

MAKRON
Books

CÁLCULO C

3ª Edição

Funções Vetoriais, Integrais Curvilíneas, Integrais de Superfície

Mirian Buss Gonçalves, Dra.

- Professora do Departamento de Matemática da UFSC nas disciplinas de Cálculo e Análise Matemática.
- Professora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção/UFSC.
- Mestrado em Matemática Pura/Análise Matemática/UFSC.
- Doutorado em Engenharia de Produção/UFSC.
- Pós-Doutorado no INSA-Rouen/FR.

Diva Marília Flemming, Dra.

- Professora do Centro de Ciências Exatas da UNISUL nas disciplinas de Cálculo e Tecnologia na Educação.
- Professora do Curso de Pós-Graduação em Educação da UNISUL.
- Professora aposentada do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil/UFSC.
- Professora aposentada do Departamento de Matemática da UFSC nas disciplinas de Cálculo e Teoria de Informação.
- Mestrado em Matemática Aplicada/Teoria de Informação.
- Doutorado em Engenharia de Produção/UFSC.

MAKRON Books do Brasil Editora Ltda.
Rua Tabapuã, 1.348 – Itaim-Bibi
CEP 04533-004 – São Paulo – SP
(011) 829-8604 e (011) 820-6622
e-mail: makron@books.com.br

São Paulo • Rio de Janeiro • Ribeirão Preto • Belém • Belo Horizonte • Brasília • Campo Grande • Cuiabá • Curitiba • Florianópolis • Fortaleza • Goiânia • Manaus • Natal • Porto Alegre • Recife • Salvador

Barcelona • Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Ciudad de Mexico • Frankfurt • Guadalajara • Lisboa • London • Madrid • Montevideo • New York • Paris • Porto • Santiago

Cálculo C: Funções Vetoriais, Integrais Curvilíneas, Integrais de Superfície -- 3ª edição
 Copyright© 2000 MAKRON Books do Brasil Editora Ltda.

Todos os direitos para a língua portuguesa reservados pela MAKRON Books do Brasil Editora Ltda. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida, guardada pelo sistema "retrieval" ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, seja este eletrônico, mecânico, de fotocópia, de gravação, ou outros, sem prévia autorização, por escrito, da Editora.

EDITOR: MILTON MIRA DE ASSUMPCÃO FILHO

Gerente de Produção
 Silas Camargo
 Editor Assistente
 Benjamim Peixoto
 Produtora Editorial
 Marileide Gomes
 Capa
 Marcelo da S. Françoze



Edição e Fotolitos em Alta Resolução: J.A.G.

Dados de Catalogação na Publicação

Gonçalves, Mirian Buss
 Cálculo C: Funções Vetoriais, Integrais Curvilíneas, Integrais de Superfície - 3ª edição ; Mirian Buss Gonçalves e Diva Marília Flemming.
 São Paulo : MAKRON Books, 2000.

ISBN: 85.346.0955-1

NOTA AO LEITOR – 1ª Edição

A falta de textos, ao alcance de nossos alunos, que abordem o Cálculo Vetorial de uma forma mais abrangente, nos motivou a escrever o presente livro. Este livro pode ser utilizado nos cursos de Cálculo, cujo programa prevê o estudo das Funções Vetoriais, Integrais Curvilíneas e Integrais de Superfície.

O texto consiste de seis capítulos. Os dois primeiros capítulos, referentes a Funções Vetoriais de uma Variável e Curvas, são pré-requisitos para o estudo das Integrais Curvilíneas, apresentado no Capítulo V. No Capítulo III são estendidos os conceitos do Cálculo para as Funções Vetoriais de Várias Variáveis. No Capítulo IV são exploradas as Idéias Físicas ligadas ao Cálculo Vetorial. O Capítulo VI inicia com o estudo de Superfícies e a seguir as Integrais de Superfície são apresentadas.

Cada capítulo apresenta enunciados claros das definições, propriedades e teoremas relativos ao assunto abordado. No decorrer de todo o texto, as idéias intuitivas e geométricas são realçadas. As figuras apresentadas no decorrer dos exemplos, facilitam a visualização espacial dos conceitos apresentados. São propostas listas de exercícios, com respostas, para complementar a aprendizagem do aluno. Algumas demonstrações de teoremas, que foram omitidas, podem ser encontradas em livros mais avançados.

Quaisquer erros que apareçam são, naturalmente, da responsabilidade das autoras, as quais ficarão muito agradecidas se forem comunicadas sobre os mesmos.

Florianópolis, agosto de 1991.

Mirian Buss Gonçalves
Diva Marília Flemming

NOTA AO LEITOR – 3ª Edição

Este livro foi lançado em 1992 e desde então vem sendo utilizado como livro texto para alunos dos cursos de Matemática, Física e Engenharia, nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral que abordam funções vetoriais, integrais curvilíneas e integrais de superfície.

Considerando algumas sugestões recebidas, pequenas alterações foram feitas no decorrer do texto. Dessa forma, em relação ao conteúdo, esta nova edição não apresenta alterações significativas. A principal mudança, nesta terceira edição, é a melhoria da qualidade da apresentação do texto e figuras.

Como nas edições anteriores, quaisquer erros que apareçam são, naturalmente, da responsabilidade das autoras, as quais ficarão muito agradecidas se forem comunicadas sobre os mesmos.

Florianópolis, setembro de 1999.

Mirian Buss Gonçalves
Diva Marlita Flemming

AGRADECIMENTOS

As autoras agradecem aos colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, que com seu incentivo e sugestões, contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradecem aos Professores Carlos José Ferraris, Inder Jeet Taneja, Ito Pedro de Souza, Licério Brasil da Silva, Maria da Graça Rodrigues, Miguel Pelandré Perez, Waldir Quandt e William Glenn Whitley pela sua contribuição.

Em especial, agradecem ao Professor Jaime Bruck Ripoll, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, que leu todos os manuscritos e apresentou valiosas sugestões.

Finalmente, agradecem ao acadêmico de Engenharia Mecânica, Jean Carlo Gueths, ex-aluno das autoras, pela sua dedicação na confecção das figuras.

SUMÁRIO

Capítulo 1 – FUNÇÕES VETORIAIS DE UMA VARIÁVEL	1
Hodógrafo	3
Operações com Funções Vetoriais	7
Limite e Continuidade	9
Exercícios	16
Derivada	21
Interpretação Geométrica da Derivada	22
Interpretação Física da Derivada	25
Regras de Derivação	29
Derivadas Sucessivas	30
Exercícios	31
Capítulo 2 – CURVAS	37
Representação Paramétrica	37
Parametrização de uma Reta	39
Parametrização de uma Circunferência	41
Parametrização de uma Elipse	44
Parametrização de uma Hélice Circular	47
Parametrização de uma Ciclóide	50
Parametrização de uma Hipociclóide	51
Parametrização de outras curvas	55
Curvas Suaves	59
Orientação de uma Curva	62
Reta Tangente	67
Exercícios	70
Comprimento de Arco	75
Reparametrização de Curvas por Comprimento de Arco	80
Vetor Tangente Unitário	83
Curvatura	88
Vetor Normal Principal	94
Vetor Binormal	97
Torção	101

Aplicações	105
Componentes Tangencial e Normal da Aceleração	105
Fórmulas de Frenet – Teorema Fundamental das Curvas	108
Exercícios	110
Capítulo 3 – FUNÇÕES VETORIAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS	117
Bolas Abertas e Fechadas	117
Conjunto Aberto	119
Domínios Conexos	120
Funções Vetoriais de Várias Variáveis	122
Limite e Continuidade	123
Derivadas Parciais	126
Interpretação Geométrica	127
Derivadas Parciais Sucessivas	131
Exercícios	134
Capítulo 4 – DERIVADA DIRECIONAL E CAMPOS GRADIENTES	139
Campos Escalares e Vetoriais	139
Representação Geométrica de um Campo Vetorial	142
Exercícios	147
Derivada Direcional de um Campo Escalar	149
Gradiente de um Campo Escalar	154
Interpretação Geométrica do Gradiente	158
Cálculo da Derivada Direcional usando o Gradiente	160
O Gradiente como Direção de Máxima Variação	163
Exemplos de Aplicações do Gradiente	164
Exercícios	173
Derivada Direcional de um Campo Vetorial	179
Interpretação Física	185
Divergência de um Campo Vetorial	186
Interpretação Física da Divergência	188
Rotacional de um Campo Vetorial	192
Interpretação Física do Rotacional	195
Campos Conservativos	199
Cálculo de uma Função Potencial	202
Algumas Identidades Vetoriais	206
Exercícios	207
Capítulo 5 – INTEGRAIS CURVILÍNEAS	215
Integrais de Linha de Campos Escalares	215
Aplicações	224
Massa e Centro de Massa de um Fio Delgado	224
Momento de Inércia	229
Lei de Biot-Savart	231

Exercícios	235
Integrais de Linha de Campos Vetoriais	240
Trabalho Realizado por uma Força	240
Definição	244
Exemplos	247
Exercícios	253
Integrais Curvilíneas Independentes do Caminho de Integração	258
Exercícios	274
Teorema de Green	279
Exercícios	287
Capítulo 6 – INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE	289
Representação de uma Superfície	289
Equações Paramétricas	292
Representação Paramétrica de Algumas Superfícies	294
Parametrização da Esfera	294
Parametrização de um Cilindro	298
Parametrização de um Cone	301
Parametrização de um Parabolóide	304
Parametrização de Outras Superfícies	305
Exercícios	309
Curvas Coordenadas	311
Plano Tangente e Reta Normal	313
Equação da Reta Normal	317
Equação do Plano Tangente	318
Superfícies Suaves e Orientação	322
Exercícios	330
Área de uma Superfície	333
Integral de Superfície de um Campo Escalar	339
Centro de Massa e Momento de Inércia	344
Exercícios	348
Integral de Superfície de um Campo Vetorial	353
Interpretação Física	357
Exercícios	367
Teorema de Stokes	370
Teorema da Divergência	381
Exercícios	387
TABELAS	391
RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS	395

Capítulo 1

FUNÇÕES VETORIAIS DE UMA VARIÁVEL

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos do Cálculo para funções vetoriais de uma variável. Serão apresentadas as definições formais de limite, continuidade e derivada. A derivada será interpretada geometricamente como um vetor tangente ao hodógrafo da função. Fisicamente, ela será interpretada como o vetor velocidade de uma partícula em movimento no espaço.

1.1 DEFINIÇÃO

Chamamos de função vetorial de uma variável real t , definida em um intervalo I , a função que a cada $t \in I$ associa um vetor \vec{f} do espaço. Denotamos

$$\vec{f} = \vec{f}(t).$$

O vetor $\vec{f}(t)$ pode ser escrito como

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}.$$

Assim, podemos dizer que a função vetorial \vec{f} determina três funções escalares de t : $f_1 = f_1(t)$, $f_2 = f_2(t)$ e $f_3 = f_3(t)$. Reciprocamente, as três funções escalares f_1 , f_2 e f_3 determinam a função vetorial $\vec{f}(t)$.

Observamos que, dado um ponto $P(x,y,z)$ do espaço, o vetor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

é chamado vetor posição do ponto P (ver Figura 1.1).

A cada ponto $P(x,y,z)$ corresponde um único vetor posição e vice-versa. Em vista disso, muitas vezes, um vetor $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ é representado por (v_1, v_2, v_3) . Esta notação também é usada para representar as funções vetoriais.

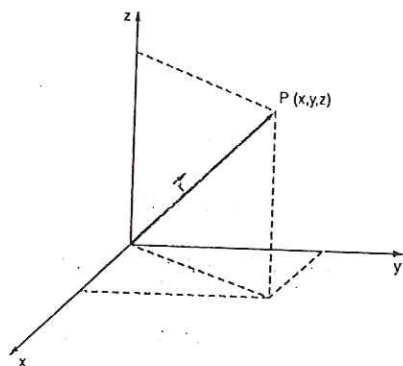


Figura 1.1

1.2 EXEMPLOS

(i) Podemos expressar o movimento de uma partícula P , sobre uma circunferência de raio 1, pela função vetorial $\vec{f}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$. Neste caso, a variável t representa o tempo e $P(f_1(t), f_2(t))$ nos dá a posição da partícula em movimento (ver Figura 1.2).

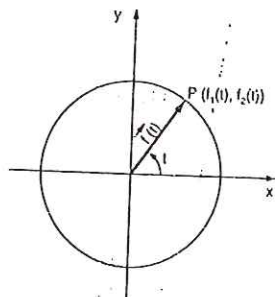


Figura 1.2

(ii) Em Economia podemos estabelecer uma função vetorial preço. Consideremos 3 mercadorias tais que a primeira tem preço t^2 , a segunda tem preço $t + 2$ e a terceira tem preço dado pela soma dos preços das duas primeiras. A função vetorial preço é

$$\vec{P}(t) = (t^2, t + 2, t^2 + t + 2).$$

(iii) Outros exemplos são dados nas expressões:

$$\vec{f}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} - (t^2 - 4)\vec{k}$$

$$\vec{g}(t) = t^2\vec{i} + t^2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{h}(t) = 2\cos t \vec{i} + 2\sin t \vec{j} + 5\vec{k}.$$

1.3 DEFINIÇÃO

O hodógrafo de uma função vetorial $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$, $t \in I$, é o lugar geométrico dos pontos P do espaço que têm vetor posição $\vec{f}(t)$, $t \in I$ (ver Figura 1.3).

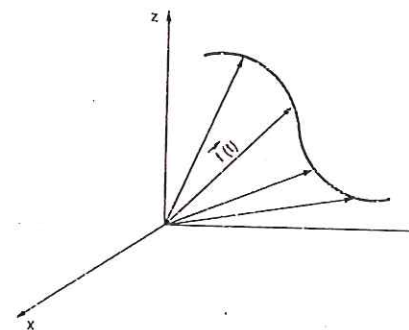


Figura 1.3

Existe uma estreita ligação entre as funções vetoriais de uma variável real e as curvas no espaço. Por exemplo, se $\vec{f}(t)$ é o vetor posição de uma partícula em movimento, o hodógrafo de $\vec{f}(t)$ coincide com a trajetória da partícula.

1.4 EXEMPLOS

(i) Descrever a trajetória L de um ponto móvel P , cujo deslocamento é expresso por

$$\vec{f}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Solução. Podemos descrever a trajetória L traçando um esboço do gráfico da função vetorial dada, ou seja, construindo o hodógrafo de

$$\vec{f}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Para isso, fazemos uma tabela e assinalamos os pontos correspondentes (ver Tabela 1.1 e Figura 1.4).

Tabela 1.1

t	-2	-1	0	1	2
$\vec{f}(t)$	$-2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$	$-\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$	$3\vec{k}$	$\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$	$2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

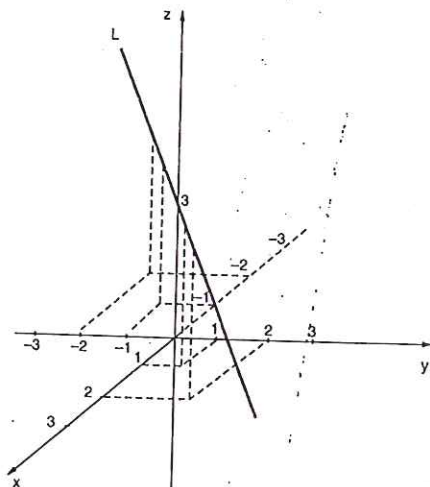


Figura 1.4

(ii) Fazer o hodógrafo das funções exemplificadas em 1.2 (iii).

Seja $\vec{f}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} - (t^2 - 4)\vec{k}$. Neste caso, o hodógrafo pode ser esboçado através da intersecção de superfícies. Basta observarmos que os pontos $P(x(t), y(t), z(t))$ do hodógrafo de \vec{f} têm coordenadas

$$x(t) = t$$

$$y(t) = t$$

$$z(t) = 4 - t^2.$$

Eliminando t , obtemos as superfícies $y = x$ e $z = 4 - x^2$, cuja intersecção nos dá o hodógrafo de $\vec{f}(t)$ (ver Figura 1.5).

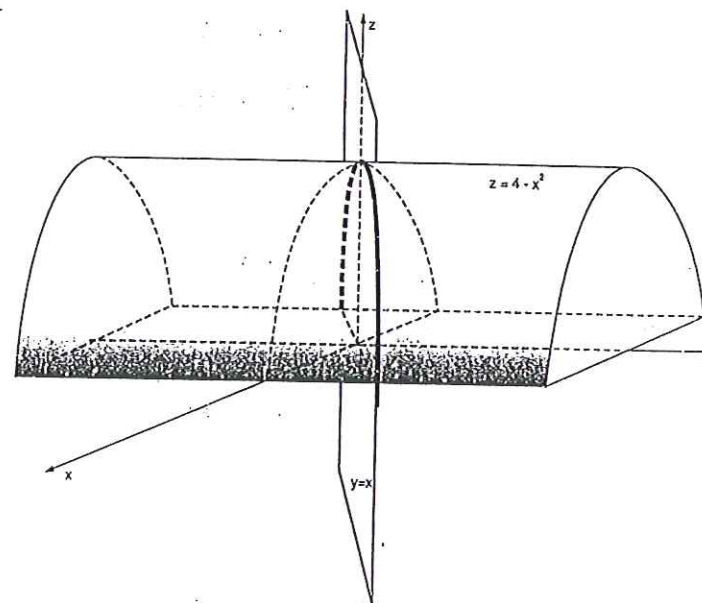


Figura 1.5

Seja $\vec{g}(t) = t^2\vec{i} + t^2\vec{j} + 3\vec{k}$. Usando o mesmo raciocínio anterior, temos que o hodógrafo pode ser esboçado pela intersecção de $x = y$, $y \geq 0$ e $z = 3$ (ver Figura 1.6).

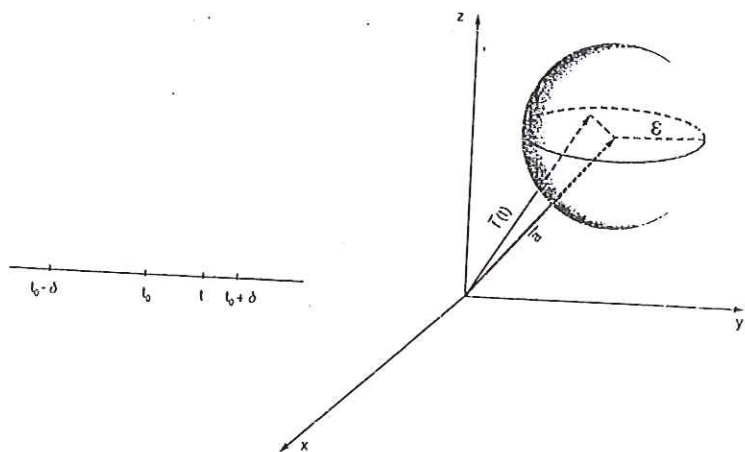


Figura 1.8

1.7.2 Proposição

Seja $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ e $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. O $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$ se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = a_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Prova. Se $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$, então para um $\varepsilon > 0$ arbitrário, existirá um $\delta > 0$, tal que

$$|\vec{f}(t) - \vec{a}| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |t - t_0| < \delta.$$

Como

$$\vec{f}(t) - \vec{a} = [f_1(t) - a_1]\vec{i} + [f_2(t) - a_2]\vec{j} + [f_3(t) - a_3]\vec{k}, \text{ para } 0 < |t - t_0| < \delta,$$

$$|f_i(t) - a_i| \leq |\vec{f}(t) - \vec{a}| < \varepsilon,$$

para $i = 1, 2, 3$. Portanto, $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = a_i$.

Reciprocamente, se $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = a_i$, $i = 1, 2, 3$, para todo $\varepsilon > 0$, existirá $\delta > 0$, tal que $|f_i(t) - a_i| < \varepsilon/3$ quando $0 < |t - t_0| < \delta$.

Usando a desigualdade triangular, vem

$$\begin{aligned} |\vec{f}(t) - \vec{a}| &= |[f_1(t) - a_1]\vec{i} + [f_2(t) - a_2]\vec{j} + [f_3(t) - a_3]\vec{k}| \\ &\leq |f_1(t) - a_1| + |f_2(t) - a_2| + |f_3(t) - a_3| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$.

1.7.3 Propriedades

Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ duas funções vetoriais e $h(t)$ uma função escalar, definidas em um mesmo intervalo. Se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{g}(t) = \vec{b} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = m,$$

então:

- $\lim_{t \rightarrow t_0} [\vec{f}(t) \pm \vec{g}(t)] = \vec{a} \pm \vec{b}$;
- $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = \vec{a} \cdot \vec{b}$;
- $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) \times \vec{g}(t) = \vec{a} \times \vec{b}$;
- $\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \vec{f}(t) = m\vec{a}$.

Prova. Estas propriedades podem ser mostradas usando a proposição 1.7.2 e as propriedades de limite das funções escalares. Como exemplo, provaremos o item (d), isto é,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \vec{f}(t) = m\vec{a}.$$

Sejam $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ e $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Então, $h(t)\vec{f}(t) = h(t)f_1(t)\vec{i} + h(t)f_2(t)\vec{j} + h(t)f_3(t)\vec{k}$ e

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow t_0} h(t)\vec{f}(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} [h(t)f_1(t)]\vec{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} [h(t)f_2(t)]\vec{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} [h(t)f_3(t)]\vec{k} \\ &= [\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t)]\vec{i} + [\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t)]\vec{j} \\ &\quad + [\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t)]\vec{k} \\ &= ma_1\vec{i} + ma_2\vec{j} + ma_3\vec{k} \\ &= m\vec{a}.\end{aligned}$$

1.7.4 Exemplos

(i) Calcular $\lim_{t \rightarrow \sqrt{2}} (t^2\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j} + 2\vec{k})$.

Usando a proposição 1.7.2, temos

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \sqrt{2}} (t^2\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j} + 2\vec{k}) &= \left(\lim_{t \rightarrow \sqrt{2}} t^2 \right)\vec{i} + \left(\lim_{t \rightarrow \sqrt{2}} (t^2 - 1) \right)\vec{j} + \left(\lim_{t \rightarrow \sqrt{2}} 2 \right)\vec{k} \\ &= 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}.\end{aligned}$$

(ii) Calcular $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t)$, onde $\vec{f}(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}\vec{i} + t\vec{j}$.

Temos

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t) &= \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right)\vec{i} + \left(\lim_{t \rightarrow 0} t \right)\vec{j} \\ &= \vec{i}.\end{aligned}$$

(iii) Seja $\vec{f}(t) = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{t-2}$, onde $\vec{a} = \vec{i}$ e $\vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$. Calcular:

a) $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t)$;

b) $\lim_{t \rightarrow 2} (t^2 - 4t + 4)\vec{f}(t)$.

Temos que

$$\begin{aligned}\vec{f}(t) &= \frac{\vec{i} + 2(2\vec{j} - \vec{k})}{t-2} \\ &= \frac{1}{t-2}\vec{i} + \frac{4}{t-2}\vec{j} - \frac{2}{t-2}\vec{k}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\text{a) } \lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t) &= \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t-2} \right)\vec{i} + \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{4}{t-2} \right)\vec{j} - \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{t-2} \right)\vec{k} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.\end{aligned}$$

b) Para resolver este item, calculamos inicialmente

$$\begin{aligned}(t^2 - 4t + 4)\vec{f}(t) &= (t^2 - 4t + 4) \left(\frac{1}{t-2}\vec{i} + \frac{4}{t-2}\vec{j} - \frac{2}{t-2}\vec{k} \right) \\ &= \frac{t^2 - 4t + 4}{t-2}\vec{i} + \frac{4(t^2 - 4t + 4)}{t-2}\vec{j} - \frac{2(t^2 - 4t + 4)}{t-2}\vec{k}.\end{aligned}$$

Temos, então

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 2} (t^2 - 4t + 4)\vec{f}(t) &= \left[\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 4t + 4}{t-2} \right]\vec{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 2} \frac{4(t^2 - 4t + 4)}{t-2} \right]\vec{j} \\ &\quad - \left[\lim_{t \rightarrow 2} \frac{2(t^2 - 4t + 4)}{t-2} \right]\vec{k}.\end{aligned}$$

Resolvendo os limites das funções escalares pelos métodos já conhecidos, vem

$$\lim_{t \rightarrow 2} (t^2 - 4t + 4) \vec{f}(t) = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}.$$

Observamos que a propriedade 1.7.3 (d) não foi usada porque $\lim_{t \rightarrow 2} \vec{f}(t)$ não existe.

(iv) Sejam $\vec{f}(t) = t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}$ e

$$\vec{g}(t) = 3t\vec{i} - 2\vec{j} + 4t^2\vec{k}.$$

Calcular: a) $\lim_{t \rightarrow 1} [\vec{f}(t) + \vec{g}(t)];$

b) $\lim_{t \rightarrow 1} [\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)];$

c) $\lim_{t \rightarrow 1} [\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)].$

Usando 1.7.2 e 1.7.3, temos

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{t \rightarrow 1} [\vec{f}(t) + \vec{g}(t)] &= \lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t) + \lim_{t \rightarrow 1} \vec{g}(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} (t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}) + \lim_{t \rightarrow 1} (3t\vec{i} - 2\vec{j} + 4t^2\vec{k}) \\ &= (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) + (3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) \\ &= 4\vec{i} + 7\vec{k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{t \rightarrow 1} [\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)] &= \lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \vec{g}(t) \\ &= (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) \\ &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 \\ &= 11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{t \rightarrow 1} [\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)] &= \lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t) \times \lim_{t \rightarrow 1} \vec{g}(t) \\ &= (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \times (3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) \\ &= 14\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k}. \end{aligned}$$

1.7.5 Definição

Uma função vetorial $\vec{f} = \vec{f}(t)$, definida em um intervalo I , é contínua em $t_0 \in I$, se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0).$$

Da proposição 1.7.2 segue que $\vec{f}(t)$ é contínua em t_0 se, e somente se, suas componentes são funções contínuas em t_0 .

1.7.6 Exemplos

(i) Verificar se a função

$$\vec{f}(t) = \operatorname{sen} t \vec{i} + \operatorname{cos} t \vec{j} + \vec{k} \text{ é contínua em } t_0 = \pi.$$

Sabemos que $\vec{f}(t)$ é definida para $t_0 = \pi$.

Ainda,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pi} \vec{f}(t) &= \lim_{t \rightarrow \pi} (\operatorname{sen} t \vec{i} + \operatorname{cos} t \vec{j} + \vec{k}) \\ &= -\vec{j} + \vec{k} \\ &= \vec{f}(\pi). \end{aligned}$$

Portanto, $\vec{f}(t) = \operatorname{sen} t \vec{i} + \operatorname{cos} t \vec{j} + \vec{k}$ é contínua em $t_0 = \pi$.

(ii) Verificar se a função

$$\vec{g}(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen } t}{t} \vec{i} + \vec{j}, & t \neq 0 \\ 2\vec{i} + \vec{j}, & t = 0 \end{cases}$$

é contínua em $t_0 = 0$.

Essa função não é contínua em $t_0 = 0$, pois $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen } t}{t} \vec{i} + \vec{j} \right) = \vec{i} + \vec{j}$ é diferente de $\vec{g}(0) = 2\vec{i} + \vec{j}$.

(iii) Indicar os intervalos de continuidade das seguintes funções:

a) $\vec{g}(t) = \frac{1}{t} \vec{i} + t^2 \vec{j}$;

b) $\vec{h}(t) = \ln t \vec{j} + 2\vec{k}$.

Temos:

a) $\vec{g}(t)$ é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$, pois $g_1(t) = \frac{1}{t}$ é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$ e $g_2(t) = t^2$ é contínua em \mathbb{R} .

b) Como $h_1(t) = \ln t$ é contínua em $(0, \infty)$ e $h_2(t) = 2$ é contínua em \mathbb{R} , segue que $\vec{h}(t)$ é contínua em $(0, \infty)$.

1.8 EXERCÍCIOS

- A posição de uma partícula no plano xy , no tempo t , é dada por $x(t) = e^t$, $y(t) = te^t$.
 - Escrever a função vetorial $\vec{f}(t)$ que descreve o movimento desta partícula.
 - Onde se encontrará a partícula em $t = 0$ e em $t = 2$?
- O movimento de um besouro que desliza sobre a superfície de uma lagoa pode ser expresso pela função vetorial

$$\vec{r}(t) = \frac{1 - \cos t}{m} \vec{i} + \left(2t + \frac{t - \text{sen } t}{m} \right) \vec{j},$$

onde m é a massa do besouro. Determinar a posição do besouro no instante $t = 0$ e $t = \pi$.

3. Esboçar o hodógrafo das seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{f}(t) = (4 - 4t)\vec{i} + (4 - 4t)\vec{j}$, $t \in [0, 2]$

b) $\vec{g}(t) = 6\text{sen } t \vec{i} + 4\vec{j} + 25\text{cos } t \vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

c) $\vec{h}(t) = 2\vec{i} + t^3 \vec{j}$

d) $\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + t\vec{k}$

e) $\vec{w}(t) = t^2 \vec{i} + t\vec{j}$

f) $\vec{v}(t) = 4\vec{i} + t\vec{j} + \text{cos } t \vec{k}$.

4. Esboçar a trajetória de uma partícula P , sabendo que seu movimento é descrito por:

a) $\vec{f}(t) = t\vec{i} + (2t^2 - 1)\vec{j}$

b) $\vec{g}(t) = \frac{2}{t} \vec{i} + \frac{2}{t+1} \vec{j}$, $t > 0$

c) $\vec{h}(t) = t\vec{i} + \vec{j} + 4t^2 \vec{k}$

d) $\vec{v}(t) = \ln t \vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$, $t > 0$

e) $\vec{w}(t) = 3\text{cos } t \vec{i} + 3\text{sen } t \vec{j} + (9 - 3\text{sen } t)\vec{k}$; $t \in [0, 2\pi]$

f) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + (9 - t)\vec{j} + t^2 \vec{k}$, $t > 0$

g) $\vec{\ell}(t) = t\vec{i} + \text{sen } t \vec{j} + 2\vec{k}$

h) $\vec{r}(t) = (8 - 4\text{sen } t)\vec{i} + 2\text{cos } t \vec{j} + 4\text{sen } t \vec{k}$.

5. Seja $\vec{f}(t) = \vec{a}t + \vec{b}t^2$ e $\vec{g}(t) = t\vec{i} + \text{sen } t \vec{j} + \text{cos } t \vec{k}$, com $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

Calcular:

a) $\vec{f}(t) + \vec{g}(t)$

b) $\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$

c) $\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$

d) $\vec{a} \cdot \vec{f}(t) + \vec{b} \cdot \vec{g}(t)$

e) $\vec{f}(t-1) + \vec{g}(t+1)$

6. Dadas $\vec{f}(t) = t\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{g}(t) = \vec{i} + t\vec{j}$, esboçar o hodógrafo de $\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$.7. Uma partícula se desloca no espaço. Em cada instante t o seu vetor posição é dado por

$$\vec{r}(t) + t\vec{i} + \frac{1}{t-2}\vec{j} + \vec{k}.$$

a) Determinar a posição da partícula no instante $t=0$ e $t=1$.

b) Esboçar a trajetória da partícula.

c) Quando t se aproxima de 2, o que ocorre com a posição da partícula?8. Seja $\vec{f}(t) = t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}$ e

$$\vec{g}(t) = 2t\vec{i} + \vec{j} - 3t^2\vec{k}, t \geq 0.$$

Calcular:

a) $\lim_{t \rightarrow 1} [\vec{f}(t) + \vec{g}(t)]$

b) $\lim_{t \rightarrow 1} [\vec{f}(t) - \vec{g}(t)]$

c) $\lim_{t \rightarrow 1} \left[3\vec{f}(t) - \frac{1}{2}\vec{g}(t) \right]$

d) $\lim_{t \rightarrow 1} [\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)]$

e) $\lim_{t \rightarrow 1} [\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)]$

f) $\lim_{t \rightarrow 1} [(t+1)\vec{f}(t)]$

g) $\lim_{t \rightarrow 0} [\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)]$

9. Seja $\vec{f}(t) = \sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + 2\vec{k}$ e $h(t) = 1/t$. Calcular, se existir, cada um dos seguintes limites:

a) $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t)$

b) $\lim_{t \rightarrow 0} [h(t) \cdot \vec{f}(t)]$

10. Calcular os seguintes limites de funções vetoriais de uma variável.

a) $\lim_{t \rightarrow \pi} (\cos t \vec{i} + t^2 \vec{j} - 5\vec{k})$

b) $\lim_{t \rightarrow -2} \left(\frac{t^3 + 4t^2 + 4t}{(t+2)(t-3)} \vec{i} + \vec{j} \right)$

c) $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{1}{t-2} [(t^2-4)\vec{i} + (t-2)\vec{j}]$

d) $\lim_{t \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{t}-1}{t-1} \vec{i} + (t-1)\vec{j} + (t+1)\vec{k} \right]$

e) $\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{2^t-1}{t} \vec{i} + (2^t-1)\vec{j} + t\vec{k} \right]$

11. Mostrar que o limite do módulo de uma função vetorial é igual ao módulo do seu limite, se este último existir.

12. Mostrar que a função vetorial $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ é contínua em um intervalo I se, e somente se, as funções escalares $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ são contínuas em I .

13. Calcular o limite e analisar a continuidade das funções vetoriais dadas, nos pontos indicados.

a) $\vec{f}(t) = \begin{cases} \frac{|t-3|}{t-3} \vec{i} + t^2 \vec{j}, & t \neq 3 \\ \vec{0}, & t = 3 \end{cases}$

em $t=0$ e $t=3$.

$$b) \vec{f}(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{1}{t} \vec{i} + \operatorname{cost} \vec{j}, & t \neq 0 \\ \vec{j}, & t = 0 \end{cases}$$

$$c) \vec{f}(t) = \begin{cases} t \vec{i} + \frac{\sqrt{t+2} - \sqrt{2}}{t} \vec{j}, & t \neq 0 \\ \sqrt{2} \vec{j}, & t = 0 \end{cases}; t = 0$$

$$d) \vec{f}(t) = \operatorname{sent} \vec{i} - \operatorname{cost} \vec{j} + \vec{k}; t = 0$$

$$e) \vec{f}(t) = \begin{cases} \frac{2}{t-1} \vec{i} + \frac{4}{t-2} \vec{j} - 5\vec{k}, & t \neq 1 \text{ e } t \neq 2 \\ \vec{0}, & t = 1 \text{ e } t = 2 \end{cases}$$

em $t = 1$ e $t = 2$.

14. Indicar os intervalos de continuidade das seguintes funções vetoriais:

$$a) \vec{f}(t) = \vec{a} \operatorname{sent} t + \vec{b} \operatorname{cost} t \quad \text{em } [0, 2\pi]$$

onde $\vec{a} = \vec{i}$ e $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$

$$b) \vec{g}(t) = \frac{1}{t} \vec{i} + (t^2 - 1) \vec{j} + e^t \vec{k}$$

$$c) \vec{h}(t) = e^{-t} \vec{i} + \ln t \vec{j} + \cos 2t \vec{k}$$

$$d) \vec{v}(t) = \left(\ln(t+1), \frac{1}{t}, t \right)$$

$$e) \vec{w}(t) = (\operatorname{sent} t, \operatorname{tg} t, e^t)$$

$$f) \vec{r}(t) = \left(e^t, \frac{t^2 - 1}{t - 1}, \ln(t+1) \right)$$

$$g) \vec{f}(t) = \left(\sqrt[3]{t}, \frac{-1}{t^2 - 1}, \frac{1}{t^2 - 4} \right)$$

$$h) \vec{g}(t) = \left(t^2 + 1, \frac{2 - t^2}{t^2 - 2t + 1}, \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

15. Provar os itens (a), (b) e (c) das propriedades 1.7.3.

16. Sejam \vec{f} e \vec{g} funções vetoriais contínuas em um intervalo I . Mostrar que:

a) $\vec{f} + \vec{g}$ é contínua em I ;

b) $\vec{f} \times \vec{g}$ é contínua em I .

1.9 DERIVADA

1.9.1 Definição

Seja $\vec{f}(t)$ uma função vetorial. Sua derivada é a função vetorial $\vec{f}'(t)$, definida por

$$\vec{f}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t}, \text{ para todo } t, \text{ tal que o limite existe. Se a derivada } \vec{f}'(t) \text{ existe em todos os pontos de um intervalo } I, \text{ dizemos que } \vec{f} \text{ é derivável em } I.$$

Se $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$,

$$\text{temos}$$

$$\frac{\vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t} = \frac{f_1(t + \Delta t) - f_1(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{f_2(t + \Delta t) - f_2(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{f_3(t + \Delta t) - f_3(t)}{\Delta t} \vec{k}.$$

Portanto, pela Proposição 1.7.2, segue que \vec{f} é derivável em um ponto t se, e somente se, as três funções escalares $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ são deriváveis em t . Neste caso, temos

$$\vec{f}'(t) = f_1'(t)\vec{i} + f_2'(t)\vec{j} + f_3'(t)\vec{k}.$$

1.9.2 Exemplos

(i) Se $\vec{f}(t) = t^2 \vec{i} + \operatorname{cost} \vec{j} + (5t - 1) \vec{k}$, temos

$$\vec{f}'(t) = 2t \vec{i} - \operatorname{sent} t \vec{j} + 5 \vec{k}.$$

(ii) Se $\vec{g}(t) = (2t - 3)^3 \vec{i} + e^{-5t} \vec{j}$, temos que
 $\vec{g}'(t) = 6(2t - 3)^2 \vec{i} - 5e^{-5t} \vec{j}$.

1.9.3 Interpretação geométrica da derivada

Seja $\vec{f}(t)$ uma função vetorial derivável em um intervalo I . Quanto t percorre I , a extremidade livre do vetor $\vec{f}(t)$ descreve uma curva C no espaço.

Para cada $t \in I$, $\vec{f}(t)$ é o vetor posição do correspondente ponto sobre a curva (ver Figura 1.9).

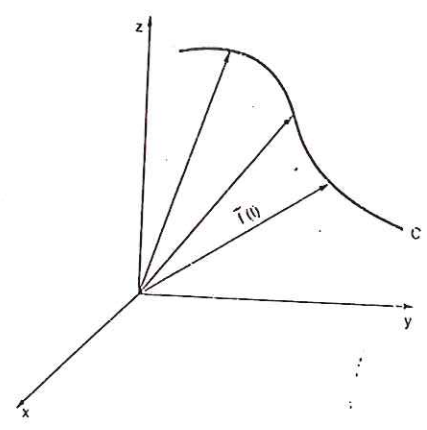


Figura 1.9

Sejam P e Q os pontos de C , correspondentes aos vetores posição $\vec{f}(t)$ e $\vec{f}(t + \Delta t)$, respectivamente. A reta que passa por P e Q é secante à curva C e o vetor $\Delta \vec{f} = \vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)$ coincide com o segmento \overline{PQ} (ver Figura 1.10). Como Δt é escalar, $\frac{\Delta \vec{f}}{\Delta t}$ tem a mesma direção do segmento \overline{PQ} .

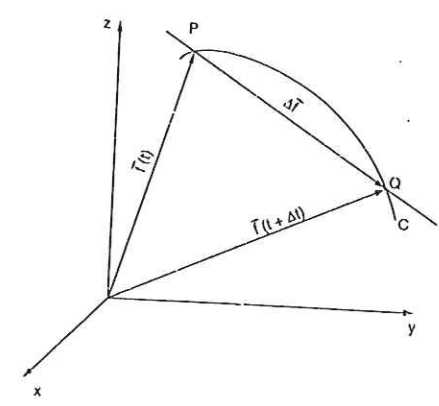


Figura 1.10

Quando $\Delta t \rightarrow 0$ ($Q \rightarrow P$), a reta secante se aproxima da reta tangente à curva C em P (ver Figura 1.11).

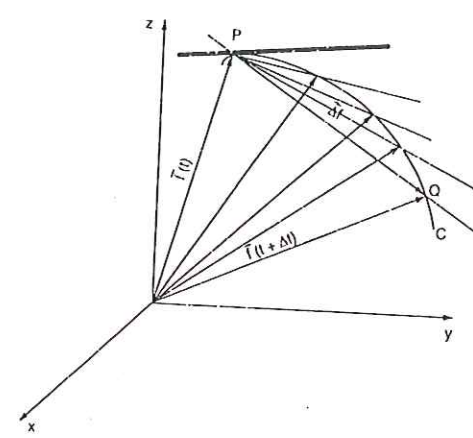


Figura 1.11

Assim, se $\vec{f}'(t) \neq 0$, $\vec{f}'(t)$ é um vetor tangente à curva C . Seu sentido é o do movimento da extremidade livre do vetor $\vec{f}(t)$ ao crescer t .

1.9.4 Exemplos

(i) Dada $\vec{f}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, determinar $\vec{f}'(t)$. Esboçar o hodógrafo de \vec{f} e os vetores $\vec{f}'(1)$, $\vec{f}'(-1)$ e $\vec{f}'(0)$.

Solução. Temos, $\vec{f}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j}$.

A Figura 1.12 mostra o hodógrafo de f , onde desenhamos os vetores

$$\vec{f}'(1) = \vec{i} + 2\vec{j}, \quad \vec{f}'(-1) = \vec{i} - 2\vec{j} \text{ e } \vec{f}'(0) = \vec{i}.$$

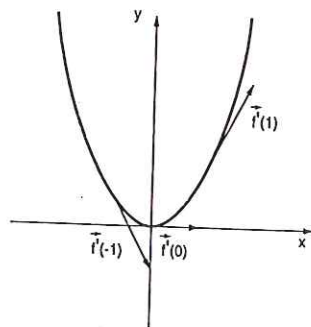


Figura 1.12

(ii) Determinar um vetor tangente ao hodógrafo de $\vec{g}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \vec{k}$, $t \in [0, 2\pi]$, no ponto $P(0, 1, 1)$.

Solução. Temos,

$$\vec{g}'(t) = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}.$$

Necessitamos do valor de $\vec{g}'(t)$ no ponto P . Para isso, precisamos determinar o correspondente valor de t . Como o vetor posição de P é $\vec{j} + \vec{k}$, t deve satisfazer

$$\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \vec{k} = \vec{j} + \vec{k}.$$

Portanto, $\cos t = 0$ e $\sin t = 1$ e dessa forma $t = \frac{\pi}{2}$.

Um vetor tangente ao hodógrafo de $\vec{g}(t)$ em $P(0, 1, 1)$ é $\vec{g}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\vec{i}$. A Figura 1.13 ilustra este exemplo.

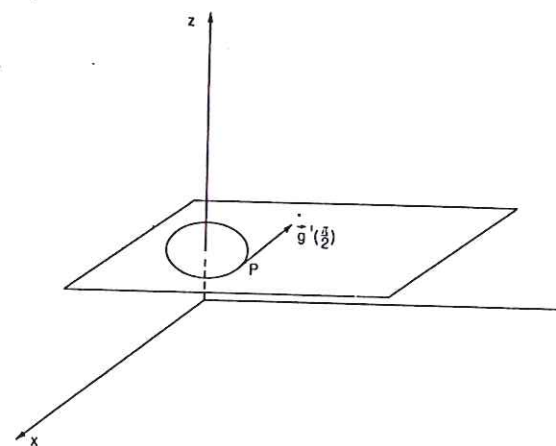


Figura 1.13

1.9.5 Interpretação Física da derivada

Consideremos uma partícula em movimento no espaço. Suponhamos que no tempo t , $\vec{r}(t)$ é o vetor posição da partícula com relação a um sistema de coordenadas cartesianas. Ao variar t , a extremidade livre do vetor $\vec{r}(t)$ descreve a trajetória C da partícula.

Suponhamos que a partícula esteja em P no tempo t e em Q no tempo $t + \Delta t$. Então $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ representa o deslocamento da partícula de P para Q , ocorrido no intervalo de tempo Δt (ver Figura 1.14).

A taxa média de variação de $\vec{r}(t)$ no intervalo Δt é dada por

$$\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

e é chamada velocidade média da partícula no intervalo de tempo Δt . A velocidade instantânea da partícula no tempo t , que denotamos $\vec{v}(t)$, é definida pelo limite

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

quando este limite existe.

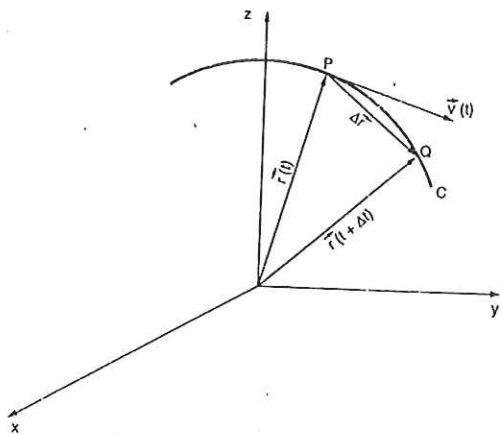


Figura 1.14

Portanto, quando $\vec{r}(t)$ é derivável, a velocidade instantânea da partícula é dada por

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t).$$

Analogamente, se $\vec{v}(t)$ é derivável, a aceleração da partícula é dada por

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t).$$

1.9.6 Exemplos

(i) O vetor posição de uma partícula em movimento no plano é

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{1}{t+1}\vec{j}, \quad t \geq 0.$$

- a) Determinar o vetor velocidade e o vetor aceleração em um instante qualquer t .
- b) Esboçar a trajetória da partícula, desenhando os vetores velocidade no tempo $t = 0$ e $t = 1$.

Solução de (a). Em um instante qualquer t , o vetor velocidade é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{r}'(t) \\ &= \vec{i} + \frac{-1}{(t+1)^2}\vec{j}. \end{aligned}$$

O vetor aceleração é o vetor

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \vec{v}'(t) \\ &= \frac{2}{(t+1)^3}\vec{j}. \end{aligned}$$

Solução de (b). No instante $t = 0$, os vetores velocidade e aceleração, respectivamente, são dados por:

$$\vec{v}(0) = \vec{i} - \vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{a}(0) = 2\vec{j}.$$

Para $t = 1$, temos

$$\vec{v}(1) = \vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{a}(1) = \frac{1}{4}\vec{j}.$$

A Figura 1.15 mostra a trajetória da partícula. Os vetores $\vec{v}(0)$ e $\vec{a}(0)$ estão desenhados com origem no ponto $P(0, 1)$ porque no instante $t = 0$ o vetor posição da partícula é $\vec{r}(0) = \vec{j}$. Como $\vec{r}(1) = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$, os vetores $\vec{v}(1)$ e $\vec{a}(1)$ tem sua origem no ponto $Q(1, 1/2)$.

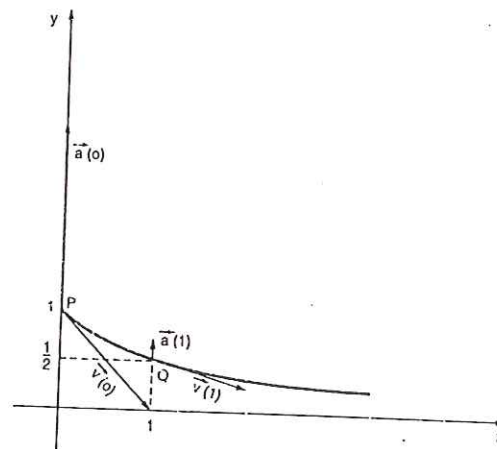


Figura 1.15

(ii) Determinar o vetor velocidade e o vetor aceleração de uma partícula que se move segundo a lei

$$\vec{r}(t) = \cos 2t \vec{i} + \sin 2t \vec{j} + \vec{k}.$$

Mostrar que o vetor velocidade é perpendicular ao vetor posição e que o vetor aceleração é perpendicular ao vetor velocidade.

Solução. Temos,

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{r}'(t) \\ &= -2\sin 2t \vec{i} + 2\cos 2t \vec{j} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \vec{v}'(t) \\ &= -4\cos 2t \vec{i} - 4\sin 2t \vec{j}. \end{aligned}$$

Sabemos que dois vetores são perpendiculares se o seu produto escalar é nulo. Temos,

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) &= (\cos 2t \vec{i} + \sin 2t \vec{j} + \vec{k}) \cdot (-2\sin 2t \vec{i} + 2\cos 2t \vec{j} + 0\vec{k}) \\ &= -2\sin 2t \cos 2t + 2\sin 2t \cos 2t + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) &= (-2\sin 2t \vec{i} + 2\cos 2t \vec{j}) \cdot (-4\cos 2t \vec{i} - 4\sin 2t \vec{j}) \\ &= 8\sin 2t \cos 2t - 8\sin 2t \cos 2t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o vetor $\vec{r}(t)$ é perpendicular ao vetor $\vec{v}(t)$ e $\vec{v}(t)$ é perpendicular a $\vec{a}(t)$. (Ver Figura 1.16.)

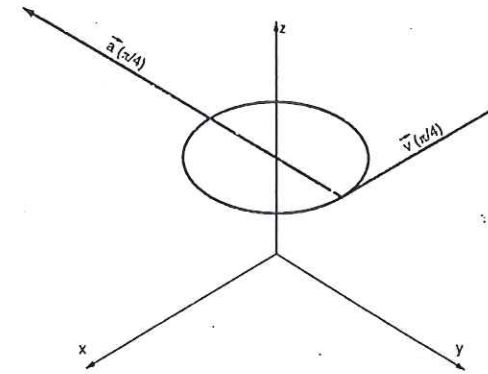


Figura 1.16

As REGRAS DE DERIVAÇÃO de funções vetoriais são similares às de funções escalares. Temos a seguinte proposição:

1.9.7 Proposição

Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vetoriais e $h(t)$ uma função escalar, deriváveis em um intervalo I . Então para todo $t \in I$, temos:

- a) $(\vec{f}(t) + \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) + \vec{g}'(t)$
- b) $(h(t)\vec{f}(t))' = h(t)\vec{f}'(t) + h'(t)\vec{f}(t)$
- c) $(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t)$
- d) $(\vec{f}(t) \times \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) \times \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \times \vec{g}'(t)$.

Prova do item (c). Sejam

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k} \text{ e}$$

$$\vec{g}(t) = g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}. \text{ Então,}$$

$$\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t).$$

Como $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ são deriváveis no intervalo I , o mesmo ocorre com as funções f_1, f_2, f_3, g_1, g_2 e g_3 . Usando as regras da derivação da soma e do produto de funções escalares, vem:

$$\begin{aligned}
 (\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))' &= [f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t)]' \\
 &= (f_1(t)g_1(t))' + (f_2(t)g_2(t))' + (f_3(t)g_3(t))' \\
 &= f_1'(t)g_1(t) + f_1(t)g_1'(t) + f_2'(t)g_2(t) + \\
 &\quad + f_2(t)g_2'(t) + f_3'(t)g_3(t) + f_3(t)g_3'(t) \\
 &= [f_1'(t)g_1(t) + f_2'(t)g_2(t) + f_3'(t)g_3(t)] + \\
 &\quad + [f_1(t)g_1'(t) + f_2(t)g_2'(t) + f_3(t)g_3'(t)] \\
 &= \vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t).
 \end{aligned}$$

1.9.8 Derivadas sucessivas

Seja $\vec{f}(t)$ uma função vetorial derivável em um intervalo I . Sua derivada $\vec{f}'(t)$ é uma função vetorial definida em I . Se $\vec{f}'(t)$ é derivável em um ponto $t \in I$, a sua derivada é chamada derivada segunda de \vec{f} no ponto t e é representada por $\vec{f}''(t)$.

Analogamente, são definidas as derivadas de ordem mais alta.

1.9.9 Exemplos

(i) Sejam $h(t) = t$ e $\vec{f}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$.

a) Determinar $(h(t)\vec{f}(t))'$.

b) Mostrar que $\vec{f}'(t)$ é ortogonal a $\vec{f}(t)$.

Solução de (a). Pela Proposição 1.9.7, temos que

$$\begin{aligned}
 (h(t)\vec{f}(t))' &= [t(\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j})]' \\
 &= t(\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j})' + (t)'(\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}) \\
 &= t(-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}) + (\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}) \\
 &= (\cos t - t \sin t)\vec{i} + (\sin t + t \cos t)\vec{j}.
 \end{aligned}$$

Solução de (b). Para que $\vec{f}(t)$ e $\vec{f}'(t)$ sejam ortogonais, devemos ter

$$\vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) = 0.$$

Temos,

$$\begin{aligned}
 \vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) &= (\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}) \cdot (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}) \\
 &= -\cos t \sin t + \sin t \cos t \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

(ii) Mostrar que $f'(t)$ é ortogonal a $\vec{f}(t)$ sempre que $|\vec{f}(t)|$ é uma constante.

Como $|\vec{f}(t)| = k$, k constante, e $|\vec{f}(t)| = \sqrt{\vec{f}(t) \cdot \vec{f}(t)}$, temos que $\vec{f}(t) \cdot \vec{f}(t) = k^2$, para todo t .

Derivando, vem

$$[\vec{f}(t) \cdot \vec{f}(t)]' = 0$$

$$\vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) + \vec{f}'(t) \cdot \vec{f}(t) = 0$$

$$2\vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) = 0$$

$$\vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) = 0$$

Logo, os vetores $\vec{f}(t)$ e $\vec{f}'(t)$ são ortogonais.

1.10 EXERCÍCIOS

1. Determinar a derivada das seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{f}(t) = \cos^3 t \vec{i} + \operatorname{tg} t \vec{j} + \operatorname{sen}^2 t \vec{k}$

b) $\vec{g}(t) = \operatorname{sen} t \cos t \vec{i} + e^{-2t} \vec{j}$

c) $\vec{h}(t) = (2 - t)\vec{i} + t^3 \vec{j} - \frac{1}{t} \vec{k}$

d) $\vec{f}(t) = e^{-t} \vec{i} + e^{-2t} \vec{j} + \vec{k}$

e) $\vec{g}(t) = \ln t \vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$

f) $\vec{h}(t) = \frac{5t-2}{2t+1} \vec{i} + \ln(1-t^2)\vec{j} + 5\vec{k}$

2. Determinar um vetor tangente ao hodógrafo das seguintes funções, nos pontos indicados.

a) $\vec{f}(t) = (t, t^2, t^3), P(-1, 1, -1)$

b) $\vec{g}(t) = (t, e^t), P(1, e)$

c) $\vec{h}(t) = (\sin t, \cos t, t), P(1, 0, \pi/2)$

d) $\vec{p}(t) = \left(1-t, \frac{1}{1-t}\right), P(-1, -1)$

e) $\vec{r}(t) = (2t, \ln t, 2), P(2, 0, 2)$

3. Mostrar que o hodógrafo de $\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2} \cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ está sobre a esfera unitária com centro na origem. Determinar um vetor tangente a essa curva no ponto $P\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Determinar dois vetores unitários, tangentes ao hodógrafo da função dada no ponto indicado.

a) $\vec{f}(t) = (e^t, e^{-t}, t^2 + 1); P(1, 1, 1)$

b) $\vec{g}(t) = (4 + 2\cos t, 2 + 2\sin t, 1); P(4, 4, 1)$

c) $\vec{h}(t) = \left(\frac{1}{2}t, \sqrt{t+1}, t+1\right); P(1, \sqrt{3}, 3)$

d) $\vec{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t); P(0, \pi/2, \pi/2)$

5. Determinar os vetores velocidade e aceleração para qualquer instante t . Determinar, ainda, o módulo desses vetores no instante dado.

a) $\vec{r}(t) = 2\cos t \vec{i} + 5\sin t \vec{j} + 3\vec{k}; t = \pi/4$

b) $\vec{r}(t) = e^t \vec{i} + e^{-2t} \vec{j}; t = \ln 2$

c) $\vec{r}(t) = \cosh t \vec{i} + 3\sinh t \vec{j}; t = 0$

6. A posição de uma partícula em movimento no plano, no tempo t , é dada por

$$x(t) = \frac{1}{2}(t-1)$$

$$y(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 2t + 1)$$

- a) Escrever a função vetorial $\vec{f}(t)$ que descreve o movimento desta partícula.
b) Determinar o vetor velocidade e o vetor aceleração.
c) Esboçar a trajetória da partícula e os vetores velocidade e aceleração no instante $t = 5$.

7. No instante t , a posição de uma partícula no espaço é dada por $x(t) = t^2, y(t) = 2\sqrt{t}, z(t) = 4\sqrt{t^3}$.

- a) Escrever a função vetorial que nos dá a trajetória da partícula.
b) Determinar um vetor tangente à trajetória da partícula no ponto $P(1, 2, 4)$.
c) Determinar a posição, velocidade e a aceleração da partícula para $t = 4$.
8. Uma partícula se move no espaço com vetor posição $\vec{r}(t)$. Determinar a velocidade e a aceleração da partícula em um instante t qualquer. Esboçar a trajetória da partícula e os vetores velocidade e aceleração para os valores indicados de t .

a) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + 4\vec{j} + (4-t^2)\vec{k}; t = 0; 2$

b) $\vec{r}(t) = \frac{1}{1+t} \vec{i} + t\vec{j}; t = 1; 2$

c) $\vec{r}(t) = t^2\vec{j} + t^6\vec{k}; t = 0; 1$

d) $\vec{r}(t) = (1-t)\vec{i} + (1+t)\vec{j}; t = 1; 2$

9. Sejam \vec{a} e \vec{b} dois vetores constantes. Determinar o vetor velocidade da partícula cujo movimento é descrito por:
- $\vec{r}_1(t) = \vec{a} + t\vec{b}$
 - $\vec{r}_2(t) = \vec{a}t^2 + \vec{b}t$.
10. Se $\vec{r}(t)$ é o vetor posição de uma partícula em movimento, mostrar que o vetor velocidade da partícula é perpendicular a $\vec{r}(t)$.
- $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$
 - $\vec{r}(t) = (\cos 3t, \sin 3t)$.
11. Em cada um dos itens do exercício anterior, mostrar que o vetor aceleração tem o sentido oposto ao do vetor posição.
12. Mostrar que, quando uma partícula se move com velocidade constante, os vetores velocidade e aceleração são ortogonais.
13. Sejam \vec{a} e \vec{b} vetores constantes não nulos. Seja $\vec{r}(t) = e^{2t}\vec{a} + e^{-2t}\vec{b}$. Mostrar que $\vec{r}''(t)$ tem o mesmo sentido que $\vec{r}(t)$.
14. Seja $\vec{r}(t) = 2\cos wt \vec{i} + 4\sin wt \vec{j}$, onde w é uma constante não nula. Mostrar que $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2\vec{r}$.
15. Dados $\vec{f}(t) = t\vec{j} + t^2\vec{k}$
e
 $\vec{g}(t) = t^2\vec{j} - t\vec{k}$,
determinar:
- $(\vec{f}(t) \times \vec{g}(t))'$
 - $(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))'$
 - $(\vec{f}(t) \times \vec{f}(t))'$
 - $(\vec{g}(t) \cdot \vec{g}(t))'$.

16. Se $f(t) = \frac{1}{t-1}$ e $\vec{f}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, determinar $(f(t)\vec{f}(t))'$.

17. Sejam $f(t)$ uma função escalar 2 vezes derivável e \vec{a} e \vec{b} vetores constantes. Mostrar que se $\vec{g}(t) = \vec{a} + \vec{b}f(t)$, então $\vec{g}'(t) \times \vec{g}''(t) = \vec{0}$.

18. Se \vec{f} é uma função vetorial derivável e $h(t) = |\vec{f}(t)|$, mostrar que $\vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) = h(t)h'(t)$.

Capítulo 2

CURVAS

Neste capítulo, faremos um estudo sobre curvas, representando-as por meio de equações paramétricas ou de uma equação vetorial. Serão introduzidos vários conceitos necessários no estudo das integrais curvilíneas que será feito no capítulo V.

2.1 REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA

Sejam

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\y &= y(t) \\z &= z(t)\end{aligned}\tag{1}$$

funções contínuas de uma variável t , definidas para $t \in [a, b]$. Chamamos CURVA o conjunto de todos os pontos (x, y, z) determinados por estas equações.

As equações (1) são chamadas equações paramétricas da curva e t é chamado parâmetro.

Podemos obter uma equação vetorial de uma curva. Basta considerar o vetor posição $\vec{r}(t)$ de cada ponto da curva. As componentes de $\vec{r}(t)$ são precisamente as coordenadas do ponto (ver Figura 2.1).

Escrevemos,

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b.\tag{2}$$

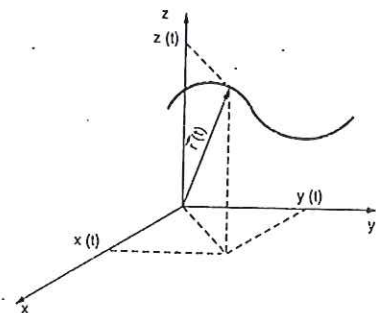


Figura 2.1

Observamos que se as funções $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ são funções constantes, a curva degenera-se em um ponto.

2.2 EXEMPLOS

(i) A equação vetorial $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$ representa uma reta, cujas equações paramétricas são

$$x(t) = t$$

$$y(t) = t$$

$$z(t) = t.$$

(ii) As equações paramétricas

$$x = 2 \cos t$$

$$y = 2 \sin t$$

$$z = 3t$$

representam uma curva no espaço, chamada hélice circular. A equação vetorial correspondente é

$$\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j} + 3t \vec{k}.$$

(iii) A equação vetorial

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + 3\vec{k}$$
 representa uma parábola no plano $z = 3$.

2.3 DEFINIÇÃO

Uma curva plana é uma curva que está contida em um plano no espaço. Uma curva que não é plana chamada-se curva reversa.

As curvas dos exemplos 2.2 (i) e (iii) são planas e a curva do Exemplo 2.2 (ii) é reversa.

2.4 REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DE ALGUMAS CURVAS

A seguir daremos a parametrização de algumas curvas consideradas importantes tendo em vista a sua utilização em muitos exemplos práticos.

2.4.1 Parametrização de uma reta

A equação vetorial de uma reta qualquer pode ser dada por

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b}, \quad (3)$$

onde \vec{a} e \vec{b} são vetores constantes e t é um parâmetro real.

Na Figura 2.2 podemos visualizar os vetores \vec{a} e \vec{b} . A reta passa pelo ponto A, que tem vetor posição \vec{a} e tem a direção do vetor \vec{b} .

Considerando as coordenadas de A (a_1, a_2, a_3) que coincidem com as componentes do vetor \vec{a} e considerando também as componentes do vetor $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, reescrevemos (3) como

$$\vec{r}(t) = (a_1 + tb_1)\vec{i} + (a_2 + tb_2)\vec{j} + (a_3 + tb_3)\vec{k}. \quad (4)$$

De (4), podemos dizer que as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto (a_1, a_2, a_3) e tem direção $b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, são

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 + tb_1 \\ y(t) &= a_2 + tb_2 \\ z(t) &= a_3 + tb_3 \end{aligned} \quad (5)$$

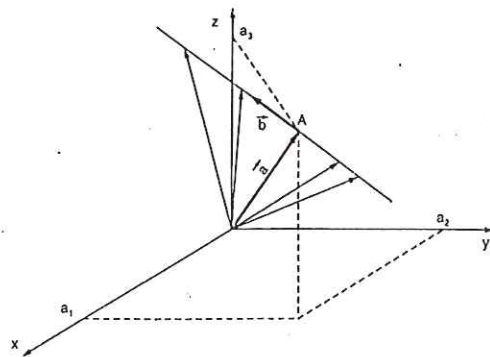


Figura 2.2

2.4.2 Exemplos

(i) Determinar uma representação paramétrica da reta que passa pelo ponto $A(2, 1, -1)$ na direção do vetor $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

Usando (4), escrevemos

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (2 + t.2)\vec{i} + (1 + t(-3))\vec{j} + (-1 + t.1)\vec{k} \\ &= (2 + 2t)\vec{i} + (1 - 3t)\vec{j} + (-1 + t)\vec{k}. \end{aligned}$$

A Figura 2.3 nos mostra a representação gráfica desta reta.

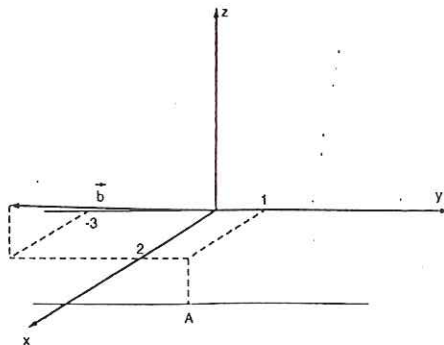


Figura 2.3

(ii) Determinar uma representação paramétrica da reta que passa por $A(2, 0, 1)$ e $B(-1, 1/2, 0)$.

Usando (3), podemos escrever

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{a} + t\vec{b}, \text{ onde } \vec{a} = (2, 0, 1) \text{ e} \\ \vec{b} &= (-1, 1/2, 0) - (2, 0, 1) \\ &= (-3, 1/2, -1). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (2\vec{i} + \vec{k}) + t(-3\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \vec{k}) \\ &= (2 - 3t)\vec{i} + \frac{1}{2}t\vec{j} + (1 - t)\vec{k}. \end{aligned}$$

A Figura 2.4 ilustra este exemplo.

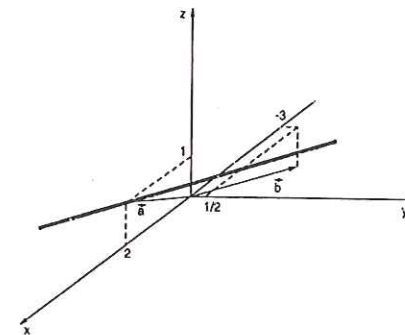


Figura 2.4

2.4.3 Parametrização de uma circunferência

Uma equação vetorial da circunferência de raio a , com centro na origem, no plano xy , é

$$\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (6)$$

Na Figura 2.5, visualizamos o parâmetro t , $0 \leq t \leq 2\pi$, que representa o ângulo formado pelo eixo positivo dos x e o vetor posição de cada ponto da curva.

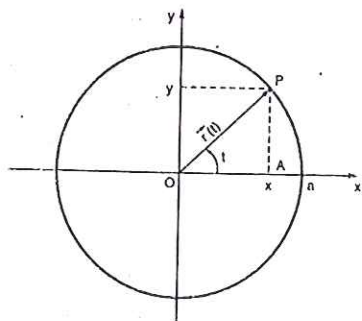


Figura 2.5

Do triângulo OAP na Figura 2.5, obtemos

$$x(t) = acost$$

$$y(t) = asent.$$

Quando a circunferência não está centrada na origem (ver Figura 2.6), a equação vetorial é dada por

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{r}_1(t)$$

onde $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$

e

$$\vec{r}_1(t) = acost\vec{i} + asent\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

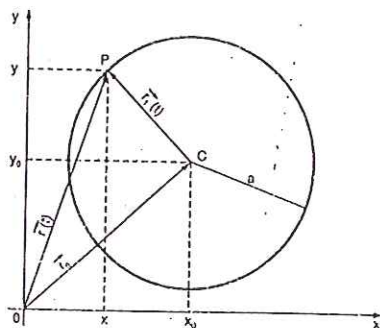


Figura 2.6

Portanto, neste caso, a equação vetorial é dada por

$$\vec{r}(t) = (x_0 + acost)\vec{i} + (y_0 + asent)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (7)$$

De maneira análoga, podemos obter uma equação vetorial para uma circunferência contida no plano xz ou yz. Também podemos obter uma equação vetorial para uma circunferência contida em um plano paralelo a um dos planos coordenados.

2.4.4 Exemplos

(i) Obter equações paramétricas da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ no plano $z = 3$.

Para encontrarmos o centro e o raio da circunferência dada, devemos completar os quadrados da equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$.

Temos, $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Usando (7), obtemos

$$x(t) = 3 + 3cost$$

$$y(t) = 2 + 3sent$$

$$z(t) = 3$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

A Figura 2.7 ilustra este exemplo.

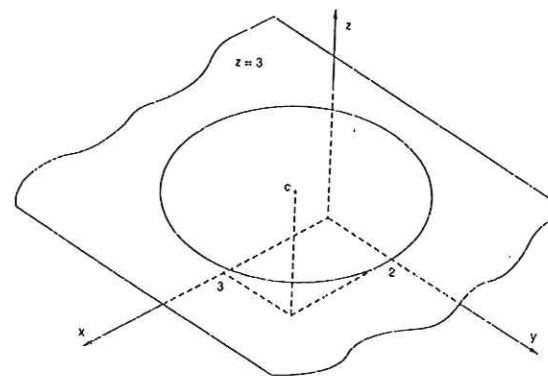


Figura 2.7

(ii) A equação vetorial

$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\cos t\vec{j} + 3\sin t\vec{k}$ representa uma circunferência. Determinar a correspondente equação cartesiana.

As equações paramétricas são

$$x(t) = 2$$

$$y(t) = 3\cos t$$

$$z(t) = 3\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Para determinar a equação cartesiana, devemos eliminar o parâmetro t .

Elevando ao quadrado cada uma das duas últimas equações e somando-as, obtemos

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 &= 9\cos^2 t + 9\sin^2 t \\ &= 9(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 9. \end{aligned}$$

Portanto, a circunferência é dada pela intersecção de $y^2 + z^2 = 9$ e $x = 2$.

2.4.5 Parametrização de uma elipse

Uma equação vetorial de uma elipse, no plano xy , com centro na origem e eixos nas direções dos eixos x e y (ver Figura 2.8) é

$$\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + b\sin t\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (8)$$

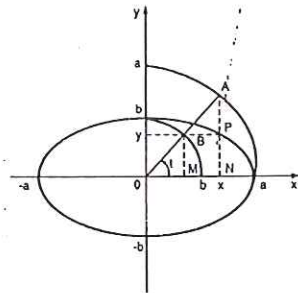


Figura 2.8

Consideramos um ponto $P(x(t), y(t))$ da curva. Traçamos um arco de circunferência de raio a , e outro de raio b , ambos centrados na origem.

Marcamos, respectivamente, sobre esses arcos os pontos A de abscissa x e B de ordenada y . Pode-se verificar que os pontos A , B e a origem estão em uma mesma reta. O parâmetro t representa o ângulo que esta reta faz com o eixo positivo dos x .

Do triângulo retângulo ONA , obtemos $x = a\cos t$, e do triângulo retângulo OMB , $y = b\sin t$.

Se a elipse estiver centrada em (x_0, y_0) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados (ver Figura 2.9), sua equação vetorial é

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{r}_1(t),$$

onde $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ e $\vec{r}_1(t) = a\cos t\vec{i} + b\sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Assim,

$$\vec{r}(t) = (x_0 + a\cos t)\vec{i} + (y_0 + b\sin t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (9)$$

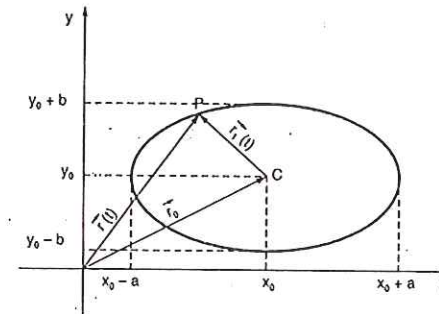


Figura 2.9

2.4.6 Exemplos

(i) Escrever uma equação vetorial da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$, no plano xy .

Podemos reescrever $9x^2 + 4y^2 = 36$, como

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Desta forma, usando (8), escrevemos

$$\vec{r}(t) = 2\cos t \vec{i} + 3\sin t \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(ii) Escrever uma equação vetorial para a elipse da Figura 2.10.

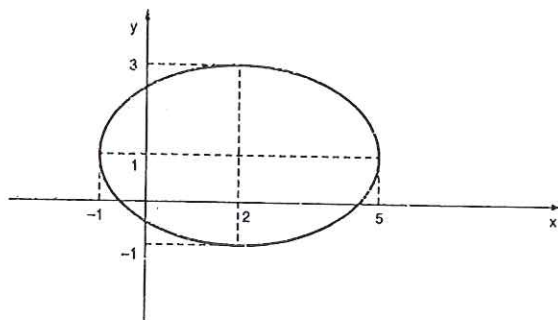


Figura 2.10

Na Figura 2.10, observamos que o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo dos x e mede 6 unidades. O eixo menor é paralelo ao eixo dos y e mede 4 unidades.

O centro da elipse é o ponto $(2, 1)$. Portanto, a equação cartesiana da elipse é

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1.$$

Suas equações paramétricas são:

$$x(t) = 2 + 3\cos t$$

$$y(t) = 1 + 2\sin t$$

$$z(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e então, a equação vetorial é

$$\vec{r}(t) = (2 + 3\cos t)\vec{i} + (1 + 2\sin t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

2.4.7 Parametrização de uma hélice circular

A hélice circular é uma curva reversa. Ela se desenvolve sobre a superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = a^2$. Este fato pode ser visualizado como segue.

Consideremos parte da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = a^2$, como na Figura 2.11.

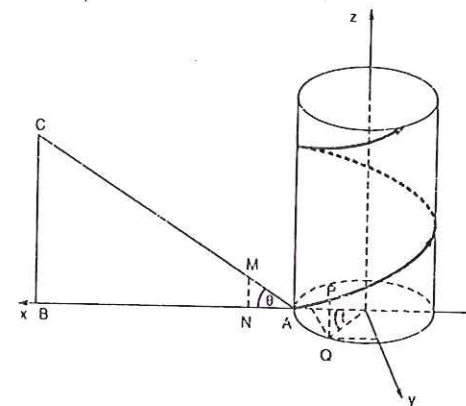


Figura 2.11

Enrolemos à volta da superfície um triângulo retângulo flexível ABC de modo que A é o ponto $(a, 0, 0)$ e que o lado AB se enrola sobre a seção do cilindro no plano xy . A hipotenusa AC determina, então, sobre a superfície cilíndrica uma curva chamada hélice circular.

Para parametrizar a hélice, consideremos um ponto $P(x, y, z)$ da hélice cuja projeção no plano xy é Q . O ponto P se originou do correspondente ponto M sobre a hipotenusa AC . A projeção de M é N e obviamente $\overline{PQ} = \overline{MN}$. Temos ainda $\overline{AN} = \overline{AQ} = at$.

Dessa forma, escrevemos

$$x(t) = a\cos t$$

$$y(t) = a\sin t$$

$$z(t) = \overline{PQ} = \overline{AN} \operatorname{tg} \theta = at \operatorname{tg} \theta,$$

onde θ é o ângulo agudo $B\hat{A}C$.

Podemos fazer $\theta = m$ e escrever a equação vetorial da hélice circular como:

$$\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + amt \vec{k}. \quad (10)$$

Observamos que (10) representa a equação da hélice esboçada na Figura 2.11, e portanto, $m > 0$. Sua forma lembra um parafuso de rosca à direita. Poderíamos, de maneira análoga, encontrar a equação vetorial de uma hélice onde $m < 0$, cuja forma lembra um parafuso de rosca à esquerda (ver Figura 2.12).

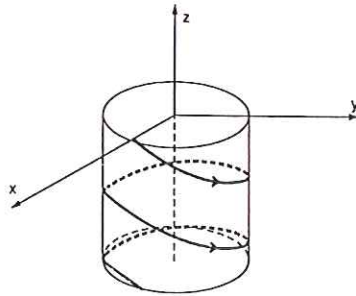


Figura 2.12

2.4.8 Exemplo

Representar graficamente a hélice circular $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t\vec{k}$ para $0 \leq t \leq 3\pi$.

Encontrar o seu vetor velocidade e o seu vetor aceleração. Mostrar no gráfico os vetores $\vec{v}\left(\frac{9\pi}{4}\right)$ e $\vec{a}\left(\frac{9\pi}{4}\right)$.

Já sabemos que a hélice circular dada neste exemplo se desenvolve no cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Podemos tabelar alguns pontos convenientemente (ver Tabela 2.1) e esboçar a curva (ver Figura 2.13).

Tabela 2.1

t	$\vec{r}(t)$
0	(1, 0, 0)
$\pi/4$	$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \pi/4)$
$\pi/2$	(0, 1, $\pi/2$)
π	(-1, 0, π)
$3\pi/2$	(0, -1, $3\pi/2$)
2π	(1, 0, 2π)
3π	(-1, 0, 3π)

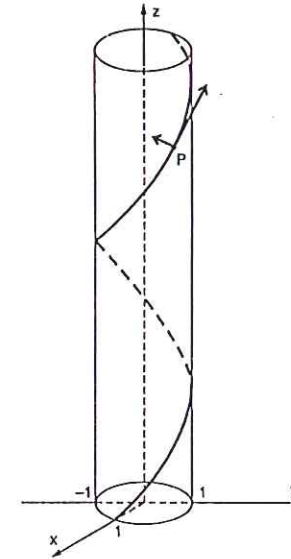


Figura 2.13

O vetor velocidade é dado por

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k}, \end{aligned}$$

e o vetor aceleração é

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= -\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{v}(9\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{a}(9\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}.$$

Os vetores $\vec{v}(9\pi/4)$ e $\vec{a}(9\pi/4)$ podem ser vistos na Figura 2.13.

2.4.9 Parametrização de uma cicloide

A cicloide é uma curva que surgiu para solucionar dois problemas famosos:

(i) A determinação da forma de um cabo, de um ponto A a um ponto abaixo B , como mostra a Figura 2.14, tal que uma bolinha sem atrito, solta em um ponto P entre A e B sobre o cabo, gaste o mesmo tempo para alcançar B , qualquer que seja a posição de P .

(ii) A determinação de um único cabo que liga A a B , ao longo do qual uma bolinha escorregará de A a B no menor tempo possível.

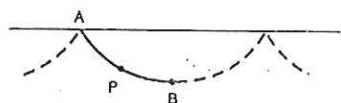


Figura 2.14

Esses problemas são resolvidos, considerando-se o cabo com a forma de meio arco de uma cicloide.

A cicloide pode ser descrita pelo movimento do ponto $P(0, 0)$ de um círculo de raio a , centrado em $(0, a)$, quando o círculo gira sobre o eixo dos x (ver Figura 2.15).

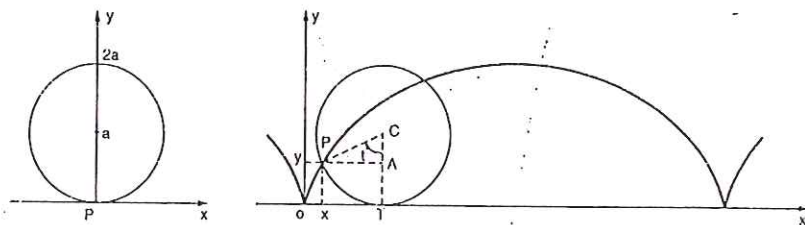


Figura 2.15

Quando o círculo gira um ângulo t , seu centro se move um comprimento \overline{OT} . Na Figura 2.15 temos $\overline{OT} = \overline{TP} = at$, $\overline{CT} = a$, $\overline{CA} = acost$ e $\overline{AP} = asent$.

Portanto, as coordenadas de P são

$$x = \overline{OT} - \overline{AP} = at - asent = a(t - sent)$$

$$y = \overline{AT} = \overline{CT} - \overline{AC} = a - acost = a(1 - cost)$$

Essas equações são válidas para qualquer P . Logo, a equação vetorial da cicloide é

$$\vec{r}(t) = a(t - sent)\vec{i} + a(1 - cost)\vec{j}. \tag{11}$$

Quando t varia de 0 a 2π obtemos o primeiro arco da cicloide.

2.4.10 Exemplo

Escrever a equação vetorial da curva descrita pelo movimento de uma cabeça de prego em um pneu de um carro que se move em linha reta, se o raio do pneu é 25 cm.

Supondo que a cabeça do prego se encontre localizada no pneu no ponto P , conforme Figura 2.15, sua trajetória é uma cicloide.

Usando (11), temos que

$$\vec{r}(t) = 25(t - sent)\vec{i} + 25(1 - cost)\vec{j}.$$

2.4.11 Parametrização de uma hipocicloide

Uma hipocicloide é a curva descrita pelo movimento de um ponto fixo P , de um círculo de raio b , que gira dentro de um círculo fixo de raio a , $a > b$ (ver Figura 2.16).

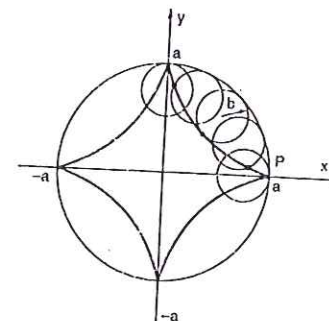


Figura 2.16

Suponhamos que, inicialmente o círculo de raio b tangencia o círculo de raio a no ponto $(a, 0)$ e que o ponto P é este ponto de tangência.

Para parametrizar a curva, vamos analisar a Figura 2.17, onde demarcamos o ponto P quando o ponto de tangência dos dois círculos é T .

Pela construção da curva, temos que os arcos \widehat{AT} e \widehat{PT} são iguais.

Portanto,

$$at = b\alpha \text{ e assim } \alpha = \frac{a}{b}t.$$

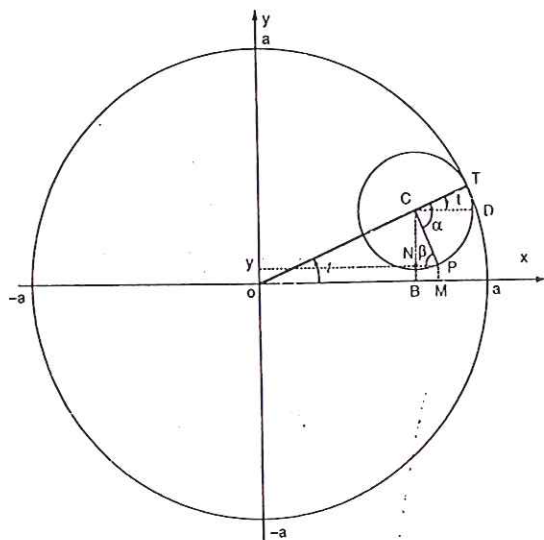


Figura 2.17

Por outro lado, como $\beta = \widehat{PT}$, segue que

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha - t \\ &= \frac{a}{b}t - t \\ &= \frac{a-b}{b}t. \end{aligned}$$

Queremos determinar as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ do ponto P . Temos,

$$\begin{aligned} x &= \overline{OB} + \overline{BM} \\ &= (a-b)\cos t + b\cos\beta \\ &= (a-b)\cos t + b\cos\frac{(a-b)}{b}t; \\ y &= \overline{PM} \\ &= \overline{BN} \\ &= \overline{BC} - \overline{CN} \\ &= (a-b)\sin t - b\sin\beta \\ &= (a-b)\sin t - b\sin\frac{(a-b)}{b}t. \end{aligned}$$

Portanto, as equações paramétricas da hipociclóide são

$$x(t) = (a-b)\cos t + b\cos\frac{(a-b)}{b}t \quad (12)$$

$$y(t) = (a-b)\sin t - b\sin\frac{(a-b)}{b}t.$$

A equação vetorial correspondente é

$$\vec{r}(t) = \left[(a-b)\cos t + b\cos\frac{(a-b)}{b}t \right] \vec{i} + \left[(a-b)\sin t - b\sin\frac{(a-b)}{b}t \right] \vec{j}. \quad (13)$$

Os cúspides ocorrem nos pontos onde o ponto de tangência dos dois círculos é o ponto P . Portanto, ocorrem quando

$$at = n \cdot 2\pi b, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{ou} \quad t = n \cdot 2\pi \frac{b}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Um caso particular muito usado é o da hipociclóide de quatro cúspides (ver Figura 2.18) que é obtida fazendo $b = \frac{a}{4}$.

Substituindo o valor de $b = \frac{a}{4}$ em (12), obtemos

$$x = \frac{a}{4} (3\cos t + \cos 3t)$$

$$y = \frac{a}{4} (3\sin t - \sin 3t).$$

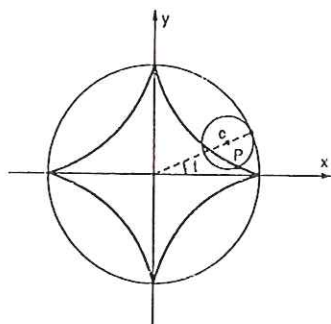


Figura 2.18

Usando as relações trigonométricas

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

$$\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t,$$

vem

$$x(t) = a\cos^3 t$$

$$y(t) = a\sin^3 t.$$

Assim, uma equação vetorial da hipociclóide da Figura 2.18 é dada por

$$\vec{r}(t) = a\cos^3 t \vec{i} + a\sin^3 t \vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (15)$$

Eliminando o parâmetro t das equações (14), obtemos a equação cartesiana desta hipociclóide, que é dada por

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}. \quad (16)$$

2.4.12 Exemplo

Dada $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$, encontrar uma equação vetorial desta hipociclóide. Encontrar o vetor velocidade e o vetor aceleração no ponto $(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{6}}{4})$.

Usando (15), escrevemos a equação vetorial

$$\vec{r}(t) = 2\sqrt{2} \cos^3 t \vec{i} + 2\sqrt{2} \sin^3 t \vec{j}.$$

O vetor velocidade é dado por

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -6\sqrt{2} \cos^2 t \sin t \vec{i} + 6\sqrt{2} \sin^2 t \cos t \vec{j}.$$

O vetor aceleração é

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -6\sqrt{2} (\cos^3 t - 2\sin^2 t \cos t) \vec{i} + 6\sqrt{2} (2\cos^2 t \sin t - \sin^3 t) \vec{j}.$$

No ponto $(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{6}}{4})$, temos que $t = \frac{\pi}{3}$.

Portanto,

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{6}}{4} \vec{i} + \frac{9\sqrt{2}}{4} \vec{j}$$

e

$$\vec{a}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{15\sqrt{2}}{4} \vec{i} - \frac{3\sqrt{6}}{4} \vec{j}.$$

2.4.13 Parametrização de outras curvas

Na seção 2.1 vimos que uma curva pode ser representada por uma equação vetorial. Existem outras formas de representação de uma curva. Por exemplo, o gráfico de uma função contínua $y = f(x)$ representa uma curva no plano xy . A intersecção de duas superfícies representa, em geral, uma curva no plano ou no espaço.

A seguir, encontraremos uma representação paramétrica para algumas curvas representadas como intersecção de duas superfícies.

2.4.14 Exemplos

(i) Escrever uma equação vetorial para

$$y = 5x + 3 \text{ no plano } z = 2.$$

Solução. A curva C que queremos parametrizar é a intersecção dos planos $y = 5x + 3$ e $z = 2$.

Fazemos

$$x(t) = t$$

$$y(t) = 5t + 3$$

$$z(t) = 2,$$

e então,

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + (5t + 3)\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Observamos que esta parametrização não é única. Também poderíamos ter feito, por exemplo,

$$x(t) = 2t + 1$$

$$y(t) = 5(2t + 1) + 3$$

$$z(t) = 2,$$

e então,

$$\vec{r}(t) = (2t + 1)\vec{i} + (10t + 8)\vec{j} + 2\vec{k}.$$

(ii) A intersecção entre as superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 + y$ determina uma curva. Escrever uma equação vetorial desta curva.

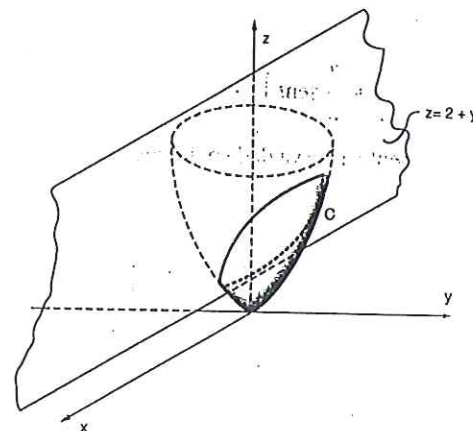


Figura 2.19

A Figura 2.19 mostra um esboço da curva. Para parametrizá-la, observamos que x e y devem satisfazer a equação

$$2 + y = x^2 + y^2 \quad \text{ou}$$

$$x^2 + y^2 - y = 2 \quad \text{ou ainda}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

que é uma circunferência de raio $\frac{3}{2}$ e centro $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Esta circunferência é a projeção da curva sobre o plano xy . Fazemos então,

$$x = \frac{3}{2} \cos t$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Substituindo o valor de y na equação $z = 2 + y$, obtemos

$$z = 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin t.$$

Portanto,

$$\vec{r}(t) = \frac{3}{2} \cos t \vec{i} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin t\right) \vec{j} + \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \sin t\right) \vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(iii) Representar parametricamente a curva dada pela intersecção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$.

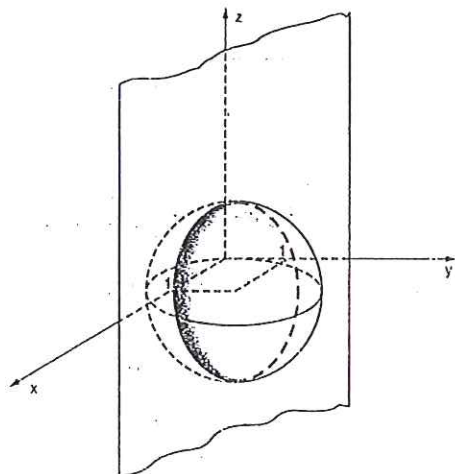


Figura 2.20

A Figura 2.20 mostra um esboço da curva.

Neste exemplo, é conveniente projetar a curva no plano yz ou no plano xz .

Projetando no plano yz , temos

$$(2 - y)^2 + y^2 + z^2 = 2.2$$

$$4 - 4y + y^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$(y - 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1.$$

Logo, a elipse $(y - 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1$ representa esta projeção.

Usando (9), temos

$$y(t) = 1 + \cos t$$

$$z(t) = \sqrt{2} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Substituindo o valor de y em $x + y = 2$, encontramos

$$x(t) = 2 - (1 + \cos t)$$

$$= 1 - \cos t.$$

Dessa forma,

$$\vec{r}(t) = (1 - \cos t)\vec{i} + (1 + \cos t)\vec{j} + \sqrt{2} \sin t \vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

é a equação vetorial pedida.

2.5 CURVAS SUAVES

Uma curva pode ter pontos angulosos. Vejamos dois exemplos.

(i) Seja $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$, $-1 \leq t \leq 1$.

A Figura 2.21 mostra esta curva. O ponto $(0, 0)$, correspondente a $t = 0$, é um ponto anguloso. Observamos que $\vec{r}'(0) = \vec{0}$.

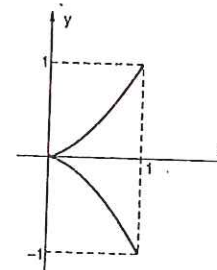


Figura 2.21

(ii) Seja $\vec{r}(t) = \begin{cases} \vec{i} + t\vec{j}, & 0 \leq t \leq 1 \\ t\vec{i} + \vec{j}, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$

Na Figura 2.22, temos um esboço desta curva. Podemos observar que o ponto $(1, 1)$, correspondente a $t = 1$, é um ponto anguloso e que a derivada $\vec{r}'(1)$ não existe.

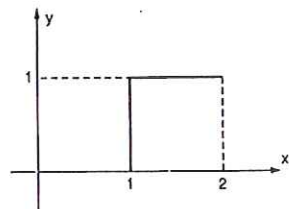


Figura 2.22

Geometricamente, uma curva suave é caracterizada pela ausência de pontos angulosos. Em cada um de seus pontos, a curva tem uma tangente única que varia continuamente quando se move sobre a curva (ver Figura 2.23).

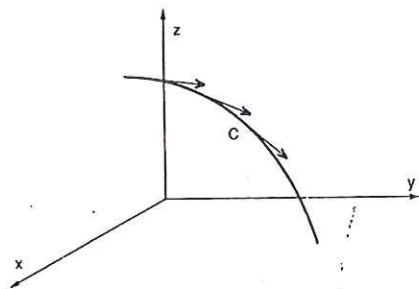


Figura 2.23

Sempre que uma curva C admite uma parametrização $\vec{r}(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, que tem derivada contínua $\vec{r}'(t)$ e $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, para todo $t \in I$, C é uma curva suave ou regular.

Uma curva é suave por partes se puder ser dividida em um número finito de curvas suaves.

2.5.1 Exemplos

- (i) Retas, circunferências, elipses, hélices são curvas suaves.
- (ii) As curvas dos exemplos 2.5 (i) e (ii) são curvas suaves por partes.

(iii) A cicloide e a hipocicloide são curvas suaves por partes.

(iv) A Figura 2.24 mostra esboços de curvas suaves por partes.

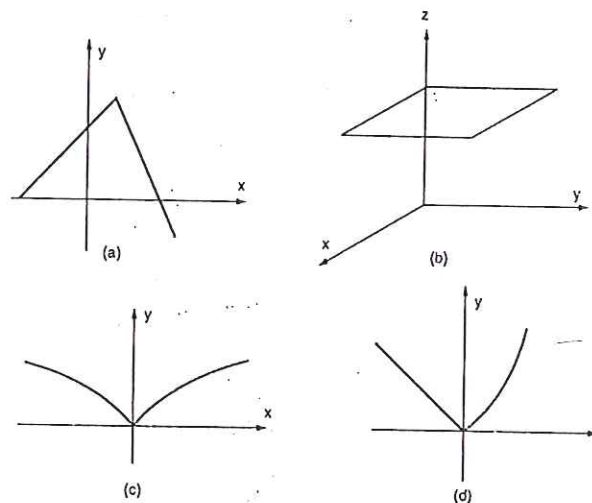


Figura 2.24

2.6 DEFINIÇÃO

- a) Uma curva parametrizada $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, é dita fechada se $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
- b) Se a cada ponto da curva corresponde um único valor do parâmetro t (exceto quando $t = a$ e $t = b$), dizemos que a curva é simples.

2.6.1 Exemplos

(i) A Figura 2.25 mostra esboços de curvas fechadas simples.



Figura 2.25

(ii) A Figura 2.26 mostra esboços de curvas que não são simples.



Figura 2.26

2.7 ORIENTAÇÃO DE UMA CURVA

Se um ponto material desloca-se sobre uma curva suave C , temos dois possíveis sentidos de percurso. A escolha de um deles como sentido positivo, define uma orientação na curva C .

Suponhamos que a curva C seja representada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b].$$

Convencionamos chamar de sentido positivo sobre C , o sentido no qual a curva é traçada quando o parâmetro t cresce de a até b (ver Figura 2.27). O sentido oposto é chamado sentido negativo sobre C .

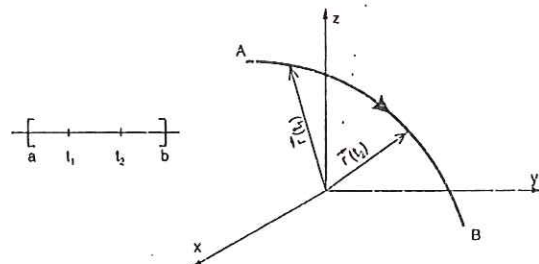


Figura 2.27

De acordo com nossa convenção, sempre que uma curva suave C é representada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

C é uma curva orientada e o seu sentido positivo de percurso é o sentido dos valores crescentes do parâmetro t .

Se uma curva simples C é suave por partes, podemos orientá-la, como mostra a Figura 2.28, orientando cada parte suave de C .

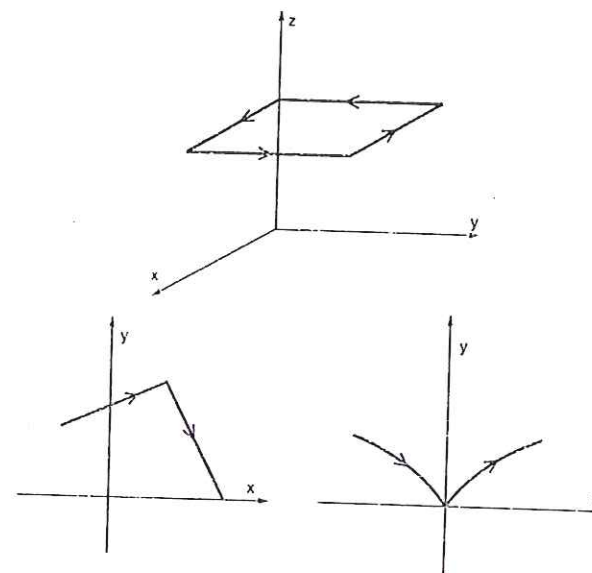


Figura 2.28

2.7.1 Definição

Dada uma curva orientada C , representada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b];$$

a curva $-C$ é definida como sendo a curva C com orientação oposta. A curva $-C$ é dada por

$$\begin{aligned}\vec{r}^{-}(t) &= \vec{r}(a+b-t) \\ &= x(a+b-t)\vec{i} + y(a+b-t)\vec{j} + z(a+b-t)\vec{k}, \quad t \in [a, b].\end{aligned}$$

2.7.2 Exemplos

(i) Na parametrização da reta do Exemplo 2.4.2 (ii), o sentido positivo de percurso é do ponto A para o ponto B .

(ii) O sentido positivo de percurso sobre uma circunferência parametrizada como em 2.4.3, é o sentido anti-horário.

(iii) Parametrizar a circunferência de centro na origem e raio a no sentido horário.

Solução. Queremos a curva $-C$, onde

$$C: \vec{r}(t) = a\cos t \vec{i} + a\sin t \vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Pela definição 2.7.1, temos

$$\begin{aligned}-C: \vec{r}^{-}(t) &= \vec{r}(0+2\pi-t) \\ &= a\cos(2\pi-t)\vec{i} + a\sin(2\pi-t)\vec{j}, \\ &= a\cos t \vec{i} - a\sin t \vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

A Figura 2.29 ilustra este exemplo.

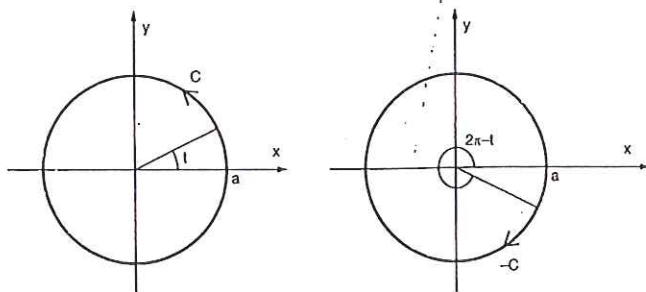


Figura 2.29

(iv) Parametrizar o segmento de reta que une o ponto $A(0, 0, 1)$ ao ponto $B(1, 2, 3)$, no sentido de A para B .

Conforme 2.4.1, a reta que passa pelos pontos A e B pode ser parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b}.$$

Podemos escolher o vetor posição $\vec{a} = (0, 0, 1)$. Como queremos o segmento de reta de A para B , o vetor direção \vec{b} é dado por $\vec{b} = (1, 2, 3) - (0, 0, 1) = (1, 2, 2)$.

Temos então,

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (0, 0, 1) + t(1, 2, 2) \\ &= (t, 2t, 1+2t).\end{aligned}$$

Precisamos determinar o intervalo de variação do parâmetro t .

Como o vetor posição do ponto A é $(0, 0, 1)$, o correspondente valor de t satisfaz

$$(t, 2t, 1+2t) = (0, 0, 1).$$

Portanto, $t = 0$.

No ponto B , temos

$$(t, 2t, 1+2t) = (1, 2, 3) \text{ e conseqüentemente, } t = 1.$$

Uma equação do segmento de reta que une o ponto A ao ponto B é dada por

$$\vec{r}(t) = (t, 2t, 1+2t), \quad t \in [0, 1].$$

A Figura 2.30 ilustra este exemplo.

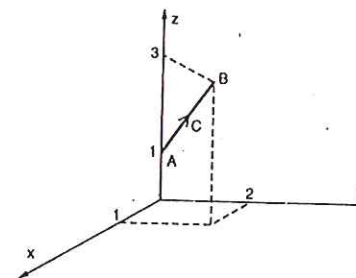


Figura 2.30

Observamos que sempre que queremos parametrizar um segmento de reta com orientação de A para B , podemos tomar o vetor \vec{a} como sendo o vetor posição do ponto A e o vetor direção \vec{b} como $B - A$. Neste caso, o parâmetro t terá uma variação no intervalo $[0, 1]$.

Sempre que nos referimos a um segmento que une o ponto A ao ponto B estaremos entendendo que o sentido é de A para B .

(v) Parametrizar o segmento de reta que une o ponto $(1, 2, 3)$ ao ponto $(0, 0, 1)$ (ver Figura 2.31).

Fazemos $\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b}$, onde

$$\vec{a} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{b} = (0, 0, 1) - (1, 2, 3)$$

$$= (-1, -2, -2)$$

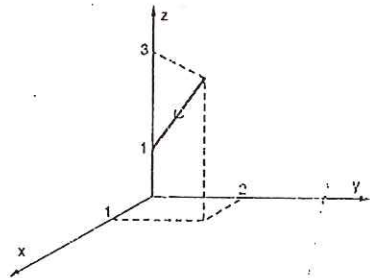


Figura 2.31

Temos,

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (1, 2, 3) + t(-1, -2, -2) \\ &= (1 - t, 2 - 2t, 3 - 2t), \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Também poderíamos ter usado o resultado do Exemplo (iv) e a definição 2.7.1.

De fato, como

$$\vec{r}(t) = (t, 2t, 1 + 2t), \quad t \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}(0 + 1 - t) \\ &= (1 - t, 2(1 - t), 1 + 2(1 - t)) \\ &= (1 - t, 2 - 2t, 3 - 2t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

2.8 RETA TANGENTE

Seja C uma curva suave representada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b].$$

Seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de C e t_0 o correspondente valor do parâmetro t . Conforme vimos em 1.9.3, o vetor $\vec{r}'(t_0)$ é tangente à curva C em P .

Portanto, uma parametrização da reta tangente à curva C no ponto P , é dada por

$\vec{q}(\omega) = \vec{r}(t_0) + \omega\vec{r}'(t_0)$, onde ω é um parâmetro real (ver Figura 2.32).

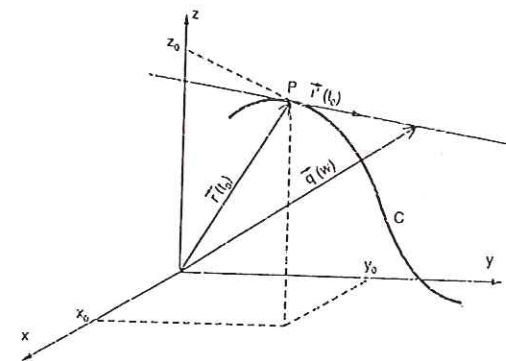


Figura 2.32

2.8.1 Exemplos

(i) Determinar a reta tangente à curva

$$\vec{r}(t) = 2\cos t \vec{i} + 2\sin t \vec{j}, \quad \text{no ponto } P(\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Temos,

$$\vec{r}(t) = 2\cos t \vec{i} + 2\sin t \vec{j};$$

$$\vec{r}'(t) = -2\sin t \vec{i} + 2\cos t \vec{j}.$$

Para obter o valor de t_0 , correspondente ao ponto P , usamos as equações paramétricas da curva, que são dadas por

$$x = 2\cos t$$

$$y = 2\sin t.$$

No ponto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, temos

$$\sqrt{2} = 2\cos t_0$$

$$\sqrt{2} = 2\sin t_0.$$

Portanto, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

A equação da reta tangente, será dada por

$$\begin{aligned} \vec{q}(\omega) &= \vec{r}(t_0) + \omega \vec{r}'(t_0) \\ &= \left(2\cos \frac{\pi}{4} \vec{i} + 2\sin \frac{\pi}{4} \vec{j} \right) + \omega \left(-2\sin \frac{\pi}{4} \vec{i} + 2\cos \frac{\pi}{4} \vec{j} \right) \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{2}\omega) \vec{i} + (\sqrt{2} + \sqrt{2}\omega) \vec{j}. \end{aligned}$$

A Figura 2.33 ilustra este exemplo.

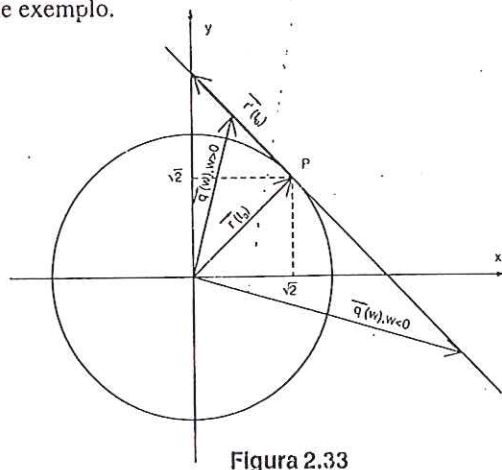


Figura 2.33

(ii) Determinar a equação de uma reta T , que passa no ponto $(1, 0)$ e é tangente à curva C dada por

$$\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + t^3 \vec{j}, \quad t \geq 0.$$

Solução: Para $t > 0$, o vetor $\vec{r}'(t) = 2t \vec{i} + 3t^2 \vec{j}$ é tangente à curva C .

Portanto, como a reta T passa no ponto $(1, 0)$ e é tangente à curva C , ela pode ser representada por

$$\begin{aligned} \vec{q}(\omega) &= (1, 0) + (2t, 3t^2)\omega \\ &= (1 + 2t\omega, 3t^2\omega). \end{aligned}$$

Precisamos determinar o valor de t . Para isso, observamos que, no ponto de tangência, os vetores $\vec{r}'(t)$ e $\vec{q}(\omega)$ coincidem. Assim, temos

$$t^2 = 1 + 2t\omega$$

$$t^3 = 3t^2\omega.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $t = \pm\sqrt{3}$. Como $\vec{r}'(t)$ é definida para $t \geq 0$, o valor procurado é $t = +\sqrt{3}$.

A equação da reta t é dada por

$$\vec{q}(\omega) = (1 + 2\sqrt{3}\omega, 9\omega).$$

A Figura 2.34 ilustra este exemplo.

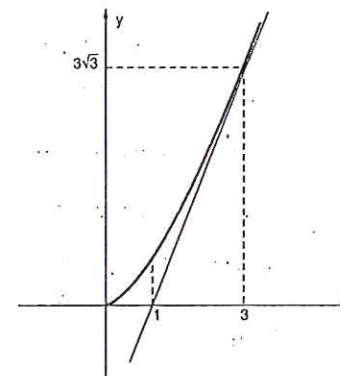


Figura 2.34

2.9 EXERCÍCIOS

1. Esboçar o gráfico da curva descrita por um ponto móvel $P(x, y)$, quando o parâmetro t varia no intervalo dado. Determinar a equação cartesiana da curva em cada um dos itens:

a) $x = 2\cos t$

$y = 2\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

b) $x = 4\cos t$

$y = 4\sin t$

$z = 2, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

c) $x = 2 + 4\sin t$

$y = 3 - 2\cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

d) $x = t + 1$

$y = t^2 + 4$

$z = 2, \quad -\infty < t < +\infty$

2. Obter a equação cartesiana das seguintes curvas:

a) $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t, 3t + 5\right)$

b) $\vec{r}(t) = (t - 1, t^2 - 2t + 2)$

c) $\vec{r}(t) = (s^2 - 1, s^2 + 1, 2)$

3. Determinar o centro e o raio das seguintes circunferências e depois escrever uma equação vetorial para cada uma.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 3 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

c) $x^2 + y^2 + 5y - 2 = 0$

4. Identificar as curvas abaixo e parametrizá-las. Esboçar o seu gráfico.

a) $2x^2 + 2y^2 + 5x + 2y - 3 = 0$

b) $2x^2 + 5y^2 - 6x - 2y + 4 = 0$

c) $x^2 + 2y^2 - 4x - 2y = 0$

d) $x^2 - 8y + 4 = 0$

e) $y - \frac{1}{x-1} = 0, \quad x > 1$

5. Verificar que a curva

$\vec{r}(t) = 3\cosh t \vec{i} + 5\sinh t \vec{j}$ é a metade de uma hipérbole. Encontrar a equação cartesiana.

6. Determinar uma representação paramétrica da reta que passa pelo ponto A , na direção do vetor \vec{b} , onde:

a) $A\left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$

b) $A(0, 2)$ e $\vec{b} = 5\vec{i} - \vec{j}$

c) $A(-1, 2, 0)$ e $\vec{b} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$

d) $A(\sqrt{2}, 2, \sqrt{3})$ e $\vec{b} = 5\vec{i} - 3\vec{k}$

7. Determinar uma representação paramétrica da reta que passa pelos pontos A e B , onde:

a) $A(2, 0, 1)$ e $B(-3, 4, 0)$

b) $A(5, -1, -2)$ e $B(0, 0, 2)$

c) $A\left(\sqrt{2}, 1, \frac{1}{3}\right)$ e $B(-7, 2, 9)$

d) $A\left(\pi, \frac{\pi}{2}, 3\right)$ e $B(\pi, -1, 2)$

8. Determinar uma representação paramétrica da reta representada por:

a) $y = 5x - 1, z = 2$

b) $2x - 5y + 4z = 1, 3x - 2y - 5z = 1$

c) $2x - 5y + z = 4, y - x = 4.$

9. Encontrar uma equação vetorial das seguintes curvas:

a) $x^2 + y^2 = 4, z = 4$

b) $y = 2x^2, z = x^3$

c) $2(x+1)^2 + y^2 = 10, z = 2$

d) $y = x^{1/2}, z = 2$

e) $x = e^y, z = e^x$

f) $y = x, z = x^2 + y^2$

g) Segmento de reta de $A(2, 1, 2)$ a $B(-1, 1, 3)$

h) Circunferência de centro em $(2, 2)$ e raio 2 no sentido anti-horário

i) Circunferência de centro em $(2, 2)$ e raio 2 no sentido horário

j) Segmento de reta de $C(0, 0, 1)$ a $D(1, 0, 0)$

k) Parábola $y = \pm\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1$

l) Segmento de reta de $A(1, -2, 3)$ a $B(-1, 0, -1)$

m) $y = x^3 - 7x^2 + 3x - 2, 0 \leq x \leq 3$

n) $x + y + z = 1, z = x - 2y$

o) $x^2 + y^2 = 1, z = 2x - 2y$

p) $x^2 + y^2 + z^2 = 2y, z = y$

q) Segmento de reta de $E(3, 3, -2)$ a $F(4, 5, -2).$

10. Esboçar as curvas seguintes, representando o sentido positivo de percurso. Obter uma parametrização da curva dada, orientada no sentido contrário.

a) $\vec{r}(t) = (2 + 3\cos t, 1 + 4\sin t), t \in [0, 2\pi]$

b) $\vec{r}(t) = (t, t + 2, 2t + 1), t \in [0, 1]$

c) $\vec{r}(t) = (2t - 1, 2t + 1, 4 - 2t), t \in [1, 2]$

d) $\vec{r}(t) = (t - 1, t^2 - 2t + 1), t \in [-1, 2]$

e) $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]$

f) $\vec{r}(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t, 2t), t \in [0, 4\pi]$

g) $\vec{r}(t) = (2\cos^3 t, 2\sin^3 t), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

11. Determinar uma equação da reta tangente às seguintes curvas, nos pontos indicados.

a) $\vec{r}(t) = (\cos t, 2\sin t); P_0(1, 0); P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

b) $z = 4 - x^2, y = 2; P_0(1, 2, 3)$

c) $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4t); P_0\left(1, \sqrt{3}, \frac{-4\pi}{3}\right)$

d) $\vec{r}(t) = t^2i + t^3j; P_0(4, -8)$

e) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t^2); t_0 = \frac{\pi}{2}$

f) $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3t); t_0 = \frac{\pi}{3}$

g) $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, t^2\right); t_0 = 2$

h) $\vec{r}(t) = (e^{3t}, e^{-3t}, 3\sqrt{2}t); t_0 = 0$

i) $\vec{r}(t) = (t, t^3, t^4); P_0 = (1, 1, 1).$

12. Determinar a equação de uma reta s que é tangente à curva

$$\vec{r}(t) = \left(t, \frac{1}{t-1} \right), \quad t < 1 \text{ e passa na origem.}$$

13. Se $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ para todos os reais t , determinar todos os pontos da curva descrita por $\vec{r}(t)$ nos quais o vetor tangente é paralelo ao vetor $(4, 4, 3)$. Existem alguns pontos nos quais a tangente é perpendicular a $(4, 4, 3)$?

14. Determinar a equação da reta tangente à curva

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \text{ em um ponto qualquer da curva.}$$

15. Determinar os pontos em que a curva

$$\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + (t^2 + 1)\vec{j} + 3t\vec{k} \text{ corta o plano } 3x - 2y - z + 7 = 0.$$

16. Verificar que a curva $\vec{r}(t) = t \cos t \vec{i} + t \sin t \vec{j} + t\vec{k}$, $t \geq 0$ está sobre um cone.

17. Verificar quais das seguintes curvas são suaves:

a) $\vec{r}(t) = t^3 \vec{i} + t^2 \vec{j}$, $t \in [-1, 1]$

b) $\vec{r}(t) = t^3 \vec{i} + t^2 \vec{j}$, $t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$

c) $\vec{r}(t) = 2(t - \sin t)\vec{i} + 2(1 - \cos t)\vec{j}$, $t \in [\pi, 3\pi]$

d) $\vec{r}(t) = (3 \cos^3 t, 3 \sin^3 t)$, $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$

e) $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

18. Verificar que as equações vetoriais

$$r(\omega) = (\omega, \omega^2), \quad 2 \leq \omega \leq 3$$

$$\text{e } \vec{r}(t) = (\sqrt{t}, t), \quad 4 \leq t \leq 9$$

representam a mesma curva.

2.10 COMPRIMENTO DE ARCO

Seja C uma curva dada pela equação vetorial

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b]$$

Vamos calcular o comprimento ℓ de um arco \widehat{AB} , com $t \in [a, b]$.

Seja

$$P: a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b$$

uma partição qualquer de $[a, b]$. Indicamos por ℓ_n o comprimento da poligonal de vértices

$$A = P_0 = \vec{r}(t_0), \quad P_1 = \vec{r}(t_1), \quad \dots, \quad B = P_n = \vec{r}(t_n).$$

Então,

$$\begin{aligned} \ell_n &= \sum_{i=1}^n |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Na Figura 2.35 visualizamos uma curva C , onde a poligonal foi traçada para $n = 6$.

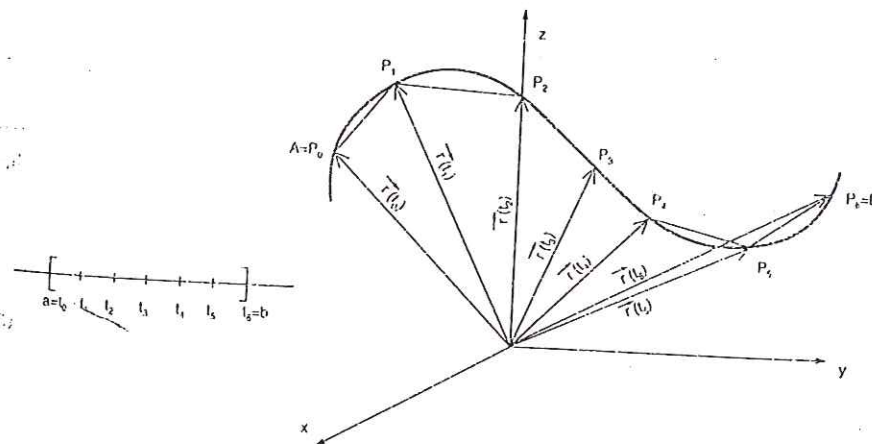


Figura 2.35

Intuitivamente, podemos afirmar que se o limite de ℓ_n quando $n \rightarrow \infty$ existe, este limite define o comprimento ℓ do arco \widehat{AB} da curva C , ou seja,

$$\ell = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \ell_n, \quad \text{onde } \Delta t_i = |t_i - t_{i-1}| \quad (2)$$

Se a curva C é suave, podemos encontrar uma fórmula para calcular o limite de (2). Temos o seguinte teorema.

2.10.1 Teorema

Seja C uma curva suave parametrizada por $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Então,

$$\ell = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt. \quad (3)$$

Prova. Para provarmos este teorema, vamos utilizar o seguinte resultado cuja demonstração será omitida.

“Se as funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são contínuas no intervalo $[a, b]$, e se P é uma partição do intervalo $[a, b]$ ($P: a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b$), e \bar{t}_i , \tilde{t}_i e \underline{t}_i são números quaisquer em (t_{i-1}, t_i) , então

$$\begin{aligned} \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[x(\bar{t}_i)]^2 + [y(\bar{t}_i)]^2 + [z(\bar{t}_i)]^2} \Delta t_i &= \\ = \int_a^b \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2} dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Se C é uma curva suave em $[a, b]$, temos que $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ são funções deriváveis em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ da partição P . Assim, pelo teorema do valor médio, existem números \bar{t}_i , \tilde{t}_i e \underline{t}_i em (t_{i-1}, t_i) tais que

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(\bar{t}_i) \Delta t_i \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(\tilde{t}_i) \Delta t_i \\ z(t_i) - z(t_{i-1}) &= z'(\underline{t}_i) \Delta t_i \end{aligned} \quad (5)$$

Substituindo (5) em (1) e (2), obtemos

$$\ell_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\bar{t}_i)]^2 + [y'(\tilde{t}_i)]^2 + [z'(\underline{t}_i)]^2} \Delta t_i$$

e

$$\ell = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\bar{t}_i)]^2 + [y'(\tilde{t}_i)]^2 + [z'(\underline{t}_i)]^2} \Delta t_i. \quad (6)$$

Usando (4), escrevemos

$$\begin{aligned} \ell &= \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \\ &= \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt, \end{aligned}$$

que é o resultado procurado.

Se a curva C é suave por partes, seu comprimento é dado por

$$\ell = \int_a^{t_1} |\vec{r}'(t)| dt + \int_{t_1}^{t_2} |\vec{r}'(t)| dt + \dots + \int_{t_{n-1}}^b |\vec{r}'(t)| dt,$$

onde $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, b]$ são os subintervalos de $[a, b]$ nos quais a curva C é suave.

2.10.2 Exemplos

(i) Encontrar o comprimento do arco da curva cuja equação vetorial é

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^{2/3}\vec{j}, \quad \text{para } 1 \leq t \leq 4.$$

Temos,

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + \frac{2}{3}t^{-1/3}\vec{j}$$

e

$$\begin{aligned}
 |\vec{r}'(t)| &= \sqrt{1 + \frac{4}{9} t^{-2/3}} \\
 &= \sqrt{1 + \frac{4}{9t^{2/3}}} \\
 &= \sqrt{\frac{9t^{2/3} + 4}{9t^{2/3}}} \\
 &= \frac{1}{3} (9t^{2/3} + 4)^{1/2} t^{-1/3}.
 \end{aligned}$$

Aplicando (3), obtemos

$$\ell = \frac{1}{3} \int_1^4 (9t^{2/3} + 4)^{1/2} t^{-1/3} dt.$$

Esta integral pode ser resolvida por substituição, fazendo $u = 9t^{2/3} + 4$.

Temos,

$$\begin{aligned}
 \ell &= \frac{1}{3} \int_1^4 (9t^{2/3} + 4)^{1/2} t^{-1/3} dt \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \frac{(9t^{2/3} + 4)^{3/2}}{3/2} \Big|_1^4 \\
 &= \frac{1}{27} [(9 \cdot 4^{2/3} + 4)^{3/2} - (9 \cdot 1^{2/3} + 4)^{3/2}] \\
 &= \frac{1}{27} [(18\sqrt[3]{2} + 4)^{3/2} - 13\sqrt{13}].
 \end{aligned}$$

(ii) Encontrar o comprimento da hélice circular

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \text{ do ponto } A(1, 0, 0) \text{ a } B(-1; 0, \pi).$$

Temos que

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{r}'(t)| &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \\
 &= \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Para $A(1, 0, 0)$ temos $t = 0$ e para $B(-1, 0, \pi)$ temos $t = \pi$.

Usando (3), obtemos

$$\begin{aligned}
 \ell &= \int_0^\pi \sqrt{2} dt \\
 &= \pi\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

2.10.3 Função comprimento de arco

Na integral $\ell = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$, se substituimos o limite superior b por um limite variável t , $t \in [a, b]$, a integral se transforma em uma função de t .

Escrevemos,

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t^*)| dt^* \tag{7}$$

A função $s = s(t)$ é chamada função comprimento de arco e mede o comprimento de arco de C no intervalo $[a, t]$. *Obs.: ete "a" pode ser subst. por outra ete, o pto da curva correspondente a s=0 pode ser escolhido de forma arbitrária. Escolha arbit. a=0, obtemos s: s(t) = \int_0^t |\vec{r}'(t^*)| dt^**

2.10.4 Exemplos

(i) Escrever a função comprimento de arco da circunferência de raio R .

Vamos usar (7), observando que o limite inferior de integração a , pode ser substituído por qualquer outro valor t_0 , $t_0 \in [a, b]$, isto é, o ponto da curva correspondente a $s = 0$ pode ser escolhido de maneira arbitrária.

Escolhendo $a = 0$, temos

$$s(t) = \int_0^t R dt^*$$

$$= Rt, \text{ onde usamos } \vec{r}(t) = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j}.$$

f.c. a
 $\vec{r}'(t) = -R \sin t \vec{j} + R \cos t \vec{j}$
 $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$
 $\|\vec{r}'(t)\| = R$
 $s = s(t) = \int_0^t R dt^* = Rt$
 $s(t) = R \cdot t$

(ii) Encontrar a função comprimento de arco da hélice circular

$$\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t).$$

Vamos novamente usar (7) e escolher $a = 0$. Temos,

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{5} dt \\ &= \sqrt{5} t. \end{aligned}$$

2.10.5 Reparametrização de curvas por comprimento de arco

É conveniente parametrizarmos algumas curvas usando como parâmetro o comprimento de arco s .

Para reparametrizarmos uma curva suave C , dada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b] \quad (8)$$

procedemos como segue.

- (i) Calculamos $s = s(t)$, usando (7).
- (ii) Encontramos a sua inversa $t = t(s)$, $0 \leq s \leq \ell$.
- (iii) Finalmente, reescrevemos (8) como

$$\begin{aligned} \vec{h}(s) &= \vec{r}(t(s)) \\ &= x(t(s))\vec{i} + y(t(s))\vec{j} + z(t(s))\vec{k}, \quad 0 \leq s \leq \ell. \end{aligned}$$

Temos então, que $\vec{h}(s)$ descreve a mesma curva C que era dada por $\vec{r}(t)$, mas com uma nova parametrização, onde a variável s , $0 \leq s \leq \ell$, representa o comprimento de arco de C .

2.10.6 Exemplos

- (i) Reparametrizar pelo comprimento de arco a curva

$$C: \vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

A função $s = s(t)$ já foi calculada no Exemplo 2.10.4 (i).

Temos,

$$s = s(t) = Rt.$$

Esta função é uma função linear, cuja inversa é

$$t = t(s) = \frac{s}{R}, \quad 0 \leq s \leq 2\pi R.$$

Portanto,

$\vec{h}(s) = \vec{r}(t(s)) = \left(R\cos \frac{s}{R}, R\sin \frac{s}{R} \right)$, $0 \leq s \leq 2\pi R$, é a reparametrização da circunferência dada.

- (ii) Reparametrizar pelo comprimento de arco a curva dada por

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad t \geq 0.$$

Vamos calcular a função comprimento de arco $s = s(t)$.

Temos,

$$\vec{r}'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \cos t + e^t \sin t)$$

e

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{2} e^t.$$

Logo,

$$\begin{aligned} s = s(t) &= \int_0^t \sqrt{2} e^{t'} dt' \\ &= \sqrt{2} (e^t - 1). \end{aligned}$$

Podemos escrever

$$t = t(s) = \ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{2} (e^t - 1) \\ s + \sqrt{2} &= \sqrt{2} e^t \\ e^t &= \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ t &= \ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

e então

$$\vec{h}(s) = \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\ln \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right), \sin \left(\ln \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right), s \geq 0.$$

(iii) Dada uma curva C representada por $\vec{r}(t)$, mostrar que se $|\vec{r}'(t)| = 1$, então o parâmetro t é o parâmetro comprimento de arco de C .

De acordo com (7), temos

$$s = s(t) = \int_0^t |\vec{r}'(t^*)| dt^*.$$

Como $|\vec{r}'(t)| = 1$, vem

$$s = \int_0^t dt^* = t.$$

O parâmetro t é o parâmetro comprimento de arco s , de C .

(iv) Verificar que a curva

$$C: \vec{h}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{2s}{\sqrt{5}} \right), s \geq 0$$

está parametrizada pelo comprimento de arco.

Basta aplicar o resultado do exemplo anterior.

Temos,

$$\vec{h}'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

$$\begin{aligned} |\vec{h}'(s)| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, a curva C dada tem como parâmetro o comprimento de arco.

(v) Seja C uma curva suave reparametrizada pelo comprimento de arco. Mostrar que, se C é representada por $\vec{h}(s)$, então $|\vec{h}'(s)| = 1$.

Temos,

$$\vec{h}(s) = \vec{r}(t(s)).$$

Usando a regra da cadeia, vem

$$\vec{h}'(s) = \vec{r}'(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}. \tag{9}$$

Como $t(s)$ é a inversa de $s(t)$ e $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)|$ temos que

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\vec{r}'(t(s))|}.$$

Substituindo em (9), vem

$$\vec{h}'(s) = \vec{r}'(t(s)) \cdot \frac{1}{|\vec{r}'(t(s))|}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\vec{h}'(s)| &= \left| \frac{\vec{r}'(t(s))}{|\vec{r}'(t(s))|} \right| \\ &= 1. \end{aligned}$$

2.11 VETOR TANGENTE UNITÁRIO

Dada uma curva suave C , queremos encontrar, em cada ponto de C , um vetor tangente à curva C , que seja unitário.

Em 1.9.3, vimos que se a curva C é representada por

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

o vetor $\vec{r}'(t)$ é tangente à curva C .

O vetor

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \quad (1)$$

é denominado vetor tangente unitário à curva C .

Por outro lado, no Exemplo 2.10.6 (v) vimos que quando C é representada por $\vec{h}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, onde s é o parâmetro comprimento de arco, $|\vec{h}'(s)| = 1$. Assim, neste caso, o vetor tangente unitário é dado por

$$\vec{u}(s) = \vec{h}'(s). \quad (2)$$

2.11.1 Exemplo

Encontrar o vetor tangente unitário à circunferência de raio 2, centrada na origem, no ponto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Uma parametrização dessa circunferência é dada por

$$\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Usando (1), temos

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \\ &= \frac{(-2\sin t, 2\cos t)}{2} \\ &= (-\sin t, \cos t). \end{aligned}$$

Para $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, temos que $t = \frac{\pi}{4}$, e então $\vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é o vetor tangente unitário à curva em $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Poderíamos também chegar a esse resultado usando (2). Fazendo a reparametrização, usando o comprimento de arco s como parâmetro, vem

$$\vec{h}(s) = \left(2\cos \frac{s}{2}, 2\sin \frac{s}{2}\right).$$

Temos,

$$\begin{aligned} \vec{u}(s) &= \vec{h}'(s) \\ &= \left(-\sin \frac{s}{2}, \cos \frac{s}{2}\right). \end{aligned}$$

No ponto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ temos $s = \frac{\pi}{2}$ e então,

$$\vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2.11.2 Proposição

Seja C uma curva suave dada por $\vec{h}(s)$, onde s é o parâmetro comprimento de arco de C . Se $\vec{u}(s)$ é o vetor tangente unitário de C e $\vec{u}'(s) \neq 0$, então $\vec{u}'(s)$ é ortogonal a $\vec{u}(s)$ e aponta para o lado côncavo de C .

Prova parcial. Provaremos que $\vec{u}'(s)$ é ortogonal a $\vec{u}(s)$ e a seguir daremos uma visualização geométrica de que $\vec{u}'(s)$ aponta para o lado côncavo de C .

Desde que $\vec{u} = \vec{u}(s)$ é unitário, temos

$$|\vec{u}| = 1$$

$$\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 1.$$

Derivando, obtemos

$$\vec{u}' \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$$

$$2\vec{u}' \cdot \vec{u} = 0$$

$$\vec{u}' \cdot \vec{u} = 0.$$

Logo, \vec{u}' é ortogonal a \vec{u} .

Para verificar que $\vec{u}'(s)$ aponta para o lado côncavo de C , vamos analisar geometricamente a expressão

$$\vec{u}'(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(s + \Delta s) - \vec{u}(s)}{\Delta s}$$

Observando a Figura 2.36(a), vemos que para $\Delta s > 0$, o vetor $\Delta \vec{u} = \vec{u}(s + \Delta s) - \vec{u}(s)$ aponta para o lado côncavo de C . Como $\Delta s > 0$, o mesmo ocorre com o limite de $\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta s}$ quando $\Delta s \rightarrow 0^+$.

Para $\Delta s < 0$, o vetor $\Delta \vec{u}$ aponta para o lado convexo de C (ver Figura 2.36(b)). Porém, como Δs é negativo, o vetor $\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta s}$ aponta para o lado oposto de $\Delta \vec{u}$. Desta forma, o limite de $\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta s}$ quando $\Delta s \rightarrow 0^-$ aponta para o lado côncavo de C .

Concluimos assim, que $\vec{u}'(s)$ aponta para o lado côncavo de C .

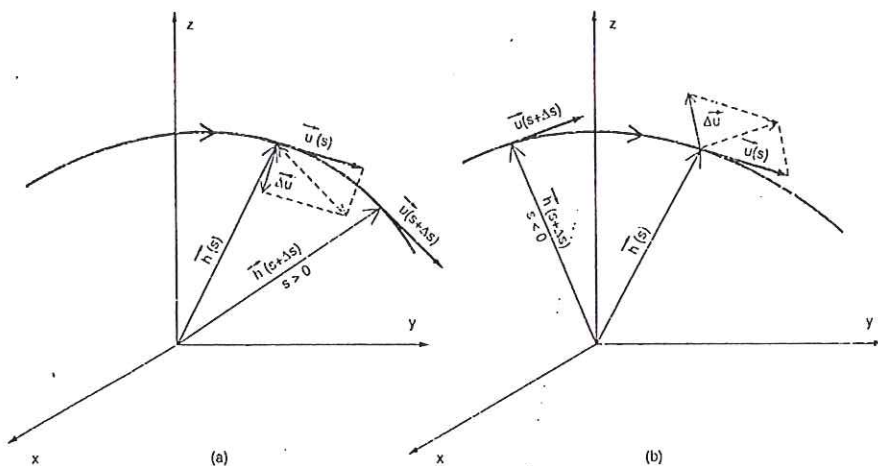


Figura 2.36

2.11.3 Exemplo

Seja C a hélice circular dada por $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, \sqrt{5}t)$. Representar geometricamente o vetor tangente unitário $\vec{u}(t)$ e o vetor $\vec{u}'(t)$ no ponto $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{5}\pi}{4}\right)$.

Temos,

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \\ &= \left(-\frac{2}{3}\sin t, \frac{2}{3}\cos t, \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \end{aligned}$$

e

$$\vec{u}'(t) = \left(-\frac{2}{3}\cos t, -\frac{2}{3}\sin t, 0\right).$$

O valor de t correspondente ao ponto P é $t = \frac{\pi}{4}$. Portanto, nesse ponto, temos

$$\vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

e

$$\vec{u}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, 0\right).$$

A Figura 2.37, mostra os vetores \vec{u} e \vec{u}' encontrados.

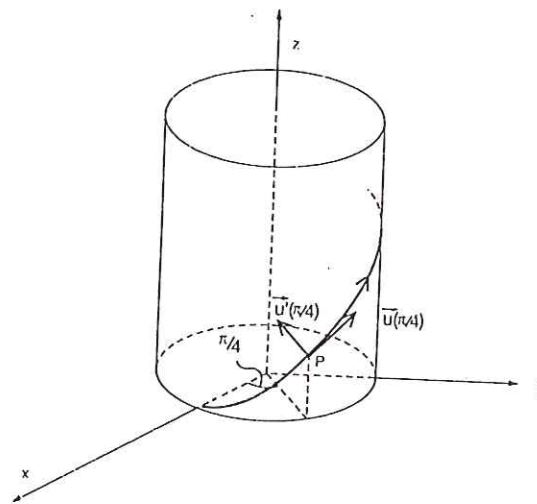


Figura 2.37

2.12 CURVATURA

A Figura 2.38 mostra duas curvas C_1 e C_2 , onde representamos os vetores tangentes unitários em alguns pontos.

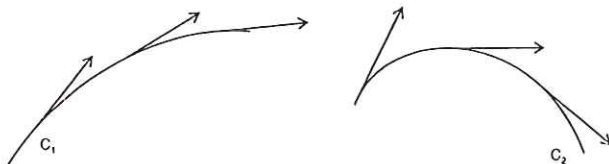


Figura 2.38

Podemos observar que na curva C_2 , a direção do vetor tangente unitário varia mais rapidamente quando nos deslocamos sobre a curva. Temos a seguinte definição:

2.12.1 Definição

Seja C uma curva suave dada por $\vec{h}(s)$, $0 \leq s \leq \ell$. Definimos a curvatura de C em um ponto como

$$k(s) = |\vec{u}'(s)| \quad (1)$$

ou

$$k(s) = |\vec{h}''(s)|.$$

A expressão (1) nos diz que a curvatura é a taxa de variação do vetor tangente unitário $\vec{u}(s)$ em relação ao comprimento de arco s . Como este vetor não varia em intensidade, ela exprime a razão de variação da direção do vetor $\vec{u}(s)$. Assim, geometricamente, podemos dizer que a curvatura $k(s)$ nos dá a razão de variação da direção da tangente, quando esta se desloca sobre a curva.

2.12.2 Proposição

Se uma curva suave C é dada por $\vec{r}(t)$, onde t é um parâmetro qualquer, sua curvatura pode ser expressa por

$$k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} \quad (2)$$

Prova. Seja s o parâmetro comprimento de arco de C e $\vec{u} = \vec{u}(s)$ o vetor tangente unitário. Podemos escrever,

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{u} \frac{ds}{dt};$$

$$\vec{r}''(t) = \frac{d}{dt} \left(\vec{u} \frac{ds}{dt} \right)$$

$$= \frac{d\vec{u}}{dt} \frac{ds}{dt} + \vec{u} \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$= \frac{d\vec{u}}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} + \vec{u} \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$= \vec{u}'(s) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \vec{u}(s) \frac{d^2s}{dt^2};$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \vec{u}(s) \frac{ds}{dt} \times \left[\vec{u}'(s) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \vec{u}(s) \frac{d^2s}{dt^2} \right]$$

$$= \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 [\vec{u}(s) \times \vec{u}'(s)] + \left(\frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \right) [\vec{u}(s) \times \vec{u}(s)]$$

$$= \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 [\vec{u}(s) \times \vec{u}'(s)];$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|^3 |\vec{u}(s) \times \vec{u}'(s)|;$$

Como $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)|$, vem

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = |\vec{r}'(t)|^3 |\vec{u}(s) \times \vec{u}'(s)|$$

$$= |\vec{r}'(t)|^3 |\vec{u}(s)| |\vec{u}'(s)| \sin \theta,$$

onde θ é o ângulo formado por $\vec{u}(s)$ e $\vec{u}'(s)$.

Como $|\vec{u}(s)| = 1$, $|\vec{u}'(s)| = k$ e $\vec{u}'(s)$ é ortogonal a $\vec{u}(s)$ (ver Proposição 2.11.2), segue que

$$k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}.$$

2.12.3 Exemplos

(i) Calcular a curvatura da circunferência

$$C: \vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Usando os resultados do Exemplo 2.10.6 (i), escrevemos

$$C: \vec{h}(s) = \left(a \cos \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a} \right),$$

onde s é o parâmetro comprimento de arco.

Temos, então

$$\begin{aligned} \vec{u}(s) &= \vec{h}'(s) \\ &= \left(-\operatorname{sen} \frac{s}{a}, \cos \frac{s}{a} \right) \quad e \end{aligned}$$

$$\vec{u}'(s) = \left(-\frac{1}{a} \cos \frac{s}{a}, -\frac{1}{a} \operatorname{sen} \frac{s}{a} \right)$$

Portanto, a curvatura de C é dada por

$$\begin{aligned} k(s) &= |\vec{u}'(s)| \\ &= \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

(ii) Encontrar a curvatura da parábola $\vec{r}(t) = (t, t^2)$, $-\infty < t < \infty$.

Usando a fórmula (2), temos

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{|(\vec{i} + 2t\vec{j}) \times 2\vec{j}|}{|(1, 2t)|^3} \\ &= \frac{|2\vec{k}|}{\sqrt{1 + 4t^2}^3} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4t^2}^3} \end{aligned}$$

Podemos observar, neste resultado, que para $t = 0$, k tem seu valor máximo e que $k \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow +\infty$.

2.12.4 Círculo de Curvatura

Quando $k \neq 0$ em um ponto P de uma curva C , podemos encontrar o círculo de curvatura de C em P (ver Figura 2.39).

Este círculo tem as seguintes características:

- (i) Está contido no plano formado pelos vetores \vec{u} e \vec{u}' .
- (ii) Está centrado na semi-reta de origem em P , na direção do vetor \vec{u}' .
- (iii) Tem raio $R = \frac{1}{k}$, onde k é a curvatura de C em P .

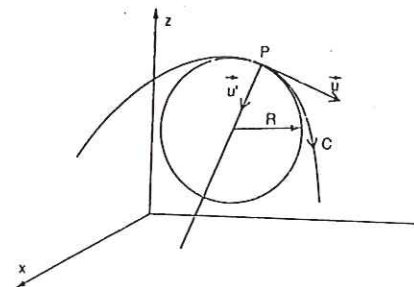


Figura 2.39

O raio R do círculo de curvatura é chamado raio de curvatura de C , em P .

Como a curvatura de uma circunferência de raio R é $\frac{1}{R}$ (ver Exemplo 2.12.3 (i)), vemos que a curvatura de C coincide com a de seu círculo de curvatura em P .

Podemos dizer que, nas proximidades de P , o círculo de curvatura é o círculo que melhor aproxima a curva.

2.12.5 Exemplos

(i) Determinar o raio e o círculo de curvatura em um ponto qualquer da circunferência

$$C: \vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

No Exemplo 2.12.3 (i), vimos que a curvatura em um ponto qualquer de C é $k = \frac{1}{a}$. Portanto, o raio de curvatura é $R = a$.

Para determinar o círculo de curvatura em um ponto qualquer P , basta observar que a semi-reta de origem em P , na direção de \vec{u}' contém a origem, que é o centro da circunferência dada (ver Figura 2.40).

Portanto, como o raio de curvatura é $R = a$, o centro do círculo de curvatura é $(0, 0)$. Dessa forma, o círculo de curvatura coincide com a circunferência dada.

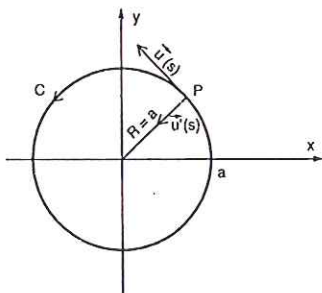


Figura 2.40

(ii) Determinar o raio e o círculo de curvatura da parábola do Exemplo 2.12.3(ii), na origem.

No Exemplo 2.12.3(ii), vimos que a curvatura da parábola é dada por

$$k(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + 4t^2}^3}$$

Como $\vec{r}(t) = (t, t^2)$, na origem, $t = 0$. Dessa forma, o raio de curvatura é

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{k(0)} \\ &= \frac{1}{2/\sqrt{1 + 4 \cdot 0^2}^3} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Para determinar o círculo de curvatura, devemos calcular o vetor tangente unitário $\vec{u}(t)$ e o vetor $\vec{u}'(t)$. Temos,

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \\ &= \frac{(1, 2t)}{\sqrt{1 + 4t^2}}; \end{aligned}$$

$$\vec{u}(0) = (1, 0);$$

$$\vec{u}'(t) = \left(\frac{-4t}{\sqrt{1 + 4t^2}^3}, \frac{2}{\sqrt{1 + 4t^2}^3} \right) e$$

$$\vec{u}'(0) = (0, 2).$$

Portanto, a semi-reta com origem em $P(0, 0)$, na direção de \vec{u}' é o eixo positivo dos y . O centro do círculo de curvatura é $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

A Figura 2.41, ilustra este exemplo.

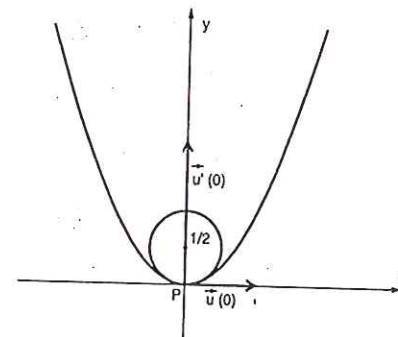


Figura 2.41

(iii) Determinar o raio e o círculo de curvatura da hélice

$$\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, \sqrt{5}t) \text{ no ponto } P\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{5}\pi}{4}\right).$$

No Exemplo 2.11.3, determinamos o vetor tangente unitário \vec{u} e o vetor \vec{u}' no ponto P .
Necessitamos ainda, determinar a curvatura da hélice neste ponto.

Temos,

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} \\ &= \frac{|(-2 \operatorname{sen} t, 2 \operatorname{coss} t, \sqrt{5}) \times (-2 \operatorname{coss} t, -2 \operatorname{sen} t, 0)|}{|(-2 \operatorname{sen} t, 2 \operatorname{coss} t, \sqrt{5})|^3} \\ &= \frac{|(2\sqrt{5} \operatorname{sen} t, -2\sqrt{5} \operatorname{coss} t, 4)|}{3^3} \\ &= \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Portanto, o raio de curvatura no ponto P é

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{k} \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

O centro do círculo de curvatura está sobre a semi-reta, com origem em P na direção do vetor $\vec{u}' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, 0\right)$.

Na Figura 2.42, esboçamos o círculo de curvatura.

2.13 VETOR NORMAL PRINCIPAL

Quando $k(s) \neq 0$, podemos definir um vetor unitário $\vec{p}(s)$, chamado vetor normal principal, como

$$\vec{p}(s) = \frac{\vec{u}'(s)}{k(s)}.$$

De acordo com a Proposição 2.11.2, o vetor normal principal $\vec{p}(s)$ é ortogonal ao vetor tangente unitário $\vec{u}(s)$ e aponta para o lado côncavo de C .

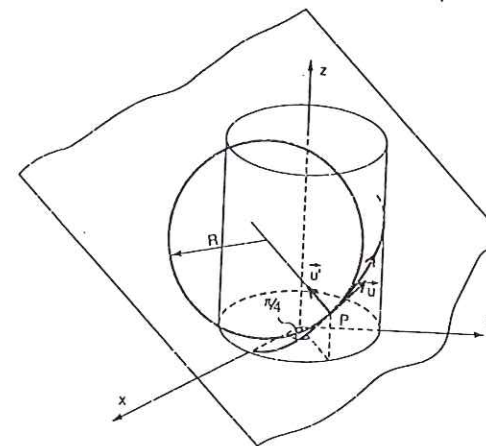


Figura 2.42

2.13.1 Exemplo

Escrever o vetor normal principal da circunferência do Exemplo 2.11.1, no ponto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

No Exemplo 2.11.1 vimos que

$$\vec{h}(s) = \left(2 \cos \frac{s}{2}, 2 \operatorname{sen} \frac{s}{2}\right);$$

$$\vec{u}(s) = \left(-\operatorname{sen} \frac{s}{2}, \cos \frac{s}{2}\right)$$

Temos,

$$\vec{u}'(s) = \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{s}{2}, -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{s}{2}\right);$$

$$k(s) = |\vec{u}'(s)|$$

$$= \frac{1}{2}.$$