for um número positivo, então a **bola fechada**  $B[A; r]$  será definida como o conjunto de todos os pontos  $P$  em  $R^n$ , tais que  $\|P - A\| \leq r$ .

Para ilustrar essas definições, vamos mostrar o seu significado em  $R$ ,  $R^2$  e  $R^3$ . Primeiro, se  $a$  for um ponto em  $R$ , então a bola aberta  $B(a; r)$  será o conjunto de todos os pontos  $x$  em  $R$ , tais que

$$|x - a| < r$$

O conjunto de todos os pontos  $x$  satisfazendo essa desigualdade é o conjunto de todos os pontos no intervalo aberto  $(a - r, a + r)$ ; assim, a bola aberta  $B(a; r)$  em  $R$  (veja a Figura 1) é simplesmente um intervalo aberto, tendo seu ponto médio em  $a$  e extremos em  $a - r$  e  $a + r$ . A bola fechada  $B[a; r]$  em  $R$  (Figura 2) é o intervalo fechado  $[a - r, a + r]$ .

Se  $(x_0, y_0)$  for um ponto em  $R^2$ , então a bola aberta  $B((x_0, y_0); r)$  será o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$  em  $R^2$ , tais que

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$$

Assim, a bola aberta  $B((x_0, y_0); r)$  em  $R^2$  (Figura 3) consiste em todos os pontos no interior da região limitada pela circunferência tendo seu centro em  $(x_0, y_0)$  e raio  $r$ . Uma bola aberta em  $R^2$  é algumas vezes chamada de *disco*

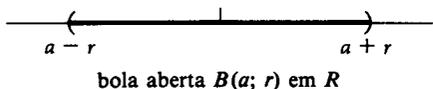


FIGURA 1

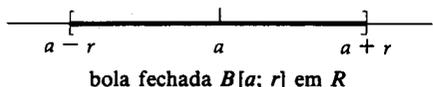
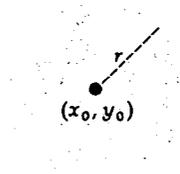
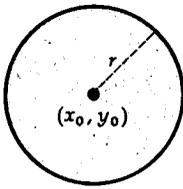


FIGURA 2



bola aberta  $B((x_0, y_0); r)$  em  $R^2$

FIGURA 3



bola fechada  $B[(x_0, y_0); r]$  em  $R^2$   
FIGURA 4

*aberto*. A bola fechada ou disco fechado  $B[(x_0, y_0); r]$  em  $R^2$  (Figura 4) é o conjunto de todos os pontos na bola aberta  $B((x_0, y_0); r)$  e sobre a circunferência, tendo seu centro em  $(x_0, y_0)$  e raio  $r$ .

Se  $(x_0, y_0, z_0)$  for um ponto em  $R^3$ , então a bola aberta  $B((x_0, y_0, z_0); r)$  será o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  em  $R^3$ , tais que

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r$$

Portanto, a bola aberta em  $B((x_0, y_0, z_0); r)$  em  $R^3$  (Figura 5), consiste em todos os pontos no interior da região limitada pela esfera, tendo seu centro em  $(x_0, y_0, z_0)$  e raio  $r$ . Analogamente, a bola fechada  $B[(x_0, y_0, z_0); r]$  em  $R^3$  (Figura 6) consiste em todos os pontos na bola aberta  $B((x_0, y_0, z_0); r)$  e sobre a esfera tendo seu centro em  $(x_0, y_0, z_0)$  e raio  $r$ .

Estamos agora em condições de definir o *limite de uma função de n variáveis*.

**16.2.4 DEFINIÇÃO**

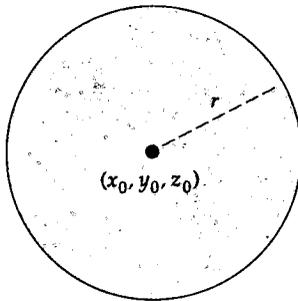


FIGURA 5

Seja  $f$  uma função de  $n$  variáveis que está definida numa bola aberta  $B(A; r)$ , exceto possivelmente no próprio ponto  $A$ . Então, o **limite de  $f(P)$  quando  $P$  tende a  $A$  é  $L$** , e escrevemos

$$\lim_{P \rightarrow A} f(P) = L$$

se para todo  $\epsilon > 0$ , por menor que seja, existir um  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } 0 < \|P - A\| < \delta \text{ então } |f(P) - L| < \epsilon$$

Se  $f$  for uma função de uma variável e se na definição acima  $A = a$  em  $R$  e  $P = x$ , então a definição afirma que: se  $f$  for definida em algum intervalo aberto com centro em  $a$ , exceto possivelmente no próprio  $a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para qualquer  $\epsilon > 0$ , por menor que seja, existir um  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

Assim sendo, a Definição 2.1.1 de limite de uma função de uma variável é um caso particular da Definição 16.2.4.

Vamos estabelecer agora a definição de limite de uma função de duas variáveis. Ela é o caso particular da Definição 16.2.4, onde  $A$  é o ponto  $(x_0, y_0)$  e  $P$  é o ponto  $(x, y)$ .

**16.2.5 DEFINIÇÃO**

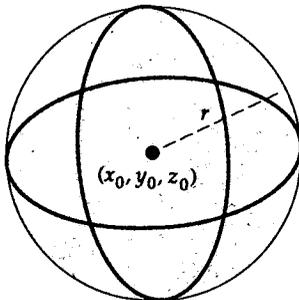


FIGURA 6

Seja  $f$  uma função de duas variáveis que está definida em algum disco aberto  $B(x_0, y_0; r)$ , exceto possivelmente no próprio ponto  $(x_0, y_0)$ . Então, o **limite de  $f(x, y)$  quando  $(x, y)$  tende a  $(x_0, y_0)$  é  $L$** , e escrevemos

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

se para todo  $\epsilon > 0$ , por menor que seja, existir um  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \text{ então } |f(x, y) - L| < \epsilon$$

Em outros termos, a Definição 16.2.5 estabelece que os valores funcionais  $f(x, y)$  tendem a um limite  $L$  quando o ponto  $(x, y)$  tende ao ponto  $(x_0, y_0)$ , se o valor absoluto da diferença entre  $f(x, y)$  e  $L$  puder se tornar arbitrariamente pequeno, tomando o ponto  $(x, y)$  suficientemente próximo de  $(x_0, y_0)$ , mas não igual a  $(x_0, y_0)$ . Na definição, nada há sobre o valor da função no ponto

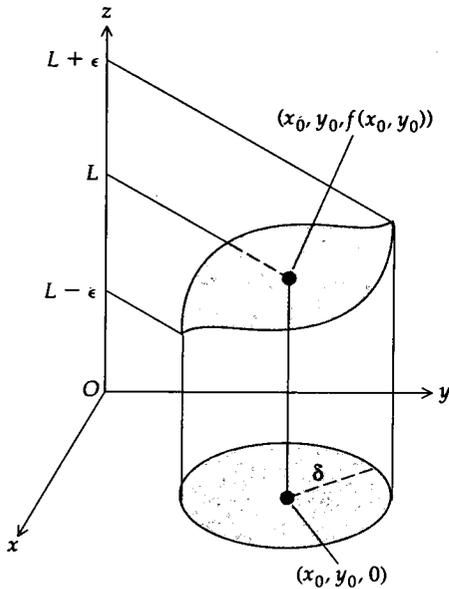


FIGURA 7

$(x_0, y_0)$ ; isto é, não é necessário que a função esteja definida em  $(x_0, y_0)$  para existir  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ .

Uma interpretação geométrica da Definição 16.2.5 está ilustrada na Figura 7. Nela é mostrada a parte da superfície definida por  $z = f(x, y)$  que fica sobre o disco aberto  $B((x_0, y_0); \delta)$ . Vemos que  $f(x, y)$  no eixo  $z$  ficará entre  $L - \epsilon$  e  $L + \epsilon$ , enquanto o ponto  $(x, y)$  no plano  $xy$  estiver no disco aberto  $B((x_0, y_0); \delta)$ , ou seja, o valor de  $f(x, y)$  no eixo  $z$  pode ser mantido entre  $L - \epsilon$  e  $L + \epsilon$  desde que o ponto  $(x, y)$  no plano  $xy$  seja restrito ao disco aberto  $B((x_0, y_0); \delta)$ .\*

► **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos aplicar a Definição 16.2.5 para provar que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 3)} (2x + 3y) = 11$$

O primeiro requisito da definição é que  $2x + 3y$  deve estar definida em algum disco aberto tendo seu centro no ponto  $(1, 3)$ , com exclusão, talvez, do próprio ponto  $(1, 3)$ . Como  $2x + 3y$  está definida para todos os pontos  $(x, y)$ , qualquer disco aberto com seu centro em  $(1, 3)$  irá satisfazer esse requisito. Agora, devemos mostrar que para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} < \delta \text{ então } |(2x + 3y) - 11| < \epsilon \quad (1)$$

Da desigualdade do triângulo,

$$\begin{aligned} |2x + 3y - 11| &= |2x - 2 + 3y - 9| \\ &\leq 2|x - 1| + 3|y - 3| \end{aligned}$$

Como

$$|x - 1| \leq \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} \quad \text{e} \quad |y - 3| \leq \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}$$

segue que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} < \delta \text{ então } 2|x - 1| + 3|y - 3| < 2\delta + 3\delta$$

Essa afirmativa indica que uma escolha adequada para  $\delta$  é  $5\delta = \epsilon$ , isto é,  $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$ . Com esse  $\delta$  temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} 0 &< \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} < \delta \\ \Rightarrow |x - 1| &< \delta \quad \text{e} \quad |y - 3| < \delta \\ \Rightarrow 2|x - 1| + 3|y - 3| &< 5\delta \\ \Rightarrow |2(x - 1) + 3(y - 3)| &< 5\left(\frac{1}{5}\epsilon\right) \\ \Rightarrow |2x + 3y - 11| &< \epsilon \end{aligned}$$

Demonstramos que para todo  $\epsilon > 0$ , escolhendo  $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$ , a afirmativa (1) é verdadeira. Isto prova que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 3)} (2x + 3y) = 11$ . ◀

**EXEMPLO 1** Use a Definição 16.2.5 para provar que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} (3x^2 + y) = 5$$

**Solução** Como  $3x^2 + y$  está definida em todo ponto  $(x, y)$ , qualquer disco aberto tendo seu centro em  $(1, 2)$  irá satisfazer o primeiro requisito da Defi-

\* **N. do T.:** A existência do limite da função  $f(x, y)$  no ponto  $(x_0, y_0)$  não depende da forma pela qual  $(x, y)$  aproxima-se de  $(x_0, y_0)$ . Observe que existe uma infinidade de maneiras para  $(x, y)$  aproximar-se de  $(x_0, y_0)$ .

nição 16.2.5. Precisamos mostrar que para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \text{ então } |(3x^2 + y) - 5| < \epsilon \quad (2)$$

Da desigualdade do triângulo,

$$\begin{aligned} |3x^2 + y - 5| &= |3x^2 - 3 + y - 2| \\ &\leq 3|x^2 - 1| + |y - 2| \end{aligned}$$

Assim,

$$|3x^2 + y - 5| \leq 3|x-1||x+1| + |y-2| \quad (3)$$

Como

$$|x-1| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \quad \text{e} \quad |y-2| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

segue que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \text{ então } |x-1| < \delta \quad \text{e} \quad |y-2| < \delta$$

Observe que no segundo membro de (3), além das expressões  $|x-1|$  e  $|y-2|$ , temos a expressão  $|x+1|$ . Assim, para provar (2) queremos colocar uma restrição em  $\delta$  que irá nos dar uma desigualdade envolvendo  $|x+1|$ . Para isso escolhemos o raio do disco aberto requerido pela Definição 16.2.5 menos ou igual a 1. Então,

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \quad \text{e} \quad \delta \leq 1$$

$$\Rightarrow |x-1| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < x-1 < 1$$

$$\Rightarrow 1 < x+1 < 3$$

$$\Rightarrow |x+1| < 3$$

Agora

$$|x-1| < \delta \quad \text{e} \quad |x+1| < 3 \quad \text{e} \quad |y-2| < \delta$$

$$\Rightarrow 3|x-1||x+1| + |y-2| < 3 \cdot \delta \cdot 3 + \delta$$

Como nossa meta é ter  $3|x-1||x+1| + |y-2| < \epsilon$ , devemos exigir  $10\delta \leq \epsilon$ , isto é,  $\delta \leq \frac{1}{10}\epsilon$ . Isso significa que devemos colocar duas restrições em  $\delta$ :  $\delta \leq 1$  e  $\delta \leq \frac{1}{10}\epsilon$ . Para que ambas as restrições estejam satisfeitas, tomamos  $\delta = \min(1, \frac{1}{10}\epsilon)$ . Com esse  $\delta$  temos o seguinte argumento:

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \quad \text{e} \quad \delta = \min(1, \frac{1}{10}\epsilon)$$

$$\Rightarrow |x-1| < \frac{1}{10}\epsilon \quad \text{e} \quad |x-1| < 1 \quad \text{e} \quad |y-2| < \frac{1}{10}\epsilon$$

$$\Rightarrow |x-1| < \frac{1}{10}\epsilon \quad \text{e} \quad |x+1| < 3 \quad \text{e} \quad |y-2| < \frac{1}{10}\epsilon$$

$$\Rightarrow 3|x-1||x+1| + |y-2| < 3 \cdot \frac{1}{10}\epsilon \cdot 3 + \frac{1}{10}\epsilon$$

$$\Rightarrow |3(x-1)(x+1) + y - 2| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |(3x^2 + y) - 5| < \epsilon$$

Demonstramos que para todo  $\epsilon > 0$ , escolhendo  $\delta = \min(1, \frac{1}{10}\epsilon)$ , a afirmativa (2) é verdadeira. Isso prova que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (3x^2 + y) = 5$ .

Os teoremas de limite da Secção 2.2 e suas demonstrações, com pequenas modificações, aplicam-se a funções de mais de uma variável. Por exemplo, correspondendo ao Teorema de Limite 1 da Secção 2.2, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (mx + ny + d) = ma + nb + d$$

e a demonstração é uma generalização da que foi feita na Ilustração 1. Vamos usar os teoremas de limite sem enunciá-los novamente e sem prová-los.

► **ILUSTRAÇÃO 2** Aplicando os teoremas de limite de somas e produtos,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} (x^3 + 2x^2y - y^2 + 2) &= (-2)^3 + 2(-2)^2(1) - (1)^2 + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

**EXEMPLO 2** Ache

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

**Solução**

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - y^2) \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

O teorema a seguir é análogo ao Teorema 2.7.1 para funções de uma variável e trata do limite de uma função composta de duas variáveis.

### 16.2.6 TEOREMA

Se  $g$  for uma função de duas variáveis, para a qual  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = b$  e se  $f$  for uma função de uma única variável contínua em  $b$ , então

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f \circ g)(x,y) &= f(b) \\ \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(g(x,y)) &= f\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y)\right) \end{aligned}$$

A demonstração desse teorema é semelhante à que foi feita para o Teorema 2.7.1 e será deixada como um exercício (veja o Exercício 31).

**EXEMPLO 3** Use o Teorema 16.2.6 para encontrar  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \ln(xy - 1)$ .

**Solução** Seja  $g$  a função tal que  $g(x,y) = xy - 1$ , e seja  $f$  a função tal que  $f(t) = \ln t$ .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (xy - 1) = 1$$

e como  $f$  é contínua em 1, do Teorema 16.2.6,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \ln(xy - 1) &= \ln \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (xy - 1) \right) \\ &= \ln 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vamos introduzir agora o conceito de *ponto de acumulação*, necessário ao prosseguimento da discussão de limite de funções de duas variáveis.

**16.2.7 DEFINIÇÃO**

Dizemos que um ponto  $P_0$  é um **ponto de acumulação** de um conjunto  $S$  de pontos em  $R^n$  se toda bola aberta  $B(P_0; r)$  contiver uma infinidade de pontos de  $S$ .

► **ILUSTRAÇÃO 3** Se  $S$  for o conjunto de todos os pontos em  $R^2$  no lado positivo do eixo  $x$ , a origem será um ponto de acumulação de  $S$  pois, não importando quão pequeno tomarmos o valor de  $r$ , todo disco aberto com centro na origem e raio  $r$  irá conter uma infinidade de pontos de  $S$ . Esse é um exemplo de um conjunto tendo um ponto de acumulação que não pertence ao conjunto. Qualquer ponto do conjunto  $S$  será também um ponto de acumulação de  $S$ .

► **ILUSTRAÇÃO 4** Se  $S$  for o conjunto de todos os pontos em  $R^2$  para os quais as coordenadas cartesianas são inteiros positivos, então esse conjunto não terá pontos de acumulação. Isso pode ser visto se considerarmos os pontos  $(m, n)$ , onde  $m$  e  $n$  são inteiros positivos. Então, um disco aberto tendo seu centro em  $(m, n)$  e raio menor do que 1 não contém nenhum outro ponto de  $S$  exceto  $(m, n)$ ; assim, a Definição 16.2.7 não será satisfeita (veja a Figura 8).

Consideraremos agora o limite de uma função de duas variáveis quando um ponto  $(x, y)$  aproxima-se de um ponto  $(x_0, y_0)$ , onde  $(x, y)$  está restrito a um determinado conjunto de pontos.

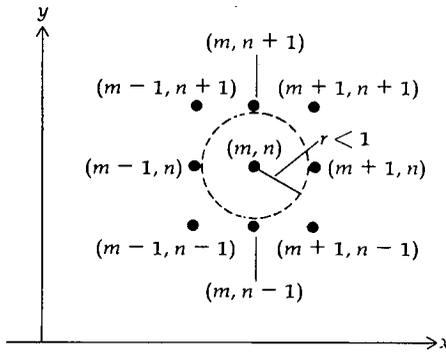


FIGURA 8

**16.2.8 DEFINIÇÃO**

Seja  $f$  a função definida em um conjunto de pontos  $S$  em  $R^2$ , e seja  $(x_0, y_0)$  um ponto de acumulação de  $S$ . Então, o **limite de  $f(x, y)$  quando  $(x, y)$  tende a  $(x_0, y_0)$  em  $S$  é  $L$** , o que escrevemos na forma

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (P \text{ em } S)}} f(x, y) = L$$

se para todo  $\epsilon > 0$ , por menor que seja, existir um  $\delta > 0$ , tal que se  $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$  então  $|f(x, y) - L| < \epsilon$  e  $(x, y)$  está em  $S$ .

Em alguns casos, o limite na definição anterior vem a ser o limite de uma função de uma variável. Por exemplo, considere  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ . Então, se

$S_1$  for o conjunto de todos os pontos no lado positivo do eixo  $x$ ,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0)$$

Se  $S_2$  for o conjunto de todos os pontos no lado negativo do eixo  $y$ ,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} f(0, y)$$

Se  $S_3$  for o conjunto de todos os pontos no eixo  $x$ ,

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (P \text{ em } S_3)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0)$$

Se  $S_4$  for o conjunto de todos os pontos sobre a parábola  $y = x^2$ ,

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (P \text{ em } S_4)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2)$$

### 16.2.9 TEOREMA

Suponha que a função  $f$  esteja definida para todos os pontos do disco aberto com centro em  $(x_0, y_0)$ , exceto talvez o próprio  $(x_0, y_0)$  e

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

Então, se  $S$  for um conjunto qualquer em  $R^2$  tendo  $(x_0, y_0)$  como um ponto de acumulação,

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (P \text{ em } S)}} f(x, y)$$

existe e tem sempre o valor  $L$ .

**Prova** Como  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$ , então, pela Definição 16.2.5, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \text{ então } |f(x, y) - L| < \epsilon$$

O estabelecido acima será verdadeiro se, além disso, restringirmos  $(x, y)$  ao conjunto  $S$ , onde  $S$  é qualquer conjunto de pontos tendo  $(x_0, y_0)$  como um ponto de acumulação. Logo, pela Definição 16.2.8,

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (P \text{ em } S)}} f(x, y) = L$$

e  $L$  não depende do conjunto  $S$  através do qual  $(x, y)$  está tendendo a  $(x_0, y_0)$ . Isso prova o teorema. ■

O teorema a seguir é uma consequência imediata do Teorema 16.2.9.

### 16.2.10 TEOREMA

Se a função  $f$  tiver diferentes limites quando  $(x, y)$  tender a  $(x_0, y_0)$  através de dois conjuntos de pontos tendo  $(x_0, y_0)$  como um ponto de acumulação, então

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \text{ não existe.}$$

**Prova** Sejam  $S_1$  e  $S_2$  dois conjuntos distintos de pontos em  $R^2$ , tendo  $(x_0, y_0)$  como um ponto de acumulação, e sejam

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) = L_2$$

Suponha agora que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  exista. Então, pelo Teorema 16.2.9,  $L_1$  deve ser igual a  $L_2$ , mas, por hipótese,  $L_1 \neq L_2$  e assim temos uma contradição. Logo,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  não existe. ■

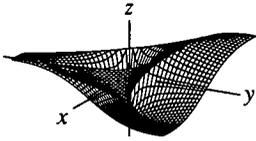


FIGURA 9

**EXEMPLO 4** Dada

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

ache  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ , se existir.

**Solução** A função  $f$  está definida em todos os pontos de  $R^2$ , exceto em  $(0, 0)$ . A Figura 9 mostra um gráfico de  $f$  gerado por computador. Seja  $S_1$  o conjunto de todos os pontos do eixo  $x$  e  $S_2$  o conjunto de todos os pontos da reta  $y = x$ . Então

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) & \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2 + 0} & &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 & &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \\ &= 0 & &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y)$$

segue do Teorema 16.2.10 que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  não existe.

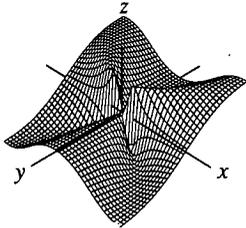


FIGURA 10

**EXEMPLO 5** Dada

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$

ache  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ , se existir.

**Solução** A função  $f$  está definida em todos os pontos em  $R^2$ , exceto  $(0, 0)$ . A Figura 10 mostra um gráfico de  $f$  gerado por computador. Seja  $S_1$  o conjunto de todos os pontos sobre a reta que passa pela origem; isto é, para qualquer ponto  $(x, y)$  em  $S_1$ ,  $y = mx$ . Seja  $S_2$  o conjunto de todos os pontos sobre a parábola  $y = x^2$ . Então,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) & \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} & &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} & &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \\ &= 0 & &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y)$$

segue que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  não existe.

**EXEMPLO 6** Dada

$$f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$$

ache  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ , se existir.

**Solução** A função  $f$  está definida em todos os pontos em  $R^2$ , exceto  $(0, 0)$ . Seja  $S_1$  o conjunto de todos os pontos sobre uma reta que passam pela origem; então, se  $(x, y)$  for um ponto em  $S_1$ ,  $y = mx$ . Seja  $S_2$  o conjunto de todos os pontos na parábola  $y = x^2$ . Então,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2(mx)}{x^2 + m^2x^2} & \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2(x^2)}{x^2 + (x^2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3mx}{1 + m^2} & &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4}{x^2 + x^4} \\ &= 0 & &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 + x^2} \\ & & &= 0 \end{aligned}$$

Ainda que o mesmo limite, 0, seja obtido, se  $(x, y)$  tende a  $(0, 0)$  através de um conjunto de pontos sobre qualquer reta que passe pela origem, não podemos concluir que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  exista e seja zero, embora isso seja esperado.

Vamos tentar, todavia, provar que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ . Qualquer disco aberto

tendo seu centro na origem irá satisfazer o primeiro requisito da Definição 16.2.5. Se pudermos mostrar que para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ então } \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon \quad (4)$$

então provamos que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ .

Como  $x^2 \leq x^2 + y^2$  e  $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right| &= \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \\ &\leq \frac{3(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \\ &= 3\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Assim, uma escolha adequada é  $3\delta = \epsilon$ , isto é,  $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$ . Com esse  $\delta$  temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} &0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \\ \Rightarrow &\frac{3(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} < 3\delta \\ \Rightarrow &\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < 3\left(\frac{1}{3}\epsilon\right) \\ \Rightarrow &\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon \end{aligned}$$

Assim, se  $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$ , a afirmação (4) é verdadeira. Logo, provamos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

## EXERCÍCIOS 16.2

Nos Exercícios de 1 a 8, calcule o limite dado, usando os teoremas de limite.

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} (3x^2 + xy - 2y^2)$
2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,4)} (5x^2 - 2xy + y^2)$
3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{3x - 2y}{x + 4y}$
4.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,4)} y \sqrt[3]{x^3 + 2y}$
5.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x + e^y}{\cos x + \sin y}$
6.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2 x + \cos^2 y}{e^{2x} + e^{2y}}$
7.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^4 - (y-1)^4}{x^2 + (y-1)^2}$
8.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)^{4/3} - (y-1)^{4/3}}{(x-1)^{2/3} + (y-1)^{2/3}}$

Nos Exercícios de 9 a 16, estabeleça o limite, encontrando um  $\delta > 0$  correspondente a qualquer  $\epsilon > 0$ , tal que a Definição 16.2.5 seja válida.

9.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} (3x - 4y) = 1$
10.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} (5x - 3y) = -2$
11.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,3)} (3x - 2y) = -9$
12.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} (5x + 4y) = -6$
13.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 + y^2) = 2$
14.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} (2x^2 - y^2) = -1$
15.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} (x^2 + 2x - y) = 4$
16.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-1)} (x^2 + y^2 - 4x + 2y) = -4$

Nos Exercícios de 17 a 22, prove que para a função  $f$  dada,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  não existe.

17.  $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
18.  $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$
19.  $f(x,y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$
20.  $f(x,y) = \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$
21.  $f(x,y) = \frac{x^9 y}{(x^6 + y^2)^2}$
22.  $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$

Nos Exercícios de 23 a 26, prove que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  existe.

23.  $f(x,y) = \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2}$
24.  $f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$
25.  $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
26.  $f(x,y) = \frac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Nos Exercícios de 27 a 30, determine se o limite existe.

27.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$
28.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^4}$

29.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$
30.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$

31. Prove o Teorema 16.2.6.

Nos Exercícios de 32 a 35, mostre uma aplicação do Teorema 16.2.6 no cálculo do limite indicado.

32.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\ln 3, \ln 2)} e^{x-y}$
33.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \tan^{-1} \frac{y}{x}$
34.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,3)} \left[ 5x + \frac{1}{2} y^2 \right]$
35.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,2)} \sqrt{\frac{1}{3x-4y}}$

36. (a) Dê uma definição similar à Definição 16.2.5 para o limite de uma função de três variáveis quando um ponto  $(x, y, z)$  tende ao ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ . (b) Dê uma definição similar à Definição 16.2.8 para o limite de uma função de três variáveis quando o ponto  $(x, y, z)$  tende ao ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  por um conjunto específico de pontos  $S$  de  $R^3$ .

37. (a) Enuncie e prove um teorema similar ao Teorema 16.2.9 para uma função  $f$  de três variáveis. (b) Enuncie e prove um teorema similar ao Teorema 16.2.10 para uma função  $f$  de três variáveis.

Nos Exercícios de 38 a 41, calcule o limite dado, usando os teoremas de limite.

38.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (-2,1,4)} (4x^2 y - 3xyz^2 + 7y^2 z^3)$
39.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\pi/3, 1, \pi)} \frac{\sec xy + \sec yz}{y - \sec z}$
40.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,2,0)} \frac{x^2 y^2 + y^2 z^2}{x^2 + z^2}$
41.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{(e^x + e^y + e^z)^2}{e^{2x} + e^{2y} + e^{2z}}$

Nos Exercícios de 42 a 45, use as definições e teoremas dos Exercícios 36 e 37 para provar que  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z)$  não existe.

42.  $f(x,y,z) = \frac{x^3 + yz^2}{x^4 + y^2 + z^4}$
43.  $f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$
44.  $f(x,y,z) = \frac{x^4 + yx^3 + z^2 x^2}{x^4 + y^4 + z^4}$
45.  $f(x,y,z) = \frac{x^2 y^2 z^2}{x^6 + y^6 + z^6}$

Nos Exercícios 46 e 47, use a definição do Exercício 36(a) para provar que  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z)$  existe.

46.  $f(x,y,z) = \frac{y^3 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$
47.  $f(x,y,z) = \frac{xy + xz + yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

48. Suponha que  $f$  e  $g$  sejam funções de duas variáveis satisfazendo as seguintes condições:

(i)  $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ ;  $g(tx, ty) = t^m g(x, y)$  para algum  $n$  e todo  $t$ ;

(ii)  $g(1, 1) \neq 0$  e  $g(1, 0) \neq 0$ ;

(iii)  $g(1, 1) \cdot f(1, 0) \neq g(1, 0) \cdot f(1, 1)$ .

Mostre que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$  não existe.

## 16.3 CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

Vamos definir agora a continuidade de uma função de  $n$  variáveis em um ponto de  $R^n$ . Observe que a Definição 2.6.1 de continuidade de uma função de uma variável em um número  $a$  é um caso particular dessa definição.

### 16.3.1 DEFINIÇÃO

Suponha que  $f$  seja uma função de  $n$  variáveis e  $A$ , um ponto de  $R^n$ . Então, dizemos que  $f$  será contínua em um ponto  $A$  se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (i)  $f(A)$  existe;
- (ii)  $\lim_{P \rightarrow A} f(P)$  existe;
- (iii)  $\lim_{P \rightarrow A} f(P) = f(A)$ .

Se uma ou mais dessas condições não for satisfeita no ponto  $A$ , então  $f$  será descontínua em  $A$ .

Se  $f$  for uma função de duas variáveis,  $A$  for o ponto  $(x_0, y_0)$  e  $P$  o ponto  $(x, y)$ , então a Definição 16.3.1 se converterá na seguinte:

### 16.3.2 DEFINIÇÃO

Dizemos que a função  $f$  de duas variáveis  $x$  e  $y$  é contínua em um ponto  $(x_0, y_0)$  se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (i)  $f(x_0, y_0)$  existe;
- (ii)  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  existe;
- (iii)  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ .

**EXEMPLO 1** Determine se  $f$  é contínua em  $(0, 0)$  se

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Solução** Vamos verificar as três condições da Definição 16.3.2 no ponto  $(0, 0)$ .

(i)  $f(0, 0) = 0$ . Logo, a condição (i) está satisfeita.

$$(ii) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Esse fato foi provado no Exemplo 6 da Seção 16.2.

(iii)  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0)$

Logo,  $f$  é contínua em  $(0, 0)$ .

**EXEMPLO 2** Determine se  $f$  é contínua em  $(0, 0)$  se

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Solução** Verificando as condições da Definição 16.3.2, temos o seguinte:

- (i)  $f(0, 0) = 0$ ; assim a condição (i) está satisfeita.  
 (ii) Quando  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ . No Exemplo 4, Secção 16.2, mostramos que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} xy/(x^2 + y^2)$  não existe. Assim sendo,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  não existe. Logo, a condição (ii) não está satisfeita.

Portanto,  $f$  é descontínua em  $(0, 0)$ .

Se uma função  $f$  de duas variáveis for descontínua em um ponto  $(x_0, y_0)$ , mas  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  existir, então dizemos que  $f$  tem uma **descontinuidade removível** em  $(x_0, y_0)$ , pois se  $f$  for redefinida em  $(x_0, y_0)$  de tal forma que

$$f(x_0, y_0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$$

então a nova função será contínua em  $(x_0, y_0)$ . Se a descontinuidade não for removível, ela será chamada de **descontinuidade essencial**.

► **ILUSTRAÇÃO 1** (a) Se  $g(x, y) = 3x^2y/(x^2 + y^2)$ , então  $g$  é descontínua na origem, pois  $g(0, 0)$  não está definido. Contudo, no Exemplo 6, Secção 16.2, mostramos que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 3x^2y/(x^2 + y^2) = 0$ . Logo, a descontinuidade é removível, pois  $g(0, 0)$  pode ser definido como sendo 0. (Consulte o Exemplo 1.)

(b) Seja  $h(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ . Então  $h$  é descontínua na origem, pois  $h(0, 0)$  não está definido. No Exemplo 4, Secção 16.2, mostramos que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} xy/(x^2 + y^2)$  não existe. Logo, a descontinuidade é essencial. (Consulte o Exemplo 2.) ◀

Os teoremas sobre continuidade para funções de uma única variável podem ser estendidos a funções de duas variáveis.

### 16.3.3 TEOREMA

Se  $f$  e  $g$  forem duas funções contínuas em um ponto  $(x_0, y_0)$ , então

- (i)  $f + g$  é contínua em  $(x_0, y_0)$ ;
- (ii)  $f - g$  é contínua em  $(x_0, y_0)$ ;
- (iii)  $fg$  é contínua em  $(x_0, y_0)$ ;
- (iv)  $f/g$  é contínua em  $(x_0, y_0)$ , desde que  $g(x_0, y_0) \neq 0$ .

A demonstração desse teorema é análoga à do teorema (2.6.2) correspondente, para funções de uma variável e, portanto, será omitida.

### 16.3.4 TEOREMA

Uma função polinomial de duas variáveis é contínua em todos os pontos em  $R^2$ .

**Prova** Toda função polinomial é a soma de produtos de funções definidas por  $f(x, y) = x$ ,  $g(x, y) = y$  e  $h(x, y) = c$ , onde  $c$  é um número real. Como  $f$ ,

$g$  e  $h$  são contínuas em todos os pontos em  $R^2$ , o teorema decorre de repetidas aplicações do Teorema 16.3.3, partes (i) e (iii). ■

## 16.3.5 TEOREMA

Uma função racional de duas variáveis é contínua em todos os pontos do seu domínio.

**Prova** Uma função racional é o quociente de duas funções polinomiais  $f$  e  $g$  que são contínuas em todos os pontos em  $R^2$ , pelo Teorema 16.3.4. Se  $(x_0, y_0)$  for um ponto qualquer do domínio de  $f/g$ , então  $g(x_0, y_0) \neq 0$ ; assim sendo, pelo Teorema 16.3.3(iv),  $f/g$  é contínua nesse ponto. ■

**EXEMPLO 3** Determine todos os pontos em que  $f$  é contínua se

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

**Solução** A função  $f$  está definida em todos os pontos em  $R^2$ . Logo, a condição (i) da Definição 16.3.2 está satisfeita para todos os pontos  $(x_0, y_0)$ .

Considere o ponto  $(x_0, y_0)$ , se  $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$ .

Se  $x_0^2 + y_0^2 < 1$ ,

Se  $x_0^2 + y_0^2 > 1$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (x^2 + y^2) & \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} 0 \\ &= x_0^2 + y_0^2 & &= 0 \\ &= f(x_0, y_0) & &= f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Assim,  $f$  é contínua em todos os pontos  $(x_0, y_0)$  para os quais  $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$ .

Para determinar a continuidade de  $f$  em todos os pontos  $(x_0, y_0)$  para os quais  $x_0^2 + y_0^2 = 1$ , vamos determinar se  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$  existe e é igual a 1.

Seja  $S_1$  o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$ , tais que  $x^2 + y^2 \leq 1$ , e seja  $S_2$  o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$ , tais que  $x^2 + y^2 > 1$ . Então,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (P \text{ em } S_1)}} (x^2 + y^2) & \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (P \text{ em } S_2)}} 0 \\ &= x_0^2 + y_0^2 & &= 0 \\ &= 1 & & \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (P \text{ em } S_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (P \text{ em } S_2)}} f(x, y)$$

concluimos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$  não existe. Logo,  $f$  é descontínua em todos os pontos  $(x_0, y_0)$  para os quais  $x_0^2 + y_0^2 = 1$ .

Provamos que  $f$  é contínua em todos os pontos em  $R^2$ , exceto aqueles sobre a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ .

## 16.3.6 DEFINIÇÃO

A função  $f$  de  $n$  variáveis é **contínua em uma bola aberta** se ela for contínua em todos os pontos da bola aberta.

Como ilustração da definição anterior, a função do Exemplo 3 é contínua em todo disco aberto que não contenha pontos da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ .

O teorema seguinte estabelece que uma função contínua de uma função contínua é contínua. É análogo ao Teorema 2.7.2 e sua prova é similar.

## 16.3.7 TEOREMA

Suponha que  $f$  seja uma função de uma única variável e  $g$ , uma função de duas variáveis. Suponha, além disso, que  $g$  seja contínua em  $(x_0, y_0)$  e  $f$  seja contínua em  $g(x_0, y_0)$ . Então, a função composta  $f \circ g$  é contínua em  $(x_0, y_0)$ .

## ► ILUSTRAÇÃO 2 Seja

$$h(x, y) = \ln(xy - 1)$$

Se  $g(x, y) = xy - 1$ ,  $g$  será contínua em todos os pontos em  $R^2$ . A função logaritmo natural é contínua em todo o seu domínio, que é o conjunto de todos os números positivos. Assim, se  $f$  for a função definida por  $f(t) = \ln t$ ,  $f$  será contínua para todo  $t > 0$ . Então, a função  $h$  é a função composta  $f \circ g$  e, pelo Teorema 16.3.7, é contínua em todos os pontos  $(x, y)$  em  $R^2$ , para os quais  $xy - 1 > 0$ . ◀

EXEMPLO 4 Determine todos os pontos onde  $f$  é contínua se

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$$

**Solução** O domínio de  $f$  é o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$  em  $R^2$  para os quais  $x^2 + y^2 - 25 > 0$ . Esses são os pontos na região exterior limitada pela circunferência  $x^2 + y^2 = 25$ . A função  $f$  é o quociente de funções  $g$  e  $h$  para as quais

$$g(x, y) = 1 \quad h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$$

A função  $g$  é uma função constante, sendo, portanto, contínua em toda parte. Segue, do Teorema 16.3.7, que  $h$  é contínua em todos os pontos em  $R^2$  para os quais  $x^2 + y^2 > 25$ . Assim, pelo Teorema 16.3.3(iv),  $f$  é contínua em todos os pontos em seu domínio.

## EXERCÍCIOS 16.3

Nos Exercícios de 1 a 24, determine todos os pontos em que a função é contínua.

1.  $f(x, y) = \frac{x^2}{y - 1}$

2.  $F(x, y) = \frac{1}{x - y}$

3.  $h(x, y) = \operatorname{sen} \frac{y}{x}$

4.  $f(x, y) = \ln xy^2$

5.  $f(x, y) = \frac{4x^2y + 3y^2}{2x - y}$

6.  $g(x, y) = \frac{5xy^2 + 2y}{16 - x^2 - 4y^2}$

7.  $g(x, y) = \ln(25 - x^2 - y^2)$

8.  $f(x, y) = \cos^{-1}(x + y)$

9.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(Sugestão: Veja o Exercício 25, Exercícios 16.2.)

10.  $h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(Sugestão: veja o Exemplo 5, Seção 16.2.)

11.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

12.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

13.  $G(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x| + |y|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

14.  $F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{|x^3| + |y^3|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

15.  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$

16.  $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2 - 4}}$

17.  $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}}$

18.  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$

19.  $f(x, y) = \sec^{-1}(xy)$