

12.1. INTRODUÇÃO

A primeira e a terceira leis de Newton foram amplamente usadas na estática a fim de estudar os corpos em repouso e as forças que neles actuavam. Em dinâmica, estas duas leis são, outrossim, utilizadas; de facto, elas são suficientes para o estudo do movimento de corpos, desde que estes sejam desprovidos de aceleração. Contudo, quando um corpo possui aceleração, *i. e.*, sempre que varie a intensidade ou a direcção da velocidade, torna-se necessário empregar a segunda lei de Newton a fim de relacionar o movimento do corpo com as forças nele actuantes.

Neste capítulo, discutiremos a segunda lei de Newton e aplicá-la-emos à análise do movimento de partículas. Conforme se afirma na Sec. 12.2, se a resultante das forças actuantes numa partícula for diferente de zero, a partícula adquirirá uma aceleração proporcional à intensidade da força resultante e segundo a sua direcção. Além do mais, a razão entre a intensidade da força resultante e a intensidade da aceleração permite definir a *massa* da partícula.

Na Sec. 12.3, a *quantidade de movimento* de uma partícula é definida como sendo $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$, ou seja, o produto da massa m pela velocidade \mathbf{v} da partícula; demonstra-se também que a segunda lei de Newton pode ser expressa numa forma alternativa, que relaciona a taxa de variação da quantidade de movimento com a resultante das forças actuantes na partícula.

A Sec. 12.4 reforça a necessidade de se utilizarem unidades consistentes na resolução de problemas em dinâmica e proporciona uma revisão do Sistema Internacional de Unidades (SI).

Nas Secs. 12.5 e 12.6 e nos problemas-tipo subsequentes, aplica-se a segunda lei de Newton à resolução de problemas de engenharia, recorrendo à utilização quer das componentes cartesianas quer das componentes tangencial e normal das forças e das acelerações em jogo. Lembramos que um corpo real — que inclui corpos tão grandes como um carro, um foguete ou um avião — pode considerar-se, quando da análise do seu movimento, como uma partícula, desde que se possa ignorar o efeito de rotação em torno do centro de massa.

A resolução de problemas em função das componentes radial e transversal é levada a cabo na segunda parte do capítulo, com particular ênfase para o movimento de uma partícula sob a acção de uma força central. Na Sec. 12.7, a quantidade de movimento angular, ou *momento angular* \mathbf{H}_O de uma partícula em relação a um ponto O , é definida como o momento, em relação a O , da quantidade de movimento da partícula: $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. Da segunda lei de Newton, podemos concluir que a taxa de variação do momento angular \mathbf{H}_O de uma partícula é igual à soma dos momentos, em relação a O , das forças nela actuantes.

A Sec. 12.9 trata do movimento de uma partícula sob a acção de uma *força central*, *i. e.*, uma força que é dirigida para ou procedente de um ponto fixo O . Uma vez que tal força cria um momento nulo em relação a O , o momento angular da partícula em relação a O mantém-se constante. Esta propriedade permite simplificar consideravelmente o estudo do movimento de uma partícula sob a acção de uma força central; na Sec. 12.10, aquela propriedade é tida em devida conta na resolução de problemas que envolvem o movimento orbital de corpos sob a acção da gravidade.

As Secs. 12.11 até 12.13 são de carácter opcional. Elas apresentam uma discussão ampla do movimento orbital e contêm alguns problemas relacionados com a mecânica espacial.

A segunda lei de Newton pode enunciar-se como se segue:

Se a resultante das forças actuantes numa partícula não for zero, esta adquirirá uma aceleração proporcional à intensidade da força resultante, e na mesma direcção e no mesmo sentido desta.

Podemos compreender melhor a segunda lei de Newton se imaginarmos a seguinte experiência: uma partícula está sujeita à acção de uma força F_1 com direcção constante e intensidade F_1 constante. Sob a acção desta força, a partícula desloca-se segundo uma linha recta e com a mesma direcção e o mesmo sentido da força (Fig. 12.1a). Se determinarmos a posição da partícula em vários instantes, verificamos que a aceleração tem uma intensidade constante a_1 . Se repetirmos a experiência agora com as forças F_2, F_3, \dots , com diferentes intensidades ou direcções (Fig. 12.1b e c), concluímos que, em cada instante, a partícula se move na direcção da força actuante, e que as intensidades a_1, a_2, a_3, \dots , das acelerações são proporcionais às intensidades F_1, F_2, F_3, \dots , das forças correspondentes:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots = \text{constante}$$

O valor constante que se obtém para a razão das intensidades entre as forças e as acelerações é uma característica da partícula em questão; chama-se *massa* da partícula e representa-se por m . Quando uma partícula de massa m está sujeita à acção de uma força F , esta força e a aceleração a da partícula, devem satisfazer a seguinte relação

$$F = ma \quad (12.1)$$

Esta equação fornece uma formulação completa da segunda lei de Newton; ela exprime não apenas que as intensidades de F e a são proporcionais, como também (uma vez que m é um escalar positivo) que os vectores F e a têm a mesma direcção e o mesmo sentido (Fig. 12.2). Devemos notar que a Eq. (12.1) ainda é válida mesmo que F não seja constante e que varie eventualmente em intensidade e direcção ao longo do tempo. As intensidades de F e a permanecem proporcionais, e os dois vectores têm a mesma direcção e o mesmo sentido em qualquer instante. Contudo, eles não são, em geral, tangentes à trajectória da partícula.

Quando uma partícula está sujeita simultaneamente à acção de várias forças, a Eq. (12.1) deve ser substituída por

$$\Sigma F = ma \quad (12.2)$$

na qual ΣF representa a soma, ou resultante, de todas as forças actuantes sobre a partícula.

Devemos notar que o sistema de eixos em relação ao qual a aceleração a se determina, não é arbitrário. Estes eixos devem ter uma orientação constante relativamente às estrelas, e a sua origem deve ser ligada ao sol[†] ou deslocar-se com velocidade constante em relação ao sol. Tal sistema de eixos é designado

[†] Mais precisamente, ao centro de massa do sistema solar.

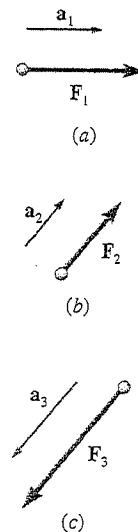


Fig. 12.1

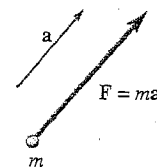


Fig. 12.2

por *sistema Newtoniano*[†] de referência. Um sistema de eixos ligado à Terra não constitui um referencial newtoniano, uma vez que a Terra roda em relação às estrelas e possui aceleração relativamente ao sol. Contudo, em várias aplicações do domínio da engenharia, a aceleração a pode ser determinada em relação ao referencial ligado à Terra, e as Eqs. (12.1) e (12.2) podem utilizar-se sem qualquer erro apreciável. Por outro lado, estas equações não são válidas se a representar uma aceleração medida em relação a um sistema móvel de eixos, tal como um referencial ligado a um carro em aceleração ou a um componente rotativo de uma máquina.

Podemos verificar que, se a resultante ΣF das forças actuantes na partícula for zero, da Eq. (12.2) resulta que a aceleração a da partícula também é zero. Se a partícula estiver inicialmente em repouso ($v_0 = 0$) relativamente a um referencial newtoniano, então permanecerá em repouso ($v = 0$). Se estiver inicialmente em movimento com velocidade v_0 , a sua velocidade manter-se-á ($v = v_0$), isto é, mover-se-á com velocidade constante e segundo uma linha recta. Recorde-se que este, é o enunciado da primeira lei de Newton (Sec. 2.10). Pode então afirmar-se que a primeira lei de Newton é um caso particular da segunda lei de Newton, e, por isso, se pode omitir dos princípios fundamentais da mecânica.

12.3. QUANTIDADE DE MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA. TAXA DE VARIAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Substituindo na Eq. (12.2) a aceleração a pela derivada dv/dt , escrevemos

$$\Sigma F = m \frac{dv}{dt}$$

ou, uma vez que a massa m é constante,

$$\Sigma F = \frac{d}{dt}(mv) \quad (12.3)$$

O vector mv é designado por *quantidade de movimento linear* ou, simplesmente, *quantidade de movimento* da partícula. Este vector tem a mesma direcção e o mesmo sentido que a velocidade da partícula, e a sua intensidade é igual ao produto da massa m pela velocidade v da partícula (Fig. 12.3). A Eq. (12.3) mostra que *a resultante das forças que actuam numa partícula é igual à taxa de variação da quantidade de movimento da partícula*. Foi esta a forma primitiva com que Newton enunciou a sua lei. Se representarmos por L a quantidade de movimento da partícula,

$$L = mv \quad (12.4)$$

e por \dot{L} a sua derivada em ordem ao tempo t , podemos atribuir uma nova forma à Eq. (12.3)

$$\Sigma F = \dot{L} \quad (12.5)$$

† Uma vez que as estrelas não são de facto fixas, uma definição mais rigorosa de um sistema de referência newtoniano (também chamado de sistema inercial) é aquele em relação ao qual é válida a Eq. (12.2).

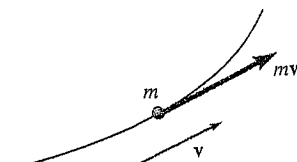


Fig. 12.3

Note-se que a massa m da partícula é considerada constante nas Eqs. (12.3) a (12.5). As Eqs. (12.3) ou (12.5) não devem por isso ser utilizadas para resolver problemas que envolvam o movimento de corpos que ganham ou perdem massa, tais como os foguetes. Na Sec. 14.12 consideraremos problemas deste tipo†.

Da Eq. (12.3) podemos concluir que se $\Sigma \mathbf{F} = 0$, a taxa de variação da quantidade de movimento $m\mathbf{v}$ é zero. Assim, *se a força resultante que actua na partícula for zero, a quantidade de movimento da partícula permanece constante, quer em intensidade quer em direcção e em sentido*. Este é o princípio da *conservação da quantidade de movimento* de uma partícula, que pode ser reconhecido como um enunciado alternativo da primeira lei de Newton (Sec. 2.10).

12.4. SISTEMAS DE UNIDADES

Ao utilizar a equação fundamental $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, não podemos escolher arbitrariamente as unidades para a força, massa, comprimento e tempo. Se porventura escolhermos unidades incorrectas, a intensidade da força F necessária para imprimir uma aceleração a à massa m não será numericamente igual ao produto ma ; poderá ser apenas proporcional a esse produto. Por essa razão, podemos escolher arbitrariamente três das unidades, sendo a quarta determinada pela satisfação da equação $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. As unidades formam neste caso um sistema de unidades consistente.

Nos Estados Unidos da América utilizam-se vulgarmente dois sistemas de unidades, o Sistema Internacional de Unidades (SI)‡ e o Sistema de Unidades Usuais nos EUA. Ambos os sistemas são descritos pormenorizadamente na Sec. 1.3 e apresentam-se brevemente nesta secção.

Sistema Internacional de Unidades (Unidades SI). Neste sistema, as unidades de base são o comprimento, a massa e o tempo, denominados, respectivamente por *metro* (m), *quilograma* (kg) e *segundo* (s), podendo todas elas ser definidas arbitrariamente (Sec. 1.3). Destas três unidades podemos derivar a unidade de força, que é designada por *newton* (N), e que podemos definir como sendo a força necessária para imprimir a aceleração de 1 m/s^2 a uma massa de 1 kg (Fig. 12.4). Da Eq. (12.1) podemos escrever

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Das unidades SI é dito formarem um sistema *absoluto* de unidades. Significa isto que as três unidades de base escolhidas são independentes do local onde se efectuam as medições. O metro, o quilograma e o segundo podem ser usados em qualquer local da Terra; podem mesmo ser usados noutro planeta. Eles terão sempre o mesmo significado.

O *peso* P de um corpo, ou *força da gravidade* exercida sobre o corpo, deve ser expresso em newtons, à semelhança de outras forças. Uma vez que um corpo sujeito ao seu próprio peso P adquire uma aceleração g , designada por aceleração da gravidade, da segunda lei de Newton resulta que a intensidade do peso do corpo de massa m é

$$P = mg \quad (12.6)$$

† Ainda assim, as Eqs. (12.3) e (12.5) são válidas na *mecânica relativística*, na qual se admite que a massa m da partícula varia com a sua velocidade.

‡ SI significa *Système International d'Unités* (francês).

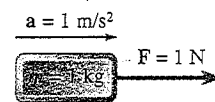


Fig. 12.4

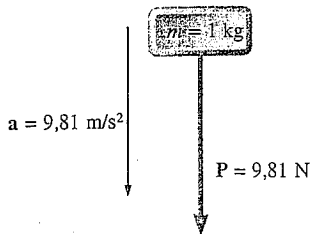


Fig. 12.5

Relembrando que $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, concluímos que o peso de um corpo com a massa de 1 kg (Fig. 12.5) é

$$P = (1 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 9,81 \text{ N}$$

No domínio das aplicações de Engenharia, utilizam-se geralmente múltiplos e submúltiplos das unidades de comprimento, massa e força. São respectivamente, o quilómetro (km) e o milímetro (mm); megagrama† (Mg) e ao grama (g); e o quilonewton (kN). Por definição,

$$\begin{aligned} 1 \text{ km} &= 1000 \text{ m} & 1 \text{ mm} &= 0,001 \text{ m} \\ 1 \text{ Mg} &= 1000 \text{ kg} & 1 \text{ g} &= 0,001 \text{ kg} \\ 1 \text{ kN} &= 1000 \text{ N} \end{aligned}$$

A conversão destas unidades para metros, quilogramas e newtons, respectivamente, pode ser levada a cabo pela mudança da vírgula três casas para a direita ou para a esquerda.

Qualquer outra unidade além da massa, comprimento e tempo pode ser sempre expressa nestas unidades de base. Por exemplo, a unidade para a quantidade de movimento pode obter-se através da sua definição e do seguinte modo,

$$mv = (\text{kg})(\text{m/s}) = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Sistema de Unidades Usuais nos EUA. Muitos dos engenheiros americanos utilizam ainda um sistema de unidades que tem como base as unidades de comprimento, força e tempo. Estas unidades são, respectivamente, o pé (ft), a libra (lb) e o segundo (s). O segundo é o mesmo que o do sistema SI. O pé define-se como valendo 0,3048 m. A libra define-se como o peso de um padrão de platina, designado por *libra-padrão*, que está guardado no National Institute of Standards and Technology, nos arredores de Washington, e cuja massa vale 0,453 592 43 kg. Dado que o peso de um corpo depende da atracção gravítica da Terra, que varia com o local, está especificado que a libra-padrão deve estar colocada ao nível do mar e a uma latitude de 45° a fim de definir rigorosamente a força de 1 libra. Evidentemente o sistema americano de unidades não constitui um sistema de unidades absoluto. Dada a sua dependência da atracção gravítica da Terra, diz-se que forma um sistema de unidades *gravitacional*.

Apesar de nos Estados Unidos a libra servir como unidade de massa nas transacções comerciais‡, ela não pode ser utilizada em cálculos no domínio da engenharia, pois tal unidade não seria consistente com as unidades básicas que se definiram no parágrafo precedente. Na verdade, sob a acção de uma força de 1 lb, isto é, quando sujeita ao seu peso, a libra-padrão está sujeita à aceleração da gravidade, $g = 32,2 \text{ ft/s}^2$ (Fig. 12.6), e não à aceleração imposta pela Eq. (12.1). A unidade de massa consistente com o pé, a libra, e o segundo é a massa que está sujeita à aceleração de 1 ft/s^2 sob a acção da força de 1 lb (Fig. 12.7). Esta unidade, algumas vezes designada por *slug*, pode deduzir-se da equação $F = ma$ após a correspondente substituição de F e a por 1 lb e 1 ft/s^2 . Escrevemos então

$$F = ma \quad 1 \text{ lb} = (1 \text{ slug})(1 \text{ ft/s}^2)$$

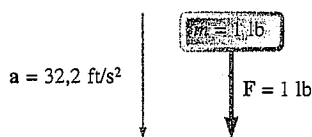


Fig. 12.6

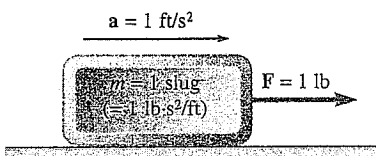


Fig. 12.7

† Também conhecida por *tonelada métrica*.

‡ Nota do R.T. Situação idêntica acontece com a unidade kg_p , que, juntamente com o metro e o segundo, constituem o que vulgarmente se designa por *sistema de unidades gravitacional*, cuja utilização é cada vez menos aceite nos países lusófonos, principalmente na resolução de problemas em dinâmica.

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

Se compararmos as Figs. 12.6 e 12.7, concluímos que o slug é uma massa 32,2 vezes maior que a massa da libra-padrão.

O facto de no sistema de unidades usuais nos EUA os corpos serem caracterizados pelo seu peso em libras em vez de pela sua massa em slugs[†], deve-se à sua conveniência no estudo da estática, onde, na maioria das situações, se trabalha com pesos e outras forças, e muito raramente com massas. Todavia, no estudo da Dinâmica, que envolve forças, massas e acelerações, é frequentemente necessário expressar em slugs a massa m de um corpo, cujo peso é dado em libras. Recordando a Eq. (12.6), escrevemos

$$m = \frac{P}{g} \quad (12.7)$$

na qual g é a aceleração gravítica ($g = 32,2 \text{ ft/s}^2$)

As outras unidades que não sejam a força, o comprimento e o tempo podem ser expressas em termos destas três unidades básicas. Por exemplo, a unidade da quantidade de movimento pode obter-se recorrendo à sua definição

$$mv = (\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\text{ft/s}) = \text{lb} \cdot \text{s}$$

Conversão de unidades. A conversão das unidades usuais nos EUA em unidades SI, ou vice-versa, foi já discutida na Sec. 1.4. Lembramos aqui que os factores de conversão para as unidades de comprimento, força e massa são, respectivamente,

Comprimento:	1 ft = 0,3048 m
Força:	1 lb = 4,448 N
Massa:	1 slug = 1 lb · s ² /ft = 14,59 kg

Embora não se possa utilizar como unidade consistente a massa associada à libra-padrão, ela é, por definição,

$$1 \text{ libra-massa} = 0,4536 \text{ kg}$$

Esta constante pode utilizar-se para determinar a *massa* (quilogramas) em unidades SI, de um corpo que, nas unidades usuais americanas, é caracterizado pelo seu *peso* (libras).

12.5. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Consideremos uma partícula de massa m sujeita à acção de várias forças. Recorde-se que a segunda lei de Newton pode ser traduzida pela equação

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (12.2)$$

que relaciona as forças actuantes sobre a partícula e o vector $m\mathbf{a}$ (Fig. 12.8). Contudo, para a resolução de problemas, é preferível substituir a Eq. (12.2) por equações equivalentes, envolvendo apenas grandezas escalares.

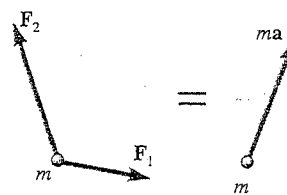


Fig. 12.8

[†] Nota do R.T. Situação análoga ocorre nos países lusófonos com o cada vez menos utilizado sistema de unidades gravitacional. A unidade de massa neste sistema designa-se por unidade métrica de massa (1 u.m.m.) e corresponde à massa de um corpo que, sujeito à força de 1 kg_f, adquire a aceleração de 1 m/s².

Componentes cartesianas. Decompondo a força \mathbf{F} e a aceleração \mathbf{a} em componentes cartesianas, escrevemos

$$\Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$

de onde resulta que

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_y = ma_y \quad \Sigma F_z = ma_z \quad (12.8)$$

Se recordarmos da Sec. 11.11 que as componentes da aceleração são iguais à segunda derivada das coordenadas de posição da partícula, temos

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \quad \Sigma F_y = m\ddot{y} \quad \Sigma F_z = m\ddot{z} \quad (12.8')$$

Consideremos, como exemplo, o movimento de um projectil. Admitindo que se pode desprezar a resistência do ar, a única força actuante sobre o projectil, após o seu lançamento, é o próprio peso $\mathbf{P} = -P\mathbf{j}$. Deste modo, as equações que definem o seu movimento são

$$m\ddot{x} = 0 \quad m\ddot{y} = -P \quad m\ddot{z} = 0$$

e as componentes da aceleração são

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = -\frac{P}{m} = -g \quad \ddot{z} = 0$$

onde g vale $9,81 \text{ m/s}^2$. As equações assim obtidas podem ser integradas independentemente, como se mostra na Sec. 11.11, de modo a conhecer, em qualquer instante, a velocidade e a aceleração do projectil.

Para um problema que envolva dois ou mais corpos, as equações do movimento devem ser formuladas para cada um dos corpos (vejam-se os problemas-tipo 12.3 e 12.4). É importante lembrar que, na Sec. 12.2, as acelerações eram sempre medidas em relação a um referencial newtoniano. Em muitas aplicações no domínio da engenharia, as acelerações podem ser determinadas em relação a um sistema de eixos fixo à Terra. Todavia, nas equações do movimento, as acelerações medidas relativamente a um sistema de eixos móvel, por exemplo um sistema ligado a um corpo acelerado, não podem ser substituídas por \mathbf{a} .

Componentes tangencial e normal. Decompondo as forças que actuam sobre uma partícula e a respectiva aceleração segundo a tangente à trajectória (no sentido do movimento) e segundo a normal (apontando para o

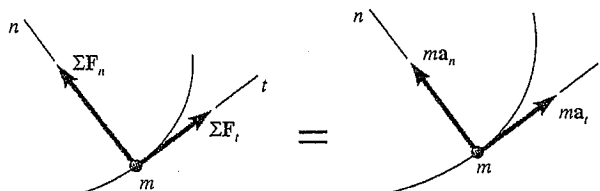


Fig. 12.9

interior da trajectória) (Fig. 12.9), e introduzindo estas componentes na Eq. (12.2), obtemos as duas equações escalares

$$\Sigma F_t = ma_t \quad \Sigma F_n = ma_n \quad (12.9)$$

Substituindo os valores de a_t e a_n pelos que se obtêm a partir das Eqs. (11.40), temos

$$\Sigma F_t = m \frac{dv}{dt} \quad \Sigma F_n = m \frac{v^2}{\rho} \quad (12.9')$$

As equações assim obtidas podem ser resolvidas em ordem a duas incógnitas.

Se tomarmos de novo a Eq. (12.2), e transpusermos o seu segundo membro, podemos escrever a segunda lei de Newton na seguinte forma alternativa,

$$\Sigma \mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0 \quad (12.10)$$

que pode ser interpretada como uma adição do vector $-m\mathbf{a}$ ao conjunto de forças actuantes sobre a partícula, cujo resultado é um sistema de vectores equivalente a zero (Fig. 12.10). O vector $-m\mathbf{a}$, cujo módulo é ma e cujo sentido é oposto ao da aceleração, é designado por vector de inércia. A partícula está em equilíbrio perante a acção das forças dadas e do vector de inércia. Diz-se que a partícula está em *equilíbrio dinâmico*, e a resolução do problema é levada a cabo pelos métodos desenvolvidos na Estática.

Para o caso de forças coplanares, pode representar-se num polígono vectorial, todos os vectores mostrados na Fig. 12.10, incluindo o vector de inércia, ou, de outro modo, pode estipular-se que a soma das várias componentes é zero. Se estas forem as componentes cartesianas, podemos escrever

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{incluindo o vector de inércia} \quad (12.11)$$

Se se utilizar as componentes tangencial e normal, torna-se conveniente representar, no próprio desenho (Fig. 12.11), o vector de inércia segundo essas duas componentes $-ma_n$ e $-ma_t$. A componente tangencial do vector de inércia traduz a resistência que a partícula oferece a uma mudança da sua velocidade, enquanto a componente normal (também designada por *força centrífuga*) representa a tendência da partícula para deixar a trajectória curva. Importa sublinhar que, em condições particulares, qualquer uma destas componentes pode ser zero: (1) se a partícula parte do repouso, a velocidade inicial é zero, e, por isso, a componente normal do vector de inércia é zero quando $t = 0$; (2) se a partícula se desloca com velocidade constante ao longo da trajectória, a componente tangencial é nula, e considera-se apenas a componente normal.

Pela simples razão de estas componentes medirem a resistência que as partículas oferecem quando as tentamos pôr em movimento, ou tentamos alterar as suas condições de movimento, os vectores de inércia são geralmente conhecidos por *forças de inércia*. Todavia, as forças de inércia não são forças como as que encontramos na estática, que são, ou forças de contacto, ou forças gravíticas (pesos). Por esta razão, muitas pessoas recusam utilizar o termo "força" quando se referem ao vector $-m\mathbf{a}$ ou até evitam de todo o conceito de equilíbrio dinâmico. Outras, porém, consideram que as forças de inércia e as forças aplicadas, tais como a força da gravidade, afectam de igual modo os nossos sentidos e não existem meios para as distinguir por medidas físicas. Por exemplo, um homem num elevador que está acelerado em movimento ascendente terá a sensação de que o seu peso aumenta; se porventura medirmos o seu peso, não existem meios de distinguir se o elevador está de facto em aceleração para cima, ou se hipoteticamente a força de atracção gravítica aumentou.

Existem neste texto problemas-tipo que foram resolvidos por aplicação da segunda lei de Newton, como se ilustra nas Figs. 12.8 e 12.9, em vez do método do equilíbrio dinâmico.

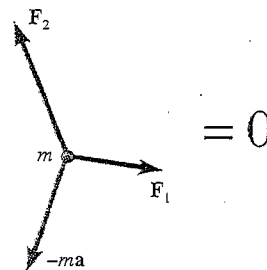


Fig. 12.10

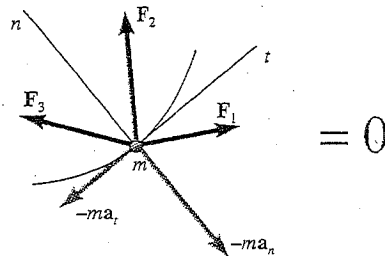
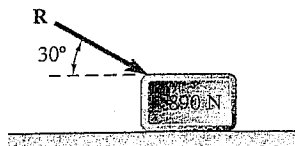


Fig. 12.11

PROBLEMA-TIPO 12.1



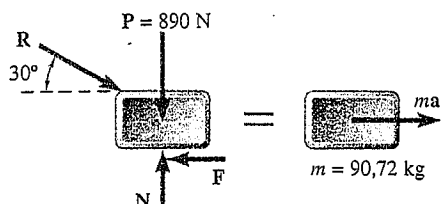
Um bloco de 890 N repousa sobre um plano horizontal. Calcule a intensidade da força R necessária para imprimir ao bloco uma aceleração de 3 m/s^2 para a direita. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é $\mu_c = 0,25$.

RESOLUÇÃO

A massa do bloco é

$$m = \frac{P}{g} = \frac{890}{9,81} = 90,72 \text{ kg}$$

Sabemos que $F = \mu_c N = 0,25 N$ e que $a = 3 \text{ m/s}^2$. Pela segunda lei de Newton, podemos escrever que as forças actuantes no bloco são equivalentes ao vector ma ,



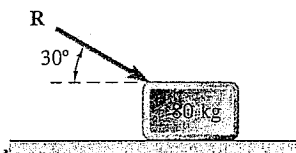
$$\begin{aligned} \pm \Sigma F_x = ma & \quad R \cos 30^\circ - 0,25 N = (90,72 \text{ kg}) \times (3 \text{ m/s}^2) \\ & \quad R \cos 30^\circ - 0,25 N = 272,16 \quad (1) \\ +\uparrow \Sigma F_y = 0 & \quad N - R \sin 30^\circ - 890 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Resolvendo a equação (2) em ordem a N e substituindo o resultado em (1) obtemos

$$N = R \sin 30^\circ + 890$$

$$R \cos 30^\circ - 0,25(R \sin 30^\circ + 890) = 272,16 \text{ N} \quad R = 671,65 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA-TIPO 12.2



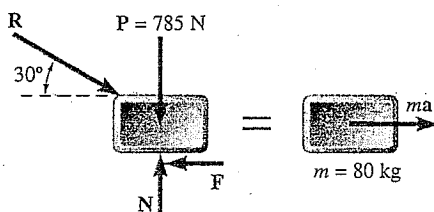
Um bloco com 80 kg repousa num plano horizontal. Calcule a intensidade da força R necessária para imprimir ao bloco uma aceleração de $2,5 \text{ m/s}^2$ para a direita. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é $\mu_c = 0,25$.

RESOLUÇÃO

O peso do bloco é

$$P = mg = (80 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 785 \text{ N}$$

Sabemos que $F = \mu_c N = 0,25 N$ e que $a = 2,5 \text{ m/s}^2$. Pela segunda lei de Newton, podemos escrever que as forças actuantes no bloco são equivalentes ao vector ma ,

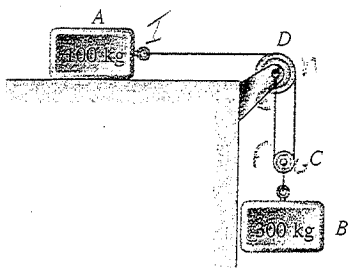


$$\begin{aligned} \pm \Sigma F_x = ma & \quad R \cos 30^\circ - 0,25 N = (80 \text{ kg}) \times (2,5 \text{ m/s}^2) \\ & \quad R \cos 30^\circ - 0,25 N = 200 \text{ N} \quad (1) \\ +\uparrow \Sigma F_y = 0 & \quad N - R \sin 30^\circ - 785 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Resolvendo a equação (2) em ordem a N e substituindo o resultado em (1) obtemos

$$N = R \sin 30^\circ + 785 \text{ N}$$

$$R \cos 30^\circ - 0,25(R \sin 30^\circ + 785) = 200 \text{ N} \quad R = 535 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA-TIPO 12.3

Os dois blocos mostrados na figura partem do repouso. Considere que não existe atrito, quer entre os blocos e o plano horizontal, quer no eixo da polia que tem massa desprezável. Determine a aceleração de cada bloco e a tensão nos diferentes segmentos da corda.

RESOLUÇÃO

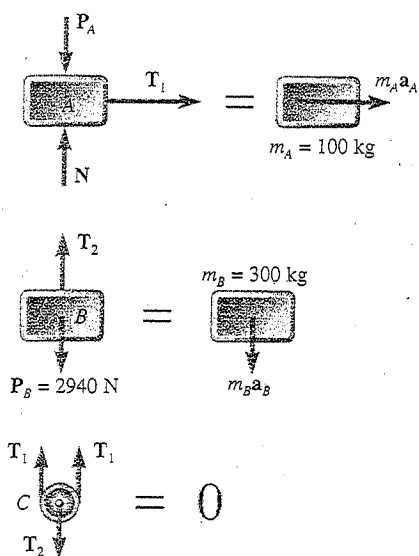
Cinemática. Podemos verificar que se o bloco A se desloca de x_A para a direita, o bloco B move-se para baixo de x_B

$$x_B = \frac{1}{2} x_A$$

Se diferenciarmos duas vezes em ordem ao tempo, obtemos

$$a_B = \frac{1}{2} a_A \quad (1)$$

Cinética. Podemos aplicar, sucessivamente, a segunda lei de Newton ao bloco A, ao bloco B e à polia C, como se segue:



Bloco A. Representando a tensão na corda ACD por T_1 , escrevemos

$$+\rightarrow \Sigma F_x = m_A a_A \quad T_1 = 100 a_A \quad (2)$$

Bloco B. O peso do bloco é dado por

$$P_B = m_B g = (300 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 2940 \text{ N}$$

Representando a tensão na corda BC por T_2 , escrevemos

$$+\downarrow \Sigma F_y = m_B a_B \quad 2940 - T_2 = 300 a_B$$

substituindo a_B de (1) temos

$$\begin{aligned} 2940 - T_2 &= 300(\frac{1}{2} a_A) \\ T_2 &= 2940 - 150 a_A \end{aligned} \quad (3)$$

Polia C. Uma vez que m_C é considerada desprezável, temos

$$+\downarrow \Sigma F_y = m_C a_C = 0 \quad T_2 - 2T_1 = 0 \quad (4)$$

Substituindo T_1 e T_2 de (2) e (3), respectivamente, em (4), escrevemos

$$\begin{aligned} 2940 - 150 a_A - 2(100 a_A) &= 0 \\ 2940 - 350 a_A &= 0 \end{aligned} \quad a_A = 8,40 \text{ m/s}^2 \quad \blacktriangleleft$$

Substituindo o valor obtido para a_A em (1) e (2), obtemos

$$\begin{aligned} a_B &= \frac{1}{2} a_A = \frac{1}{2} (8,40 \text{ m/s}^2) & a_B &= 4,20 \text{ m/s}^2 \quad \blacktriangleleft \\ T_1 &= 100 a_A = (100 \text{ kg})(8,40 \text{ m/s}^2) & T_1 &= 840 \text{ N} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

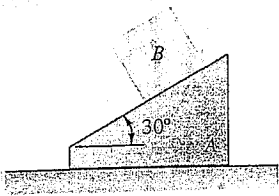
Recordando a equação (4) escrevemos

$$T_2 = 2T_1 = 0 \quad T_2 = 2(840 \text{ N}) \quad T_2 = 1680 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

Repare-se que o valor obtido para T_2 não é igual ao peso do bloco B

PROBLEMA-TIPO 12.4

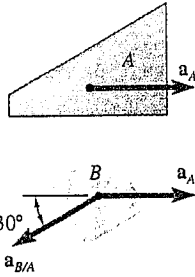
O bloco B com 53,4 N parte do repouso e desliza sobre a cunha A com 133 N, que está assente no plano horizontal. Desprezando o atrito, determine (a) a aceleração da cunha, (b) a aceleração do bloco relativamente à cunha.



RESOLUÇÃO

Cinemática. Examinemos primeiro as acelerações da cunha e do bloco.

Cunha A. Uma vez que a cunha é forçada a deslocar-se segundo a superfície horizontal, a sua aceleração a_A é horizontal. Admitimos que está dirigida para a direita.

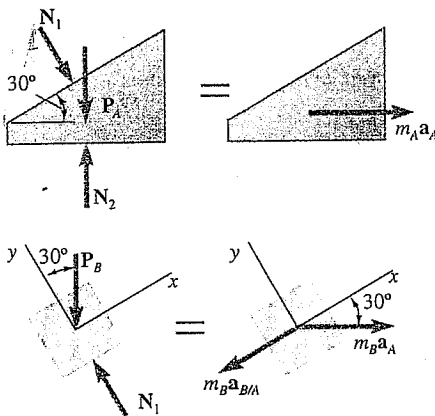


Bloco B. A aceleração a_B do bloco B pode ser traduzida pela soma da aceleração de A com a aceleração de B relativamente a A . Temos deste modo

$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

tendo $a_{B/A}$ uma orientação paralela à superfície inclinada da cunha.

Cinética. Através do diagrama do corpo livre da cunha e do bloco podemos facilmente aplicar a segunda lei de Newton.



Cunha A. Designemos por N_1 e N_2 , respectivamente, as forças exercidas pelo bloco e pela superfície horizontal sobre a cunha.

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = m_A a_A & & N_1 \sin 30^\circ = m_A a_A \\ & & N_1 0,5 = (P_A/g) a_A \end{aligned} \quad (1)$$

Bloco B. Recorrendo ao sistema de eixos representado e decompondo a_B nas suas componentes a_A e $a_{B/A}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} + \nearrow \Sigma F_x = m_B a_x & & -P_B \sin 30^\circ = m_B a_A \cos 30^\circ - m_B a_{B/A} \\ -P_B \sin 30^\circ & & = (P_B/g) (a_A \cos 30^\circ - a_{B/A}) \\ a_{B/A} & & = a_A \cos 30^\circ + g \sin 30^\circ \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} + \nwarrow \Sigma F_y = m_B a_y & & N_1 - P_B \cos 30^\circ = -m_B a_A \sin 30^\circ \\ N_1 - P_B \cos 30^\circ & & = -(P_B/g) a_A \sin 30^\circ \end{aligned} \quad (3)$$

a. **Aceleração da cunha A.** Substituindo N_1 da Eq. (1) na Eq. (3), temos

$$2(P_A/g) a_A - P_B \cos 30^\circ = -(P_B/g) a_A \sin 30^\circ$$

Resolvendo em ordem a a_A e substituindo os valores dados, escrevemos

$$a_A = \frac{P_B \cos 30^\circ}{2P_A + P_B \sin 30^\circ} g = \frac{(53,4\text{N}) \cos 30^\circ}{2(133\text{N}) + (53,4\text{N}) \sin 30^\circ} (9,81\text{m/s}^2)$$

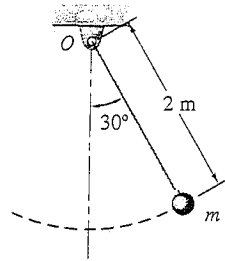
$$a_A = +1,55 \text{ m/s}^2 \quad a_A = 1,55 \text{ m/s}^2 \rightarrow \blacktriangleleft$$

a. **Aceleração do bloco B relativamente à cunha A.** Substituindo o valor obtido para a_A na Eq (2), temos

$$\begin{aligned} a_{B/A} & = (1,55 \text{ m/s}^2) \cos 30^\circ + (9,81 \text{ m/s}^2) \sin 30^\circ \\ a_{B/A} & = +6,25 \text{ m/s}^2 \quad a_{B/A} = 6,25 \text{ m/s}^2 \nearrow 30^\circ \blacktriangleleft \end{aligned}$$

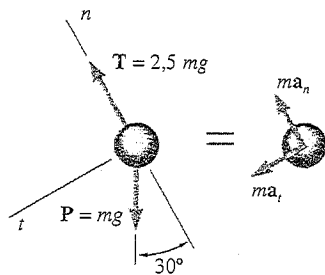
PROBLEMA-TIPO 12.5

Um pêndulo simples com 2 m de comprimento descreve um arco de circunferência no plano vertical. Sabe-se que, para a posição representada, a força exercida na corda é igual a 2,5 vezes o peso do pêndulo; calcule a velocidade e a aceleração do pêndulo nessa posição.



RESOLUÇÃO

O peso do pêndulo é dado por $P = mg$; a força exercida na corda é igual a $2,5 mg$. Recordemos que a_n está dirigida para a origem O e admitindo que a_t é o que se mostra, podemos aplicar a segunda lei de Newton e obtemos



$$\begin{aligned} +\swarrow \Sigma F_t &= m a_t & mg \operatorname{sen} 30^\circ &= m a_t & a_t &= g \operatorname{sen} 30^\circ = +4,90 \text{ m/s}^2 & a_t &= 4,90 \text{ m/s}^2 \swarrow \blacktriangleleft \\ +\nwarrow \Sigma F_n &= m a_n & 2,5 mg - mg \operatorname{cos} 30^\circ &= m a_n & a_n &= 1,634 g = +16,03 \text{ m/s}^2 & a_n &= 16,03 \text{ m/s}^2 \nwarrow \blacktriangleleft \end{aligned}$$

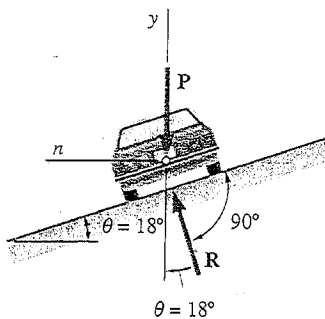
Dado que $a_n = v^2/\rho$, temos $v^2 = \rho a_n = (2 \text{ m})(16,03 \text{ m/s}^2)$
 $v = \pm 5,66 \text{ m/s}$ $v = 5,66 \text{ m/s} \swarrow$ (para cima ou para baixo) \blacktriangleleft

PROBLEMA-TIPO 12.6

Determine a velocidade de segurança numa curva de uma auto-estrada com raio $\rho = 122 \text{ m}$ compensada com um ângulo $\theta = 18^\circ$. A velocidade de segurança numa curva compensada é a velocidade para a qual o carro não sofre a acção de qualquer força lateral nas suas rodas.

RESOLUÇÃO

O carro desloca-se segundo uma trajectória circular horizontal de raio ρ . A componente normal a_n da aceleração é dirigida para o centro de curvatura; a sua intensidade é $a_n = v^2/\rho$, na qual v é a velocidade do carro em m/s. A massa m do carro é P/g , onde P é o peso do carro. Uma vez que não deve existir força lateral exercida sobre o carro, a reacção R da estrada é perpendicular à estrada. Pela aplicação da segunda lei de Newton, escrevemos



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad R \cos \theta - P = 0 \quad R = \frac{P}{\cos \theta} \quad (1)$$

$$\leftarrow \Sigma F_n = m a_n \quad R \operatorname{sen} \theta = \frac{P}{g} a_n \quad (2)$$

Substituindo em (2) o valor de R obtido a partir de (1), e recordando que $a_n = v^2/\rho$

$$\frac{P}{\cos \theta} \operatorname{sen} \theta = \frac{P v^2}{g \rho} \quad v^2 = g \rho \operatorname{tg} \theta$$

Substituindo $\rho = 122 \text{ m}$ e $\theta = 18^\circ$ nesta equação, obtemos

$$\begin{aligned} v^2 &= (9,81 \text{ m/s}^2)(122 \text{ m}) \operatorname{tg} 18^\circ \\ v &= 19,7 \text{ m/s} & v &= 71 \text{ km/h} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas desta lição, aplicamos a segunda lei de Newton do movimento, $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, a fim de relacionar as forças actuantes e o movimento resultante numa partícula.

1. Escrever as equações de movimento. Quando se aplica a segunda lei de Newton aos vários tipos de movimento é preferível exprimir os vectores \mathbf{F} e \mathbf{a} em função das suas componentes cartesianas ou das suas componentes tangencial e normal.

a. Utilizando componentes cartesianas, tendo em conta as expressões da Sec. 11.11 para a_x , a_y e a_z , podemos escrever

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \quad \Sigma F_y = m\ddot{y} \quad \Sigma F_z = m\ddot{z}$$

b. Utilizando componentes tangencial e normal, atendendo às expressões da Sec. 11.13 para a_t e a_n , podemos escrever

$$\Sigma F_t = m \frac{dv}{dt} \quad \Sigma F_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

2. Desenhar o diagrama do corpo-livre, que mostra as forças aplicadas, e um *diagrama equivalente* mostrando o vector $m\mathbf{a}$ ou as suas componentes, de modo a visualizar a segunda lei de Newton [Probs.-Tipo 12.1 a 12.6]. Estes diagramas revelam-se extremamente úteis para a escrita das equações de movimento. Repare-se que, quando um problema envolve dois ou mais corpos, geralmente é melhor considerar cada corpo separadamente.

3. Aplicando a segunda lei de Newton. Como observámos na Sec. 12.2, a aceleração utilizada na equação $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ deve ser sempre uma *aceleração absoluta* da partícula (o mesmo será dizer que deve ser medida em relação a um referencial newtoniano). Além do mais, *se o sentido da aceleração a for desconhecido* ou de difícil dedução, admitimos um sentido arbitrário para \mathbf{a} (normalmente o sentido positivo do eixo coordenado), e, em face da solução encontrada para o problema, determinamos o sentido correcto. Finalmente, repararemos no modo como a resolução dos Probs.-Tipo 12.3 e 12.4 foi dividida em duas partes, uma parte *cinemática* e uma parte *cinética*, e notemos também, no Prob.-Tipo 12.4, a utilização de dois sistemas de coordenadas a fim de simplificar as equações de movimento.

4. Quando um problema envolve atrito seco, devemos, antes de mais, rever as secções relevantes da Estática [Secs. 8.1 a 8.3] antes de o tentar resolver. Em particular, devemos conhecer quando cada uma das equações $F = \mu_s N$ e $F = \mu_k N$ deve ser utilizada. Devemos

ainda reconhecer que, na eventualidade de o movimento de um sistema não ser especificado, se torna necessário arbitrar um movimento possível e posteriormente verificar a validade de tal hipótese.

5. Resolução de problemas envolvendo movimento relativo. Quando um corpo B se move relativamente a um corpo A , tal como no Prob.-Tipo 12.4, é, muitas vezes, conveniente exprimir a aceleração de B como

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

na qual $\mathbf{a}_{B/A}$ é a aceleração de B relativamente a A , isto é, a aceleração de B quando observada de um referencial ligado a e em translação com A . Se observarmos B em movimento segundo uma linha recta, $\mathbf{a}_{B/A}$ será orientada segundo essa linha. Por outro lado, se B for observado em movimento segundo uma trajectória circular, a aceleração relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ deve ser decomposta nas componentes tangencial e normal àquela trajectória.

6. Finalmente, deve ter-se em atenção que cada hipótese admitida tem as suas implicações. Por exemplo, num problema envolvendo duas cordas, se admitirmos que a tensão numa das cordas é igual ao valor máximo permitido, deve verificar-se se alguns dos requisitos para a outra corda são satisfeitos. Por exemplo, será que a tensão T nessa corda satisfaz a relação $0 < T < T_{\text{máx}}$? Isto é, será que a corda permanece esticada e a sua tensão é menor que o seu valor máximo permitido?

Problemas

12.1 O valor da aceleração da gravidade em qualquer latitude ϕ é dada por $g = 9,7807(1 + 0,0053 \text{ sen}^2 \phi) \text{ m/s}^2$, na qual são tidos em devida conta o efeito da rotação da Terra, e o facto de a mesma não ser esférica. Se a massa de uma barra de ouro for oficialmente designada como tendo 2 kg, determine com quatro dígitos significativos, a sua massa em quilogramas e o seu peso em newtons à latitude de (a) 0° , (b) 45° , (c) 60° .

12.2 O valor da aceleração devida à gravidade em Marte é $3,75 \text{ m/s}^2$. Se a massa de uma barra de prata foi oficialmente reconhecida como sendo 22,68 kg, determine, em Marte, (a) a sua massa em kg, (b) a sua massa em Ns^2/m , (c) o seu peso em N.

12.3 Um satélite com 200 kg de massa encontra-se em órbita circular a uma distância de 1500 km da superfície de Vénus. A esta altitude, a aceleração devida à atracção gravítica de Vénus é de $5,52 \text{ m/s}^2$. Sabendo que a velocidade orbital é de $23,4 \times 10^3 \text{ km/h}$, determine a intensidade da quantidade de movimento do satélite.

12.4 Uma balança dinamométrica A e uma balança de dois braços iguais estão ligadas ao tecto de um elevador e suspendem embalagens idênticas. Sabendo que quando o elevador se move para baixo, com uma aceleração de $1,22 \text{ m/s}^2$, a escala do dinamómetro indica 62,7 N, determine (a) o peso das embalagens, (b) a carga indicada pelo dinamómetro e a massa necessária para equilibrar a balança, quando o elevador se move em sentido ascendente com aceleração de $1,22 \text{ m/s}^2$.

12.5 Um jogador de hóquei lança um disco de tal modo, que este atinge o repouso ao fim de 8 s, após ter percorrido uma distância de 30 m sobre o gelo. Determine (a) a velocidade inicial do disco, (b) o coeficiente de atrito entre o disco e o gelo.

12.6 Determine, em termos teóricos, a velocidade máxima que um automóvel pode atingir se partir do repouso e viajar 400 m. Admita que o coeficiente de atrito estático entre os pneus e o pavimento é de 0,8, e que (a) o automóvel tem tração dianteira e que as rodas da frente suportam 62 por cento do peso do automóvel, (b) o automóvel tem tração traseira e que estas rodas absorvem 43 por cento do peso do automóvel.

12.7 Em antecipação a uma subida com 7 por cento de inclinação, um motorista de autocarro acelera, ainda sobre a zona nivelada da estrada, a uma razão constante de $0,914 \text{ m/s}^2$. Sabendo que a velocidade do autocarro é de 96,5 km/h no instante em que inicia a subida, e que o condutor mantém constantes as condições do acelerador e da caixa de velocidades, determine a distância percorrida pelo autocarro na subida quando a sua velocidade atinge 80,45 km/h.

12.8 A embalagem desliza na secção AB do plano inclinado com uma aceleração de $5,5 \text{ m/s}^2$. Considerando que o coeficiente de atrito cinético é o mesmo em cada secção, determine a aceleração da embalagem na secção BC do plano.

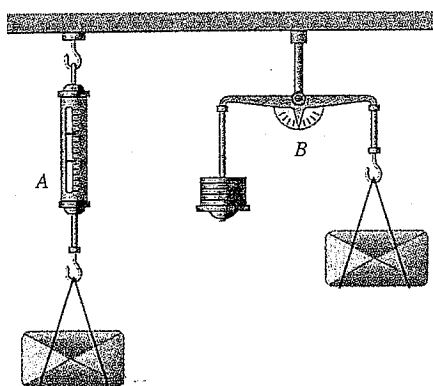


Fig. P12.4

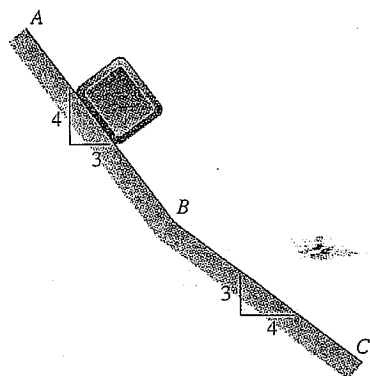


Fig. P12.8

12.9 Um automóvel que viaja à velocidade de 90 km/h tem uma distância de travagem de 50 m num piso nivelado. Determine a distância de travagem do automóvel para a mesma velocidade e quando está (a) a subir um plano com 5° de inclinação, (b) a descer um plano com 3° de inclinação.

12.10 Uma embalagem com 20 kg está em repouso num plano inclinado quando sofre a acção de uma força R . Sabendo que são necessários 10 s para a embalagem subir 5 m no plano, determine a intensidade de R . Os coeficientes de atrito estático e de atrito cinético entre a embalagem e o plano são 0,4 e 0,3, respectivamente.

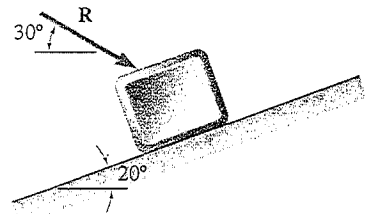


Fig. P12.10

12.11 Os dois blocos mostrados estão inicialmente em repouso. Desprezando a massa das polias e o efeito do atrito nos eixos das polias e entre o bloco A e a superfície horizontal, determine (a) a aceleração de cada bloco, (b) a tensão no cabo.

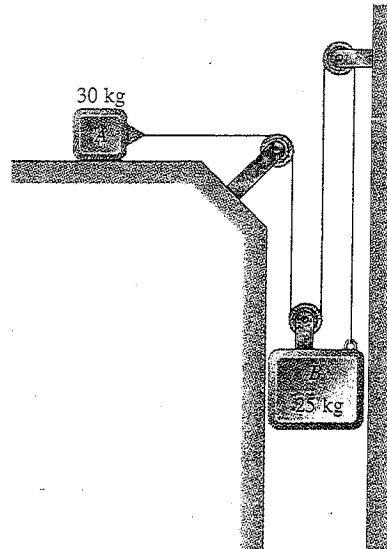


Fig. P12.11 e P12.12

12.12 Os dois blocos mostrados estão inicialmente em repouso. Desprezando a massa das polias e o efeito do atrito nos eixos das polias, e admitindo que os coeficientes de atrito entre o bloco A e a superfície horizontal são $\mu_e = 0,25$ e $\mu_c = 0,20$, determine (a) a aceleração de cada bloco, (b) a tensão no cabo.

12.13 Um camião semi-reboque desloca-se à velocidade de 96,5 km/h quando o condutor acciona os travões. Sabendo que as forças de travagem do tractor e do reboque são de 16 013 N e 60 938 N, respectivamente, determine (a) a distância percorrida pelo camião semi-reboque antes de atingir o repouso, (b) a componente horizontal da força actuante no gancho entre o tractor e o reboque enquanto se processa a travagem.

12.14 Resolva o Prob. 12.13 admitindo um segundo reboque, com um peso de 110 755 N, ligado à traseira do conjunto semi-reboque. A força de travagem do segundo reboque é de 57 379 N.



Fig. P12.13

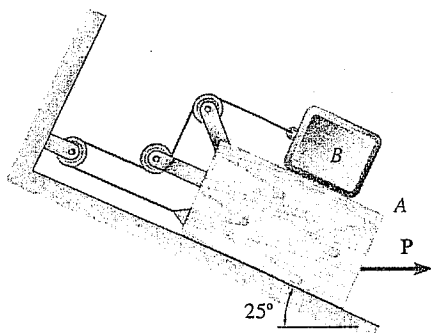


Fig. P12.15 e P12.16

12.15 Os blocos A e B têm, respectivamente, as massas de 40 kg e 8 kg. Os coeficientes de atrito entre as superfícies em contacto são $\mu_e = 0,20$ e $\mu_c = 0,15$. Se $P = 0$, determine (a) a aceleração do bloco B, (b) a tensão na corda.

12.16 Os blocos A e B têm, respectivamente, as massas de 40 kg e 8 kg. Os coeficientes de atrito entre as superfícies em contacto são $\mu_e = 0,20$ e $\mu_c = 0,15$. Se $P = 40$ N, determine (a) a aceleração do bloco B, (b) a tensão na corda.

12.17 As caixas A e B estão em repouso na correia transportadora que está inicialmente em repouso. A correia é posta subitamente em movimento ascendente, situação que provoca escorregamento entre a correia e as caixas. Sabendo que os coeficientes de atrito cinético entre a correia e as caixas são $(\mu_c)_A = 0,30$ e $(\mu_c)_B = 0,32$, determine a aceleração inicial de cada caixa.

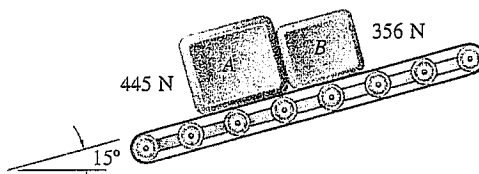


Fig. P12.17

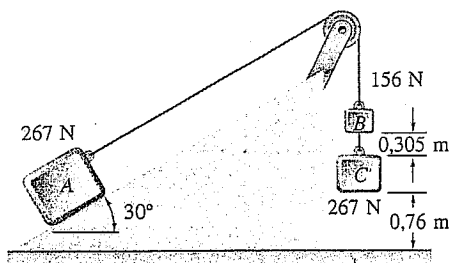


Fig. P12.18

12.18 Os coeficientes de atrito entre a embalagem A e o plano inclinado são $\mu_e = 0,35$ e $\mu_c = 0,30$. Sabendo que o sistema está inicialmente em repouso e que o bloco B atinge o repouso sobre o bloco C, determine (a) a velocidade máxima alcançada pela embalagem A, (b) a distância percorrida pela embalagem A sobre o plano antes de atingir o repouso.

12.19 Cada um dos sistemas mostrados encontra-se inicialmente em repouso. Desprezando o atrito nos eixos e a massa das polias, determine para cada sistema (a) a aceleração do bloco A, (b) a velocidade do bloco A depois de ter percorrido 3,05 m, (c) o tempo necessário para o bloco A atingir uma velocidade de 6,1 m/s.

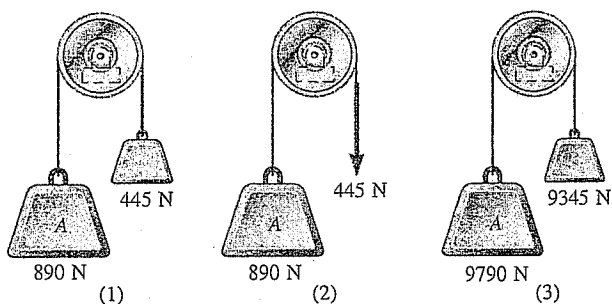


Fig. P12.19

12.20 Um homem está de pé num elevador que se desloca com uma aceleração constante, e segura o bloco B entre outros dois, de tal modo que o movimento de B relativamente a A e C é iminente. Sabendo que os coeficientes de atrito entre as superfícies em contacto são $\mu_e = 0,30$ e $\mu_c = 0,25$, determine (a) a aceleração do elevador se estiver em movimento ascendente e cada uma das forças exercidas pelo homem sobre os blocos A e C possuir uma componente horizontal igual a duas vezes o peso de B , (b) as componentes horizontais das forças exercidas pelo homem sobre os blocos A e C se a aceleração do elevador for igual a 2 m/s^2 para baixo.

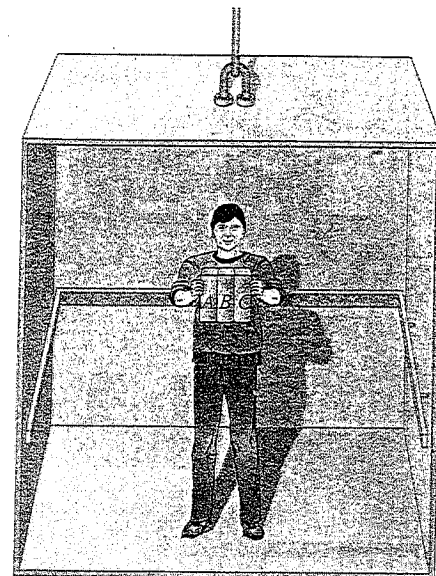


Fig. P12.20

12.21 Uma embalagem encontra-se em repouso sobre uma correia transportadora que está inicialmente em repouso. A correia inicia o seu movimento para a direita durante $1,3 \text{ s}$ e com uma aceleração constante de 2 m/s^2 . A correia move-se depois com uma desaceleração a_2 e atinge o repouso após ter percorrido uma distância de $2,2 \text{ m}$. Sabendo que os coeficientes de atrito entre a correia e a embalagem são $\mu_e = 0,35$ e $\mu_c = 0,25$ determine (a) a desaceleração a_2 da correia, (b) o deslocamento da embalagem relativamente à correia, no instante em que a correia se imobiliza.

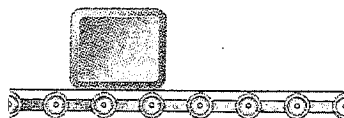


Fig. P12.21

12.22 O transportador mostrado destina-se a transportar pacotes de telhas sobre uma plataforma horizontal BC que desliza ao longo de uma escada. O elevador parte do repouso e move-se inicialmente com uma aceleração constante a_1 , como se indica. O elevador desacelera depois com uma aceleração constante a_2 e atinge o repouso em D , próximo do extremo da escada. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o pacote de telhas e a plataforma horizontal é de $0,30$, determine a aceleração máxima permitida a_1 e a desaceleração máxima a_2 de modo que o pacote não escorregue sobre a plataforma.

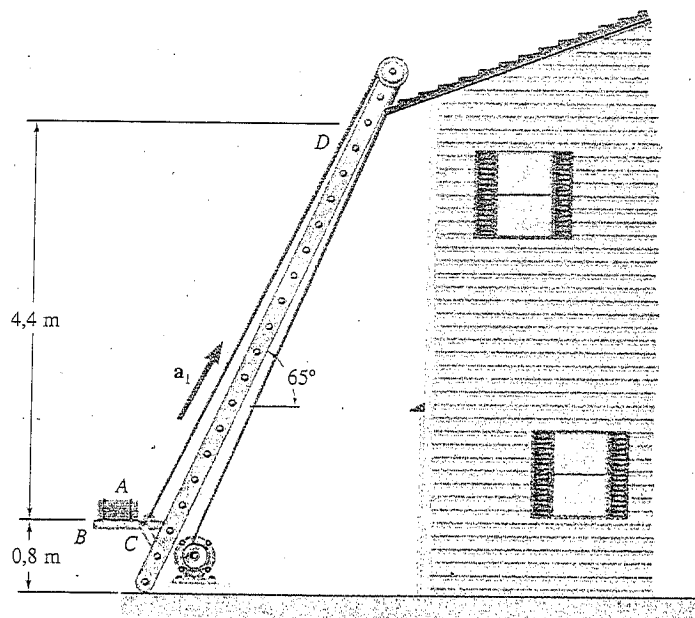


Fig. P12.22

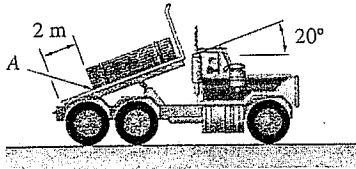


Fig. P12.23

12.23 Com o propósito de descarregar uma pilha de chapas de madeira que estão amarradas entre si e colocadas na carroçaria de um camião, o condutor utiliza primeiro a facilidade basculante da carroçaria para a inclinar e depois acelera a partir do repouso. Sabendo que os coeficientes de atrito entre a placa do fundo da pilha e a base são $\mu_e = 0,40$ e $\mu_c = 0,30$, determine (a) a menor aceleração do camião a partir da qual a pilha desliza, (b) a aceleração do camião para a qual a aresta A da pilha atinge a extremidade da carroçaria em 0,9 s.



Fig. P12.25

12.24 Os propulsores de um navio de peso W produzem uma força propulsiva F_0 ; eles produzem uma força de igual intensidade e sentido oposto quando as hélices são colocadas em rotação contrária. Sabendo que o navio se deslocava para a frente à sua máxima velocidade v_0 quando o sentido de rotação das hélices foi invertido, determine a distância percorrida pelo navio até se imobilizar. Admita que a resistência hidrodinâmica varia directamente com o quadrado da velocidade.

12.25 O conjunto pistão e haste, com massa total m , está sujeito à acção da força constante P , que o faz mover num cilindro cheio de óleo. À medida que o pistão se move, o óleo é forçado a passar em orifícios no pistão exercendo sobre este uma força de intensidade $-kv$ e sentido oposto ao do movimento do pistão. Sabendo que o pistão inicia o movimento em $t = 0$ e $x = 0$, mostre que a equação que relaciona x , v e t , na qual x é a distância percorrida pelo pistão, e v , a sua velocidade, é linear em cada uma destas variáveis.

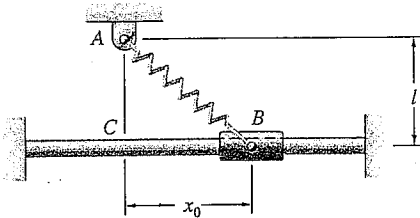


Fig. P12.26

12.26 Uma mola de constante de rigidez k está ligada ao apoio A e ao cursor de massa m . O comprimento da mola não deformada é l . Sabendo que o cursor é libertado do repouso em $x = x_0$ e que o atrito entre o cursor e a barra se pode desprezar, determine a velocidade do cursor no instante em que passa por C.

12.27 Determine, sob ponto de vista teórico, a velocidade máxima que um automóvel com 1225 kg pode atingir se partir do repouso e percorrer uma distância de 400 m. Admita que o coeficiente de atrito estático entre os pneus e o piso é de 0,70, que o automóvel tem tracção dianteira, que as rodas dianteiras suportam 62 por cento do peso, e que a resistência aerodinâmica D é dada por $D = 0,012v^2$, na qual D e v são expressos em N e m/s, respectivamente.

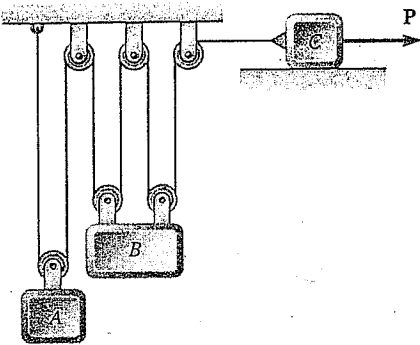


Fig. P12.28 e P12.29

12.28 As massas dos blocos A, B e C são $m_A = 4$ kg, $m_B = 10$ kg e $m_C = 2$ kg. Sabendo que $P = 0$ e que se podem desprezar as massas das polias e o efeito do atrito, determine (a) a aceleração de cada bloco, (b) a tensão na corda.

12.29 Os coeficientes de atrito entre o bloco C e a superfície horizontal são $\mu_e = 0,30$ e $\mu_c = 0,20$. As massas dos três blocos são $m_A = 8$ kg, $m_B = 16$ kg e $m_C = 10$ kg. Sabendo que os blocos estão inicialmente em repouso e que, em seguida, o bloco B se move para baixo 2 m durante 0,8 s, determine (a) a aceleração de cada bloco, (b) a tensão na corda, (c) a força P. Despreze o efeito do atrito nos eixos e a massa das polias.

12.30 Os blocos *A* e *B* pesam 89 N cada, o bloco *C* pesa 19,8 N e o bloco *D* pesa 71,2 N. Sabendo que uma força de 106,7 N é aplicada, de cima para baixo, ao bloco *D*, determine (a) a aceleração de cada bloco, (b) a tensão na corda *ABC*. Despreze os pesos das polias e o efeito do atrito nos eixos das polias.

12.31 Os blocos *A* e *B* pesam 89 N cada, o bloco *C* pesa 19,8 N, e o bloco *D* pesa 71,2 N. Sabendo que uma força de 44,5 N é aplicada, de cima para baixo, ao bloco *B*, e que o sistema parte do repouso determine para $t = 3$ s a velocidade (a) de *D* relativamente a *A*, (b) de *C* relativamente a *D*. Despreze os pesos das polias e o efeito do atrito nos eixos das polias.

12.32 Um bloco *B* com 15 kg está apoiado sobre o bloco *A* com 25 kg e está ligado a uma corda que está sujeita a uma força horizontal de 225 N, indicada na figura. Desprezando o atrito, determine (a) a aceleração do bloco *A*, (b) a aceleração do bloco *B* relativamente a *A*.

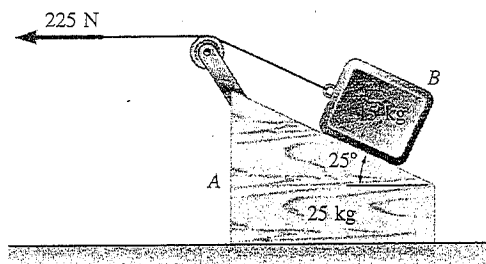


Fig. P12.32

12.33 Um bloco *B* com 10 kg está em repouso sobre a superfície superior de uma cunha com 22 kg. Sabendo que o sistema é libertado do repouso, determine, ignorando o atrito, (a) a aceleração do bloco *B*, (b) a velocidade do bloco *B* relativamente a *A* quando $t = 0,5$ s.

12.34 Um bloco *A* com 22,7 kg está em repouso sobre uma superfície inclinada, e o contrapeso *B* com 13,6 kg está ligado ao cabo como se mostra. Desprezando o atrito, determine a aceleração de *A* e a tensão no cabo imediatamente após o sistema ser libertado do repouso.

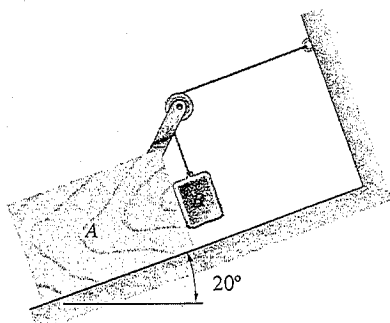


Fig. P12.34

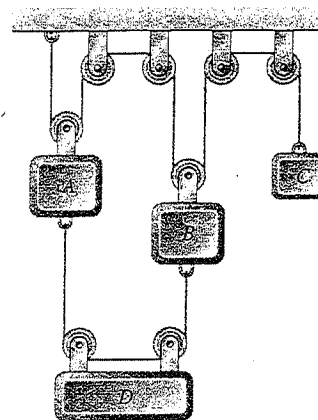


Fig. P12.30 e P12.31

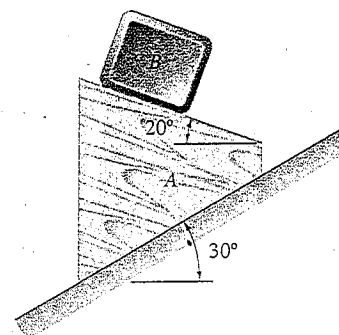


Fig. P12.33

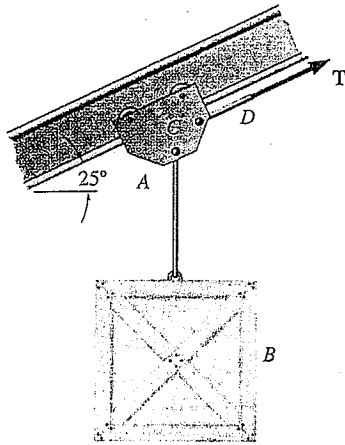


Fig. P12.35

12.35 Uma caixa com 226,8 kg está suspensa através de um cabo que se encontra ligado a um carro A com 18,1 kg e que desliza numa viga inclinada com secção em I, como se mostra na figura. No instante indicado, o carro tem uma aceleração de $0,366 \text{ m/s}^2$ para cima e para a direita. Nestas condições determine (a) a aceleração de B relativamente a A, (b) a tensão no cabo CD.

12.36 Durante a prática de lançamento do martelo, a cabeça A do martelo com 7,1 kg roda a uma velocidade constante v segundo um círculo horizontal, como se mostra. Se $\rho = 0,93 \text{ m}$ e $\theta = 60^\circ$, determine (a) a tensão no cabo BC, (b) a velocidade da cabeça do martelo.

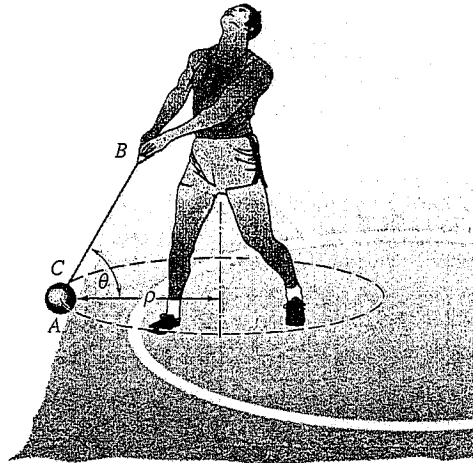


Fig. P12.36

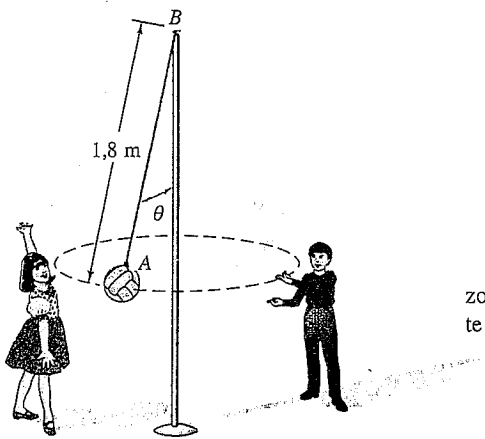


Fig. P12.37

12.37 Uma bola A com 450 g move-se ao longo de uma trajectória circular horizontal com uma velocidade constante de 4 m/s . Determine (a) o ângulo θ que a corrente forma com o mastro BC, (b) a tensão na corrente.

12.38 Um arame ACB de comprimento igual a 2,032 m passa por um olhal em C que está ligado a uma esfera que roda a uma velocidade v segundo um círculo horizontal, como mostra a figura. Sabendo que $\theta_1 = 60^\circ$ e $\theta_2 = 30^\circ$, e que a tensão é a mesma nos dois segmentos de arame, determine a velocidade v .

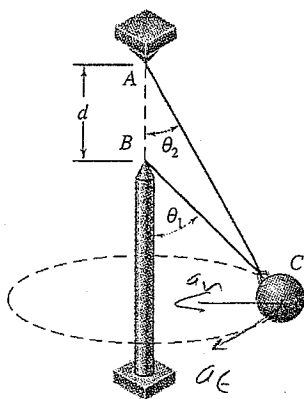


Fig. P12.38, P12.39 e P12.40

12.39 Um arame ACB passa por um olhal, em C, que está ligado a uma esfera com 5,44 kg e que roda a uma velocidade v segundo um círculo horizontal, como mostra a figura. Sabendo que $\theta_1 = 50^\circ$ e que $d = 762 \text{ mm}$, e que a tensão nos dois segmentos de arame é de 33,8 N, determine (a) o ângulo θ_2 , (b) a velocidade v .

12.40 Dois arames AC e BC estão amarrados em C a uma esfera, com 7 kg, que roda a uma velocidade v constante segundo o círculo horizontal representado. Sabendo que $\theta_1 = 55^\circ$ e $\theta_2 = 30^\circ$, e que $d = 1,4 \text{ m}$, determine a gama de valores de v para os quais ambos os arames se mantêm esticados.

12.41 Uma esfera D com 100 g está imobilizada relativamente a um reservatório ABC que roda a uma velocidade constante. Desprezando o atrito, determine a gama de valores permitidos para a velocidade v da esfera se nenhuma das forças normais exercidas pela esfera nas superfícies inclinadas do reservatório pode exceder 1,1 N.

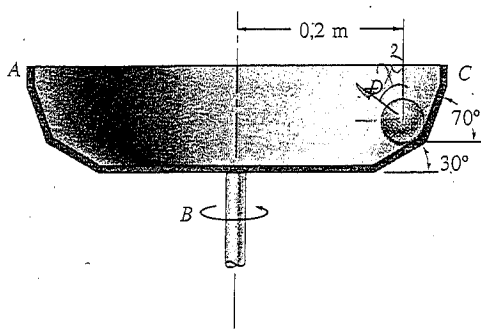


Fig. P12.41

*12.42 Um modelo da Terra tem 5,4 kg e está ligado aos arames AC e BC , e roda a uma velocidade constante v segundo o círculo horizontal mostrado. Determine a gama dos valores permitidos para v se ambos os arames tiverem de permanecer esticados e se a tensão em quaisquer dos arames não puder exceder 115,6 N.

*12.43 As esferas com a massa de 0,54 kg pertencem a um controlador centrífugo que roda a uma velocidade constante v segundo o círculo horizontal com 152,4 mm. Ignorando as massas das hastes AB , BC , AD e DE , e estipulando que as hastes suportam apenas forças de tracção, determine a gama dos valores permitidos para v de tal modo que as intensidades das forças nas hastes nunca excedam 75,6 N.

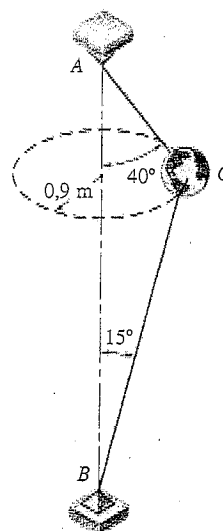


Fig. P12.42

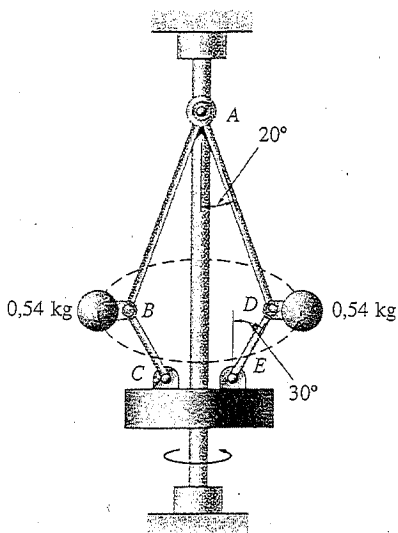


Fig. P12.43

12.44 Uma criança com a massa de 22 kg senta-se num baloiço e é colocada na posição mostrada com a ajuda de outra criança. Desprezando a massa do baloiço, determine a força na corda AB (a) enquanto a segunda criança segura o baloiço na posição indicada, (b) imediatamente após o baloiço ser libertado.

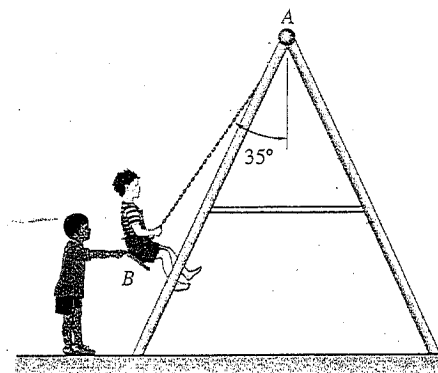


Fig. P12.44

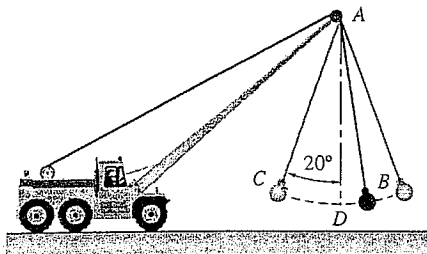


Fig. P12.45

12.45 Uma esfera de arremesso B com 60 kg está ligada a um cabo AB de aço com 15 m e oscila segundo o arco vertical mostrado para provocar demolições. Determine a força do cabo (a) no extremo C da oscilação, (b) no ponto mais baixo D do arco, onde a velocidade de B é de 4,2 m/s.

12.46 Durante uma perseguição a alta velocidade, um carro desportivo com 1089 kg, que viaja a uma velocidade de 161 km/h, perde contacto com a estrada no instante em que alcança a crista A da elevação. (a) Determine o raio de curvatura ρ do perfil vertical da estrada em A . (b) Utilizando o valor de ρ encontrado, na alínea (a) determine a força exercida pelo assento de um carro com 1406 kg sobre o seu condutor com 72,6 kg, que viaja a uma velocidade constante de 80,5 km/h e que passa por A .

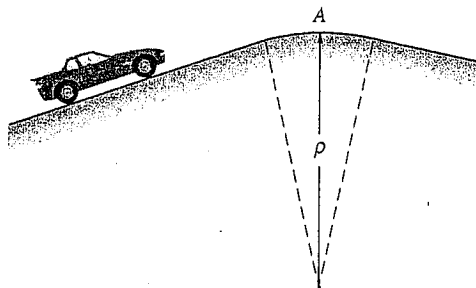


Fig. P12.46

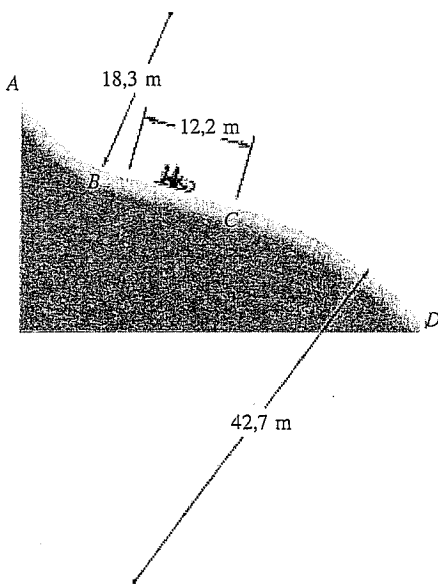


Fig. P12.47

12.47 Uma parte do percurso do tobogã mostrado está contido no plano vertical. As secções AB e CD têm os raios de curvatura indicados, e a secção BC é recta e forma um ângulo de 20° com a horizontal. Sabendo que o coeficiente de atrito entre o trenó e a pista é de 0,10 e que a velocidade do trenó é de 7,62 m/s em B , determine a componente tangencial da aceleração do trenó (a) imediatamente antes de atingir B , (b) imediatamente depois de passar C .

12.48 Um pequeno bloco de 500 gramas está em repouso no topo de uma superfície cilíndrica. Impõe-se uma velocidade inicial v_0 ao bloco para a direita e este deixa a superfície quando $\theta = 30^\circ$. Desprezando o atrito, determine (a) o valor de v_0 , (b) a força exercida sobre a superfície pelo bloco, imediatamente depois de este iniciar o movimento.

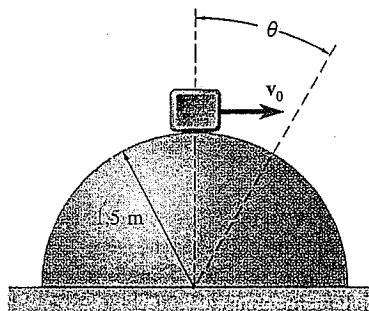


Fig. P12.48

12.49 Um piloto com 54 kg conduz um avião de treino e executa uma meia volta vertical com 1200 m de raio, de tal modo que a velocidade do avião decresce a uma razão constante. Sabendo que os pesos aparentes do piloto nos pontos A e C são 1680 N e 350 N, respectivamente, determine a força exercida sobre o piloto pelo assento do avião quando este se encontra no ponto B.

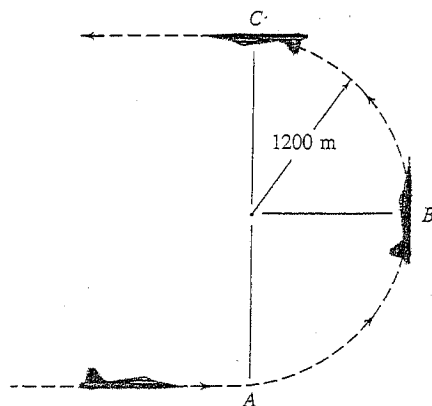


Fig. P12.49

12.50 Um bloco com 0,227 kg está inserido numa cavidade existente num braço OA, que roda no plano vertical com velocidade constante. Quando $\theta = 180^\circ$, a mola está deformada até ao seu máximo comprimento, e o bloco exerce uma força de 3,56 N sobre o topo A. Desprezando o atrito, determine a gama de valores de θ para os quais o bloco não está em contacto com o referido topo do braço.

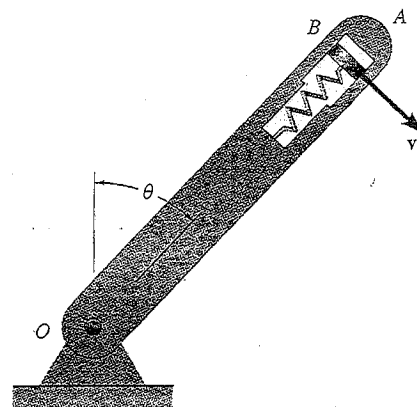


Fig. P12.50

12.51 Um carro desloca-se com uma velocidade v constante numa estrada inclinada. Determine a gama de valores de v para os quais o carro não derrapa. Exprima a resposta em função do raio de curvatura ρ , do ângulo de inclinação θ , e do ângulo de atrito estático ϕ_s entre os pneus e o piso.

12.52 Um carro desloca-se com uma velocidade de 95 km/h e aproxima-se de uma curva com raio de 40 m. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre os pneus e o piso é de 0,70, determine em quanto deve o condutor reduzir a sua velocidade a fim de contornar com segurança a curva se a inclinação da estrada for (a) $\theta = 10^\circ$, (b) $\theta = -5^\circ$, devido à cedência do pavimento.



Fig. P12.52

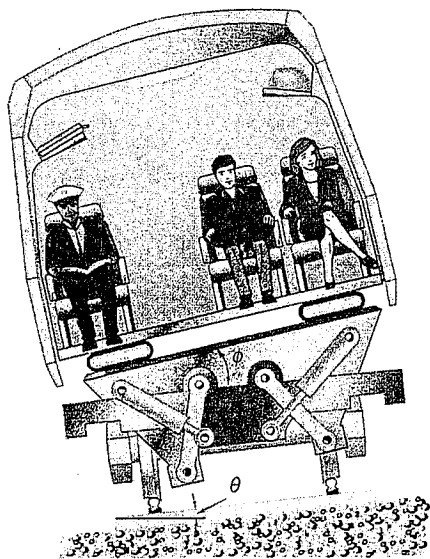


Fig. P12.53

12.53 Os comboios pendulares, como o *American Flyer*, que percorrerá o trajecto entre Washington e Nova Iorque ou Boston, são projectados de modo a viajar com segurança a velocidades elevadas nas secções curvas da via férrea, que foi construída para os comboios convencionais, mais lentos. À medida que o comboio entra na zona curva, cada carruagem é inclinada pela acção de actuadores hidráulicos montados no *chassis*. Esta capacidade de inclinação das carruagens melhora também o conforto dos passageiros pela redução da força lateral F_s (paralela ao chão do comboio) a que se encontram sujeitos. Para um comboio que se desloca a 161 km/h numa secção curva da via inclinada com um ângulo $\theta = 6^\circ$ e com uma velocidade de segurança de 96,5 km/h, determine (a) a intensidade da força lateral sentida por um passageiro com peso P numa carruagem convencional sem inclinação ($\phi = 0^\circ$), (b) o ângulo de inclinação ϕ necessário para o passageiro não sentir qualquer força lateral. (Ver o Prob.-Tipo 12.6 para a definição de velocidade de segurança.)

12.54 Os ensaios levados a cabo em comboios pendulares descritos no Prob. 12.53 revelaram que os passageiros se sentem enjoados quando vêm através das janelas que o comboio faz a curva a alta velocidade, pese embora não sentirem qualquer força lateral. Os projectistas preferem, por isso, reduzir aquela força em vez de a eliminar. Para o comboio do Prob. 12.53, determine o ângulo de inclinação ϕ necessário para o caso de os passageiros sentirem uma força lateral de cerca de 10% dos próprios pesos.

12.55 Um pequeno cursor D com 300 g pode deslizar na porção AB de uma haste, que está dobrada como se mostra na figura. Sabendo que $\alpha = 40^\circ$, que a haste roda em torno da vertical AC com uma velocidade constante de 5 rad/s, e que o atrito entre o cursor e a haste se pode desprezar, determine o valor de r para o qual o cursor não desliza na haste.

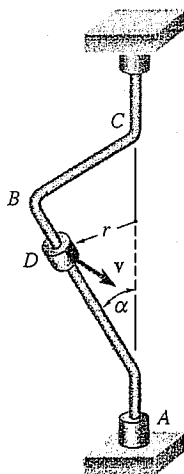


Fig. P12.55, P12.56 e P12.57

12.56 Um pequeno cursor D com 200 g pode deslizar na porção AB de uma haste, que está dobrada como se mostra na figura. Sabendo que a haste roda em torno da vertical AC com uma velocidade constante, que $\alpha = 40^\circ$ e $r = 600$ mm e que o coeficiente de atrito estático entre o cursor e a haste é de 0,30, determine a gama de valores da velocidade v para o qual o cursor não desliza na haste.

12.57 Um pequeno cursor D com 272 g pode deslizar na porção AB de uma haste, que está dobrada como se mostra na figura. Sabendo que $r = 203$ mm e que a haste roda em torno da vertical AC com uma velocidade constante de 10 rad/s, determine o menor valor possível do coeficiente de atrito estático entre o cursor e a haste para o qual o cursor não desliza na haste quando (a) $\alpha = 15^\circ$, (b) $\alpha = 45^\circ$. Indique para cada caso o sentido do movimento iminente.

12.58 Um rasgo semicircular com 254 mm de raio é executado numa placa que roda em torno do eixo vertical AD com uma velocidade constante de 14 rad/s. É suposto que um pequeno bloco com 363 g deslize na ranhura à medida que a placa roda. Sabendo que os coeficientes de atrito são $\mu_s = 0,35$ e $\mu_k = 0,25$, verifique se o bloco desliza na ranhura quando é solto da posição correspondente a (a) $\theta = 80^\circ$, (b) $\theta = 40^\circ$. Determine a intensidade, a direcção e o sentido da força de atrito exercida sobre o bloco imediatamente após ser libertado.

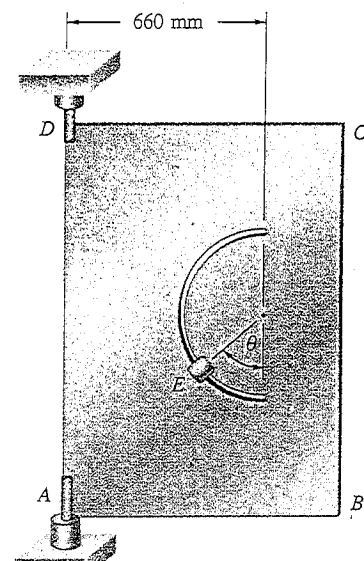


Fig. P12.58

12.59 Três segundos após a máquina polidora entrar em funcionamento, verifica-se que pequenos tufo de lã, localizados ao longo da circunferência com 225 mm de diâmetro, são projectados a partir do disco. Considere que, quando a máquina polidora inicia o movimento, os tufo localizados naquela circunferência estão sujeitos a uma aceleração tangencial de 4 m/s^2 . Determine (a) a velocidade v de um tufo no instante em que deixa o disco, (b) a intensidade da força necessária para libertar um tufo se a sua massa média for de 1,6 mg.

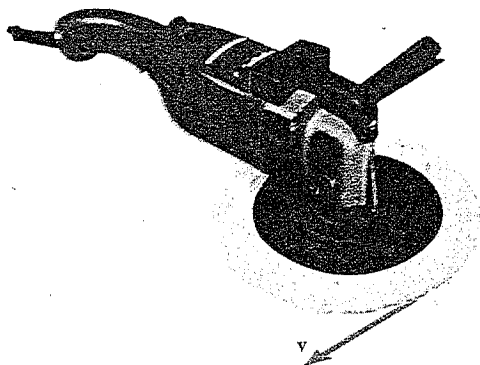


Fig. P12.59

12.60 Uma mesa giratória A é construída num palco para ser utilizada em produções teatrais. Durante um ensaio, observa-se que o caixote B começa a deslizar sobre a mesa 10 s após esta ter começado a rodar. Sabendo que o caixote está sujeito a uma aceleração tangencial de $0,24 \text{ m/s}^2$, determine o coeficiente de atrito estático entre o caixote e a mesa.

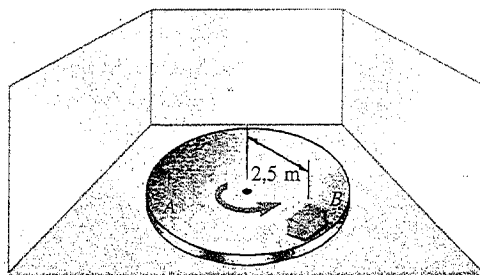


Fig. P12.60

12.61 Um mecanismo de paralelogramo $ABCD$ é utilizado para transporte de um componente I entre estações de fabricação E , F e G através da sua captura numa estação quando $\theta = 0^\circ$ e depositando depois na estação seguinte quando $\theta = 180^\circ$. Sabendo que a plataforma BC permanece horizontal durante o seu movimento, e que as barras AB e CD rodam a uma velocidade constante num plano vertical de tal modo que $v_B = 0,67$ m/s, determine (a) o menor valor do coeficiente de atrito estático entre o componente I e a plataforma BC se admitirmos que o componente não pode escorregar durante a sua transferência, (b) os valores de θ para os quais o escorregamento é iminente.

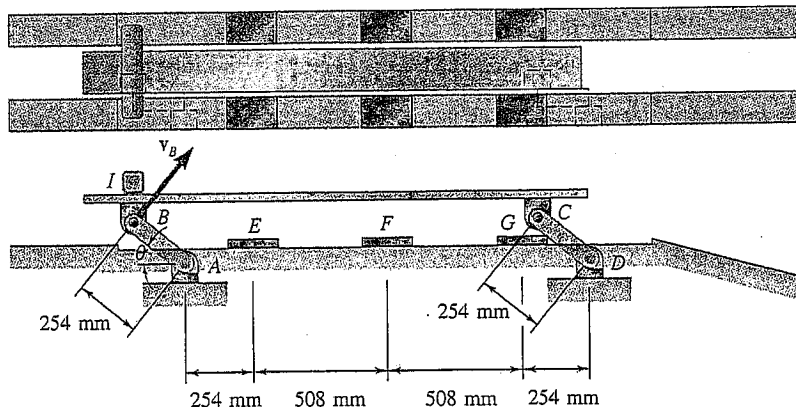


Fig. P12.61

12.62 Sabendo que os coeficientes de atrito entre o componente I e a plataforma BC do Prob. 12.61 são $\mu_e = 0,35$ e $\mu_c = 0,25$, determine (a) a maior velocidade v permitida se o componente não puder escorregar durante a sua transferência, (b) os valores de θ para os quais o escorregamento é iminente.

12.63 Num tubo de raios catódicos, o cátodo emite electrões que são posteriormente atraídos pelo ânodo, o que os obriga a passar por um orifício aí existente, e depois viajam ao longo de uma linha recta com velocidade v_0 até chocarem com o ecrã A . Contudo, se estabelecermos uma diferença de potencial V entre as duas placas paralelas, os electrões estão sujeitos a uma força F perpendicular às placas, enquanto eles viajam entre as placas, e atingirão o ecrã no ponto B , que está à distância d de A . A intensidade da força F é $F = eV/d$, na qual $-e$ é a carga de um electrão, e d é a distância entre placas. Deduza uma expressão para a deflexão d em função de V , v_0 , a carga $-e$ e a massa m de um electrão, e as dimensões d , l e L .

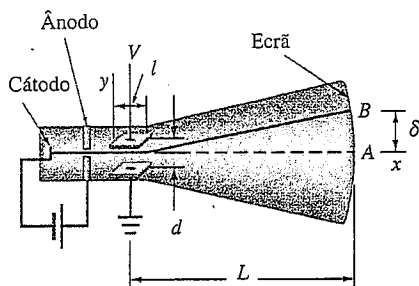


Fig. P12.63

12.64 No Prob. 12.63, determine o menor valor permitido para a razão d/l em função de e , m , v_0 e V se para $x = l$ a distância mínima permitida entre a trajectória dos electrões e a placa positiva for de $0,05d$.

12.65 O modelo actual de um tubo de raios catódicos está para ser modificado de tal modo, que o comprimento do tubo e o espaçamento entre placas são reduzidos para 40 e para 20 por cento, respectivamente. Se o tamanho do ecrã se mantiver, determine o novo comprimento l' das placas, admitindo que permanecem inalteradas todas as outras características do tubo. (Ver o Prob. 12.63 para a descrição de um tubo de raios catódicos.)

12.7. MOMENTO ANGULAR DE UMA PARTÍCULA. TAXA DE VARIAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Consideremos uma partícula de massa m movendo-se relativamente a um sistema de referência newtoniano $Oxyz$. Na Sec. 12.3 vimos que a quantidade de movimento de uma partícula num dado instante é igual ao vector $m\mathbf{v}$ que se obtém pela multiplicação do vector \mathbf{v} pela sua massa m . O momento do vector $m\mathbf{v}$ em relação a O é designado por *momento da quantidade de movimento* ou *momento angular* da partícula em relação a O nesse instante e representado por \mathbf{H}_O . Relembrando a definição de momento de um vector (Sec. 3.6) e denominando \mathbf{r} o vector de posição de P , escrevemos

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (12.12)$$

Podemos observar que \mathbf{H}_O é um vector perpendicular ao plano que contém \mathbf{r} e $m\mathbf{v}$, e cuja intensidade é

$$H_O = r m v \sin \phi \quad (12.13)$$

na qual ϕ é o ângulo formado por \mathbf{r} e $m\mathbf{v}$ (Fig. 12.12). O sentido de \mathbf{H}_O pode ser determinado a partir do sentido de $m\mathbf{v}$ pela aplicação da regra da mão direita. As unidades do momento angular obtêm-se pela multiplicação da unidade de comprimento pela unidade da quantidade de movimento (Sec.12.4). Em unidades do sistema SI temos

$$(m) (\text{kg} \cdot \text{m/s}) = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Exprimindo os vectores \mathbf{r} e $m\mathbf{v}$ nas suas componentes cartesianas e aplicando a fórmula (3.10), escrevemos

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \quad (12.14)$$

As componentes de \mathbf{H}_O , que representam afinal os momentos da quantidade de movimento em torno de cada um dos eixos coordenados, podem obter-se por expansão do determinante em (12.14). Temos assim

$$\begin{aligned} H_x &= m(yv_z - zv_y) \\ H_y &= m(zv_x - xv_z) \\ H_z &= m(xv_y - yv_x) \end{aligned} \quad (12.15)$$

No caso de uma partícula que se desloca no plano xy , temos $z = v_z = 0$ e as componentes H_x e H_y reduzem-se a zero. O momento angular é, assim, perpendicular ao plano xy e fica completamente definido pela grandeza escalar

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x) \quad (12.16)$$

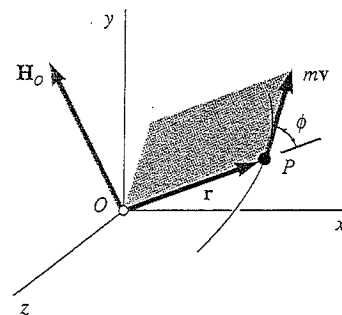


Fig. 12.12

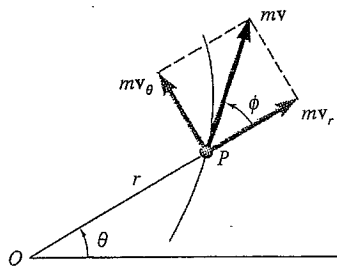


Fig. 12.13

que será positiva ou negativa dependendo do sentido segundo o qual se observa o movimento da partícula a partir de O . A quantidade de movimento pode exprimir-se em coordenadas polares, desde que para isso se utilizem as correspondentes componentes radial e transversal (Fig. 12.13),

$$H_O = rmv \operatorname{sen} \phi = rmv_\theta \quad (12.17)$$

ou, recordando de (11.45) que $v_\theta = r\dot{\theta}$, escrevemos

$$H_O = mr^2 \dot{\theta} \quad (12.18)$$

Calculemos agora a derivada do momento angular H_O da partícula em ordem a t ,

$$\dot{H}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

Verificamos que o primeiro produto vectorial se anula, pela simples razão de que os vectores \mathbf{v} e $m\mathbf{v}$ são colineares. Podemos apurar ainda que o termo $m\mathbf{a}$ é igual ao somatório $\Sigma \mathbf{F}$ das forças actuantes sobre a partícula. Desta análise resulta que o termo $\mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F}$ representa o somatório $\Sigma \mathbf{M}_O$ dos momentos das forças em relação a O

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{H}_O \quad (12.19)$$

Através desta equação, que resulta directamente da segunda lei de Newton, podemos enunciar que a soma dos momentos das forças actuantes sobre a partícula, em relação a O , é igual à taxa de variação do momento da quantidade de movimento ou momento angular da partícula em relação a O .

12.8. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO EM FUNÇÃO DAS COMPONENTES RADIAL E TRANSVERSAL

Consideremos uma partícula P , cuja posição é definida pelas coordenadas polares r e θ , e que está sujeita à acção de várias forças. Exprimindo as forças e a aceleração da partícula nas suas componentes radial e transversal (Fig. 12.14) e substituindo na Eq. (12.2), obtemos as duas equações escalares

$$\Sigma F_r = ma_r \quad \Sigma F_\theta = ma_\theta \quad (12.20)$$

Substituindo os valores de a_r e a_θ dados pelas Eqs. (11.46), temos

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (12.21)$$

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (12.22)$$

Estas duas equações podem ser resolvidas em ordem a duas incógnitas.

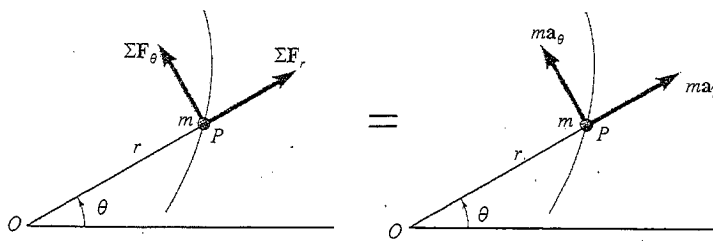


Fig. 12.14

A equação (12.22) poderia ter sido derivada da Eq. (12.19). Recordando a Eq. (12.18) e tendo em atenção que $\Sigma M_O = r\Sigma F_\theta$, a Eq. (12.19) conduz a

$$\begin{aligned} r\Sigma F_\theta &= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) \\ &= m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) \end{aligned}$$

ou, dividindo ambos os membros por r ,

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (12.22)$$

12.9. MOVIMENTO SOB A ACÇÃO DE UMA FORÇA CENTRAL. CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Quando a única força F actuando sobre uma partícula P , dirigida para um ponto fixo O ou a partir dele, a partícula diz-se estar em *movimento sob a acção de uma força central*, sendo o ponto O referido como *centro de força* (Fig. 12.15). Uma vez que a linha de acção de F passa por O , devemos ter em qualquer instante $\Sigma M_O = 0$. Substituindo na Eq. (12.19), obtemos então,

$$\dot{H}_O = 0$$

que depois de integrar em t , resulta em

$$H_O = \text{constante} \quad (12.23)$$

Concluimos então que *o momento angular de uma partícula, sob a acção de uma força central, se mantém constante, quer em intensidade quer em direcção*. Relembrando a definição de momento angular de uma partícula (Sec. 12.7), escrevemos

$$r \times mv = H_O = \text{constante} \quad (12.24)$$

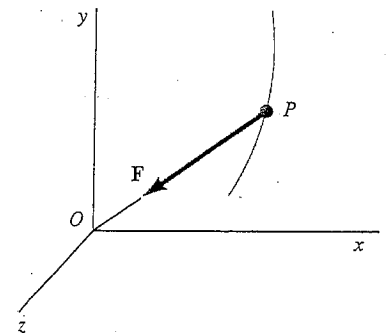


Fig. 12.15

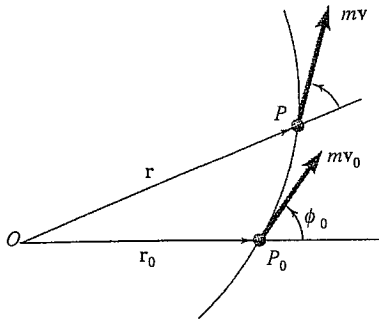


Fig. 12.16

dâ qual resulta que o vector de posição r da partícula P deve ser perpendicular ao vector constante. Por esta razão, um partícula sob a acção de uma força central desloca-se num plano fixo perpendicular a \mathbf{H}_O . Este vector e o plano fixo são definidos pelo vector de posição r_0 e pela velocidade inicial v_0 da partícula. Por conveniência, admitamos que o plano fixo no qual se desenrola o movimento coincide com o plano da figura (Fig. 12.16).

Uma vez que a intensidade H_O do momento angular da partícula P é constante, o membro direito da Eq. (12.13) tem de ser constante. Podemos, por isso, escrever,

$$rmv \sin \phi = r_0 m v_0 \sin \phi_0 \quad (12.25)$$

Esta relação aplica-se ao movimento de qualquer partícula sob a acção de uma força central. Sabe-se que a força gravítica exercida pelo Sol sobre um planeta, é uma força central que aponta para o centro do Sol; este facto justifica a importância da Eq. (12.25) no estudo do movimento planetário. Pela mesma razão esta fórmula é fundamental no estudo do movimento de veículos espaciais em órbita ao redor da Terra.

Em alternativa, podemos traduzir, com recurso à Eq. (12.18), que a intensidade H_O do momento angular se mantém constante, escrevendo

$$mr^2 \dot{\theta} = H_O = \text{constante} \quad (12.26)$$

ou, se dividirmos por m e designarmos por h o momento angular por unidade de massa H_O/m ,

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad (12.27)$$

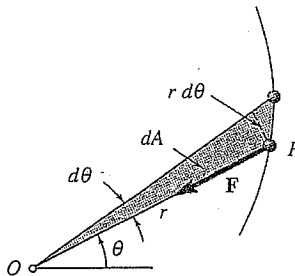


Fig. 12.17

Podemos, através da Eq. (12.27), dar uma interpretação geométrica interessante. Para isso, observemos a Fig. 12.17, em particular o facto de o raio OP definido pelo vector de posição, varrer uma área infinitesimal $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$, à medida que gira de um ângulo $d\theta$. Se definirmos por *velocidade de areolar* o quociente dA/dt , verificamos que o primeiro membro da Eq. (12.27) representa duas vezes a velocidade areolar da partícula. Concluimos assim que, *quando uma partícula se desloca sob a acção de uma força central, a sua velocidade areolar é constante.*

12.10. LEI DA GRAVITAÇÃO DE NEWTON

Como vimos na secção anterior, a força gravítica exercida quer pelo Sol sobre um planeta quer pela Terra sobre um satélite em órbita constitui um exemplo excelente de uma força central. Nesta secção, aprenderemos a determinar a intensidade de uma força gravítica.

Newton enunciou, na sua lei de gravitação, que duas partículas de massas M e m , à distância r uma da outra se atraem mutuamente com forças iguais e opostas \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$, colineares com a linha que as une (Fig. 12.18). A intensidade comum às duas forças é dada por

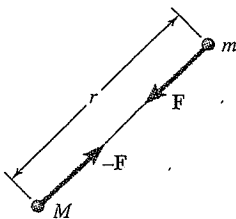


Fig. 12.18

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (12.28)$$

em que G é a *constante de gravitação universal*. As experiências levadas a cabo mostram que o valor de G é $(66,73 \pm 0,03) \times 10^{-12} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$ em unidades do sistema SI. As forças de carácter gravítico fazem sentir-se entre qualquer par de corpos, mas os seus efeitos são apreciáveis apenas quando um dos corpos tem uma massa elevada. O efeito das forças gravíticas é aparente no movimento de um planeta em torno do Sol, de satélites em órbita à volta da Terra ou de corpos em queda na sua superfície.

O peso P de um corpo de massa m , situado sobre ou próximo da superfície da Terra, define-se como sendo a força que esta exerce sobre o corpo; na Eq. (12.28) podemos substituir F pela intensidade do peso $P = mg$, e r pelo raio R da Terra. Obtemos assim,

$$P = mg = \frac{GM}{R^2} m \quad g = \frac{GM}{R^2} \quad (12.29)$$

onde M é a massa da Terra e como esta não é completamente esférica, a distância R medida a partir do centro da Terra depende do ponto que se selecciona à sua superfície; por esta razão, os valores do peso P e da aceleração g variam com a altitude e a latitude do ponto considerado. Uma outra razão para a variação de P e de g com a latitude prende-se com o facto de o sistema de eixos ligado à Terra não ser newtoniano (veja-se a Sec. 12.2). Assim, uma definição mais rigorosa do peso de um corpo deve contemplar a componente que traduz a força centrífuga devida à rotação da Terra. Os valores de g ao nível do mar variam desde $9,781 \text{ m/s}^2$, no equador, até $9,833 \text{ m/s}^2$ nos pólos†.

A força exercida pela Terra sobre um corpo de massa m , localizado no espaço a uma distância r do seu centro, pode calcular-se através da Eq. (12.28). Os cálculos podem ser de algum modo simplificados, se tivermos em consideração que, na Eq. (12.29), o produto da constante de gravitação G pela massa M da Terra se pode exprimir por

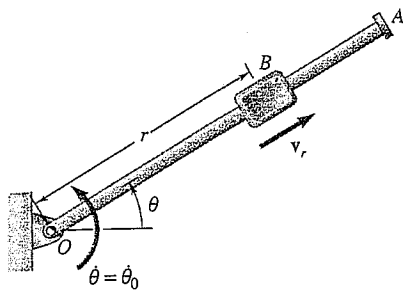
$$GM = gR^2 \quad (12.30)$$

onde g e o raio R são substituídos pelos seus valores médios $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ e $R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ no sistema SI‡.

A descoberta da lei da gravitação universal tem sido frequentemente atribuída ao facto de Newton, após ter observado a queda de uma maçã de uma árvore, ter admitido que a Terra atrai a maçã do mesmo modo que atrai a Lua. Ainda que este incidente mereça algumas reservas quanto à sua verdadeira ocorrência, pode dizer-se que Newton não teria formulado a sua lei se não se tivesse apercebido, de que a aceleração a que está sujeito um corpo em queda livre tem a mesma origem que a aceleração que mantém a Lua na sua órbita. Este conceito básico de continuidade da atracção gravítica percebe-se melhor hoje em dia, já que a lacuna ora existente entre a maçã e a Lua é actualmente reduzida pelo preenchimento desse espaço com satélites artificiais em volta do nosso planeta.

† Uma fórmula que exprime g em função da latitude ϕ foi apresentada no Prob. 12.1.

‡ O valor de R é facilmente encontrado se nos recordarmos de que o perímetro da Terra é $2\pi R = 40 \times 10^6 \text{ m}$.



PROBLEMA-TIPO 12.7

Um bloco B de massa m pode deslizar livremente sobre um braço OA , que roda num plano horizontal com uma velocidade constante $\dot{\theta}_0$. Sabendo que B é libertado à distância r_0 de O , exprima em função de r (a) a componente v_r da velocidade de B ao longo de OA , (b) a intensidade da força horizontal F exercida em B pelo braço OA .

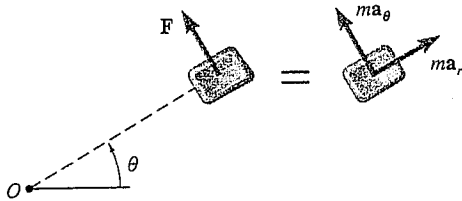
RESOLUÇÃO

A única força actuante em B que se mostra na figura é a força F perpendicular a OA , já que as restantes forças são perpendiculares ao plano da figura.

Equações do movimento. Utilizando as componentes radial e transversal, escrevemos

$$+\nearrow \Sigma F_r = ma_r \qquad 0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad (1)$$

$$+\searrow \Sigma F_\theta = ma_\theta \qquad F = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \qquad (2)$$



a. Componente v_r da velocidade. Dado que $v_r = \dot{r}$, temos

$$\ddot{r} = \dot{v}_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr} \frac{dr}{dt} = v_r \frac{dv_r}{dr}$$

Substituindo o valor de \ddot{r} em (1), recordando que $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ e separando as variáveis,

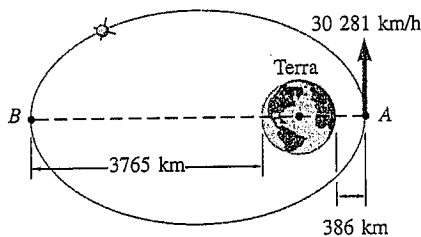
$$v_r dv_r = \dot{\theta}_0^2 r dr$$

Multiplicando por 2 e integrando desde 0 a v_r e desde r_0 a r , obtemos

$$v_r^2 = \dot{\theta}_0^2 (r^2 - r_0^2) \qquad v_r = \dot{\theta}_0 (r^2 - r_0^2)^{1/2} \quad \blacktriangleleft$$

b. Força Horizontal F . Impondo $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, $\ddot{\theta} = 0$ e $\dot{r} = v_r$ na Eq. (2), e substituindo v_r pela expressão obtida na parte a,

$$F = 2m\dot{\theta}_0(r^2 - r_0^2)^{1/2} \dot{\theta}_0 \qquad F = 2m\dot{\theta}_0^2 (r^2 - r_0^2)^{1/2} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA-TIPO 12.8

Um satélite é lançado com uma velocidade de 30 281 km/h, numa direcção paralela à tangente sobre a superfície da Terra e a uma altitude de 386 km. Determine a velocidade do satélite quando alcança a sua máxima altitude de 3765 km. Recorde-se que o raio médio da Terra é de 6372 km.

RESOLUÇÃO

Dado que o satélite se desloca sob a acção de uma força central que aponta para o centro da Terra, o seu momento angular H_O é constante. Da Eq. (12.13) temos

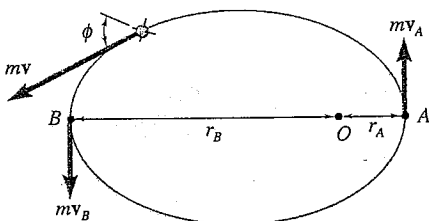
$$rmv \sin \phi = H_O = \text{constante}$$

que mostra v ser mínimo em B , onde ambos os valores de r e de $\sin \phi$ são máximos. A conservação do momento angular entre A e B , exprime-se como

$$r_A m v_A = r_B m v_B$$

$$v_B = v_A \frac{r_A}{r_B} = (30\,281 \text{ km/h}) \frac{6372 \text{ km} + 386 \text{ km}}{6372 \text{ km} + 3765 \text{ km}}$$

$$v_B = 20\,187 \text{ km/h} \quad \blacktriangleleft$$



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta lição prosseguimos o estudo da segunda lei de Newton, ao exprimir a força e a aceleração em função das suas *componentes radial e transversal*, a que correspondem as seguintes equações do movimento

$$\begin{aligned} \Sigma F_r = ma_r: & \quad \Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \Sigma F_\theta = ma_\theta: & \quad \Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{aligned}$$

Introduzimos a noção de *momento da quantidade de movimento*, ou *momento angular*, \mathbf{H}_O de uma partícula em torno de O :

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (12.12)$$

e concluímos que \mathbf{H}_O é constante sempre que a partícula se desloque sob a acção de uma *força central* cujo centro está situado em O .

1. Utilização de componentes radial e transversal. As componentes radial e transversal foram introduzidas na última lição do Capítulo 11 [Sec. 11.14]; deve rever estes conceitos antes de tentar resolver os problemas que se seguem. São ainda pertinentes os comentários que se fizeram na lição anterior relativamente à aplicação da segunda lei de Newton (traçado do diagrama do corpo-livre e do digrama ma , etc.) [Prob.-Tipo 12.7]. Finalmente, repare-se que a resolução daquele problema depende do modo como são aplicadas as técnicas desenvolvidas no Capítulo 11 – devem usar-se técnicas idênticas na resolução dos exercícios desta lição.

2. Resolução de problemas que envolvem o movimento de uma partícula sob a acção de uma força central. Em problemas deste tipo, mantém-se constante o momento angular \mathbf{H}_O da partícula em torno do centro de força O . Pode tornar-se conveniente introduzir a constante $h = H_O/m$, que representa o momento angular por unidade de massa. A conservação do momento angular da partícula P em torno de O pode exprimir-se através de uma das seguintes equações,

$$rv \sin \phi = h \quad \text{ou} \quad r^2\dot{\theta} = h$$

nas quais r e θ são as coordenadas polares de P , e ϕ é o ângulo que o vector velocidade v forma com a linha OP (Fig. 12.16). A constante h pode determinar-se a partir das condições iniciais, e qualquer uma das equações se pode resolver em ordem a uma incógnita.

3. Problemas de mecânica espacial. São problemas que envolvem o movimento orbital de um planeta em redor do Sol, ou de um satélite à volta da Terra, da Lua, ou de qualquer outro planeta. Nestes problemas a força central \mathbf{F} é a força de atracção gravítica, que aponta para o centro de força O e cuja intensidade é dada por

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (12.28)$$

Note-se que, no caso particular da força gravítica exercida pela Terra, o produto GM pode ser substituído por gR^2 , em que R é o raio da Terra [Eq. 12.30].

a. Para um satélite em órbita circular, a força \mathbf{F} é normal à órbita, e pode escrever-se $F = ma_n$; substituindo F na Eq. (12.28) e tendo em atenção que $a_n = v^2/\rho = v^2/r$, obtemos

$$\frac{GM}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad v^2 = \frac{GM}{r}$$

b. Para um satélite em órbita elíptica, o vector radial \mathbf{r} e a velocidade \mathbf{v} do satélite são perpendiculares entre si nos pontos A e B , que são, respectivamente, o ponto mais afastado e o mais próximo do centro de força O [Prob.-Tipo 12.8]. Deste modo, a conservação do momento angular do satélite entre estes dois pontos traduz-se por

$$r_A m v_A = r_B m v_B$$

Problemas

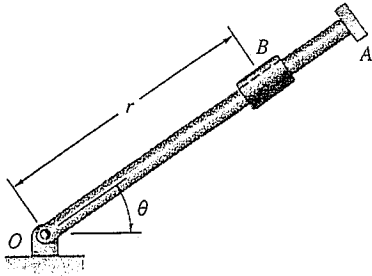


Fig. P12.66

12.66 A barra OA gira em torno de O num plano horizontal. O movimento do cursor B com 200 g é definido pelas expressões $r = 250 + 150 \sin \pi t$ e $\theta = \pi(4t^2 - 8t)$, na qual r é expresso em milímetros, t em segundos, e θ em radianos. Determine as componentes radial e transversal da força exercida sobre o cursor quando (a) $t = 0$, (b) $t = 0,5\text{ s}$.

12.67 Para o movimento definido no Prob. 12.66, determine as componentes radial e transversal da força exercida sobre o cursor quando $t = 1,5\text{ s}$.

12.68 A barra OA oscila em torno de O num plano horizontal. O movimento do cursor B com $2,268\text{ kg}$ é definido pela expressão $r = 3,048/(t + 4)$ e $\theta = (2/\pi) \sin \pi t$, na qual r é expresso em metros, t em segundos, e θ em radianos. Determine as componentes radial e transversal da força exercida sobre o cursor quando (a) $t = 1\text{ s}$, (b) $t = 6\text{ s}$.

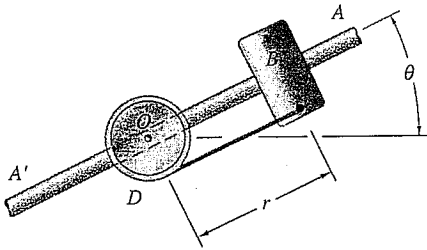


Fig. P12.69 e P12.70

12.69 Um cursor B de massa m desliza numa barra AA' sem atrito. A barra está ligada ao tambor D e roda em torno de O num plano horizontal à velocidade $\dot{\theta} = ct$, em que c é constante. À medida que o conjunto tambor-barra roda, um mecanismo no interior do tambor enrola a corda fazendo que o cursor se desloque em direção a O com uma velocidade constante k . Sabendo que em $t = 0$, $r = r_0$, exprima em função de m , c , k , r_0 e t , (a) a tensão T na corda, (b) a intensidade da força horizontal Q exercida em B pela barra AA' .

12.70 Um cursor B com 3 kg desliza numa barra AA' sem atrito. A barra está ligada ao tambor D e roda em torno de O num plano horizontal à velocidade $\dot{\theta} = 0,75t$, na qual $\dot{\theta}$ é expresso em rad/s, e t , em segundos. À medida que o conjunto tambor-barra roda, um mecanismo no interior do tambor desenrola a corda fazendo que o cursor se afaste de O com uma velocidade constante de $0,5\text{ m/s}$. Sabendo que em $t = 0$, $r = 0$, determine o instante em que a tensão na corda é igual à intensidade da força horizontal exercida pela barra AA' no cursor B .

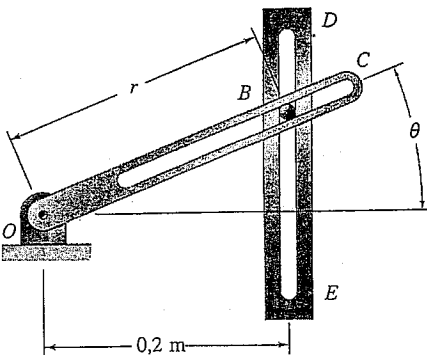


Fig. P12.71

12.71 O rolete B com 100 g desliza ao longo da ranhura existente no braço rotativo OC e ao longo da ranhura DE existente numa placa horizontal fixa. Desprezando o atrito e sabendo que o braço OC gira a uma velocidade constante $\dot{\theta}_0 = 12\text{ rad/s}$, determine, para cada qualquer valor de θ , (a) as componentes radial e transversal da força resultante F exercida sobre o rolete B , (b) as forças P e Q exercidas sobre o rolete B pelo braço OC e pela superfície lateral da ranhura DE , respectivamente.

12.72 O disco A roda num plano horizontal em torno de um eixo vertical à velocidade constante $\dot{\theta}_0 = 15 \text{ rad/s}$. O cursor B pesa 2,224 N e desloca-se, sem atrito, numa ranhura existente no disco. O cursor está ligado a uma mola de constante $k = 58,37 \text{ N/m}$, que se encontra indeformada para $r = 0$. Sabendo que num dado instante a aceleração do cursor relativa ao disco é $\ddot{r} = -12,2 \text{ m/s}^2$ e que a força horizontal exercida pelo disco sobre o cursor é de 8,9 N, determine nesse instante (a) a distância r , (b) a componente radial da velocidade do cursor.

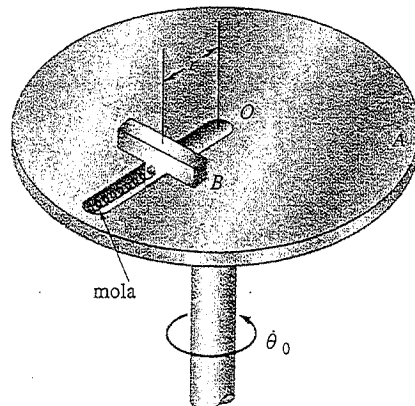


Fig. P12.72 e P12.73

*12.73 O disco A roda num plano horizontal em torno de um eixo vertical à velocidade constante $\dot{\theta}_0 = 12 \text{ rad/s}$. O cursor B pesa 2,24 N e desloca-se, sem atrito, numa ranhura existente no disco. O cursor está ligado a uma mola de constante k , que se encontra indeformada quando $r = 0$. Sabendo que o cursor é libertado sem velocidade radial na posição $r = 381 \text{ mm}$, determine a posição do cursor e a força horizontal exercida sobre ele pelo disco quando $t = 0,1 \text{ s}$ para (a) $k = 32,8 \text{ N/m}$, (b) $k = 47,43 \text{ N/m}$.

12.74 Uma partícula de massa m é lançada a partir do ponto A com uma velocidade inicial v_0 , perpendicular à linha OA e desloca-se sob a acção de uma força central F ao longo de uma trajectória semicircular de diâmetro OA. Considerando que $r = r_0 \cos \theta$ e usando a Eq. (12.27), mostre que a velocidade da partícula é $v = v_0 / \cos^2 \theta$.

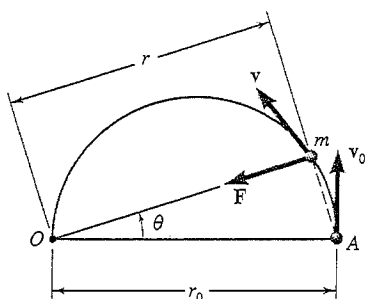


Fig. P12.74

12.75 Para a partícula do Prob. 12.74, determine a componente tangencial F_t da força central F ao longo da tangente à trajectória da partícula para (a) $\theta = 0^\circ$, (b) $\theta = 45^\circ$.

12.76 Uma partícula de massa m é lançada a partir do ponto A com uma velocidade inicial v_0 , perpendicular à linha OA, e desloca-se sob a acção de uma força central F dirigida para fora do centro de força O. Sabendo que a partícula percorre uma trajectória definida pela equação $r = r_0 / \sqrt{\cos 2\theta}$ e utilizando a Eq. (12.27), exprima as componentes radial e transversal da velocidade v da partícula em função de θ .

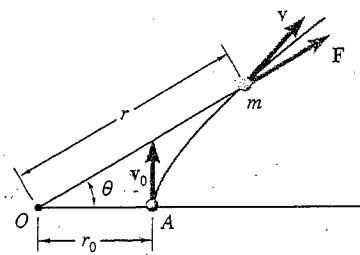


Fig. P12.76

12.77 Para a partícula do Prob. 12.76, mostre que (a) a velocidade da partícula e a força central F são proporcionais à distância r medida a partir do centro de força O, (b) o raio de curvatura da trajectória é proporcional a r^3 .

12.78 O raio da órbita da lua de um dado planeta é igual a duas vezes o raio desse planeta. Designando por ρ a densidade média do planeta, mostre que o tempo necessário para que a lua complete uma volta em torno do planeta é $(24\pi/G\rho)^{1/2}$, na qual G é a constante de gravitação.

12.79 Mostre que o raio r da órbita da lua de um dado planeta pode ser determinada a partir do raio R desse planeta, da aceleração da gravidade na superfície do mesmo, e do tempo t necessário para que a lua complete uma volta em torno do planeta. Determine a aceleração da gravidade na superfície do planeta Júpiter sabendo que $R = 71492$ km, e que $t = 3,551$ dias e que $r = 670,9 \times 10^3$ km para a sua lua Europa.

12.80 Os satélites de comunicação são colocados em órbita geoestacionária *i. e.*, numa órbita circular de tal modo que eles realizam uma volta completa em torno da Terra num dia sideral (23,934 h), parecendo assim estacionários em relação ao solo. Determine (a) a altitude destes satélites acima da superfície da Terra, (b) a velocidade segundo a qual eles descrevem a sua órbita.

12.81 Determine a massa da Terra sabendo que o raio médio da órbita da Lua em torno da Terra é de 384 406 km, e que a Lua necessita de 27,32 dias para executar uma revolução completa em torno da Terra.

12.82 Uma nave é colocada em órbita polar em torno do planeta Marte a uma altitude de 380 km. Sabendo que a densidade média de Marte é $3,94 \text{ Mg/m}^3$ e que o seu raio é de 3397 km, determine (a) o tempo t necessário para que a nave realize uma volta completa a Marte, (b) a velocidade com que a nave descreve essa órbita.

12.83 Um satélite é colocado em órbita circular em torno de Saturno a uma altitude de 3400 km. O satélite descreve a sua órbita com uma velocidade de 24,45 km/s. Sabendo que o raio da órbita à volta de Saturno e que o período de Atlas, uma das suas luas são $137,64 \times 10^3$ km e 0,6019 dias, respectivamente, determine (a) o raio de Saturno, (b) a massa de Saturno. (O período de um satélite é o tempo necessário para que este realize uma volta completa em torno do planeta.)

12.84 Os períodos (ver Prob. 12.83) das luas Julieta e Titânia do planeta Úrano são 0,4931 e 8,706 dias, respectivamente. Sabendo que o raio da órbita de Julieta é de 64 360 km, determine (a) a massa de Úrano, (b) o raio da órbita de Titânia.

12.85 Uma nave com 5338 N é colocada inicialmente em órbita circular em redor da Terra a uma altitude de 4505 km, e posteriormente transferida para uma órbita circular à volta da Lua. Sabendo que a massa da Lua é 0,01230 vezes a massa da Terra e que o raio da Lua é de 1738 km, determine (a) a força gravítica exercida sobre a nave enquanto está em órbita à volta da Terra, (b) o raio da órbita da nave em redor da Lua se o período (ver Prob. 12.83) das duas órbitas forem iguais, (c) a aceleração da gravidade na superfície da Lua.

12.86 A fim de colocar um satélite de comunicações em órbita geoestacionária (ver Prob. 12.80) a uma altitude de 35 784 km, o satélite é previamente libertado de um vaivém espacial, que se encontra em órbita circular a uma altitude de 298 km, e então propulsionado por um motor próprio até atingir a altitude pretendida. No instante em que o satélite passa pelo ponto *A*, o seu motor é ligado a fim de o colocar numa trajectória elíptica de transferência. Posteriormente, o motor é de novo accionado em *B* para o colocar finalmente numa órbita geoestacionária. Sabe-se que, da segunda vez, o motor faz aumentar a velocidade do satélite em 1,47 km/s. Determine (a) a velocidade do satélite à medida que se aproxima de *B* na sua órbita de transferência, (b) o aumento de velocidade que resultou da primeira acção do motor em *A*.

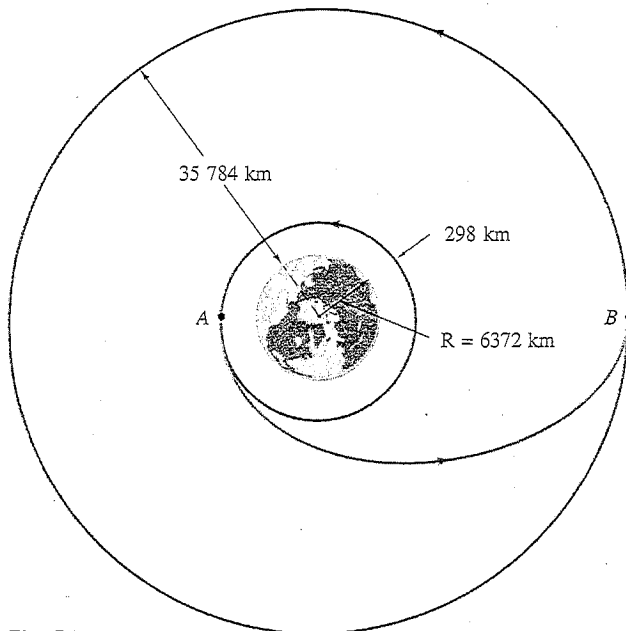


Fig. P12.86

12.87 Um veículo espacial encontra-se em órbita circular com um raio de 2200 km à volta da Lua. Para o transferir para uma órbita com um raio menor, de 2080 km, o veículo é primeiramente colocado segundo uma trajectória elíptica *AB*, o que se consegue pela redução da sua velocidade em 26,3 m/s, quando passa por *A*. Sabendo que a massa da Lua é de $73,49 \times 10^{21}$ kg, determine (a) a velocidade do veículo à medida que se aproxima de *B*, na sua órbita de transferência, (b) a redução de velocidade que se deve verificar no veículo, quando este se aproxima de *B*, para se inserir numa órbita circular de menor raio.

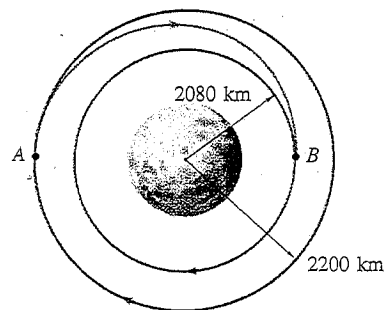


Fig. P12.87

12.88 Pretende-se colocar uma sonda espacial em órbita circular com um raio de 6420 km em torno de Vénus. À medida que a sonda se aproxima de Vénus, a sua velocidade é reduzida de tal modo que, quando alcança o ponto *A*, a velocidade e a altitude em relação à superfície do planeta são 7420 m/s e 288 km, respectivamente. A trajectória da sonda entre *A* e *B* é elíptica, e quando a sonda se aproxima de *B*, a velocidade decresce de $\Delta v_B = 24,5$ m/s com a finalidade de a inserir numa órbita elíptica de transferência *BC*. Finalmente, quando a sonda passa por *C*, a sua velocidade é reduzida de $\Delta v_C = -264$ m/s para a colocar em órbita circular. Sabendo que a massa e o raio do planeta Vénus são $4,869 \times 10^{24}$ kg e 6052 km, respectivamente, determine (a) a velocidade da sonda à medida que se aproxima de *B*, na sua órbita de transferência, (b) a sua altitude relativamente à superfície do planeta em *B*.

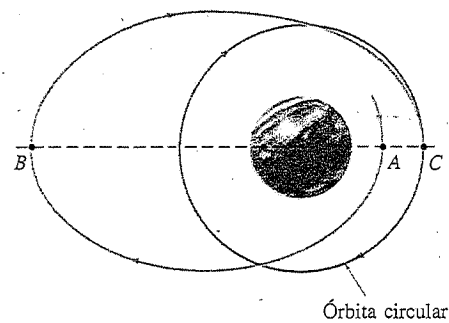


Fig. P12.88

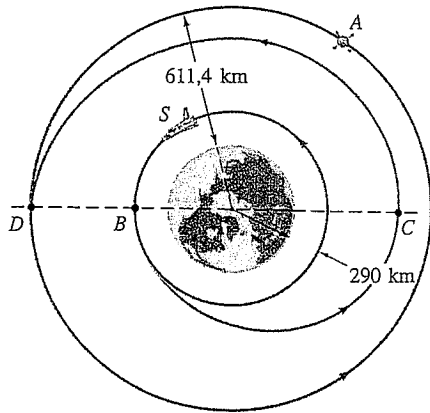


Fig. P12.89

12.89 Um vaivém espacial S e um satélite A encontram-se em órbitas circulares como se mostra na figura. De modo a permitir a recuperação do satélite pelo vaivém, este é colocado previamente numa trajectória elíptica BC , o que se consegue com um aumento de velocidade $\Delta v_B = 85,3$ m/s quando passa pelo ponto B . Quando o vaivém se aproxima de C , a sua velocidade sofre um aumento de $\Delta v_C = 79,25$ m/s para o inserir numa segunda trajectória elíptica de transferência CD . Sabendo que a distância de C a partir de O é de 6901 km, determine o aumento que se deve operar na velocidade do vaivém, quando este se aproxima de D , altura em que se insere na órbita circular do satélite.

12.90 Um cursor com 1,36 kg pode deslizar numa barra horizontal que roda em torno de um eixo vertical. O cursor é inicialmente preso em A , através de um cabo. Adicionalmente liga-se uma mola, com constante de 29,2 N/m, ao cursor e ao veio, ficando a mola não deformada quando o cursor se encontra em A . Quando a barra roda com uma velocidade $\dot{\theta} = 16$ rad/s, o cabo é cortado e o cursor desloca-se ao longo dela. Desprezando a massa da barra e o efeito do atrito, determine (a) as componentes radial e transversal da aceleração do cursor em A , (b) a aceleração do cursor relativamente à barra em A , (c) a componente transversal da velocidade do cursor em B .

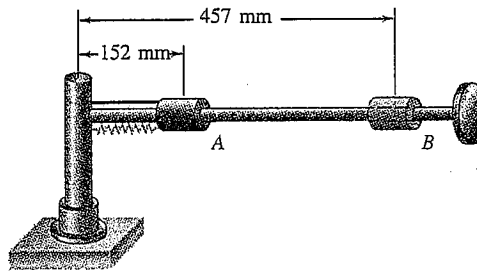


Fig. P12.90

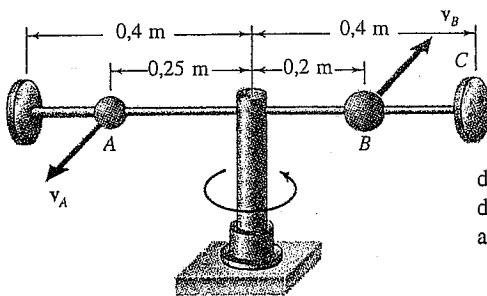


Fig. P12.92

12.91 Para o cursor do Prob. 12.90, admitindo que a barra roda com uma velocidade $\dot{\theta} = 12$ rad/s, determine para a posição B do cursor (a) a componente transversal da velocidade do cursor, (b) as componentes radial e transversal da sua aceleração, (c) a aceleração do cursor relativamente à barra.

12.92 Uma bola A com 200 g e uma bola B com 400 g estão montadas numa haste horizontal que pode rodar livremente em torno de um eixo vertical. As bolas permanecem na posição mostrada, pela acção de parafusos de aperto. O parafuso em B é desapertado, e a bola desloca-se para C , enquanto a haste roda. Desprezando a massa da haste e o efeito do atrito, e sabendo que a velocidade inicial de A é $v_A = 2,5$ m/s, determine (a) as componentes radial e transversal da aceleração da bola B , imediatamente após o parafuso ter sido desapertado, (b) a aceleração da bola B , relativamente à haste nesse instante, (c) a velocidade da bola A , depois de a bola B atingir o batente em C .

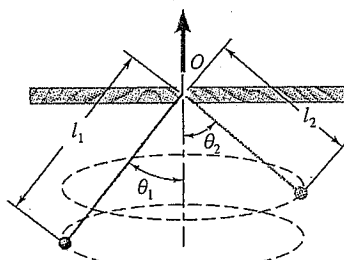


Fig. P12.93

12.93 Uma pequena bola gira segundo um círculo horizontal, e está amarrada à extremidade de uma corda de comprimento l_1 , que faz com a vertical um ângulo θ_1 . A corda é então lentamente puxada até que o seu comprimento suspenso seja l_2 . (a) Deduza uma relação entre l_1 , l_2 , θ_1 e θ_2 . (b) Se a bola for colocada em movimento, de tal modo que as condições iniciais sejam $l_1 = 0,8$ m e $\theta_1 = 35^\circ$, determine o ângulo θ_2 quando $l_2 = 0,6$ m.

Consideremos uma partícula P que se move sob a acção de uma força central F . Vejamos como se obtém a equação diferencial que define a sua trajectória.

Considerando que a força F está dirigida para o centro de força O , concluímos que ΣF_r e ΣF_θ se reduzem, respectivamente, a $-F$ e a zero nas Eqs. (12.21) e (12.22). Podemos então escrever,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F \quad (12.31)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad (12.32)$$

Estas equações definem o movimento de P . Todavia, e por se tornar mais conveniente o seu uso, iremos substituir a Eq. (12.32) pela Eq. (12.27), que, como se pode facilmente verificar através da sua derivação em ordem a t , lhe é equivalente. Escrevemos

$$r^2\dot{\theta} = h \quad \text{ou} \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad (12.33)$$

A Eq. (12.33) pode utilizar-se para eliminar a variável independente t na Eq. (12.31). Se resolvermos a Eq. (12.33) em ordem a $\dot{\theta}$ ou a $d\theta/dt$, temos

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \quad (12.34)$$

de onde resulta

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (12.35)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{d\dot{r}}{d\theta}$$

ou, substituindo o valor de \dot{r} dado por (12.35)

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left[-h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \\ \ddot{r} &= -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (12.36)$$

Substituindo os valores de $\dot{\theta}$ e de \ddot{r} de (12.34) e (12.36), respectivamente, na Eq. (12.31) e introduzindo a função $u = 1/r$, obtemos, após algumas simplificações,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \quad (12.37)$$

Ao deduzirmos esta equação considerámos que a força F era dirigida para o centro O . A intensidade F deve, por isso, ser positiva se F estiver na realidade a apontar para O (força atractiva), e negativa se F se dirigir para fora de O (força repulsiva). Se F for conhecido como uma função de r , e, por isso, de u , a Eq. (12.37) é uma equação diferencial em u e em θ . Esta equação diferencial define a trajectória seguida pela partícula sob a acção da força central F . A equação da trajectória pode obter-se pela resolução da equação diferencial (12.37) para u em função de θ , sendo as constantes de integração determinadas em função das condições iniciais.

*12.12. APLICAÇÃO À MECÂNICA ESPACIAL

Terminada a fase de propulsão dos foguetes de lançamento, podemos considerar que os satélites terrestres, bem como outros veículos espaciais, ficam sujeitos apenas à atracção da Terra. Os seus movimentos podem então ser determinados a partir das Eqs. (12.33) e (12.37), que governam o movimento de uma partícula sob a acção de uma força central, depois de o valor de F ser substituído pela expressão obtida para a força de atracção da gravidade†. Impondo na Eq. (12.37) que

$$F = \frac{GMm}{r^2} = GMmu^2$$

na qual M = massa da Terra

m = massa do veículo espacial

r = distância do centro da Terra ao veículo

$u = 1/r$

obtemos a seguinte equação

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \quad (12.38)$$

onde o membro da direita se mantém constante.

A solução da equação diferencial (12.38) obtém-se pela adição da solução particular $u = GM/h^2$ à solução geral $u = C \cos(\theta - \theta_0)$ da correspondente equação homogénea (*i. e.*, a equação que se obtém tornando o segundo membro igual a zero). Podemos escolher o eixo polar de tal modo que $\theta_0 = 0$, e escrever

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \quad (12.39)$$

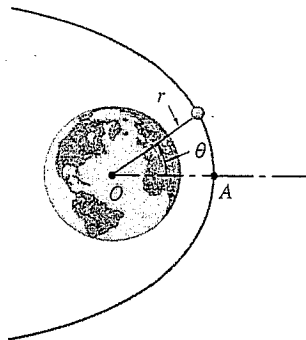


Fig. 12.19

A equação (12.39) é a equação de uma *cónica* (elipse, parábola, ou hipérbole) em função das coordenadas polares r e θ . A origem O das coordenadas, que se encontra localizada no centro da Terra, é o foco desta cónica, e o eixo polar é um dos eixos de simetria (Fig. 12.19).

A razão das constantes C e GM/h^2 define a *excentricidade* ϵ desta cónica; fazendo

$$\epsilon = \frac{C}{GM/h^2} = \frac{Ch^2}{GM} \quad (12.40)$$

podemos escrever a Eq. (12.39) na seguinte forma

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} (1 + \epsilon \cos \theta) \quad (12.39')$$

Esta equação representa três trajectórias possíveis.

1. $\epsilon > 1$, ou $C > GM/h^2$: existem dois valores de θ_1 e $-\theta_1$ para o ângulo polar, definido por $\cos \theta_1 = -GM/Ch^2$, para os quais o membro do lado

† Admite-se que os veículos espaciais aqui considerados são atraídos apenas pela Terra e que a sua massa é desprezável quando comparada com a massa da Terra. Se um veículo se desloca para uma posição muito distante da Terra, a sua trajectória pode ser afectada pela atracção do Sol, da Lua ou de outro planeta.

direito da Eq. (12.39) se torna nulo. Para ambos os valores, o vector radial r torna-se infinito; a cónica é uma *hipérbole* (Fig. 12.20).

2. $\varepsilon = 1$, ou $C = GM/h^2$: o vector radial torna-se infinito para $\theta = 180^\circ$; a cónica é uma *parábola*.
3. $\varepsilon < 1$, ou $C < GM/h^2$: o vector radial permanece finito para qualquer valor de θ ; a cónica é uma *elipse*. Para o caso particular em que $\varepsilon = C = 0$, o comprimento do vector radial é constante; a cónica é, desta vez, uma *circunferência*.

Vejamos agora como as constantes C e GM/h^2 , que caracterizam a trajectória de um veículo espacial, se podem determinar a partir da posição e da velocidade no início do seu voo livre. Podemos admitir, tal como acontece geralmente, que a fase propulsão do seu voo foi programada de tal modo que, na última fase em que o foguete cessa a sua propulsão, o veículo tem uma velocidade paralela à superfície da Terra (Fig. 12.21). Por outras palavras, admitimos que o veículo espacial começa o seu voo livre no vértice A da sua trajectória†.

Denotando o vector de posição e a velocidade do veículo no início do seu voo livre por r_0 e v_0 , respectivamente, concluímos que a velocidade se reduz à sua componente transversal e, portanto, que $v_0 = r_0 \dot{\theta}_0$. Recordando a Eq. (12.27), podemos exprimir o momento angular por unidade de massa como

$$h = r_0^2 \dot{\theta}_0 = r_0 v_0 \quad (12.41)$$

O valor obtido para h pode utilizar-se para determinar a constante GM/h^2 . Podemos também reparar que o cálculo desta constante se torna mais simples se utilizarmos a relação obtida na Sec. 12.10:

$$GM = gR^2 \quad (12.30)$$

na qual R é o raio da Terra ($R = 6,37 \times 10^6$ m) e g é a aceleração da gravidade à superfície da Terra.

A constante C pode obter-se fazendo $\theta = 0$, $r = r_0$ em (12.39):

$$C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2} \quad (12.42)$$

Substituindo o valor h obtido de (12.41), podemos facilmente exprimir o valor de C em função de r_0 e v_0 .

Determinemos agora as condições iniciais para cada uma das trajectórias fundamentais descritas anteriormente. Consideremos em primeiro lugar a trajectória parabólica, onde impomos C igual a GM/h^2 na Eq. (12.42) e eliminamos h entre as Eqs. (12.41) e (12.42). Resolvendo em ordem a v_0 , obtemos

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

Podemos facilmente concluir que, para um valor maior da velocidade inicial corresponde uma trajectória hiperbólica, enquanto para um valor menor a trajectória é elíptica. O valor de v_0 , obtido para a trajectória parabólica, é o menor

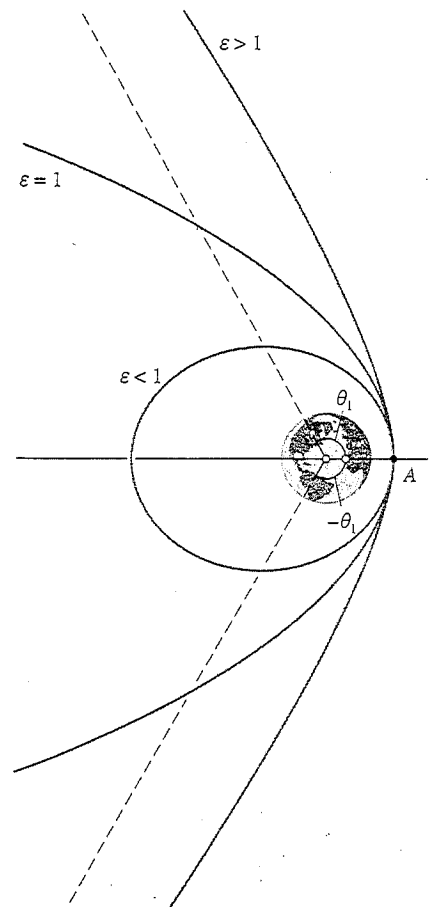


Fig. 12.20

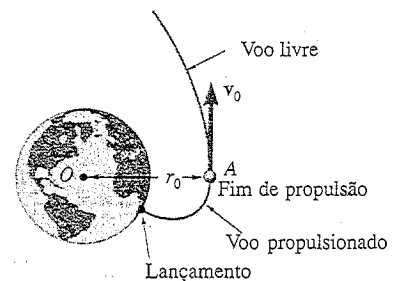


Fig. 12.21

† Problemas envolvendo lançamentos oblíquos serão considerados na Sec. 13.9.

valor para o qual o veículo espacial não é capaz de regressar ao ponto inicial; por esta razão a velocidade é designada por *velocidade de escape*. Assim, se recorrermos à Eq. (12.30), podemos escrever

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad v_{esc} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}} \quad (12.43)$$

e observar que a trajectória será (1) hiperbólica se $v_0 > v_{esc}$, (2) parabólica se $v_0 = v_{esc}$ e (3) elíptica se $v_0 < v_{esc}$.

Entre as possíveis órbitas elípticas existe uma de particular interesse – a *órbita circular*, que corresponde à situação em que $C = 0$. Para este caso o valor da velocidade inicial é facilmente obtido, tendo em atenção a Eq. (12.30), e é dado por

$$v_{circ.} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \quad v_{circ.} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}} \quad (12.44)$$

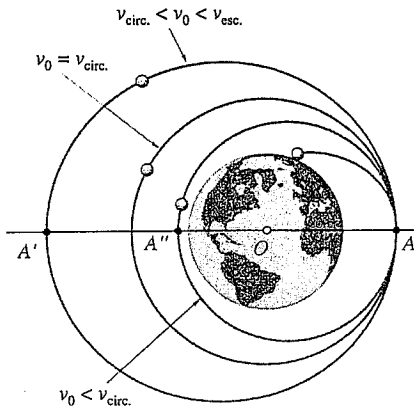


Fig. 12.22

Se observarmos a Fig. 12.22, notamos que para valores de v_0 compreendidos entre $v_{circ.}$ e $v_{esc.}$, o ponto A, onde o voo livre se inicia, é o ponto da órbita mais próximo da Terra e que se designa por *perigeu*, enquanto o ponto A' mais afastado da Terra, se designa por *apogeu*. Para valores de v_0 menores que $v_{circ.}$, o ponto A é o apogeu, enquanto o ponto A'', do outro lado da órbita, é o perigeu. Para valores de v_0 muito menores que $v_{circ.}$, a trajectória do veículo espacial intersecta a superfície da Terra; em tal situação, o veículo não entra em órbita.

Os mísseis balísticos, que foram projectados para atingir a superfície da Terra, viajam também segundo trajectórias elípticas. De facto, devemos ter a noção de que qualquer objecto lançado no vácuo com uma velocidade inicial v_0 menor que $v_{esc.}$ se deslocará segundo uma trajectória elíptica. Quando as distâncias são pequenas podemos admitir o campo gravitacional da Terra como uniforme, e a trajectória elíptica aproximada a uma parábola, tal como foi feito anteriormente (Sec. 11.11) no caso de projecteis convencionais.

Período. Uma característica importante do movimento de um satélite artificial é o tempo necessário para que ele descreva uma órbita completa. Este tempo, denominado *período* do movimento do satélite, é designado por t . Podemos, desde já, notar que em face da definição de velocidade de área (Sec. 12.9), o valor de τ pode ser obtido dividindo o valor da área interior à órbita pela velocidade de área. Tendo em conta que a área de uma elipse é igual a πab , na qual a e b representam os semieixos maior e menor da elipse, respectivamente, e que a velocidade de área é igual a $h/2$, podemos escrever

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \quad (12.45)$$

Quando um satélite é lançado numa direcção paralela à superfície da Terra, podemos determinar directamente o valor de h a partir de r_0 e v_0 , facto que não acontece com os valores dos semieixos a e b , em virtude de não estarem directamente relacionados com as condições iniciais. Por outro lado, sabemos que os valores de r_0 e r_1 correspondentes aos valores de r no perigeu e no apogeu da órbita podem ser facilmente determinados a partir da Eq. (12.39). Então, os semieixos a e b podem exprimir-se em termos de r_0 e r_1 .

Considere-se a órbita elíptica mostrada na Fig. 12.23. O centro da Terra está localizado em O e coincide com um dos focos da elipse, enquanto os

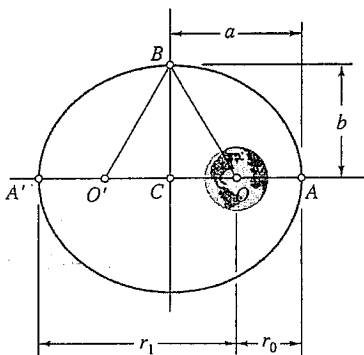


Fig. 12.23

pontos A e A' representam, respectivamente, o perigeu e o apogeu da órbita. Podemos facilmente verificar que

$$r_0 + r_1 = 2a$$

e, por isso,

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) \quad (12.46)$$

Recordando que a soma das distâncias de um ponto da elipse aos seus focos é constante, escrevemos

$$O'B + BO = O'A + OA = 2a \quad \text{ou} \quad BO = a$$

Por outro lado, temos $CO = a - r_0$. Assim, podemos escrever

$$b^2 = (BC)^2 = (BO)^2 - (CO)^2 = a^2 - (a - r_0)^2$$

$$b^2 = r_0(2a - r_0) = r_0 r_1$$

e, portanto

$$b = \sqrt{r_0 r_1} \quad (12.47)$$

As fórmulas (12.46) e (12.47) significam que o semieixo maior e o semieixo menor são, respectivamente, iguais às médias aritmética e geométrica dos valores máximo e mínimo das distâncias aos focos da elipse. Uma vez determinados os valores de r_0 e r_1 , os comprimentos dos semieixos podem ser facilmente calculados e posteriormente substituídos na fórmula (12.45) para obtermos o período.

*12.13. LEIS DE KEPLER DO MOVIMENTO PLANETÁRIO

As equações que servem para descrever o movimento de um satélite artificial à volta da Terra são também aplicáveis ao movimento da Lua à volta do nosso planeta. Neste caso, contudo, a massa da Lua não é desprezável quando comparada com a massa da Terra, e os resultados obtidos não estão inteiramente correctos.

A teoria desenvolvida nas secções anteriores pode também ser aplicada no estudo do movimento dos planetas em redor do Sol. Conquanto se introduza um outro erro ao ignorarmos as forças exercidas pelos planetas entre si, a aproximação que se consegue é excelente. Na verdade, mesmo antes de Newton ter formulado a sua teoria fundamental, já o astrónomo alemão Johann Kepler (1571-1630) descobrira, a partir de observações astronómicas do movimento dos planetas, as propriedades traduzidas pela Eq. (12.39), na qual M representa agora a massa do Sol, e pela Eq. (12.33).

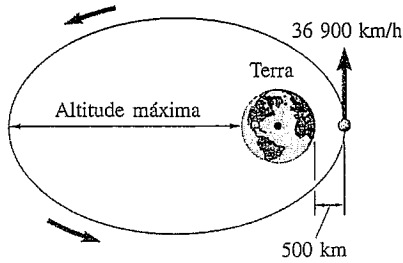
As três leis de Kepler do movimento planetário podem ser enunciadas como se segue:

1. Cada planeta descreve uma trajectória elíptica, estando o Sol situado num dos focos.
2. O vector de posição do planeta traçado a partir do Sol varre áreas iguais em tempos iguais.
3. Os quadrados dos períodos dos planetas são proporcionais aos cubos do semieixo maior das suas órbitas.

A primeira lei confirma um caso particular estabelecido na Sec. 12.12, e a segunda lei exprime que a velocidade de área varrida por cada planeta é constante (ver Sec. 12.9). A terceira lei de Kepler pode também deduzir-se a partir dos resultados obtidos na Sec. 12.12†.

† Ver Prob. 12.121.

PROBLEMA-TIPO 12.9



Um satélite é lançado, a partir de uma altitude de 500 km, com uma velocidade de 36 900 km/h e segundo uma direcção paralela à superfície da Terra. Determine (a) a altitude máxima alcançada pelo satélite, (b) o período do movimento do satélite.

RESOLUÇÃO

a. Altitude máxima. Depois de o satélite ter sido lançado, fica sujeito apenas à atracção gravítica da Terra; por isso, o seu movimento é governado pela Eq. (12.39),

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \quad (1)$$

No ponto de lançamento, a componente radial da velocidade é nula; por isso, temos $h = r_0 v_0$. Recordemos que o raio médio da Terra é $R = 6370$ km assim, calculamos

$$r_0 = 6370 \text{ km} + 500 \text{ km} = 6870 \text{ km} = 6,87 \times 10^6 \text{ m}$$

$$v_0 = 36\,900 \text{ km/h} = \frac{36,9 \times 10^6 \text{ m}}{3,6 \times 10^3 \text{ s}} = 10,25 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$h = r_0 v_0 = (6,87 \times 10^6 \text{ m})(10,25 \times 10^3 \text{ m/s}) = 70,4 \times 10^9 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$h^2 = 4,96 \times 10^{21} \text{ m}^4/\text{s}^2$$

Uma vez que $GM = gR^2$, na qual R é o raio da Terra, temos

$$GM = gR^2 = (9,81 \text{ m/s}^2)(6,37 \times 10^6 \text{ m})^2 = 398 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

$$\frac{GM}{h^2} = \frac{398 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2}{4,96 \times 10^{21} \text{ m}^4/\text{s}^2} = 80,3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$$

Substituindo este valor em (1), obtemos

$$\frac{1}{r} = 80,3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + C \cos \theta \quad (2)$$

Tendo em atenção que no ponto A temos $\theta = 0$ e $r = r_0 = 6,87 \times 10^6$ m, podemos calcular a constante C :

$$\frac{1}{6,87 \times 10^6 \text{ m}} = 80,3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + C \cos 0^\circ \quad C = 65,3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$$

Em A' , o ponto da órbita mais afastado da Terra, temos $\theta = 180^\circ$. Utilizando (2), podemos calcular a respectiva distância r_1 :

$$\frac{1}{r_1} = 80,3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + (65,3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}) \cos 180^\circ$$

$$r_1 = 66,7 \times 10^6 \text{ m} = 66\,700 \text{ km}$$

$$\text{Altitude máxima} = 66\,700 \text{ km} - 6\,370 \text{ km} = 60\,300 \text{ km} \quad \blacktriangleleft$$

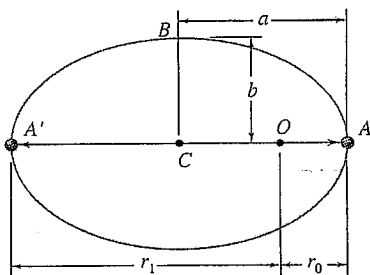
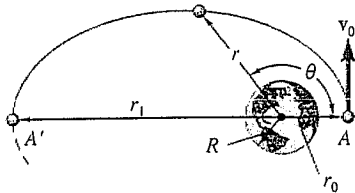
b. Período. Dado que A e A' são, respectivamente, o perigeu e o apogeu da órbita elíptica, podemos utilizar as Eqs. (12.46) e (12.47) para calcular os respectivos semieixos maior e menor

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) = \frac{1}{2}(6,87 + 66,7)(10^6) \text{ m} = 36,8 \times 10^6 \text{ m}$$

$$b = \sqrt{r_0 r_1} = \sqrt{(6,87)(66,7)} \times 10^6 \text{ m} = 21,4 \times 10^6 \text{ m}$$

$$= \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi (36,8 \times 10^6 \text{ m})(21,4 \times 10^6 \text{ m})}{70,4 \times 10^9 \text{ m}^2/\text{s}}$$

$$\tau = 70,3 \times 10^3 \text{ s} = 1171 \text{ min.} = 19 \text{ h } 31 \text{ min.} \quad \blacktriangleleft$$



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta lição, prosseguimos o nosso estudo do movimento de uma partícula sob a acção de uma força central tendo como principal objectivo a resolução de problemas de mecânica espacial. Verificámos que a trajectória de uma partícula sob a acção de uma força central é definida pela equação diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \quad (12.37)$$

na qual u é o inverso da distância r da partícula ao centro de força ($u = 1/r$), F é a intensidade da força central \mathbf{F} , e h é uma constante igual ao momento angular por unidade de massa da partícula. Em problemas de mecânica espacial, \mathbf{F} é a força de atracção gravítica exercida sobre o satélite ou nave espacial pelo Sol, pela Terra, ou por outro planeta em torno dos quais orbitam. Substituindo $F = GMm/r^2 = GMmu^2$ na Eq. (12.37), obtemos, para esse caso particular

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \quad (12.38)$$

em que o segundo membro é constante.

1. Análise do movimento de satélites e naves espaciais. A solução da equação diferencial (12.38) define a trajectória do satélite ou da nave. Na Sec. 12.12 obtivemos essa solução nas duas formas alternativas seguintes

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \quad \frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} (1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (12.39, 12.39')$$

É importante recordar que, ao aplicar estas equações, o perigeu (ponto mais próximo) da trajectória (Fig. 12.19) corresponde sempre a $\theta = 0^\circ$ e h é constante para uma dada trajectória. Dependendo do valor da excentricidade ε , a trajectória será uma hipérbole, uma parábola ou uma elipse.

a. $\varepsilon > 1$: A trajectória é uma hipérbole. Por essa razão a nave nunca regressará ao ponto de partida

b. $\varepsilon = 1$: A trajectória é uma parábola. É o caso-limite entre as trajectórias aberta (hipérbole) e fechada (elíptica). Verificámos neste caso que a velocidade v_0 no perigeu é igual à velocidade de escape v_{esc} ,

$$v_0 = v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad (12.43)$$

Note que a velocidade de escape é a menor velocidade para a qual a nave não consegue regressar ao ponto de partida.

c. $\varepsilon < 1$: A *trajectória é uma elipse*. Para órbitas elípticas, podemos verificar que a relação deduzida no Prob. 12.102,

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

se tornará útil na resolução dos problemas seguintes. Quando se aplica esta equação é necessário recordar que: r_0 e r_1 são, respectivamente, as distâncias a partir do centro de força até ao perigeu ($\theta = 0^\circ$) e ao apogeu ($\theta = 180^\circ$); que $h = r_0 v_0 = r_1 v_1$; e que, para um satélite em órbita à volta da Terra, $GM_{\text{Terra}} = gR^2$, cujo valor R é o raio médio da Terra. Convém também lembrar que, quando $\varepsilon = 0$, a *trajectória é uma circunferência*.

2. Determinação do ponto de impacte de uma nave descendente. Em problemas deste tipo, pode admitir-se que as *trajectórias são elípticas* e que o ponto inicial da *trajectória descendente* é o seu apogeu (Fig. 12.22). Note-se que, no ponto de impacte, a distância r nas Eqs. (12.39) e (12.39') é igual ao raio R do corpo sobre o qual a nave aterra ou com o qual choca. Além do mais temos $h = Rv_1 \sin \phi_1$, onde v_1 é a velocidade da nave no instante de impacte, e ϕ_1 é o ângulo que a sua *trajectória* forma com a vertical nesse ponto.

3. Cálculo do tempo de viagem entre dois pontos de uma *trajectória*. No movimento sob a acção de uma força central, o tempo t necessário para que uma partícula se desloque entre dois pontos da sua *trajectória* pode ser determinado se recordarmos a Sec. 12.9, onde foi enunciado que a área varrida por unidade de tempo pelo vector r , é igual a metade do momento angular por unidade de massa h da partícula: $dA/dt = h/2$. Conclui-se que, sendo h constante para uma dada *trajectória*, então

$$t = \frac{2A}{h}$$

onde A é a área total varrida durante o tempo t .

a. Caso de uma *trajectória elíptica*. O tempo necessário para completar uma órbita é designado por *período* e é dado por

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \quad (12.45)$$

em que a e b são, respectivamente, os semieixos maior e menor da elipse, que estão relacionados com as distâncias r_0 e r_1 por

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) \quad e \quad b = \sqrt{r_0 r_1} \quad (12.46, 12.47)$$

b. Terceira lei de Kepler. Fornece uma relação conveniente entre os períodos de dois satélites descrevendo órbitas elípticas à volta do mesmo corpo [Sec. 12.13]. Se designarmos por a_1 e a_2 , respectivamente, o semieixos maiores das duas órbitas e os correspondentes períodos por τ_1 e τ_2 , temos

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

c. Caso da *trajectória parabólica*. No cálculo do tempo necessário para viajar entre dois pontos da *trajectória* podemos utilizar as expressões dadas na contracapa do livro para uma área parabólica ou semiparabólica.

Problemas

12.94 Uma partícula de massa m é lançada a partir do ponto A com uma velocidade inicial v_0 perpendicular a AO e desloca-se sob a acção de uma força central F ao longo de uma trajectória elíptica definida pela equação $r = r_0/(2 - \cos \theta)$. Recorrendo à Eq. (12.37), mostre que F é inversamente proporcional à distância r entre a partícula e o centro de força O .

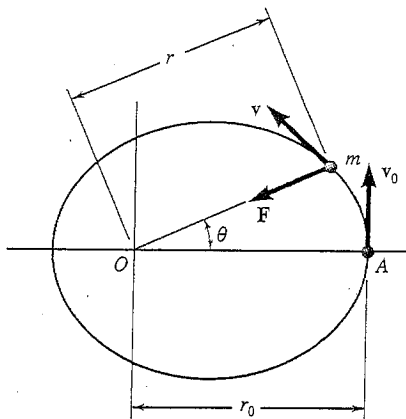


Fig. P12.94

12.95 Uma partícula de massa m descreve uma trajectória definida pela equação $r = r_0 \sin \theta$ sob a acção de uma força central F dirigida para o centro de força O . Recorrendo à Eq. (12.37), mostre que F é inversamente proporcional à quinta potência da distância r entre a partícula e o centro de força O .

12.96 Uma partícula de massa m descreve o cardióide definido pela equação $r = r_0(1 + \cos \theta)/2$ e sob a acção de uma força central F dirigida para o centro de força O . Recorrendo à Eq. (12.37), mostre que F é inversamente proporcional à quarta potência da distância r entre a partícula e o centro de força O .

12.97 Para a partícula do Prob. 12.76, e utilizando a Eq. (12.37), mostre que F é proporcional à distância r entre a partícula e o centro de força O .

12.98 Observou-se que durante o primeiro voo da nave *Galileo*, a menor altitude atingida foi de 960 km. Considerando que a trajectória da nave era parabólica, determine a velocidade máxima de *Galileo* durante o seu primeiro voo à volta da Terra.

12.99 Uma sonda espacial aproxima-se do planeta Vénus segundo uma trajectória parabólica, alcançando o ponto A mais próximo do planeta, no instante em que a sua velocidade é diminuída a fim de a inserir numa órbita circular. Sabendo que a massa e o raio de Vénus são, respectivamente, iguais a $4,87 \times 10^{24}$ kg e 6052 km, determine (a) a velocidade da sonda à medida que se aproxima de A , (b) o decréscimo em velocidade necessário para a inserir numa órbita circular.

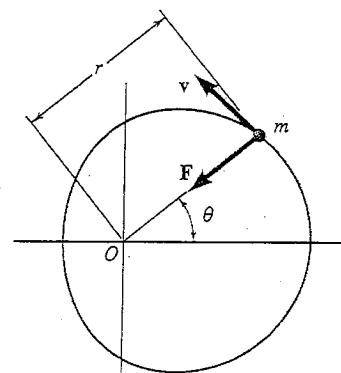


Fig. P12.96

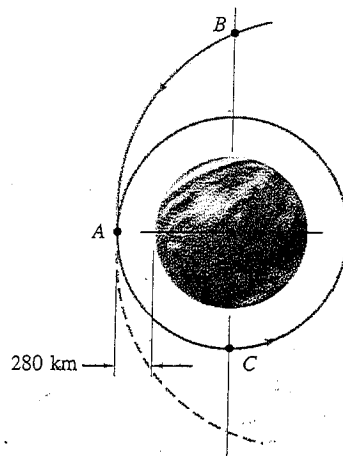


Fig. P12.99

12.100 Observou-se que, durante o seu segundo voo à volta da Terra, a nave *Galileo* se deslocava a uma velocidade de $14,1 \times 10^3$ m/s no momento em que atingiu a altitude mínima de 303 km. Determine a excentricidade da trajectória da nave durante este intervalo do seu voo.

12.101 Verificou-se que quando a nave *Galileo* atingiu o ponto da trajectória mais próximo de Io, uma lua do planeta Júpiter, se encontrava a uma distância de 2816 km do centro de Io e tinha uma velocidade de $15,06 \times 10^3$ m/s. Sabendo que a massa de Io é 0,01496 vezes a massa da Terra, determine a excentricidade da trajectória da nave à medida que se aproxima de Io.

12.102 Um satélite descreve uma órbita elíptica em torno de um planeta de massa M . Designando por r_0 e r_1 , respectivamente, os valores mínimo e máximo da distância r do satélite ao centro do planeta, deduza a relação

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

na qual h é o momento angular por unidade de massa do satélite

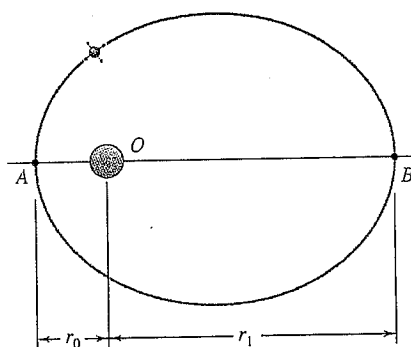


Fig. P12.102

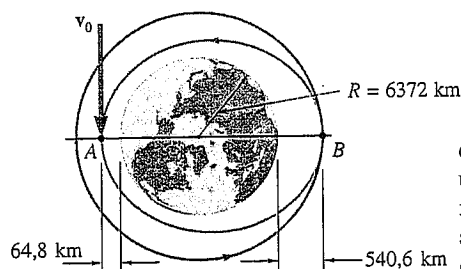


Fig. P12.103

12.103 No momento em que o vaivém *Discovery* desligou o seu motor principal durante o seu décimo terceiro voo, encontrava-se a descrever uma órbita elíptica com uma altitude mínima de 64,8 km e uma altitude máxima de 540,6 km acima da superfície da Terra. Sabendo que no ponto A o vaivém possuía uma velocidade v_0 paralela à superfície da Terra e que foi transferido para uma órbita circular quando passou por B, determine (a) a velocidade v_0 do vaivém em A, (b) o acréscimo em velocidade necessário em B para a inserir o vaivém numa órbita circular.

12.104 Uma sonda espacial descreve uma órbita circular em torno de um planeta de raio R . A altitude da sonda acima da superfície do planeta é αR , e a sua velocidade é v_0 . A fim de colocar a sonda numa órbita elíptica que a levará mais próximo do planeta, reduz-se a sua velocidade desde v_0 até βv_0 , com $\beta < 1$, por acção do seu motor durante um curto intervalo de tempo. Determine o menor valor admissível para β se a sonda não puder chocar com a superfície do planeta.

12.105 À medida que descreve uma órbita elíptica à volta do Sol, uma nave espacial atinge uma distância máxima de 325×10^6 km do centro do Sol no ponto A (designado por afélio) e uma distância mínima de 148×10^6 km no ponto B (designado por periélio). A fim de colocar a nave numa órbita elíptica menor em que o afélio se situa no ponto A' e o periélio no ponto B', situados respectivamente a $264,7 \times 10^6$ km e $137,6 \times 10^6$ km do centro do Sol, reduz-se primeiro a velocidade da nave quando passa por A e depois repete-se a operação quando a nave passa por B'. Sabendo que a massa do Sol é $332,8 \times 10^3$ vezes a massa da Terra, determine (a) a velocidade da nave em A, (b) os valores para as reduções de velocidade operadas em A e B' de modo a inserir a nave na órbita elíptica desejada.

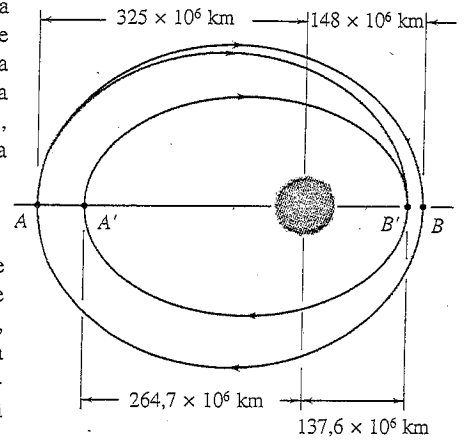


Fig. P12.105

12.106 Pretende-se colocar uma sonda espacial em órbita circular em torno de Marte. A órbita deve possuir um raio de 4000 km e situar-se num plano específico que é diferente do plano da trajectória de aproximação. Quando a sonda atinge o ponto A, o ponto da sua trajectória original mais próximo de Marte, é inserida numa primeira órbita elíptica de transferência através da redução da sua velocidade de Δv_A . Esta órbita leva-a para o ponto B com uma velocidade menor. Aí a sonda é inserida numa segunda órbita de transferência, localizada no plano pretendido através da mudança da direcção da velocidade e por redução da sua intensidade de Δv_B . Finalmente, quando a sonda atinge o ponto C, é inserida na desejada órbita circular através da redução da sua intensidade de Δv_C . Sabendo que a massa de Marte é 0,1074 vezes a massa da Terra, que $r_A = 9 \times 10^3$ km e que $r_B = 180 \times 10^3$ km e que a sonda se aproxima de A segundo uma trajectória parabólica, determine em quanto se deve reduzir a velocidade da sonda (a) em A, (b) em B, (c) em C.

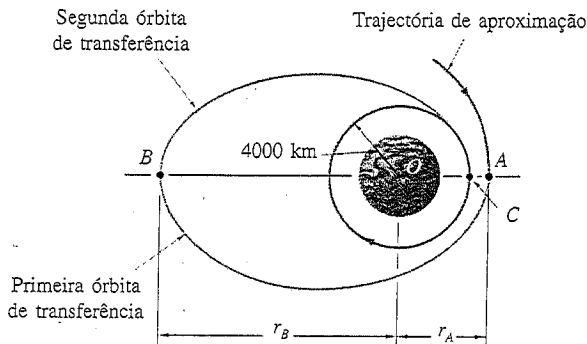


Fig. P12.106

12.107 Para a sonda espacial do Prob. 12.106, sabe-se que $r_A = 9 \times 10^3$ km e que a velocidade da sonda é reduzida em 440 m/s quando passa por A. Determine (a) a distância do centro de Marte ao ponto B, (b) os valores para a redução da velocidade da sonda em B e em C, respectivamente.

12.108 Determine o tempo necessário para a sonda espacial do Prob. 12.106 viajar de A para B na sua primeira órbita de transferência.

12.109 A nave espacial *Clementina* descreveu uma órbita elíptica com uma altitude mínima de $h_A = 400$ km e uma altitude máxima de $h_B = 2940$ km acima da superfície da Lua. Sabendo que o raio da Lua é igual a 1737 km e que a sua massa é 0,01230 vezes a massa da Terra, determine o período do movimento da nave espacial.

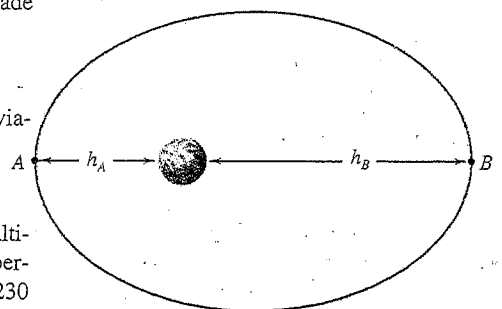


Fig. P12.109

12.110 Uma sonda espacial encontra-se numa órbita de baixa altitude à volta da Terra e é inserida numa órbita elíptica de transferência para o planeta Vénus. Sabendo que a massa do Sol é $332,8 \times 10^3$ vezes a massa da Terra, e admitindo que a sonda está sujeita apenas à atracção gravítica do Sol, determine o valor de ϕ , que define a posição de Vénus em relação à Terra no momento em que a sonda é inserida na referida órbita de transferência

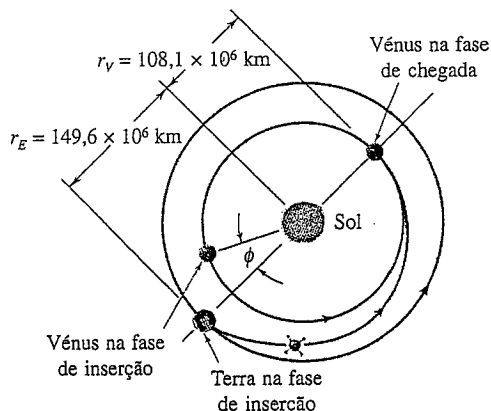


Fig. P12.110

12.111 Com base nas observações feitas durante 1996 ao cometa *Hyakutake*, concluiu-se que a sua trajectória é uma elipse demasiado alongada para a qual a excentricidade é aproximadamente $\epsilon = 0,999887$. Sabendo que durante as observações de 1996 a distância mínima entre o cometa e o Sol era de $0,230R_E$, em que R_E é a distância média entre o Sol e a Terra, determine o período do cometa.

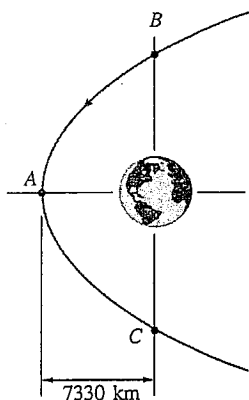


Fig. P12.112

12.112 Durante o seu primeiro voo à volta da Terra, a nave espacial *Galileo* possuía uma velocidade de 10,42 m/s e atingiu a distância mínima de 7330 km ao centro da Terra. Admitindo que a trajectória da nave era parabólica, determine o tempo necessário para a nave espacial viajar de B para C ao longo da sua trajectória.

12.113 Determine o tempo necessário para que a sonda espacial do Prob. 12.99 viaje de B para C ao longo da sua trajectória.

12.114 Uma sonda espacial descreve uma órbita circular de raio nR com velocidade v_0 em torno de um planeta de raio R e centro em O . Quando a sonda passa pelo ponto A, a sua velocidade reduz-se de v_0 para βv_0 , com $\beta < 1$, a fim de colocar a sonda numa trajectória de colisão. Expresse em termos de n e β o valor do ângulo AOB , no qual B representa o ponto de impacte da sonda com o planeta.

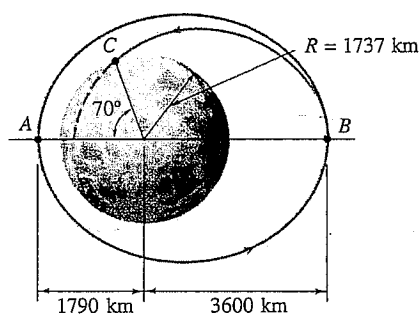


Fig. P12.115

12.115 Antes das missões lunares da Apollo, foram utilizadas várias naves orbitais para fotografar a superfície da Lua, a fim de obter informações sobre possíveis locais de descida. Após a conclusão de cada missão, a trajectória da nave era ajustada de modo que a nave pudesse colidir com a superfície da Lua, podendo assim retirar-se mais informações sobre a superfície lunar. A figura mostra a órbita elíptica da *Lunar Orbiter 2*. Sabendo que a massa da Lua é 0,01230 vezes a massa da Terra, determine o valor da redução a operar na velocidade da nave no ponto B, se se pretender que a colisão se dê no ponto C. (Sugestão: o ponto B é o apogeu da trajectória elíptica de impacte.)

12.116 Quando uma nave se aproxima do planeta Júpiter, solta uma sonda que se destina a entrar na atmosfera do planeta no ponto B e a uma altitude de 450 km acima da sua superfície. A trajectória da sonda é uma hipérbole com excentricidade $\varepsilon = 1,031$. Sabendo que o raio e a massa de Júpiter são de $71,492 \times 10^3$ km e $1,9 \times 10^{27}$ kg, respectivamente, e que a velocidade v_B da sonda em B forma um ângulo de $82,9^\circ$ com a direcção OA , determine (a) o ângulo AOB , (b) a velocidade v_B da sonda em B .

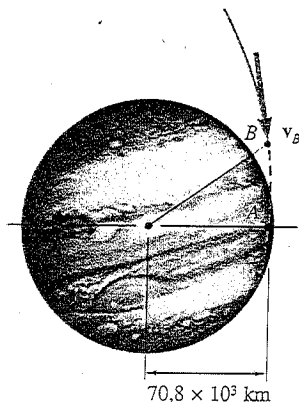


Fig. P12.116

12.117 Um vaivém descreve uma órbita a uma altitude de 563 km acima da superfície da Terra. Quando passa por A , acciona os seus motores durante um curto intervalo de tempo, a fim de reduzir a sua velocidade de 152,4 m/s, e começa a descida em direcção à Terra. Determine o ângulo AOB , de tal modo que a altitude do vaivém no ponto B seja de 120,7 km. (Sugestão: o ponto B é o apogeu da trajectória elíptica de impacte.)

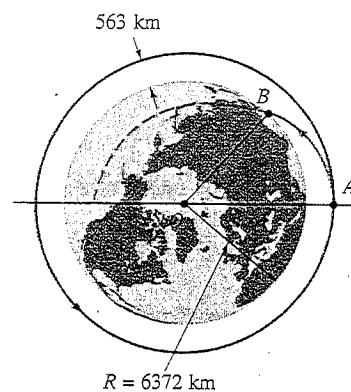


Fig. P12.117

12.118 Um satélite descreve uma órbita elíptica em torno de um planeta. Denominando por r_0 e r_1 as distâncias que correspondem, respectivamente, ao perigeu e ao apogeu da órbita, mostre que a curvatura da órbita em cada um destes dois pontos pode ser expressa por

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} \right)$$

12.119 (a) Exprima a excentricidade ε de uma órbita elíptica descrita por um satélite em torno de um planeta em função das distâncias r_0 e r_1 , que correspondem, respectivamente, ao perigeu e ao apogeu da órbita. (b) Utilize o resultado obtido na alínea a e os dados do problema 12.111, no qual $R_p = 149,6 \times 10^6$ km, para determinar a distância máxima aproximada do cometa *Hyakutake* ao Sol.

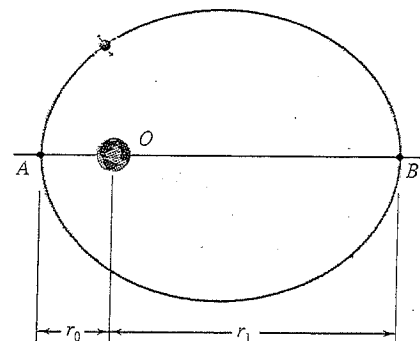


Fig. P12.118 e P12.119

12.120 Mostre que o momento angular por unidade de massa h de um satélite que descreve uma órbita elíptica com o semieixo maior a e excentricidade ε em torno de um planeta de massa M pode ser expressa por

$$h = \sqrt{GMa(1 - \varepsilon^2)}$$

12.121 Deduza a terceira lei de Kepler do movimento planetário a partir das Eqs. (12.39) e (12.45).

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 12

Neste capítulo dedicamos a nossa atenção à segunda lei de Newton e à sua aplicação na análise do movimento de partículas.

Segunda lei de Newton

Denominando por m a massa da partícula, por $\Sigma \mathbf{F}$ a resultante, de um sistema de forças actuando sobre a partícula, e por \mathbf{a} a aceleração da partícula em relação a um *sistema de referência newtoniano* [Sec. 12.2], escrevemos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (12.2)$$

Quantidade de movimento

Introduzindo o conceito de *quantidade de movimento* de uma partícula, $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ [Sec. 12.2], vimos que a segunda lei de Newton pode também ser escrita na forma

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \quad (12.5)$$

que significa que *a resultante das forças actuantes sobre uma partícula é igual à taxa de variação da sua quantidade de movimento.*

Sistema consistente de unidades

A Eq. (12.2) só é válida se utilizarmos um sistema consistente de unidades. No sistema SI as forças devem ser expressas em newtons; as massas, em quilogramas, e as acelerações, em m/s^2 .

Equações do movimento de uma partícula

Para a resolução de um problema envolvendo o movimento de uma partícula, devemos substituir a Eq. (12.2) por equações contendo apenas variáveis escalares [Sec. 12.2]. Utilizando as *componentes cartesianas* de \mathbf{F} e \mathbf{a} , escrevemos

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_y = ma_y \quad \Sigma F_z = ma_z \quad (12.8)$$

Utilizando as componentes normal e tangencial, temos

$$\Sigma F_t = m \frac{dv}{dt} \quad \Sigma F_n = m \frac{v^2}{\rho} \quad (12.9')$$

Equilíbrio dinâmico

Verificamos também que, na [Sec. 12.6], as equações de movimento de uma partícula podiam ser substituídas por equações semelhantes usadas na estática, desde que um vector $-\mathbf{ma}$ de intensidade ma e sentido oposto ao da aceleração fosse adicionado ao sistema de forças aplicadas à partícula; neste caso diz-se que a partícula está em *equilíbrio dinâmico*. Contudo, por uma questão de uniformidade, todos os problemas-tipo foram resolvidos com base na equação de movimento, primeiro com coordenadas cartesianas [Probs.-Tipo 12.1 a 12.4], e posteriormente recorrendo às componentes normal e tangencial [Probs.-Tipo 12.5 a 12.6].

Na segunda parte deste capítulo, definimos o momento angular \mathbf{H}_O de uma partícula em relação a um ponto O como sendo o momento, em torno de O , da quantidade de movimento $m\mathbf{v}$ da partícula [Sec. 12.7]. Escrevemos então,

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (12.12)$$

e concluímos que o vector \mathbf{H}_O é perpendicular ao plano que contém \mathbf{r} e $m\mathbf{v}$ (Fig. 12.24), cuja intensidade é dada por

$$H_O = rmv \sin \phi \quad (12.13)$$

Sendo os vectores \mathbf{r} e $m\mathbf{v}$ expressos em componentes cartesianas, podemos calcular o momento angular \mathbf{H}_O através do determinante

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \quad (12.14)$$

Para o caso de uma partícula que se desloca no plano xy , temos que $z = v_z = 0$. O momento angular é perpendicular ao plano xy e fica completamente definido pela sua intensidade. Escrevemos

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x) \quad (12.16)$$

Calculando a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_O$ do momento angular \mathbf{H}_O , e aplicando a segunda lei de Newton, podemos escrever a equação

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (12.19)$$

que significa que a soma dos momentos, em torno de O , das forças actuantes sobre a partícula é igual à taxa de variação do momento angular da partícula em relação a O .

Em muitos problemas envolvendo o movimento plano de uma partícula, torna-se conveniente utilizar as componentes radial e transversal [Sec. 12.8, Prob.-Tipo 12.7] e escrever as equações

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (12.21)$$

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (12.22)$$

Quando a única força actuante sobre a partícula é uma força \mathbf{F} dirigida para ou a partir de um ponto O , diz-se que a partícula se desloca sob a acção de uma força central [Sec. 12.9]. Uma vez que se verifica em qualquer instante $\Sigma \mathbf{M}_O = 0$, resulta da Eq. (12.19) que $\dot{\mathbf{H}}_O = 0$ para qualquer valor de t , e por essa razão temos

$$\mathbf{H}_O = \text{constante} \quad (12.23)$$

Conclui-se assim que o momento angular de uma partícula que se desloca sob a acção de uma força central é constante quer em intensidade quer em direcção, e que a partícula se move num plano perpendicular a \mathbf{H}_O .

Momento angular

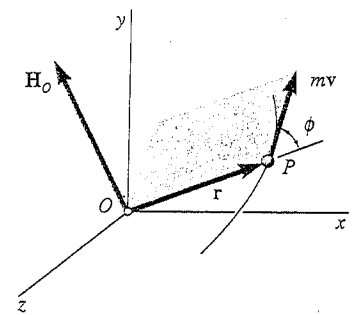


Fig. 12.24

Taxa de variação do momento angular

Componentes radial e transversal

Movimento sob a acção de uma força central

$$rmv \sin \phi = r_0 m v_0 \sin \phi_0 \quad (12.25)$$

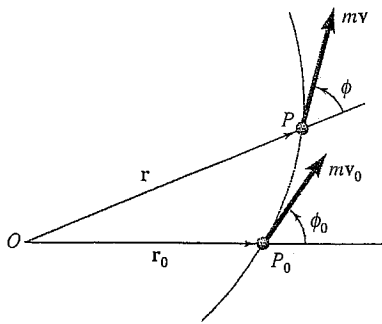


Fig. 12.25

para o movimento de qualquer partícula sob a acção de uma força central (Fig. 12.25). Se utilizarmos coordenadas polares, e lembrando a Eq. (12.18), temos

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad (12.27)$$

sendo h uma constante que representa o momento angular da partícula por unidade de massa, H_0/m . Observámos (Fig. 12.26) que a área infinitesimal dA varrida pelo raio-vector OP à medida que roda de um ângulo $d\theta$ é igual a $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$, e, por essa razão, o primeiro membro da Eq. (12.27) representa o dobro da velocidade de área dA/dt . Assim, a velocidade de área da partícula que se desloca sob a acção de uma força central é constante.

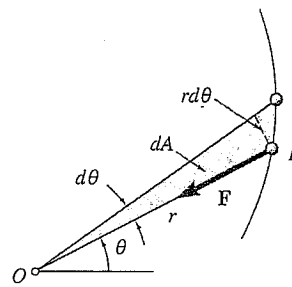


Fig. 12.26

Lei da gravitação universal de Newton

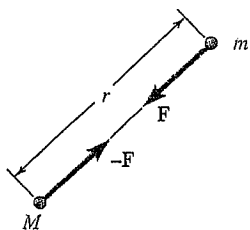


Fig. 12.27

Uma aplicação importante do movimento sob a acção de uma força central é traduzida pelos movimentos orbitais dos corpos sob o efeito da atracção gravítica [Sec. 12.10]. De acordo com a lei de gravitação universal de Newton, duas partículas a uma distância r entre si e com massas M e m , respectivamente, atraem-se entre si com forças iguais e opostas F e $-F$ dirigidas segundo a linha que une as duas partículas (Fig. 12.27). A intensidade comum a estas forças é

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (12.28)$$

na qual G é a constante de gravitação. No caso de um corpo de massa m sujeita à atracção gravítica da Terra, o produto GM pode expressar-se por

$$GM = gR^2 \quad (12.30)$$

em que M é a massa da Terra, e $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ e R é o raio da Terra.

Movimento orbital

Na Sec.12.11, mostrámos que uma partícula que se move sob a acção de uma força central descreve uma trajetória definida pela equação diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \quad (12.37)$$

em que $F > 0$ corresponde a uma força atractiva e $u = 1/r$. Para uma partícula que se desloca sob a acção de uma força gravítica [Sec. 12.12], o valor de F pode ser substituído pela expressão dada pela Eq. (12.28). Se medirmos θ a partir do eixo OA , que liga o foco ao ponto A da trajectória mais próximo de O (Fig. 12.28), concluímos que a solução da Eq. (12.37) é dada por

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \quad (12.39)$$

que representa é a equação de uma cónica com excentricidade $\varepsilon = Ch^2/GM$. A cónica é uma elipse se $\varepsilon < 1$, uma parábola se $\varepsilon = 1$, e uma hipérbole se $\varepsilon > 1$. As constantes C e h podem determinar-se a partir das condições iniciais; se a partícula for lançada a partir do ponto A ($\theta = 0$, $r = r_0$) com uma velocidade inicial v_0 perpendicular a OA , temos $h = r_0 v_0$ [Prob.-Tipo. 12.9].

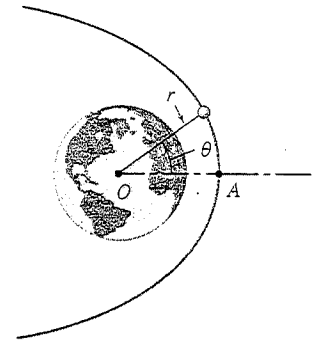


Fig. 12.28

Mostrámos também que os valores da velocidade inicial que correspondem, respectivamente, a uma trajectória parabólica e circular são

Velocidade de escape

$$v_{\text{esc.}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad (12.43)$$

$$v_{\text{circ.}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \quad (12.44)$$

sendo o primeiro destes valores denominado de *velocidade de escape*, que não é mais do que o menor valor de v_0 para o qual a partícula não regressa ao seu ponto de partida.

O período do movimento de um planeta ou de um satélite definiu-se como sendo o tempo necessário para que o corpo descreva uma órbita completa. Mostrámos que

Período

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \quad (12.45)$$

sendo $h = r_0 v_0$ e a e b , respectivamente, os semieixos maior e menor da órbita. Mostrámos ainda que esses semieixos são, respectivamente, iguais às médias aritmética e geométrica dos valores máximo e mínimo do vector r .

A última secção do capítulo [Sec. 12.13] apresenta as *leis de Kepler do movimento planetário* e mostra que estas leis empíricas, obtidas a partir de observações astronómicas remotas, confirmam as leis de Newton do movimento, bem como a sua lei de gravitação.

Leis de Kepler

Problemas de Revisão

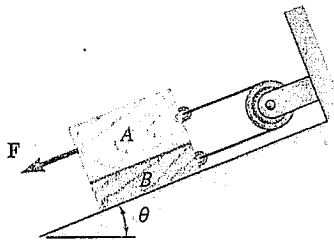


Fig. P12.123

12.122 Um automóvel pesando 13 344 N é conduzido ao longo de um plano inclinado a 5° com uma velocidade de 80,5 km/h, no sentido descendente sendo então aplicados os travões, que causam uma força de travagem de 5338 N. Determine a distância que o automóvel percorre até se imobilizar.

12.123 O bloco A tem uma massa de 30 kg, e o bloco B tem uma massa de 15 kg. Os coeficientes de atrito entre todas as superfícies planas de contacto são $\mu_e = 0,15$ e $\mu_c = 0,10$. Sabendo que $\theta = 30^\circ$ e que a intensidade da força F aplicada ao bloco A é de 250 N, determine (a) a aceleração do bloco A, (b) a tensão na corda.

12.124 O bloco A pesa 89 N, e os blocos B e C pesam cada um 44,5 N. Sabendo que os blocos se encontram inicialmente em repouso e que o bloco B se desloca de 2,4 m durante 2 s, determine (a) a intensidade da força F, (b) a tensão na corda AD. Despreze as massas das polias e o atrito nos seus eixos.

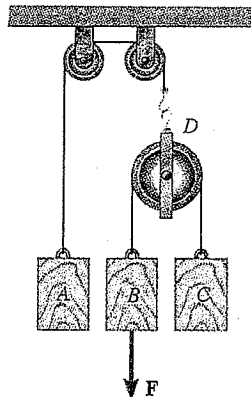


Fig. P12.124

12.125 O bloco B pesa 53,4 N e repousa sobre a superfície superior de uma cunha A com 133,4 N. Desprezando o atrito, determine imediatamente após o sistema ser libertado do repouso (a) a aceleração de A, (b) a aceleração de B relativamente a A.

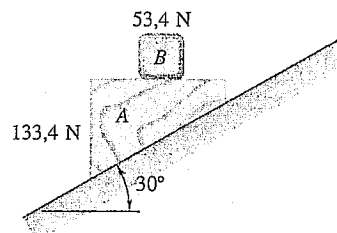


Fig. P12.125

12.126 A pista dos carros do carrossel mostrado na figura situa-se no plano vertical. O segmento da pista entre A e B é recto e horizontal, enquanto os segmentos à esquerda de A e à direita de B têm os raios de curvatura indicados na figura. O carro desloca-se a uma velocidade de 72 km/h quando se aplicam os travões, causando uma derrapagem das rodas ($\mu_c = 0,25$). Determine a desaceleração inicial do carro se admitirmos que os travões são aplicados quando o carro (a) quase atingiu o ponto A , (b) se desloca entre A e B , (c) acabou de passar o ponto B .

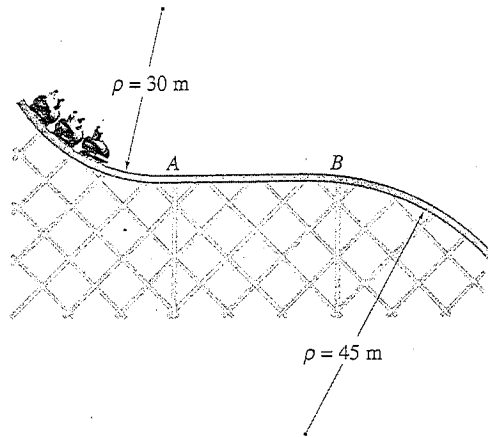


Fig. P12.126

12.127 Um pequeno cursor C com 200 g pode deslizar numa haste circular que pode rodar em torno de um eixo vertical AB a uma velocidade constante de 6 rad/s . Determine o valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre a haste e o cursor se este não puder deslizar quando (a) $\theta = 90^\circ$, (b) $\theta = 75^\circ$, (c) $\theta = 45^\circ$. Indique o sentido do movimento iminente para cada caso.

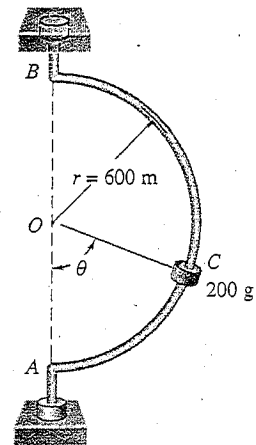


Fig. P12.127

12.128 O pino B pesa $1,1 \text{ N}$ e pode deslizar livremente num plano horizontal ao longo de um braço giratório OC e ao longo de uma ranhura circular DE cujo raio é $b = 508 \text{ mm}$. Ignorando o atrito e admitindo que $\dot{\theta} = 15 \text{ rad/s}$ e $\ddot{\theta} = 250 \text{ rad/s}^2$ para a posição $\theta = 20^\circ$, determine para esta posição (a) as componentes radial e transversal da força resultante exercida sobre o pino, (b) as forças P e Q exercidas sobre o pino, respectivamente, pela haste OC e pela parede da ranhura DE .

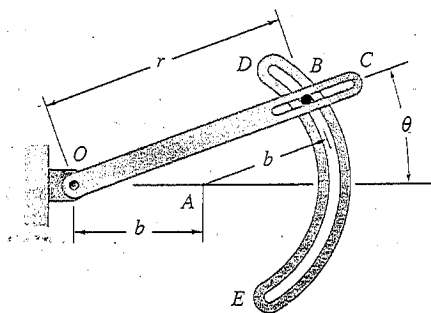


Fig. P12.128

12.129 Uma partícula de massa m é lançada a partir do ponto A com uma velocidade inicial v_0 perpendicular a AO e desloca-se sob a acção de uma força central dirigida para o exterior. Sabendo que a partícula percorre uma trajectória definida pela equação $r = r_0/\cos 2\theta$, e utilizando a Eq. (12.27), exprima as componentes radial e transversal da velocidade v da partícula em função do ângulo θ .

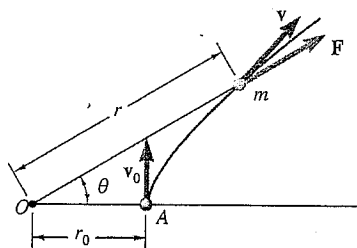


Fig. P12.129

12.130 Mostre que o raio r da órbita da Lua pode ser determinado a partir do raio R da Terra, da aceleração da gravidade g à superfície da Terra, e do tempo τ necessário para que a Lua realize uma órbita completa em torno da Terra. Calcule r sabendo que $\tau = 27,3$ dias.

12.131 Um cursor com 250 g pode deslizar ao longo de uma barra horizontal que roda livremente em torno de um eixo vertical. O cursor é inicialmente mantido na posição A através de uma corda ligada ao veio e comprimindo uma mola com constante de rigidez de 6 N/m, que se encontra não deformada quando o cursor está situado a 500 mm do veio. À medida que a barra roda com uma velocidade $\dot{\theta} = 16$ rad/s, a corda é cortada fazendo que o cursor se mova ao longo da barra. Desprezando o atrito e a massa da barra, determine para a posição B do cursor (a) a componente transversal da velocidade do cursor, (b) as componentes radial e transversal da aceleração, (c) a aceleração do cursor relativamente à barra.

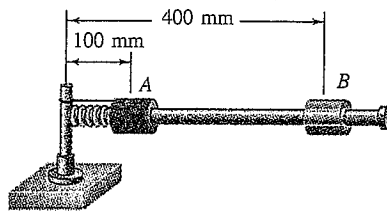


Fig. P12.131

12.132 A nave espacial *Voyager I* atingiu o ponto da sua trajectória mais próximo do planeta Saturno, que estava a uma distância de 185×10^3 km desde o centro do planeta e possuía uma velocidade de 21,0 km/s. Sabendo que *Tethys*, uma das luas de Saturno, descreve uma órbita circular de raio 295×10^3 km a uma velocidade de 11,35 km/s, determine a excentricidade da trajectória de *Voyager I* durante a sua aproximação a Saturno.

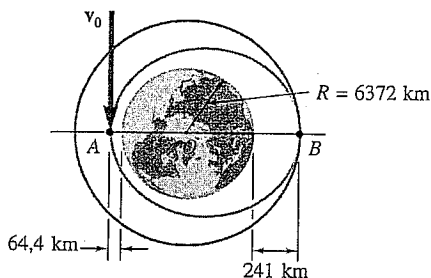


Fig. P12.133

12.133 O vaivém *Columbia*, alcançou, durante a sua segunda missão, uma altitude de 64,4 km acima da superfície da Terra e possuía uma velocidade horizontal v_0 . Sabendo que a sua primeira órbita foi elíptica e que o vaivém foi transferido para uma órbita circular quando passou pelo ponto B a uma altitude de 241,4 km, determine (a) o tempo necessário para que o vaivém viaje de A para B na sua órbita elíptica original, (b) o período do vaivém durante a sua última órbita.

12.C1 O bloco B , com massa de 10 kg, está inicialmente em repouso sobre a superfície superior de um cunha com 20 kg que se encontra assente sobre uma superfície horizontal, como mostra a figura. Um bloco C está ligado ao bloco B através de um cabo que passa por uma polia cuja massa se considera desprezável. Escreva um programa de computador que permita calcular a aceleração inicial da cunha bem como a aceleração inicial do bloco B relativamente à cunha. Admitindo que μ é o coeficiente de atrito entre todas as superfícies, utilize este programa para determinar as acelerações para valores de $\mu \geq 0$. Considere acréscimos de 0,01 para o valor de μ até que a cunha seja impedida de se mover, e utilize depois incrementos de 0,1 até deixar de se verificar qualquer movimento.

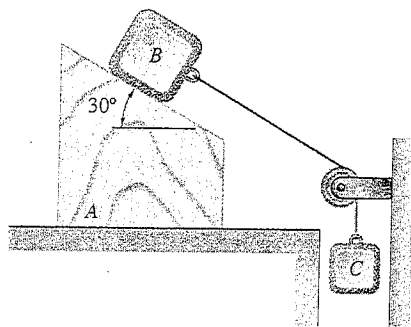


Fig. P12.C1

12.C2 Um pequeno bloco pesa 4,45 N e está em repouso no cimo de uma superfície cilíndrica. Impõe-se uma velocidade inicial v_0 para a direita e com a intensidade de 3,05 m/s, que causa o seu escorregamento sobre a referida superfície. Escreva um programa de computador que permita determinar os valores de θ para os quais o bloco perde o contacto com a superfície; considere que o coeficiente de atrito cinético μ_c , entre o bloco e a superfície, toma valores entre 0 e 0,4 com incrementos de 0,05.

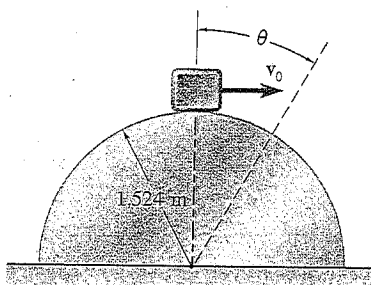


Fig. P12.C2

12.C3 Um bloco de massa m encontra-se ligado a uma mola com constante de rigidez k . O bloco é libertado do repouso quando a mola se encontra indeformada e na posição horizontal. Escreva um programa de computador que permita determinar, com intervalos de tempo adequados, e para vários valores de k/m e r_0 , (a) o comprimento da mola, a intensidade e a direcção da velocidade do bloco, quando este passa sob o ponto de suspensão da mola, (b) o valor de k/m quando $r_0 = 1$ m para o qual aquela velocidade é horizontal.

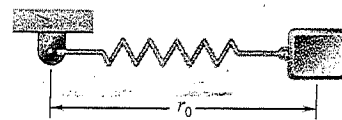


Fig. P12.C3

12.C4 Escreva um programa de computador que permita determinar a gama de valores de θ para os quais o bloco E do Prob. 12.58 não desliza na ranhura semi-circular existente na placa. Admitindo um coeficiente de atrito estático de 0,35, determine essa gama de valores quando a velocidade angular da placa é de (a) 14 rad/s, (b) 2 rad/s.

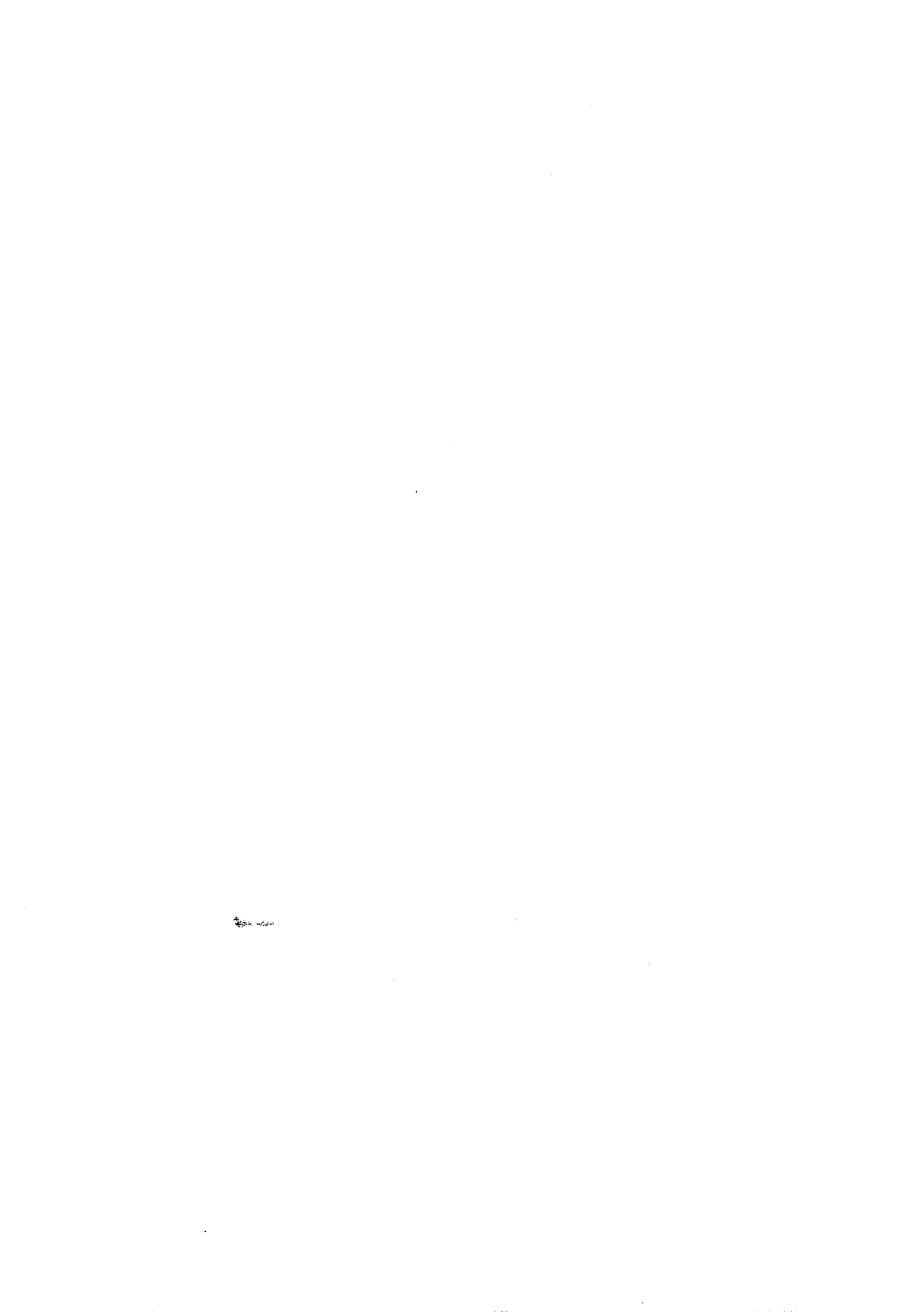
12.C5 Escreva um programa de computador que permita determinar o tempo necessário para que uma nave viaje entre dois pontos da sua trajectória, sendo dada a distância do apogeu ou do perigeu da trajectória e a velocidade da nave nesse ponto. Utilize este programa para determinar (a) o tempo necessário para que o *Lunar Orbiter 2* no Prob. 12.115 viaje entre os pontos B e C seguindo a sua trajectória de impacte, sabendo que, quando começa a sua descida em B , a velocidade da nave é de 869,4 m/s, (b) o tempo necessário para que o vaivém no Prob. 12.117 viaje entre os pontos A e B da sua trajectória de descida, sabendo que a sua velocidade é de 7428,3 m/s quando começa a descida em A .

Soluções dos problemas

As soluções dos problemas propostos, com a exceção dos problemas numerados em itálico, são apresentadas nas páginas seguintes.

CAPÍTULO 11

- 11.1 $x = 19 \text{ m}$, $v = 58 \text{ m/s}$, $a = 120 \text{ m/s}^2$.
- 11.2 $x = 281 \text{ mm}$, $v = 385 \text{ mm/s}$, $a = 382 \text{ mm/s}^2$.
- 11.3 $x = 248 \text{ mm}$, $v = 72 \text{ mm/s}$, $a = -383 \text{ mm/s}^2$.
- 11.4 $t = 3 \text{ s}$, $x = -59,5 \text{ m}$, $a = 25 \text{ mm/s}^2$.
- 11.5 $t = 0,667 \text{ s}$, $x = 0,259 \text{ m}$, $v = -8,56 \text{ m/s}$.
- 11.6 (a) 2 s. (b) $x = 53 \text{ m}$, $a = 60 \text{ m/s}^2$, 96 m.
- 11.9 $v = 12 \text{ m/s}$, $x = -47 \text{ m}$, 39 m.
- 11.10 $v = -33 \text{ mm/s}$, $x = 2 \text{ mm}$, 87,7 mm.
- 11.11 (a) 0,4 s. (b) 168,5 m.
- 11.12 $x = t^4/108 + 10t + 24$, $v = t^3/27 + 10$.
- 11.15 (a) 0,09 s⁻². (b) $\pm 16,97 \text{ mm/s}$.
- 11.16 (a) 48 m³/s². (b) 21,6 m. (c) 4,90 m/s.
- 11.17 (a) 0,667 m (b) 2,71 m/s.
- 11.18 $A = -36,8 \text{ m}^2$ $k = 1,832 \text{ s}^{-2}$.
- 11.21 (a) 22,5 m. (b) 38,4 m/s.
- 11.22 (a) 29,3 m/s. (b) 0,947 s.
- 11.23 (a) 4,76 mm/s. (b) 0,1713 s.
- 11.24 (a) 4 m/s. (b) 4,8 s. (c) 7,8 m.
- 11.25 (a) 0,1457 s/m. (b) 145,2 m. (c) 6,86 m/s.
- 11.26 (a) 3,33 m. (b) 2,22 s. (c) 1,667 s.
- 11.27 (a) 7,15 km. (b) $-275 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$. (c) 49,9 mm.
- 11.28 (a) $-0,0525 \text{ m/s}^2$. (b) 6,17s.
- 11.33 (a) 1,313 m/s². (b) 11,43 s.
- 11.34 (a) 22,5 m/s. (b) 18,5 m/s. (c) 13,41 m.
- 11.35 (a) 76,8 m/s. (b) 327,87 m.
- 11.36 (a) 2,72 s. (b) 81,09 km/h.
- 11.39 (a) 0,5 km. (b) 42,9 km/h.
- 11.40 (a) $a_A = -2,10 \text{ m/s}^2$, $a_B = 2,06 \text{ m/s}^2$.
(b) 2,59 s antes de A alcançar a zona de transferência.
- 11.41 (a) 1,676 m/s². (b) 2,82 m/s².
- 11.42 (a) 3 s. (b) 1,22 m/s²
- 11.43 (a) 7,85 s, 61,7 m.
(b) $v_A = 15,71 \text{ m/s}$; $v_B = 21,1 \text{ m/s}$.
- 11.44 (a) $a_A = -0,250 \text{ m/s}^2$, $a_B = 0,300 \text{ m/s}^2$.
(b) 20,8 s. (c) 85,5 km/h.
- 11.47 (a) 2 m/s \uparrow . (b) 2 m/s \downarrow . (c) 8 m/s \uparrow .
- 11.48 (a) $a_A = 20 \text{ m/s}^2 \rightarrow$; $a_B = 6,67 \text{ m/s}^2 \downarrow$.
(b) 13,33 m/s \downarrow , 13,33 m \downarrow .
- 11.49 (a) 36 mm/s \uparrow . (b) 12 mm/s \uparrow .
(c) 72 mm/s \downarrow . (d) 48 mm/s \downarrow .
- 11.51 (a) $a_A = 2 \text{ mm/s}^2 \uparrow$; $a_B = 1 \text{ mm/s}^2 \downarrow$.
(b) 6 mm/s \downarrow , 18 mm \downarrow .
- 11.53 (a) 200 mm/s \rightarrow (b) 600 mm/s \rightarrow
(c) 200 mm/s \leftarrow (d) 400 mm/s \rightarrow
- 11.54 (a) $a_A = 13,33 \text{ mm/s}^2 \leftarrow$; $a_B = 20 \text{ mm/s}^2 \leftarrow$.
(b) 13,33 mm/s \rightarrow . (c) 70 mm/s \rightarrow 440 mm \rightarrow .
- 11.55 (a) 10 mm/s \rightarrow . (b) $a_A = 2 \text{ mm/s}^2 \uparrow$.
 $a_C = 6 \text{ mm/s}^2 \rightarrow$. (c) 175 mm \uparrow .
- 11.56 (a) $a_A = 345 \text{ mm/s}^2 \uparrow$; $a_B = 240 \text{ mm/s}^2 \downarrow$.
(b) $(v_A)_0 = 43,3 \text{ mm/s} \uparrow$; $(v_C)_0 = 130 \text{ mm/s} \rightarrow$.
(c) 728 mm.
- 11.57 (a) $a_B = 2 \text{ mm/s}^2 \uparrow$; $a_C = 3 \text{ mm/s}^2 \downarrow$.
(b) 0,667s. (c) 0,667 mm \uparrow .
- 11.58 (a) $\frac{1}{4}(1 - 6t^2)$. (b) 9,06 mm.
- 11.61 (b) $x = 52 \text{ m}$, $v = 36 \text{ m/s}$, 164 m.
- 11.62 (b) -8 m/s. (c) -56 m.
- 11.63 (b) 1,383 m. (c) 9 s, 49,5 s.
- 11.64 (b) 420 m. (c) 10,69 s, 40 s.
- 11.65 (a) 44,8 s. (b) 103,3 m/s² \uparrow .
- 11.66 207 mm/s.
- 11.69 3,96 m/s².
- 11.70 (a) 0,6 s. (b) $v = 0,2 \text{ m/s}$, $x = 2,84 \text{ m}$.
- 11.71 (a) $t = 8 \text{ min } 48 \text{ s}$, $x = 6,6 \text{ km}$. (b) 0,695 m/s².
- 11.72 (a) $-0,024 \text{ m/s}^2$. (b) 1,060 km/h.
- 11.73 74,4 m.
- 11.74 5,67 s.
- 11.77 (a) 18 s. (b) 178,8 m. (c) 34,7 km/h.
- 11.78 (b) 3,75m.
- 11.79 (a) 2 s. (b) 1,2 m/s; 0,6 m/s.
- 11.80 (a) 5,01 min. (b) 19,18 km/h.
- 11.83 (a) 2,96 s. (b) 224 m.
- 11.84 (a) 163,0 mm/s². (b) 114,3 mm/s².
- 11.87 (a) 2,38 s. (b) 35,3 m.
- 11.89 (a) 17,20 mm/s $\angle 54,5^\circ$; 57,7 mm/s² $\angle 33,7^\circ$.
(b) 137,8 mm/s $\angle 27,7^\circ$; 204 mm/s² $\angle 19,50^\circ$.
(c) 1054 mm/s $\angle 14,96^\circ$; 781 mm/s² $\angle 10,33^\circ$.
- 11.90 (a) 0; 159,1 m/s² $\angle 82,9^\circ$.
(b) 6,28 m/s \rightarrow ; 157,9 m/s² \downarrow .
- 11.91 (a) 1,414 m/s.
(b) $t = 0$, $x = -0,667 \text{ m}$, $y = -0,5 \text{ m} \angle 45^\circ$
- 11.92 (a) 2 m/s, 6 m/s.
(b) $v_{\text{mín.}}$: $t = 2n\pi \text{ s}$, $x = 8n\pi \text{ m}$, $y = 2 \text{ m} \rightarrow$.
 $v_{\text{máx.}}$: $t = (2n+1)\pi \text{ s}$, $x = 4(2n+1)\pi \text{ m}$,
 $y = 6 \text{ m} \rightarrow$ em que $n = 0, 1, 2, \dots$
- 11.93 (a) 1 s. (b) 0.
- 11.95 $v = \sqrt{R^2(1 + \omega_n^2 t^2) + c^2}$, $a = \omega_n R \sqrt{4 + \omega_n^2 t^2}$
- 11.97 353 m.



- 11.98 (a) 15,50 m/s. (b) 5,12 m.
 11.99 $4,69 \text{ m/s} \leq v_0 \leq 10,67 \text{ m/s}$.
 11.100 (a) $113,3 \text{ km/h} \leq v_0 \leq 143,8 \text{ km/h}$. (b) $6,89^\circ, 4,29^\circ$.
 11.101 (a) Sim. (b) 7,01 m.
 11.102 $0,244 \text{ m} \leq h \leq 0,386 \text{ m}$.
 11.105 6,98 m/s.
 11.106 (a) 9,08 m/s. (b) 9,02 m/s.
 11.107 $10,64 \text{ m/s} \leq v_0 \leq 14,48 \text{ m/s}$.
 11.108 $0,678 \text{ m/s} \leq v_0 \leq 1,211 \text{ m/s}$.
 11.111 (a) $4,01^\circ$. (b) 369,1 m. (c) 17,35 s.
 11.112 (a) $14,66^\circ$. (b) 0,1074 s.
 11.113 (a) $10,38^\circ$. (b) $9,74^\circ$.
 11.115 (a) $d = 6,52 \text{ m}, \alpha = 45^\circ$.
 (b) $d = 5,84 \text{ m}, \alpha = 58,2^\circ$.
 11.117 (a) $1,540 \text{ m/s} \angle 38,6^\circ$. (b) $1,503 \text{ m/s} \angle 58,3^\circ$.
 11.118 $5,05 \text{ m/s} \sphericalangle 55,8^\circ$.
 11.119 $1,737 \text{ nós} \sphericalangle 18,41^\circ$.
 11.120 (a) $429,6 \text{ km/h} \sphericalangle 12,97^\circ$. (b) $415,1 \text{ km/h} \angle 76,4^\circ$.
 (c) $104,6 \text{ km/h} \sphericalangle 40^\circ$.
 11.123 (a) $216,7 \text{ mm} \sphericalangle 54,1^\circ$ (b) $162,6 \text{ mm/s}^2 \sphericalangle 54,1^\circ$.
 11.124 (a) $174,4 \text{ mm/s} \sphericalangle 66,6^\circ$. (b) $143,0 \text{ mm/s} \sphericalangle 68,6^\circ$.
 11.125 (a) $0,835 \text{ mm/s}^2 \sphericalangle 75^\circ$. (b) $8,35 \text{ mm/s} \sphericalangle 75^\circ$.
 11.126 (a) $0,958 \text{ m/s}^2 \sphericalangle 23,6^\circ$. (b) $1,917 \text{ m/s} \sphericalangle 23,6^\circ$.
 11.127 $3,2 \text{ m/s} \sphericalangle 81,3^\circ$.
 11.128 (a) $3,92 \text{ m/s} \sphericalangle 10^\circ$. (b) $0,581 \text{ m/s} \sphericalangle 10^\circ$.
 11.129 $17,88 \text{ km/h} \angle 36,4^\circ$.
 11.130 $15,79 \text{ km/h} \sphericalangle 26,0^\circ$.
 11.133 $23,1 \text{ m/s}^2$.
 11.134 (a) 250 m. (b) 82,9 km/h.
 11.135 96,4 km/h.
 11.136 12,8 mm.
 11.137 (a) 20 mm/s^2 . (b) $26,8 \text{ mm/s}^2$.
 11.138 8,55s.
 11.139 $0,77 \text{ m/s}^2$.
 11.141 $4,86 \text{ m/s}^2$.
 11.143 (a) 281 m. (b) 209 m.
 11.144 (a) $7,99 \text{ m/s} \angle 40^\circ$. (b) 3,82 m.
 11.145 (a) 2,06 m. (b) 0,0306 m.
 11.146 (a) 0,53 m. (b) 8,5 m.
 11.147 $v_B^3 / g v_A$.
 11.148 18,17 m/s.
 11.151 $(R^2 + c^2) / 2 \omega_x R$
 11.152 0,762 m
 11.153 $25,8 \times 10^3 \text{ km/h}$.
 11.154 $12,56 \times 10^3 \text{ km/h}$.
 11.155 $153,3 \times 10^3 \text{ km/h}$.
 11.156 $149,5 \times 10^6 \text{ km}$.
 11.157 $1,423 \times 10^9 \text{ km}$.
 11.158 1,606 h.
 11.161 (a) $v = (3 \text{ m/s})e_r - (12 \text{ m/s})e_\theta$; $a = -(51 \text{ m/s}^2)e_r$.
 (b) $v = (24 \text{ m/s})e_r$; $a = -(96 \text{ m/s}^2)e_r$; a trajetória é um círculo com raio de 6 m.
 11.162 (a) $v = 3\pi b e_\theta$ $a = -4\pi^2 b e_r$
 (b) $\theta = 2n\pi$ $n = 0, 1, 2, \dots$
 11.163 (a) $v = (-6\pi \text{ mm/s})e_r$. (b) $a = (80\pi \text{ mm/s}^2)e_\theta$. (c) 0.

- 11.165 (a) $v = (2\pi \text{ m/s})e_\theta$; $a = -(4\pi^2 \text{ m/s}^2)e_r$.
 (b) $v = -(\pi/2 \text{ m/s})e_r + (\pi \text{ m/s})e_\theta$;
 $a = -(\pi^2/2 \text{ m/s}^2)e_r - (\pi^2 \text{ m/s}^2)e_\theta$.
 11.166 (a) $v = 2abt$; $a = 2ab\sqrt{4b^2t^4 + 1}$.
 (b) a; a trajetória é uma circunferência de raio a.
 11.167 $-b\theta / \cos^2\theta$.
 11.168 $-b(\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2 \tan\theta) / \cos^2\theta$.
 11.171 185,7 km/h.
 11.172 $99,4 \text{ km/h} \angle 49,7^\circ$.
 11.173 $b\dot{\theta}\sqrt{4 + \theta^2} / \theta^3$.
 11.174 $b\dot{\theta}e^{\theta^2/2} \sqrt{1 + \theta^2}$.
 11.178 $v = \frac{1}{2} A \sqrt{16\pi^2 + t^2}$, $a = \frac{1}{2} A \sqrt{64\pi^4 + 1}$.
 11.179 (a) $v = \sqrt{(1 + B^2)A^2 + C^2}$,
 $a = 2\sqrt{(1 + \frac{1}{4}B^4)A^2 + C^2}$. (b) $v = 0$, $a = 0$.
 11.180 $\tan^{-1} [R(2 + \omega_n^2 t^2) / c\sqrt{4 + \omega_n^2 t^2}]$.
 11.181 (a) $\theta_x = 90^\circ$, $\theta_y = 123,7^\circ$, $\theta_z = 47,4^\circ$.
 (b) $\theta_x = 103,4^\circ$, $\theta_y = 134,3^\circ$, $\theta_z = 47,4^\circ$.
 11.182 (a) 1 s, 4s. (b) $x = 1,5 \text{ m}$, $24,5 \text{ m}$.
 11.184 (a) $-0,74 \times 10^6 \text{ m/s}^2$. (b) $1,366 \times 10^{-3} \text{ s}$.
 11.185 (a) 11,62 s; 21,2 m. (b) 5,58 m/s.
 11.186 (a) 300 mm/s \rightarrow . (b) 600 mm/s \leftarrow . (c) 450 mm/s \leftarrow .
 11.187 $v_A = 125 \text{ mm/s} \uparrow$; $v_B = 75 \text{ mm/s} \downarrow$; $v_C = 175 \text{ mm/s} \downarrow$.
 11.189 $17,89 \text{ km/h} \angle 63,4^\circ$.
 11.190 $0,74 \text{ m/s}^2$.
 11.193 $\dot{\theta} = (v_0 / h) \sin^2\theta$, $\ddot{\theta} = (2v_0^2 / h^2) \sin^3\theta \cos\theta$.
 11.C1 (a) $\phi = 30^\circ$; $\theta = 352^\circ$, $\dot{\theta} = 0,898 \text{ rad/s}$.
 (b) $\phi = 60^\circ$; $\theta = 13,06^\circ$, $\dot{\theta} = 1,330 \text{ rad/s}$.
 (c) $\phi = 240^\circ$; $\theta = 254^\circ$, $\dot{\theta} = 0,536 \text{ rad/s}$.
 11.C2 $\alpha = 18^\circ$; $k = 40\%$
 $v_0 = 1,8 \text{ m/s}$: a bola salta primeiro duas vezes no degrau A.
 $v_0 = 2,4 \text{ m/s}$: a bola salta primeiro duas vezes no degrau C.
 $v_0 = 3,0 \text{ m/s}$: a bola falha o degrau D e depois continua a saltar sobre os degraus.
 11.C3 (a) $\theta = 70^\circ$: 16,23 m/s; $290^\circ, 70^\circ$.
 (b) $\theta = 100^\circ$: 12,71 m/s; $259,7^\circ, 100,6^\circ$.
 (c) $\theta = 130^\circ$: 6,70 m/s; $213,6^\circ, 154,6^\circ$.
 11.C4 (a) constante: 8,80 s, 117,9 m; uniformemente variável 17,77 s, 240,5 m.
 (b) constante: 11,29 s, 177,1 m; uniformemente variável 20,7 s, 309,4 m;
 11.C5 (a) $\alpha = 20^\circ$: $d = 6,552 \text{ m}$.
 $\alpha = 30^\circ$: $d = 8,828 \text{ m}$.
 (b) $d = 10,184 \text{ m}$, $\alpha = 46,23^\circ$.

CAPÍTULO 12

- 12.1 $m = 2,000 \text{ kg}$ a todas as latitudes.
 (a) 19,56 N. (b) 19,61 N. (c) 19,64 N.
 12.2 (a) 22,7 kg. (b) 2,3 kg. (c) 8,66 kg.
 12.3 $1,30 \times 10^6 \text{ kg-m/s}$.
 12.5 (a) 6,67 m/s. (b) 0,0755.
 12.6 (a) 225 km/h. (b) 187,1 km/h.
 12.7 0,39 km.
 12.8 $2,73 \text{ m/s}^2 \sphericalangle 36,9^\circ$.
 12.9 (a) 44,0 m. (b) 52,5 m.

- 12.10 301 N.
- 12.11 (a) $a_A = 2,49 \text{ m/s}^2 \rightarrow$; $a_B = 0,831 \text{ m/s}^2 \downarrow$.
(b) 74,8 N.
- 12.12 (a) $a_A = 0,698 \text{ m/s}^2 \rightarrow$; $a_B = 0,233 \text{ m/s}^2 \downarrow$.
(b) 79,8 N.
- 12.15 (a) $0,986 \text{ m/s}^2 \nearrow 25^\circ$. (b) 51,7 N.
- 12.16 (a) $1,794 \text{ m/s}^2 \nearrow 25^\circ$. (b) 58,2 N.
- 12.17 $a_A = 0,304 \text{ m/s}^2 \nearrow 15^\circ$;
 $a_B = 0,493 \text{ m/s}^2 \nearrow 15^\circ$.
- 12.18 (a) $2,182 \text{ m/s} \nearrow 30^\circ$. (b) 1,34 m.
- 12.20 (a) $1,962 \text{ m/s}^2 \uparrow$. (b) 39,1 N.
- 12.21 (a) $6,63 \text{ m/s}^2 \leftarrow$. (b) $0,321 \text{ m} \rightarrow$.
- 12.24 $Pv_0^2 \ln \frac{2}{2gF_0}$.
- 12.26 $\sqrt{k/m} (\sqrt{l^2 + x_0^2} - l)$
- 12.27 192,27 km/h.
- 12.28 (a) $a_A = 0,316 \text{ m/s}^2 \downarrow$; $a_B = 2,22 \text{ m/s}^2 \downarrow$.
 $a_C = 9,49 \text{ m/s}^2 \leftarrow$. (b) 18,99 N.
- 12.29 (a) $a_A = a_B = 6,25 \text{ m/s}^2 \downarrow$; $a_C = 37,5 \text{ m/s}^2 \leftarrow$.
(b) 14,24 N. (c) 380 N \leftarrow .
- 12.30 (a) $a_A = a_B = a_D = 0,84 \text{ m/s}^2 \downarrow$; $a_C = 3,36 \text{ m/s}^2 \uparrow$.
(b) 83,62 N.
- 12.31 (a) $7,37 \text{ m/s} \downarrow$. (b) $5,26 \text{ m/s} \uparrow$.
- 12.32 (a) $2,80 \text{ m/s}^2 \leftarrow$. (b) $8,32 \text{ m/s}^2 \searrow 25^\circ$.
- 12.33 (a) $5,94 \text{ m/s}^2 \searrow 75,6^\circ$. (b) $3,74 \text{ m/s} \searrow 20^\circ$.
- 12.36 (a) 80,4 N. (b) 2,30 m/s.
- 12.37 (a) $49,9^\circ$. (b) 6,85 N.
- 12.38 2,51 m/s.
- 12.40 $2,77 \text{ m/s} < v < 4,36 \text{ m/s}$.
- 12.42 $2,74 \text{ m/s} < v \leq 3,75 \text{ m/s}$.
- 12.43 $0,74 \text{ m/s} \leq v \leq 4,22 \text{ m/s}$.
- 12.44 Para cada uma das cordas: (a) 131,7 N. (b) 88,4 N.
- 12.45 (a) 553 N. (b) 659 N.
- 12.46 (a) 203,6 m. (b) $533,8 \text{ N} \uparrow$.
- 12.47 (a) $2,12 \text{ m/s}^2 \searrow 20^\circ$. (b) $2,71 \text{ m/s}^2 \searrow 20^\circ$.
- 12.50 $-53,1^\circ \leq \theta \leq 53,1^\circ$.
- 12.51 $\sqrt{gr \operatorname{tg}(\theta - \phi_s)} \leq v \leq \sqrt{gr \operatorname{tg}(\theta + \phi_s)}$
- 12.52 (a) 23,7 km/h. (b) 40,8 km/h.
- 12.53 (a) 0,1858P. (b) $10,28^\circ$.
- 12.55 468 mm.
- 12.56 $2,36 \text{ m/s} \leq v \leq 4,99 \text{ m/s}$.
- 12.57 (a) 0,1904; o movimento é iminente para baixo.
(b) 0,1904; o movimento é iminente para cima.
- 12.58 (a) Não escorrega; $8,67 \text{ N} \nearrow 80^\circ$.
(b) Escorrega para baixo; $4,99 \text{ N} \nearrow 40^\circ$.
- 12.61 (a) 0,1834. (b) $10,39^\circ$; $169,6^\circ$.
- 12.62 (a) 0,91 m/s. (b) $19,29^\circ$; $160,7^\circ$.
- 12.64 $1,054 \sqrt{eV / mv_0^2}$
- 12.65 1,3331.
- 12.66 (a) $F_r = -31,6 \text{ N}$, $F_\theta = -3,48 \text{ N}$.
(b) $F_r = -12,93 \text{ N}$, $F_\theta = 2,01 \text{ N}$.
- 12.67 $F_r = -2,86 \text{ N}$, $F_\theta = 0,503 \text{ N}$.
- 12.68 (a) $F_r = -5,413 \text{ N}$, $F_\theta = 1,103 \text{ N}$.
(b) $F_r = -2,749 \text{ N}$, $F_\theta = 0,276 \text{ N}$.
- 12.69 (a) $mc^2(r_0 - kt)t^2$. (b) $mc^2(r_0 - 3kt)$.
- 12.70 2,00 s.
- 12.71 (a) $F_r = (5,76 \text{ N}) \operatorname{tg}^2 \theta \sec \theta$,
 $F_\theta = (5,76 \text{ N}) \operatorname{tg} \theta \sec \theta$
(b) $P = (5,76 \text{ N}) \operatorname{tg} \theta \sec^3 \theta \searrow \theta$,
 $Q = (5,76 \text{ N}) \operatorname{tg}^2 \theta \sec^2 \theta \rightarrow$.
- 12.76 $v_r = v_0 \operatorname{sen} 2\theta / \sqrt{\cos 2\theta}$, $v_\theta = v_0 \sqrt{\cos 2\theta}$
- 12.79 $(g\tau^2 R^2 / 4\pi^2)^{1/3}$; 24,8 m/s².
- 12.80 (a) $35,77 \times 10^3 \text{ km}$, 35,78 km.
(b) 3070 m/s, 3,075 m/s.
- 12.81 $6,027 \times 10^{24} \text{ kg}$.
- 12.82 (a) 1h 57 min. (b) 3380 m/s.
- 12.83 (a) $60,3 \times 10^3 \text{ km}$. (b) $570 \times 10^{24} \text{ kg}$.
- 12.86 (a) 1609,3 m/s. (b) 2438,4 m/s.
- 12.87 (a) 1551 m/s. (b) -15,8 m/s.
- 12.88 (a) 3560 m/s. (b) 7170 km.
- 12.90 (a) $a_r = a_\theta = 0$. (b) 39 m/s^2 . (c) 0,81 m/s.
- 12.91 (a) 0,61 m/s. (b) $a_r = -6,55 \text{ m/s}^2$, $a_\theta = 0$.
(c) -5,74 m/s².
- 12.98 10,42 km/s.
- 12.99 (a) 10,13 km/s. (b) 2,97 km/s.
- 12.103 (a) $8,016 \times 10^3 \text{ m/s}$. (b) 136,6 m.
- 12.104 $\sqrt{2/(2 + \alpha)}$
- 12.107 (a) $24,9 \times 10^3 \text{ km}$
(b) $|\Delta v_B| = 265 \text{ m/s}$; $|\Delta v_C| = 1023 \text{ m/s}$.
- 12.108 122 h 36 min 24 s.
- 12.109 4 h 57 min 37 s.
- 12.110 $54,0^\circ$.
- 12.112 1 h 2 min 32 s.
- 12.114 $\cos^{-1} [(1 - n\beta^2)/(1 - \beta^2)]$.
- 12.115 81,0 m/s.
- 12.116 (a) $14,37^\circ$. (b) 59,8 km/s.
- 12.119 (a) $(r_1 - r_0)/(r_1 + r_0)$. (b) $609 \times 10^{12} \text{ m}$.
- 12.122 81,38 m.
- 12.124 (a) 7,366 N. (b) 6,34N.
- 12.125 (a) $6,24 \text{ m/s}^2 \searrow 30^\circ$. (b) $5,41 \text{ m/s}^2 \rightarrow$.
- 12.127 (a) 0,454; o movimento é iminente para baixo.
(b) 0,1796; o movimento é iminente para baixo.
(c) 0,218; o movimento é iminente para baixo.
- 12.128 (a) $F_r = -58,54 \text{ N}$, $F_\theta = 9,34 \text{ N}$
(b) $P = 30,65 \text{ N} \searrow 70^\circ$, $Q = 62,27 \text{ N} \searrow 40^\circ$.
- 12.129 $v_r = 2v_0 \operatorname{sen} 2\theta$, $v_\theta = v_0 \cos 2\theta$.
- 12.131 (a) 0,400 m/s. (b) $a_r = 2,40 \text{ m/s}^2$, $a_\theta = 0$
(c) $2,80 \text{ m/s}^2$
- 12.132 1,147.
- 12.C1 $\mu = 0$: $a_A = 1,888 \text{ m/s}^2$, $a_{B/A} = 7,35 \text{ m/s}^2$;
 $\mu = 0,12$: $a_A = 0,031 \text{ m/s}^2$, $a_{B/A} = 4,90 \text{ m/s}^2$;
 $\mu = 0,20$: $a_A = 0$, $a_{B/A} = 4,31 \text{ m/s}^2$;
 $\mu = 0,80$: $a_A = 0$, $a_{B/A} = 0,059 \text{ m/s}^2$.
- 12.C2 $\mu = 0$: $\theta = 29,1^\circ$; $\mu = 0,20$: $\theta = 31,3^\circ$;
 $\mu = 0,40$: $\theta = 34,1^\circ$.
- 12.C3 (a) $r_0 = 1 \text{ m}$:
 $k/m = 15 \text{ s}^{-2}$: $v = 2,74 \text{ m/s} \searrow 6,23^\circ$;
 $k/m = 20 \text{ s}^{-2}$: $v = 2,98 \text{ m/s} \searrow 0,98^\circ$;
 $k/m = 25 \text{ s}^{-2}$: $v = 3,19 \text{ m/s} \searrow 4,59^\circ$.
(b) $19,0 \text{ s}^{-2}$.
- 12.C4 (a) $77,6^\circ \leq \theta \leq 115,9^\circ$.
(b) $0 \leq \theta \leq 4,68^\circ$; $148,6^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.
- 12.C5 (a) 1 h 18 min 29 s. (b) 33 min 30 s.

Respostas dos Problemas Seleccionados

CAPÍTULO 2

- 2.1 8,40 kN \sphericalangle 19,0°.
- 2.2 575 N \sphericalangle 67,0°.
- *2.3 163 N \sphericalangle 76,0°.
- 2.5 (a) 107,6 N. (b) 75,0 N.
- 2.6 (a) 89,2 N. (b) 55,8 N.
- *2.7 (a) 113,3°. (b) 314,4 N.
- *2.8 (a) 22,7°. (b) 304,1 N.
- 2.9 (a) 489 N. (b) 738 N.
- 2.10 (a) 43,5°. (b) 513 N.
- *2.13 (a) 45 N \downarrow . (b) 78 N.
- 2.14 (a) 206 N \rightarrow . (b) 295 N.
- *2.15 113,6 N \sphericalangle 8,13°.
- 2.16 8,38 kN \sphericalangle 18,76°.
- 2.17 576 N \sphericalangle 66,4°.
- *2.18 163,5 N \sphericalangle 76,6°.
- 2.21 (20 kN) 15,32 kN, 12,86 kN; (30 kN) -10,26 kN, 28,2 kN; (42 kN) -39,5 kN, 14,36 kN.
- *2.22 (180 N) -137,9 N, -115,7 N; (270 N) 135 N, -233,8 N; (360 N) 326,3 N, 152,1 N.
- *2.23 (918 N) -432 N, 810 N; (954 N) 504 N, 810 N; (1.800 N) -1.440 N, -1.080 N.
- 2.25 (a) 176,2 N. (b) 113,3 N.
- 2.26 (a) 1.674 N. (b) 1.371 N.
- *2.27 (a) 1.527 N. (b) 982 N \downarrow .
- *2.28 (a) 114 N. (b) 29,5 N.
- 2.31 530 N \sphericalangle 38,5°.
- 2.32 65,2 kN \sphericalangle 58,2°.
- *2.33 378,9 N \sphericalangle 31,4°.
- *2.34 1.471 N \sphericalangle 21,54°.
- 2.35 1.007 N \sphericalangle 4,91°.
- 2.36 1.019 N \sphericalangle 26,1°.
- *2.39 (a) 40,3°. (b) 1.134 N.
- *2.40 (a) 522 N. (b) 270 N.
- 2.41 (a) 7,29 kN. (b) 9,03 kN.
- *2.43 (a) 1.983 N. (b) 2.191 N.
- 2.44 (a) 5,23 kN. (b) 0,503 kN.
- *2.45 (a) 764 N. (b) 1.566 N.
- 2.46 (a) 2,81 kN. (b) 2,66 kN.
- *2.49 $F_C = 1.494$ N; $F_D = 1.656$ N.
- *2.50 $F_B = 3.024$ N; $F_D = 1.044$ N.
- 2.53 (a) 750 N. (b) 1.190 N.
- 2.54 $0 \leq W \leq 609$ N.
- 2.55 (a) 218 kN. (b) 15,11 kN.
- 2.56 (a) 33,1 kN. (b) 141,7 kN.
- 2.57 (a) 66,2 N. (b) 208 N.
- 2.58 (a) 62,8 N. (b) 758 mm.
- 2.59 (a) 55,0°. (b) 2,41 kN.
- 2.60 4,14 m.
- *2.61 (a) 1.215 N. (b) 77,5°.
- *2.64 (a) 90,0°. (b) 310 N.
- 2.65 40,0 N.
- 2.66 415 mm.
- 2.68 (b) 916 N. (d) 687 N.
- *2.69 671 N \sphericalangle 32,3° ou 1.233 N \sphericalangle 32,3°.
- *2.70 (a) 24,2°. (b) 657 N.
- 2.71 (a) 2,30 kN. (b) 3,53 kN.
- *2.73 (a) +706,5 N, +450 N, -329,4 N. (b) 38,3°, 60,0°, 111,5°.
- 2.75 (a) +2,46 kN, -2,70 kN, +2,07 kN. (b) 54,1°, 130,0°, 60,5°.
- 2.76 (a) -1,076 kN, -2,55 kN, +2,31 kN. (b) 107,4°, 135,0°, 50,1°.
- 2.77 (a) 576 N. (b) 67,5°, 30,0°, 108,7°.
- 2.78 (a) 200 N. (b) 112,5°, 30,0°, 108,7°.
- *2.79 (a) -135 N, +467,6 N, +234 N. (b) 104,5°, 30,0°, 64,3°.
- *2.81 $F = 4.050$ N; $\theta_x = 27,3^\circ$, $\theta_y = 73,2^\circ$, $\theta_z = 110,8^\circ$.
- 2.82 $F = 1.300$ N; $\theta_x = 72,1^\circ$, $\theta_y = 157,4^\circ$, $\theta_z = 76,7^\circ$.
- 2.83 (a) 135,0°. (b) $F_x = 121,7$ N, $F_z = 158,5$ N; $F = 283$ N.
- *2.86 (a) $F_y = -1.615,5$ N, $F_z = -1.966,5$ N. (b) $\theta_x = 70,5^\circ$, $\theta_y = 126,7^\circ$.
- 2.87 +400 N, +2.000 N, -500 N.
- *2.89 +432 N, +648 N, -486 N.
- *2.90 -337,7 N, +648,4 N, +486,3 N.
- 2.91 +120,0 N, -140,0 N, -120,0 N.
- *2.94 701 N; $\theta_x = 77,4^\circ$, $\theta_y = 37,4^\circ$, $\theta_z = 55,5^\circ$.
- 2.95 1.826 N; $\theta_x = 48,2^\circ$, $\theta_y = 116,6^\circ$, $\theta_z = 53,4^\circ$.
- 2.96 1.826 N; $\theta_x = 50,6^\circ$, $\theta_y = 117,6^\circ$, $\theta_z = 51,8^\circ$.
- 2.97 379 N; $\theta_x = 129,3^\circ$, $\theta_y = 40,0^\circ$, $\theta_z = 96,1^\circ$.
- *2.98 (a) 8.131,5 N. (b) 11,12 kN; $\theta_x = 90,0^\circ$, $\theta_y = 139,2^\circ$, $\theta_z = 49,2^\circ$.
- *2.100 $T_{AB} = 1.107$ N; $T_{AD} = 1.161,3$ N.
- 2.101 279 N.
- *2.103 1.075,5 N \uparrow .
- *2.104 967,5 N \uparrow .
- 2.105 8,41 kN.
- 2.107 4,63 kN.
- 2.108 $T_{AB} = 2,63$ kN; $T_{AC} = 3,82$ kN; $T_{AD} = 2,43$ kN.
- *2.109 7,21 N.
- 2.111 6,66 kN \uparrow .
- 2.112 8,81 kN \uparrow .
- *2.113 949,5 N.

* Esses problemas sofreram transformações de unidades: Suas respostas são aproximadas.

- 2.115 $T_{AD} = T_{CD} = 135,1 \text{ N}$; $T_{BD} = 46,9 \text{ N}$.
 2.116 $T_{AB} = 4,33 \text{ kN}$; $T_{AC} = 2,36 \text{ kN}$; $T_{AD} = 2,37 \text{ kN}$.
 *2.117 $T_{AB} = 521,55 \text{ N}$; $T_{AC} = 57,51 \text{ N}$; $T_{AD} = 548,55 \text{ N}$.
 *2.119 $T_{BE} = 1,35 \text{ N}$; $T_{CF} = 4,51 \text{ N}$; $T_{DC} = 5,03 \text{ N}$.
 2.121 $T_{AB} = 551 \text{ N}$; $T_{AC} = 503 \text{ N}$.
 2.122 $T_{AB} = 306 \text{ N}$; $T_{AC} = 756 \text{ N}$.
 *2.123 $T_{AB} = 209,25 \text{ N}$; $T_{AC} = 153,9 \text{ N}$; $T_{ADE} = 498,6 \text{ N}$.
 *2.124 (a) 225 N. (b) 729 N. (c) 2.106 N.
 2.125 $P = 160,0 \text{ N}$; $Q = 240 \text{ N}$.
 2.127 (a) 2,27 kN. (b) 1,963 kN.
 *2.129 (a) 2.353,5 N. (b) 1.926 N.
 2.131 (a) 454 N. (b) 1.202 N.
 *2.132 (a) 234 N; (b) 202,5 N.
 2.134 $F_C = 6,40 \text{ kN}$; $F_D = 4,80 \text{ kN}$.
 2.135 $F_B = 15,00 \text{ kN}$; $F_C = 8,00 \text{ kN}$.
 *2.137 1.715 mm.
 2.139 748 N; $\theta_x = 120,1^\circ$, $\theta_y = 52,5^\circ$, $\theta_z = 128,0^\circ$.
 *2.140 (a) 1.619,5 N \rightarrow . (b) 935 N.

CAPÍTULO 3

- 3.1 1,788 N \cdot m \uparrow .
 3.2 14,74 N \nearrow 35,2°.
 3.3 50,6° ou 59,1°.
 *3.4 137,3 N \cdot cm \uparrow .
 3.6 (a) 80,0 N \cdot m \downarrow . (b) 205 N. (c) 177,8 N \nearrow 20,0°.
 *3.7 (a) 372,98 N \cdot m \uparrow . (b) 158,4 N \nearrow 55,9°.
 3.9 27,9 N \cdot m \uparrow .
 3.10 30,8 N \cdot m \uparrow .
 *3.11 (a) 855 N \cdot m \uparrow . (b) 855 N \cdot m \uparrow .
 *3.12 1.125 N.
 3.16 84,0 mm.
 3.17 (a) $(-4i + 7j + 10k)/\sqrt{165}$. (b) $(-2i - 2j - 3k)/\sqrt{17}$.
 3.19 (a) $(-8 \text{ N} \cdot \text{m})i - (7 \text{ N} \cdot \text{m})j - (18 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
 (b) $(17 \text{ N} \cdot \text{m})i + (4 \text{ N} \cdot \text{m})j + (31 \text{ N} \cdot \text{m})k$. (c) 0.
 3.21 $(5,24 \text{ kN} \cdot \text{m})i - (3,75 \text{ kN} \cdot \text{m})k$.
 *3.23 $(4,75 \text{ N} \cdot \text{m})i + (4,57 \text{ N} \cdot \text{m})j - (5,67 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
 *3.25 (a) $(-2,484 \text{ N} \cdot \text{m})i - (496,8 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
 (b) $(-2,484 \text{ N} \cdot \text{m})i + (2,916 \text{ N} \cdot \text{m})j + (3,699 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
 3.26 $(2,98 \text{ N} \cdot \text{m})i - (3,16 \text{ N} \cdot \text{m})j - (2,28 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
 3.27 5,49 m.
 3.28 4,45 m.
 3.30 1,141 m.
 *3.32 3,29 m.
 *3.33 3,29 m.
 3.34 2,08 m.
 3.35 $P \cdot Q = 17$; $P \cdot S = 9$; $Q \cdot S = -82$.
 3.37 43,6°.
 3.39 (a) 134,1°. (b) -230 N.
 3.40 (a) 65,0°. (b) 188,3 N.
 3.41 (a) 71,1°. (b) 9,73 N.
 *3.43 (a) 2.922 cm³. (b) 719 cm³.
 3.44 1,700.
 3.45 $M_x = -30,7 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_y = 12,96 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_z = -2,38 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 3.46 $M_x = -25,1 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_y = 10,60 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_z = 39,9 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 3.47 63,0 N.
 3.48 49,0 N.

- *3.49 1,2 m.
 *3.51 $P = 182,7 \text{ N}$; $\phi = 9,93^\circ$; $\theta = 48,9^\circ$.
 3.53 41,04 N \cdot m.
 3.55 172,9 N \cdot m.
 3.56 -187,3 N \cdot m.
 3.57 $aP/\sqrt{2}$.
 3.58 (b) $a/\sqrt{2}$.
 *3.59 -24,92 kN \cdot m.
 *3.62 11,98 cm.
 *3.63 43,75 cm.
 3.64 2,75 m.
 3.66 295 mm.
 3.68 (a) 8,40 N \cdot m \uparrow . (b) 0,700 m. (c) 31,6°.
 *3.69 (a) 54 N. (b) 46,31 N. (c) 28,62 N.
 3.70 (a) 8,62 N \cdot m \uparrow . (b) 53,1° \nearrow . (c) 16,11 N.
 3.71 (a) 48,0 N \cdot m \downarrow . (b) 243 mm.
 3.72 $M = 10,00 \text{ N} \cdot \text{m}$; $\theta_x = 90,0^\circ$, $\theta_y = 143,1^\circ$, $\theta_z = 126,9^\circ$.
 3.73 $M = 162,3 \text{ N} \cdot \text{m}$; $\theta_x = 67,5^\circ$, $\theta_y = 23,6^\circ$, $\theta_z = 83,2^\circ$.
 *3.74 $M = 774 \text{ N} \cdot \text{cm}$; $\theta_x = 76,4^\circ$, $\theta_y = 13,56^\circ$, $\theta_z = 90,0^\circ$.
 3.76 $M = 350 \text{ N} \cdot \text{m}$; $\theta_x = 33,1^\circ$, $\theta_y = 64,8^\circ$, $\theta_z = 69,9^\circ$.
 3.78 (a) 1.724 N \cdot m \downarrow . (b) 958 N \cdot m \downarrow .
 *3.79 (a) $F_B = 90 \text{ N} \leftarrow$; 1.125 N \cdot cm \uparrow .
 (b) $F_C = 112,5 \text{ N} \downarrow$; $F_D = 112,5 \text{ N} \uparrow$.
 3.81 $F_B = 100,0 \text{ N} \searrow 30,0^\circ$; $F_C = 140,0 \text{ N} \nearrow 30,0^\circ$.
 *3.83 $F_A = 422,1 \text{ N} \swarrow 60,0^\circ$; $F_C = 703,4 \text{ N} \nwarrow 60,0^\circ$.
 *3.84 (a) $F = (270 \text{ N})k$; $M = (94,5 \text{ N} \cdot \text{m})j$.
 (b) $F = (270 \text{ N})k$; 0,35 m de A ao longo de AB. (c) 104,9 N.
 3.85 (a) $F = 800 \text{ N} \downarrow$; $d = 3,00 \text{ m}$. (b) $F = 800 \text{ N} \downarrow$; $d = 0$.
 3.86 (a) $F_A = 110,0 \text{ N} \nearrow 20,0^\circ$; $M_A = 3,25 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 (b) $F_E = 110,0 \text{ N} \nearrow 20,0^\circ$; 31,5 mm abaixo de A.
 *3.88 (a) 45 N; 14,03 cm à esquerda de B. (b) 77,0° ou -13,03°.
 *3.90 $F = -(1,215 \text{ N})i$; $M = (72,9 \text{ N} \cdot \text{m})j - (121,5 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
 3.91 $F = (36,0 \text{ N})i - (288 \text{ N})j + (144,0 \text{ N})k$;
 $M = (1,080 \text{ N} \cdot \text{m})i - (270 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
 3.92 $F = -(18,00 \text{ N})i - (336 \text{ N})j + (144,0 \text{ N})k$;
 $M = (1,080 \text{ N} \cdot \text{m})i + (135,0 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
 *3.93 $F = (8,8 \text{ N})i + (167,2 \text{ N})j - (105,6 \text{ N})k$;
 $M = (87,12 \text{ N} \cdot \text{m})i + (77,88 \text{ N} \cdot \text{m})j + (130,57 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
 3.95 $F = (270 \text{ N})i - (90,0 \text{ N})j + (135,0 \text{ N})k$;
 $M = (88,4 \text{ N} \cdot \text{m})i + (97,2 \text{ N} \cdot \text{m})j - (42,0 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
 3.96 (a) $(-2,40 \text{ N})j$. (b) $x = -16,89 \text{ mm}$, $z = -24,5 \text{ mm}$.
 *3.98 (a) Carregamento a: $R = 1.350 \text{ N} \downarrow$; $M = 675 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 Carregamento b: $R = 1.350 \text{ N} \downarrow$; $M = 670,5 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
 Carregamento c: $R = 1.350 \text{ N} \downarrow$; $M = 670,5 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 Carregamento d: $R = 900 \text{ N} \uparrow$; $M = 670,5 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 Carregamento e: $R = 1.350 \text{ N} \downarrow$; $M = 135 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
 Carregamento f: $R = 1.350 \text{ N} \downarrow$; $M = 540 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 Carregamento g: $R = 2.250 \text{ N} \downarrow$; $M = 675 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 Carregamento h: $R = 1.350 \text{ N} \downarrow$; $M = 670,5 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 (b) Carregamentos c e h.
 *3.99 Carregamento f.
 *3.100 (a) $R = 1.350 \text{ N} \downarrow$; 0,45 m. (b) $R = 900 \text{ N} \uparrow$; 0,675 m.
 (c) $R = 1.350 \text{ N} \downarrow$; 0,1 m.
 3.101 Sistema força-binário em E.
 3.104 (a) 2,61 m à direita de A. (b) 1,493 m.
 3.105 $R = 362 \text{ N} \swarrow 81,9^\circ$; $M = 327 \text{ N} \cdot \text{m}$.

- *3.106 (a) $R = 204,3 \text{ N}$ \sphericalangle $65,4^\circ$.
 (b) 11,58 cm à esquerda de B e 25,23 cm abaixo de B.
- 3.108 (a) $R = 18,61 \text{ kN}$ \sphericalangle $55,2^\circ$; 1,014 mm à esquerda de EF. (b) $55,9^\circ$.
- 3.109 (a) $22,2^\circ$. (b) $R = 18,98 \text{ kN}$ \sphericalangle $67,8^\circ$; 3,28 mm à esquerda de EF.
- 3.110 773 N \sphericalangle $79,0^\circ$; 9,54 m à direita de A.
- *3.111 (a) $6,62 \text{ N}$ \sphericalangle $55,6^\circ$. (b) 47,8 cm à esquerda de B.
 (c) 3,48 cm acima e à esquerda de A.
- 3.113 350 N \sphericalangle $21,4^\circ$; 92,6 mm à esquerda de B e 27,4 mm à direita de F.
- 3.114 (a) $R = F$ \sphericalangle $\text{tg}^{-1}(a^2/2bx)$;
 $M = 2Fb^2(x - x^3/a^2)/\sqrt{a^4 + 4b^2x^2}$ \uparrow . (b) 369 mm.
- *3.115 $R = -(31,5 \text{ N})i - (36 \text{ N})j - (18 \text{ N})k$;
 $M = -(135 \text{ N} \cdot \text{cm})i + (118,1 \text{ N} \cdot \text{cm})j + (84,4 \text{ N} \cdot \text{cm})k$.
- 3.116 $R = -(840 \text{ N})j - (679 \text{ N})k$;
 $M = (4,50 \text{ N} \cdot \text{m})i + (656 \text{ N} \cdot \text{m})j - (440 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
- 3.117 $A = (8 \text{ N})i - (160 \text{ N})j + (10 \text{ N})k$;
 $B = -(48 \text{ N})i + (160 \text{ N})j + (10 \text{ N})k$.
- *3.119 (a) $53,1^\circ$. (b) $R = (36 \text{ N})j + (4,5 \text{ N})k$;
 $M = -(2.160 \text{ N} \cdot \text{cm})i + (4.050 \text{ N} \cdot \text{cm})k$.
- *3.120 (a) $R = (38,97 \text{ N})j$;
 $M = (6,19 \text{ N} \cdot \text{m})i + (5,06 \text{ N} \cdot \text{m})j + (8,76 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
 (b) Horário.
- 3.121 $\vec{R} = (13,64 \text{ N})i - (41,3 \text{ N})j - (6,36 \text{ N})k$;
 $M = (10,82 \text{ N} \cdot \text{m})i - (2,55 \text{ N} \cdot \text{m})j - (10,03 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
- 3.122 $R = -(40 \text{ N})i + (280 \text{ N})j - (100 \text{ N})k$;
 $M = -(135 \text{ N} \cdot \text{m})i + (205 \text{ N} \cdot \text{m})j + (741 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
- *3.123 $1.057,5 \text{ N}$; $x = 2,31 \text{ m}$, $z = 2,73 \text{ m}$.
- *3.124 $x = 2,11 \text{ m}$, $z = 1,07 \text{ m}$.
- 3.125 3.400 kN \downarrow ; $x = 30,4 \text{ m}$, $z = 14,39 \text{ m}$.
- 3.126 $a = 19,48 \text{ m}$; $b = 17,47 \text{ m}$.
- 3.129 (a) P ; $\theta_x = 90^\circ$, $\theta_y = 90^\circ$, $\theta_z = -180^\circ$. (b) 3a. (c) O eixo do torsor é paralelo ao eixo z em $x = 0$, $y = a$.
- 3.131 (a) $-(21 \text{ N})j$. (b) 0,571 m. (c) O eixo do torsor é paralelo ao eixo y em $x = 0$, $z = 41,7 \text{ mm}$.
- *3.133 (a) $-(94,5 \text{ N})j - (90 \text{ N})k$. (b) 47,75 cm. (c) $x = 52,75 \text{ cm}$, $z = -18,58 \text{ cm}$.
- 3.135 (a) $3P(2i - 20j - k)/25$. (b) $-0,0988a$. (c) $x = 2,00a$, $z = -1,990a$.
- *3.137 $R = (18 \text{ N})i + (27 \text{ N})j - (9 \text{ N})k$; $p = 0,368 \text{ m}$; $y = -1,104 \text{ m}$,
 $z = -0,309 \text{ m}$.
- 3.138 $A = (M/b)i + R(1 + a/b)k$; $B = -(M/b)i - (aR/b)k$.
- 3.142 (a) $F = 360 \text{ N}$ \sphericalangle $50,0^\circ$; $M = 230 \text{ N} \cdot \text{m}$ \uparrow .
 (b) $F_A = 253 \text{ N}$ \downarrow ; $F_D = 232 \text{ N}$ \sphericalangle $5,52^\circ$.
- 3.144 (a) $-(600 \text{ N})k$; $d = 90 \text{ mm}$ abaixo de ED.
 (b) $-(600 \text{ N})k$; $d = 90 \text{ mm}$ acima de ED.
- 3.145 (a) $196,2 \text{ N} \cdot \text{m}$ \downarrow . (b) $199,0 \text{ N}$ \sphericalangle $59,5^\circ$.
- *3.147 $1.273,5 \text{ N}$.
- *3.149 $R = (37,8 \text{ N})i - (86,4 \text{ N})j - (14,4 \text{ N})k$;
 $M = (96,66 \text{ N} \cdot \text{m})i + (76,68 \text{ N} \cdot \text{m})j - (88,02 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
- 3.150 (a) $12,39 \text{ N} \cdot \text{m}$ \downarrow . (b) $12,39 \text{ N} \cdot \text{m}$ \downarrow . (c) $12,39 \text{ N} \cdot \text{m}$ \downarrow .
- *3.151 $833,4 \text{ N}$ \sphericalangle $11,84^\circ$; 58,25 cm à esquerda da linha de centro vertical do motor.
- *3.152 $\phi = 24,6^\circ$; $d = 86,5 \text{ cm}$.
- (b) $A = 10,0 \text{ N}$ \downarrow ; $B = 140,0 \text{ N}$ \uparrow .
- 4.6 $40,0 \text{ mm}$.
- 4.9 $2,32 \text{ kg} \leq m_A \leq 266 \text{ kg}$.
- 4.10 $140,0 \text{ N} \leq T_C \leq 180,0 \text{ N}$.
- *4.13 $27 \text{ kN} \leq P \leq 331 \text{ kN}$.
- *4.14 $2,5 \text{ cm} \leq a \leq 12,5 \text{ cm}$.
- 4.15 (a) $28,0 \text{ N}$ \sphericalangle $60,0^\circ$. (b) $28,2 \text{ N}$ \sphericalangle $6,62^\circ$.
- 4.16 (a) 300 N . (b) 584 N \sphericalangle $77,5^\circ$.
- *4.17 (a) $A = 270 \text{ N}$ \uparrow ; $C = 769 \text{ N}$ \sphericalangle $20,6^\circ$.
 (b) $A = 438 \text{ N}$ \sphericalangle $60,0^\circ$; $C = 1.013 \text{ N}$ \sphericalangle $22,0^\circ$.
- *4.18 (a) $A = 180 \text{ N}$ \sphericalangle 30° ; $B = 160 \text{ N}$ \sphericalangle 30° .
 (b) $A = 520 \text{ N}$ \sphericalangle $12,55^\circ$; $B = 586 \text{ N}$ \sphericalangle $30,0^\circ$.
- 4.21 (a) 312 N \downarrow . (b) 859 N \sphericalangle $21,3^\circ$.
- 4.22 932 N .
- *4.23 (a) $A = 214 \text{ N}$ \rightarrow ; $B = 191 \text{ N}$ \sphericalangle $28,1^\circ$.
 (b) $A = 302 \text{ N}$ \sphericalangle $45,0^\circ$; $B = 209 \text{ N}$ \sphericalangle $36,3^\circ$.
- 4.24 (a) $A = 232 \text{ N}$ \sphericalangle $22,8^\circ$; $B = 169 \text{ N}$ \leftarrow .
 (b) $A = 228 \text{ N}$ \sphericalangle $20,2^\circ$; $B = 238,5 \text{ N}$ \sphericalangle $45,0^\circ$.
- 4.27 (a) $A = 37,3 \text{ N}$ \sphericalangle $58,0^\circ$; $E = 140,5 \text{ N}$ \sphericalangle $60,0^\circ$.
 (b) $A = 0$; $E = 127,3 \text{ N}$ \sphericalangle $45,0^\circ$.
- 4.28 (a) 477 N . (b) 715 N \sphericalangle $60,5^\circ$.
- 4.29 $T = 128,4 \text{ N}$; $A = 145,8 \text{ N}$ \sphericalangle $81,0^\circ$.
- 4.30 $T = 404 \text{ N}$; $A = 304 \text{ N}$ \sphericalangle $86,9^\circ$.
- *4.31 $T = 90 \text{ N}$; $C = 100,8 \text{ N}$ \sphericalangle $26,6^\circ$.
- 4.33 (a) $1,305P$ \sphericalangle $40,0^\circ$. (b) $1,013P$ \sphericalangle $9,14^\circ$.
- *4.34 (a) 130 N . (b) 252 N \sphericalangle $2,05^\circ$.
- 4.35 $T = 2P/3$; $C = 0,577P$ \rightarrow .
- *4.37 $T_{BE} = 2.584 \text{ N}$; $T_{CF} = 768,4 \text{ N}$; $D = 3.000 \text{ N}$ \leftarrow .
- 4.38 (a) $17,68 \text{ N}$.
 (b) $N_A = 24,1 \text{ N}$ \sphericalangle $45,0^\circ$; $N_D = 24,1 \text{ N}$ \sphericalangle $45,0^\circ$.
- 4.39 (a) 0° . (b) $12,50 \text{ N}$.
 (c) $N_A = 15,31 \text{ N}$ \sphericalangle $45,0^\circ$; $N_D = 15,31 \text{ N}$ \sphericalangle $45,0^\circ$.
- 4.41 (a) $N_B = 2,77 \text{ N}$ \uparrow ; $N_C = 3,70 \text{ N}$ \sphericalangle $39,8^\circ$.
 (b) $5,26 \text{ N}$ \sphericalangle $77,3^\circ$.
- 4.42 (a) $6,46 \text{ N}$. (b) $N_B = 4,47 \text{ N}$ \uparrow ; $N_C = 5,98 \text{ N}$ \sphericalangle $39,8^\circ$.
- *4.43 $A = D = 0$; $B = 868 \text{ N}$ \leftarrow ; $C = 126 \text{ N}$ \rightarrow .
- *4.45 (a) $A = 90 \text{ N}$ \uparrow ; $M_A = 40,5 \text{ N} \cdot \text{m}$ \uparrow .
 (b) $A = 127,4 \text{ N}$ \sphericalangle $45,0^\circ$; $M_A = 40,5 \text{ N} \cdot \text{m}$ \uparrow .
 (c) $A = 180 \text{ N}$ \uparrow ; $M_A = 81 \text{ N} \cdot \text{m}$ \uparrow .
- 4.46 $C = 33,9 \text{ N}$ \sphericalangle $45,0^\circ$; $M_C = 0,120 \text{ N} \cdot \text{m}$ \uparrow .
- 4.47 $C = 35,8 \text{ N}$ \sphericalangle $26,6^\circ$; $M_C = 0,800 \text{ N} \cdot \text{m}$ \uparrow .
- *4.48 $T_{\text{máx.}} = 1.998 \text{ N}$; $T_{\text{mín.}} = 1.561,5 \text{ N}$.
- 4.49 (a) $A = 14,72 \text{ N}$ \uparrow ; $M_A = 3,43 \text{ N} \cdot \text{m}$ \uparrow .
 (b) $A = 8,72 \text{ N}$ \uparrow ; $M_A = 1,034 \text{ N} \cdot \text{m}$ \uparrow .
- 4.50 $2,33 \text{ N} \leq F_E \leq 14,83 \text{ N}$.
- 4.53 (a) $\text{sen}^{-1}(2M/Wl)$. (b) $22,0^\circ$.
- 4.54 (a) $W/2(1 - \text{tg } \theta)$. (b) $39,8^\circ$.
- 4.55 (a) $\text{tg}^{-1}(2P/mg)$. (b) $63,9^\circ$.
- 4.56 (a) $\text{sen } \theta + \cos \theta = M/Pl$. (b) $17,11^\circ$; $72,9^\circ$.
- 4.57 (a) $2 \text{ sen }^{-1}[kl/\sqrt{2}(kl - P)]$. (b) $141,1^\circ$.
- 4.59 (a) $\text{tg } \theta - \text{sen } \theta = W/kl$. (b) $58,0^\circ$.
- 4.61 (1) Completamente vinculada; determinada; em equilíbrio; $A = 116,6 \text{ N}$ \sphericalangle $59,0^\circ$, $B = 60,0 \text{ N}$ \leftarrow .
 (2) Impropropriamente vinculada; indeterminada; não está em equilíbrio.
 (3) Parcialmente vinculada; determinada; em equilíbrio; $A = C = 50 \text{ N}$ \uparrow .

CAPÍTULO 4

- 4.1 (a) $12,13 \text{ kN}$ \uparrow . (b) $16,81 \text{ kN}$ \uparrow .
- 4.2 (a) $1,182 \text{ kN}$ \downarrow . (b) $2,49 \text{ kN}$ \uparrow .
- *4.3 (a) 3.754 N \uparrow . (b) 4.121 N \uparrow .
- *4.4 (a) 3.381 N \uparrow . (b) 3.932 N \uparrow .
- 4.5 (a) $A = 20,0 \text{ N}$ \downarrow ; $B = 150,0 \text{ N}$ \uparrow .

- (4) Completamente vinculada; determinada; em equilíbrio; $A = 50 \text{ N} \uparrow$, $B = 78,1 \text{ N} \searrow 39,8^\circ$, $C = 60 \text{ N} \rightarrow$.
- (5) Completamente vinculada; indeterminada; em equilíbrio; $A_y = 50 \text{ N} \uparrow$.
- (6) Completamente vinculada; indeterminada; em equilíbrio; $A_x = 60 \text{ N} \rightarrow$, $B_x = 60 \text{ N} \leftarrow$.
- (7) Completamente vinculada; determinada; em equilíbrio; $A = C = 50 \text{ N} \uparrow$.
- (8) ImproPRIAMENTE vinculada; indeterminada; não está em equilíbrio.
- *4.63 $P = 126 \text{ N}$; $A = 157,5 \text{ N} \searrow 36,9^\circ$.
- *4.64 $a \geq 5,77 \text{ cm}$.
- 4.65 (a) $312 \text{ N} \downarrow$. (b) $859 \text{ N} \searrow 21,3^\circ$.
- 4.66 932 N .
- 4.69 $C = 270 \text{ N} \searrow 56,3^\circ$; $D = 167,7 \text{ N} \swarrow 26,6^\circ$.
- 4.70 $A = 276 \text{ N} \swarrow 45,0^\circ$; $C = 379 \text{ N} \searrow 59,0^\circ$.
- 4.71 $215 \text{ N} \searrow 80,8^\circ$.
- 4.72 $189,2 \text{ N} \searrow 80,9^\circ$.
- *4.73 (a) 824 N . (b) $799 \text{ N} \searrow 32,3^\circ$.
- *4.74 (a) 1.648 N . (b) $1.351 \text{ N} \searrow 1,921^\circ$.
- 4.76 $77,5 \text{ N} \searrow 30,0^\circ$.
- 4.77 (a) $11,82 \text{ kN} \searrow 75,0^\circ$. (b) $10,68 \text{ kN} \swarrow 73,4^\circ$.
- 4.79 (a) $45,4 \text{ N} \swarrow 45,0^\circ$. (b) $387 \text{ N} \searrow 85,2^\circ$.
- *4.81 $T = 5.400 \text{ N}$; $B = 6.750 \text{ N} \swarrow 36,9^\circ$.
- 4.82 $T = 544 \text{ N}$; $C = 865 \text{ N} \swarrow 33,7^\circ$.
- *4.83 (a) $A = 180 \text{ N} \searrow 30^\circ$; $B = 180 \text{ N} \searrow 30^\circ$.
(b) $A = 520 \text{ N} \swarrow 12,55^\circ$; $B = 586 \text{ N} \searrow 30,0^\circ$.
- 4.84 (a) 477 N . (b) $715 \text{ N} \searrow 60,5^\circ$.
- 4.85 (a) $1,743P \searrow 55,0^\circ$. (b) $1,088P \swarrow 23,2^\circ$.
- 4.86 (a) $1,305P \searrow 40,0^\circ$. (b) $1,013P \searrow 9,14^\circ$.
- 4.87 $\sqrt{(S^2 - L^2)/3}$.
- 4.88 (a) $129,1 \text{ mm}$. (b) $17,10 \text{ N}$. (c) $8,71 \text{ N} \leftarrow$.
- 4.90 (a) $43,0^\circ$. (b) $A = 45,7 \text{ N} \leftarrow$; $B = 108,2 \text{ N} \searrow 65,0^\circ$.
- 4.91 $34,5^\circ$.
- 4.94 (a) $18,43^\circ$. (b) $mg/5$.
- 4.95 (a) $23,5^\circ$. (b) $136,3 \text{ mm}$.
- 4.96 $C = (964 \text{ N})j - (843 \text{ N})k$; $D = -(3.130 \text{ N})j + (482 \text{ N})k$.
- 4.97 $C = (189,3 \text{ N})j - (482 \text{ N})k$; $D = -(4.160 \text{ N})j + (964 \text{ N})k$.
- *4.99 (a) 153 N . (b) $C = -(18,9 \text{ N})j - (122,4 \text{ N})k$;
 $D = (81,9 \text{ N})j - (183,6 \text{ N})k$.
- *4.100 (a) $92,5 \text{ N}$. (b) $C = -(10,4 \text{ N})j - (95,2 \text{ N})k$;
 $D = (44,9 \text{ N})j - (160,4 \text{ N})k$.
- 4.102 $T_A = 92,0 \text{ N}$; $T_B = T_C = 76,6 \text{ N}$.
- 4.103 $m = 1,786 \text{ kg}$; $x = 200 \text{ mm}$, $z = 100 \text{ mm}$.
- 4.104 (a) $A_y = 2,95 \text{ N} \uparrow$; $B_y = C_y = 0,684 \text{ N} \uparrow$. (b) $54,1^\circ$.
- *4.105 $T_A = 22,5 \text{ N}$; $T_C = 14,3 \text{ N}$; $T_D = 98,1 \text{ N}$.
- *4.106 (a) $0,48 \text{ m}$. (b) $T_A = 22,5 \text{ N}$; $T_C = 0$; $T_D = 112,5 \text{ N}$.
- 4.107 $T_A = 0,211W$; $T_B = 0,366W$; $T_C = 0,423W$.
- *4.110 (a) 27 N . (b) 0 . (c) 27 N .
- 4.111 (a) $T_A = 24,5 \text{ N}$; $T_B = T_C = 36,8 \text{ N}$. (b) $150,0 \text{ mm}$.
- 4.112 $T_{BD} = T_{BE} = 707 \text{ N}$; $C = -(200 \text{ N})j + (866 \text{ N})k$.
- 4.113 $T_{BD} = T_{BE} = 5,24 \text{ kN}$; $A = (5,71 \text{ kN})i - (2,67 \text{ kN})j$.
- *4.114 $T_{AD} = 2.187 \text{ N}$; $T_{BE} = 3.024 \text{ N}$;
 $C = (4.536 \text{ N})i - (216 \text{ N})j + (324 \text{ N})k$.
- *4.116 $T_{BD} = 1.620 \text{ N}$; $T_{BE} = 810 \text{ N}$;
 $A = -(405 \text{ N})i + (2.430 \text{ N})j + (270 \text{ N})k$.
- 4.118 $T_{EC} = 1,758 \text{ kN}$; $T_{ICFH} = 2,06 \text{ kN}$;
 $D = (4.610 \text{ N})i - (529 \text{ N})j - (36,4 \text{ N})k$.
- 4.119 $T_{EC} = 1,507 \text{ kN}$; $T_{ICFH} = 1,767 \text{ kN}$;
 $D = (3.950 \text{ N})i - (373 \text{ N})j - (31,2 \text{ N})k$.
- 4.120 (a) 374 N . (b) $E = (104,9 \text{ N})i - (152,3 \text{ N})k$;
 $F = (115,1 \text{ N})i + (176,0 \text{ N})j + (482 \text{ N})k$.
- 4.122 (a) $97,1 \text{ N}$. (b) $A = -(23,5 \text{ N})i + (63,8 \text{ N})j - (7,35 \text{ N})k$;
 $B = (9,81 \text{ N})j + (66,7 \text{ N})k$.
- *4.124 (a) $41,33 \text{ N}$. (b) $A = (31,20 \text{ N})j - (4,98 \text{ N})k$;
 $B = -(8,0 \text{ N})i + (4,78 \text{ N})j + (23,64 \text{ N})k$.
- *4.125 (a) $102,67 \text{ N}$. (b) $A = (52,80 \text{ N})j - (4,98 \text{ N})k$;
 $B = -(5,60 \text{ N})i - (81,60 \text{ N})j + (23,65 \text{ N})k$.
- *4.126 (a) $450,5 \text{ N}$. (b) $A = (149,6 \text{ N})i + (493,3 \text{ N})j + (185,0 \text{ N})k$;
 $B = (148,0 \text{ N})j + (242,5 \text{ N})k$.
- *4.127 (a) $812,3 \text{ N}$. (b) $A = -(256,5 \text{ N})i + (493,3 \text{ N})j - (49,3 \text{ N})k$;
 $B = (148,0 \text{ N})j + (476,8 \text{ N})k$.
- 4.128 (a) $22,4 \text{ N}$. (b) $D = (6,00 \text{ N})k$;
 $M_D = (0,1320 \text{ N} \cdot \text{m})i + (1,008 \text{ N} \cdot \text{m})j + (0,0896 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
- 4.129 $T_{CF} = 333 \text{ N}$; $T_{DE} = 750 \text{ N}$; $A = (267 \text{ N})i + (450 \text{ N})k$;
 $M_A = -(54,0 \text{ N} \cdot \text{m})i$.
- 4.130 (a) 374 N . (b) $E = (220 \text{ N})i + (176,0 \text{ N})j + (330 \text{ N})k$;
 $M_E = -(62,7 \text{ N} \cdot \text{m})i + (14,96 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
- *4.131 (a) $41,33 \text{ N}$. (b) $B = -(8,0' \text{ N})i + (36,0 \text{ N})j + (18,7 \text{ N})k$;
 $M_B = -(373,5 \text{ N} \cdot \text{cm})j - (2.340 \text{ N} \cdot \text{cm})k$.
- 4.132 $T_{DI} = 164,8 \text{ N}$; $T_{EH} = 933 \text{ N}$; $T_{FC} = 187,8 \text{ N}$;
 $A = (1.094 \text{ N})i + (98,7 \text{ N})j - (21,3 \text{ N})k$.
- 4.133 $T_{DI} = 180,6 \text{ N}$; $T_{EH} = 960 \text{ N}$; $T_{FC} = 100,9 \text{ N}$;
 $A = (1.067 \text{ N})i + (110,4 \text{ N})j - (11,45 \text{ N})k$.
- 4.136 $B = (75,0 \text{ N})k$; $C = +(36,0 \text{ N})j - (20,0 \text{ N})k$;
 $D = -(36,0 \text{ N})j + (5,00 \text{ N})k$.
- 4.138 $A = (120,0 \text{ N})j - (150,0 \text{ N})k$; $B = (180,0 \text{ N})i + (150 \text{ N})k$;
 $G = -(180,0 \text{ N})i + (120,0 \text{ N})j$.
- *4.140 (a) $(14,4 \text{ N})i + (19,2 \text{ N})j$.
(b) $A = -(14,4 \text{ N})i + (25,8 \text{ N})j - (13,5 \text{ N})k$;
 $B = (13,5 \text{ N})k$.
- *4.141 (a) $7,09 \text{ N}$. (b) $A = -(4,39 \text{ N})i + (19,8 \text{ N})j - (1,35 \text{ N})k$;
 $N_B = (3,6 \text{ N})j + (2,7 \text{ N})k$.
- *4.142 $131,13 \text{ N}$.
- *4.144 $39,3 \text{ N}$.
- *4.145 $40,7 \text{ N}$.
- 4.146 853 N .
- 4.148 $(112,5 \text{ N})j$.
- 4.149 (a) $x = 2,00 \text{ m}$, $y = 4,00 \text{ m}$. (b) $131,6 \text{ N}$.
- *4.151 (a) $x = 0$, $y = 73,95 \text{ cm}$, $z = 62,5 \text{ cm}$. (b) $N_D = (40,41 \text{ N})i$.
- *4.152 (a) $D = 90 \text{ N} \downarrow$; $M_D = 27 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
(b) $D = 45 \text{ N} \downarrow$; $M_D = 40,5 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
- 4.154 $A = 244 \text{ N} \rightarrow$; $D = 344 \text{ N} \searrow 22,2^\circ$.
- *4.156 (a) $1.462,5 \text{ N} \uparrow$. (b) $5.287,5 \text{ N} \uparrow$.
- *4.157 $C = 31,82 \text{ N} \searrow 45,0^\circ$; $M_C = 483,75 \text{ N} \cdot \text{cm} \downarrow$.
- *4.158 $C = 31,82 \text{ N} \searrow 45,0^\circ$; $M_C = 506,25 \text{ N} \cdot \text{cm} \downarrow$.
- 4.159 (a) 462 N . (b) $C = -(336 \text{ N})j + (467 \text{ N})k$;
 $D = (505 \text{ N})j - (66,7 \text{ N})k$.
- 4.161 $T_{BE} = 975 \text{ N}$; $T_{CF} = 600 \text{ N}$; $T_{DC} = 625 \text{ N}$;
 $A = (2.100 \text{ N})i + (175,0 \text{ N})j - (375 \text{ N})k$.
- 4.163 (a) 400 mm . (b) 267 mm .

CAPÍTULO 5

- *5.1 $\bar{X} = 14 \text{ cm}$, $\bar{Y} = 16,5 \text{ cm}$.
- 5.2 $\bar{X} = 96,4 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 34,7 \text{ mm}$.
- 5.4 $\bar{X} = 1,421 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 12,42 \text{ mm}$.

- 5.5 $\bar{X} = 49,4 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 93,8 \text{ mm}$.
- *5.6 $\bar{X} = 1,80 \text{ cm}$, $\bar{Y} = 8,50 \text{ cm}$.
- 5.7 $\bar{X} = \bar{Y} = 31,1 \text{ mm}$.
- 5.9 1,340.
- 5.10 $\frac{r_1 + r_2}{\pi - 2\alpha} \cos \alpha$.
- *5.11 $\bar{X} = 0$, $\bar{Y} = 1,58 \text{ cm}$.
- 5.12 $\bar{X} = -15,83 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 3,34 \text{ mm}$.
- *5.15 $\bar{X} = 14,88 \text{ cm}$, $\bar{Y} = 36,03 \text{ cm}$.
- *5.16 $\bar{X} = 8,03 \text{ cm}$, $\bar{Y} = 8,28 \text{ cm}$.
- 5.17 $(Q_x)_1 = 25,0 \times 10^3 \text{ mm}^3$; $(Q_x)_2 = -25,0 \times 10^3 \text{ mm}^3$.
- 5.18 $(Q_x)_1 = 1,393 \times 10^6 \text{ mm}^3$; $(Q_x)_2 = -1,393 \times 10^6 \text{ mm}^3$.
- *5.20 518,8 N.
- *5.21 $\bar{X} = 11,68 \text{ cm}$, $\bar{Y} = 16,68 \text{ cm}$.
- 5.23 $\bar{X} = 1,441 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 12,72 \text{ mm}$.
- 5.25 (a) 1,470 N. (b) 6,13 N \sphericalangle 83,1°.
- 5.26 63,6°.
- *5.28 30 cm.
- 5.29 (a) 0,472a. (b) 0,387a.
- 5.31 $\bar{x} = a/3$, $\bar{y} = 2h/3$.
- 5.32 $\bar{x} = 2a/5$, $\bar{y} = 4h/7$.
- 5.33 $\bar{x} = 16a/35$, $\bar{y} = 16h/35$.
- 5.35 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{2}{3} R \frac{3 - \sin^2 \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} \sin \alpha$.
- 5.37 $\bar{x} = 39a/50$, $\bar{y} = -39b/175$.
- 5.38 $\bar{x} = a/4$, $\bar{y} = 3b/10$.
- 5.39 $\bar{x} = 5L/4$, $\bar{y} = 33a/40$.
- 5.41 $\bar{x} = 0,546a$, $\bar{y} = 0,423b$.
- 5.43 $-2r\sqrt{2}/3\pi$.
- 5.44 $2a/5$.
- 5.45 $\bar{x} = -9,27a$, $\bar{y} = 3,09a$.
- 5.46 $\bar{x} = 0,363L$, $\bar{y} = 0,1653L$.
- 5.47 (a) $V = 2,21 \times 10^6 \text{ mm}^3$; $A = 89,8 \times 10^3 \text{ mm}^2$.
(b) $V = 4,36 \times 10^6 \text{ mm}^3$; $A = 202 \times 10^3 \text{ mm}^2$.
- 5.48 (a) $V = 24,0 \times 10^3 \text{ mm}^3$; $A = 4,50 \times 10^3 \text{ mm}^2$.
(b) $V = 26,5 \times 10^3 \text{ mm}^3$; $A = 5,12 \times 10^3 \text{ mm}^2$.
- 5.50 (a) $\pi^2 a^2 b$. (b) $2\pi^2 a^2 b$. (c) $2\pi a^2 b/3$.
- *5.51 $V = 1.906 \text{ cm}^3$; $A = 3.050 \text{ cm}^2$.
- 5.53 720 mm^3 .
- 5.54 (a) $3,24 \times 10^3 \text{ mm}^2$. (b) $2,74 \times 10^3 \text{ mm}^2$.
(c) $2,80 \times 10^3 \text{ mm}^2$.
- 5.56 0,96 N.
- 5.57 2,21 kN.
- *5.59 2 N.
- 5.60 1.013 mm^2 .
- *5.61 (a) $R = 8.100 \text{ N}$, 3,24 m à direita de A.
(b) $A = 8.100 \text{ N} \uparrow$; $M_A = 26,24 \text{ kN} \cdot \text{m} \searrow$.
- 5.62 (a) $R = 3.600 \text{ N}$, 3,75 m à direita de A.
(b) $A = 1.350 \text{ N} \uparrow$; $B = 2.250 \text{ N} \uparrow$.
- *5.63 $A = 4.500 \text{ N} \uparrow$; $B = 3.600 \text{ N} \uparrow$.
- 5.65 $A = 34,0 \text{ N} \uparrow$; $M_A = 2,92 \text{ N} \cdot \text{m} \searrow$.
- 5.66 $A = 270 \text{ N} \uparrow$; $B = 720 \text{ N} \downarrow$.
- 5.67 $A = 3,33 \text{ kN} \uparrow$; $M_A = 6,33 \text{ kN} \cdot \text{m} \searrow$.
- *5.69 (a) 0,48 m. (b) $A = B = 685 \text{ N} \uparrow$.
- 5.71 $B = 7,04 \text{ kN} \uparrow$; $C = 15,46 \text{ kN} \uparrow$.
- 5.72 (a) 3,19 kN/m \uparrow . (b) 1,375 kN \uparrow .
- 5.73 $w_A = 6,67 \text{ kN/m}$; $R_R = 29,0 \text{ kN}$.
- 5.75 (a) $H = 1.589 \text{ kN} \rightarrow$, $V = 5,93 \text{ MN} \uparrow$. (b) 10,48 m à direita de A.
(c) $R = 1.675 \text{ kN} \searrow 18,43^\circ$.
- *5.76 (a) $H = 45,5 \text{ kN} \rightarrow$, $V = 359,1 \text{ kN} \uparrow$. (b) 4,77 m à direita de A.
(c) $R = 60,9 \text{ kN} \searrow 41,6^\circ$.
- *5.77 2,5 m.
- *5.78 $T = 50 \text{ kN} \leftarrow$; $A = 97,2 \text{ kN} \leftarrow$.
- 5.80 4,75%.
- 5.82 43,5 kN $\searrow 30,0^\circ$.
- *5.83 $A = 2.533,5 \text{ N} \searrow 37,1^\circ$; $B = 4.563 \text{ N} \uparrow$.
- 5.85 1,110 m.
- 5.86 1,152 m.
- *5.87 $A = 3.600 \text{ N} \sphericalangle 41,8^\circ$; $D = 51 \text{ N} \rightarrow$.
- 5.89 (a) 42,1 N $\searrow 63,4^\circ$. (b) $R_H = 37,7 \text{ N} \downarrow$; $M_H = 0,452 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
- 5.90 (a) -1.118R. (b) 0,884.
- 5.91 $-(2h^2 - 3b^2)/2(4h - 3b)$.
- 5.92 $-2a(2h - b)/\pi(4h - 3b)$.
- 5.93 (a) 0,548L. (b) $2\sqrt{3}$.
- *5.94 6,1 cm.
- *5.95 1,87 cm.
- 5.96 64,2 mm.
- 5.97 19,51 mm.
- 5.100 $\bar{X} = 48,1 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 68,3 \text{ mm}$, $\bar{Z} = 75,8 \text{ mm}$.
- 5.101 $\bar{X} = 20,4 \text{ mm}$, $\bar{Y} = -4,55 \text{ mm}$, $\bar{Z} = 29,0 \text{ mm}$.
- *5.103 $\bar{X} = 11,35 \text{ cm}$, $\bar{Y} = 16,48 \text{ cm}$, $\bar{Z} = 15,0 \text{ cm}$.
- 5.104 $\bar{X} = 70,2 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 198,7 \text{ mm}$, $\bar{Z} = 0$.
- 5.106 $\bar{X} = 340 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 314 \text{ mm}$, $\bar{Z} = 283 \text{ mm}$.
- 5.107 $\bar{X} = 150,0 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 11,42 \text{ mm}$, $\bar{Z} = 119,4 \text{ mm}$.
- *5.108 $\bar{X} = 14,58 \text{ cm}$, $\bar{Y} = 12,88 \text{ cm}$, $\bar{Z} = 9,85 \text{ cm}$.
- *5.109 $\bar{X} = 0,92 \text{ m}$, $\bar{Y} = 0,16 \text{ m}$, $\bar{Z} = 0,90 \text{ m}$.
- 5.110 $\bar{X} = 0,525 \text{ m}$, $\bar{Y} = 1,241 \text{ m}$, $\bar{Z} = 0,406 \text{ m}$.
- 5.111 $\bar{X} = 0,610 \text{ m}$, $\bar{Y} = 2,70 \text{ m}$, $\bar{Z} = 0$.
- 5.113 $\bar{X} = \bar{Z} = 0$, $\bar{Y} = 10,51 \text{ mm}$ acima da base.
- 5.115 $\bar{X} = 274 \text{ mm}$, $\bar{Y} = -103,6 \text{ mm}$.
- 5.116 $\bar{x}_1 = 21a/88$; $\bar{x}_2 = 27a/40$.
- 5.117 $\bar{x}_1 = 21h/88$; $\bar{x}_2 = 27h/40$.
- 5.119 $\bar{x} = 5a/16$, $\bar{y} = \bar{z} = 0$.
- 5.121 $\bar{x} = h$, $\bar{y} = 0,869a$, $\bar{z} = 0$.
- 5.122 $\bar{x} = 1,297a$, $\bar{y} = \bar{z} = 0$.
- 5.123 $\bar{x} = \bar{z} = 0$, $\bar{y} = 0,374b$.
- 5.125 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \bar{z} = -R/2$.
- 5.127 $V = 9,50 \text{ m}^3$; $\bar{x} = 3,82 \text{ m}$.
- 5.129 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 5h/16$, $\bar{z} = -a/4$.
- *5.130 $\bar{X} = 18,05 \text{ cm}$, $\bar{Y} = 23,9 \text{ cm}$.
- 5.132 $\bar{X} = 19,27 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 26,6 \text{ mm}$.
- 5.134 0,739 m.
- 5.135 $V = \pi L^3/6$.
- *5.137 $B = 6.120 \text{ N} \uparrow$; $C = 10.620 \text{ N} \uparrow$.
- 5.139 (a) -0,402a. (b) 2/5 e 2/3.
- 5.140 $\bar{X} = 0,1452 \text{ m}$, $\bar{Y} = 0,396 \text{ m}$, $\bar{Z} = 0,370 \text{ m}$.
- 5.141 $\bar{x} = h/6$, $\bar{y} = \bar{z} = 0$.

CAPÍTULO 6

- 6.1 $F_{AB} = 125,0 \text{ N C}$; $F_{AC} = 260 \text{ N C}$; $F_{BC} = 100,0 \text{ N T}$.
- *6.2 $F_{AB} = 15,3 \text{ kN T}$; $F_{AC} = 18 \text{ kN T}$; $F_{BC} = 22,5 \text{ kN C}$.
- 6.4 $F_{AB} = 1,200 \text{ kN T}$; $F_{AC} = 3,36 \text{ kN C}$; $F_{AD} = 3,48 \text{ kN T}$;
 $F_{AB} = F_{CD} = 2,52 \text{ kN C}$.

- 7.138 (a) $a = 26,8$ m; $b = 20,4$ m. (b) 35,3 m.
 7.139 (a) $a = 20,1$ m; $b = 15,29$ m. (b) 26,5 m.
 *7.140 (a) Ponto C está 7,17 m à esquerda de B. (b) 64,89 N.
 *7.141 (a) Ponto C está 6,21 m à esquerda de B. (b) 42,98 N.
 7.143 (a) $1,326T_m/w$. (b) 12,72 km.
 7.146 (a) 0,338. (b) $\theta_B = 56,5^\circ$; $T_m = 0,755wL$.
 *7.147 (b) 51,75 kN; 18,9 kN · m.
 7.149 (a) 2,28 m. (b) $D_x = 13,67$ kN \rightarrow ; $D_y = 7,80$ kN \uparrow .
 (c) 15,94 kN.
 7.151 (Em BJ) $0,289Wr$ \uparrow .
 7.152 (Em BJ) $0,417Wr$ \uparrow .
 7.153 (Em CJ) $F = 625$ N \downarrow ; $V = 120,0$ N \leftarrow ; $M = 27,0$ N · m \uparrow .
 7.155 900 N; 675 N · m.
 *7.156 4.104 N · m, 1,35 m de A.
 *7.157 (a) 14,4 N. (b) 3 m.

CAPÍTULO 8

- 8.1 Bloco em movimento; $F = 193,2$ N \nearrow .
 8.2 Em equilíbrio; $F = 246$ N \nearrow .
 8.3 Em equilíbrio; $F = 3,05$ N \nearrow .
 *8.5 $6,94$ N $\leq P \leq 54,36$ N.
 *8.6 (a) 187,7 N. (b) 14,04°.
 8.7 (a) 50,5°. (b) 66,5°.
 8.9 (a) $0 \leq \theta \leq 54,9^\circ$. (b) $168,7^\circ \leq \theta \leq 180,0^\circ$.
 *8.11 (a) 324 N \leftarrow . (b) 180 N \leftarrow .
 *8.12 (a) 252 N \leftarrow . (b) 180 N \leftarrow .
 8.13 43,0°.
 8.15 (a) 141,3 N. (b) 117,7 N. (c) 50,5 N.
 8.17 $Wr\mu_s(1 + \mu_s)/(1 + \mu_s^2)$.
 8.18 (a) $0,360Wr$. (b) $0,422Wr$.
 *8.19 154,58 N · m.
 8.21 0,200.
 8.22 0,1835.
 8.23 (a) $4,62^\circ$ e $48,2^\circ$. (b) 0,526W e 0,374W.
 8.25 0,1865.
 8.27 0,283.
 *8.28 (a) 126,6 N \leftarrow . (b) 1,1 cm.
 8.30 $(\mu_s)_A = 0,1364$; $(\mu_s)_C = 0,1512$.
 8.31 $(\mu_s)_A = 0,1875$; $(\mu_s)_C = 0,1977$.
 8.32 (a) A placa está em equilíbrio.
 (b) A placa se move para baixo.
 8.34 (a) $W \leq 34,6$ N. (b) $17,82$ N $\leq W \leq 98,2$ N.
 8.35 (a) $W \leq 4,07$ N e $W \geq 86,4$ N. (b) $W \geq 246$ N.
 *8.36 $-52,7$ N $\leq P \leq 38,7$ N.
 8.37 $-12,31$ N $\leq P \leq 105,3$ N.
 8.39 37,9 N.
 *8.40 33,05 N · m \uparrow .
 8.42 0,1757.
 8.43 35,8°.
 8.45 1,268W.
 *8.46 (a) 22,14 N. (b) $C_x = 4,87$ N \leftarrow ; $C_y = 471,15$ N \uparrow .
 *8.47 (a) 45,77 N. (b) $C_x = 29,34$ N \rightarrow ; $C_y = 474,3$ N \uparrow .
 8.48 1,957 kN.
 8.49 2,13 kN.
 *8.52 11,09 kN \leftarrow .
 8.54 (a) 1,647 kN. (b) 1,647 kN.

- 8.55 (a) 789 N. (b) 1.100 N.
 *8.57 6,79 kN.
 8.58 (a) A cunha é forçada para cima, saindo de entre as placas.
 (b) A cunha permanecerá autobloqueada.
 8.59 305 N.
 *8.60 (b) 260 N \leftarrow .
 8.62 (a) 821 N \rightarrow . (b) A prancha irá deslizar.
 8.63 (a) 818 N \leftarrow . (b) A prancha não se move.
 8.64 0,384.
 8.67 14,45 N · m.
 *8.70 5,87 N · m.
 *8.71 4,06 N · m.
 8.72 15,31 N · m.
 8.73 4,14 N · m.
 8.74 14,48 N · m.
 8.75 0,0787.
 *8.76 408,6 N.
 *8.77 376,2 N.
 8.80 (a) 0,344. (b) 120,2 N.
 8.81 $T_{AB} = 290$ N; $T_{CD} = 310$ N; $T_{EF} = 331$ N.
 8.82 $T_{AB} = 310$ N; $T_{CD} = 290$ N; $T_{EF} = 272$ N.
 *8.83 (a) 5,30 kN. (b) 1,349°.
 8.84 253 N.
 8.85 250 N.
 *8.88 (a) 1,09 kN. (b) 0,82 kN.
 *8.89 24,88 cm.
 8.90 18,39 N.
 *8.91 1,72 N · m.
 8.95 13,80 N.
 *8.96 175 N.
 8.97 1,200 mm.
 8.98 42,7 N.
 *8.99 (a) 1,53 kN. (b) 1,26 kN.
 *8.101 (a) 0,329. (b) 2,67 voltas.
 *8.102 (a) 0,213. (b) 112,5 N.
 *8.103 $53,33$ N $\leq W_B \leq 152,1$ N.
 8.104 286 N $\leq P \leq 4,840$ N.
 8.107 40,1 N · m.
 8.108 28,6 N · m.
 *8.109 (a) 38,03 N · m. (b) 18,99 N · m.
 8.111 (a) 53,91 N. (b) 1,900.
 8.113 (a) 432 N · m. (b) 0,219.
 8.114 (a) 646 N. (b) 47,0 N.
 8.115 0,361.
 *8.116 (a) 105 N. (b) 428 N. (c) 310 N.
 8.118 (a) $1,847$ kg $\leq m_A \leq 34,7$ kg. (b) $2,81$ kg $\leq m_A \leq 22,8$ kg.
 8.119 (a) 5,55 kg. (b) 8,00 kg.
 8.120 (a) $2,28$ kg $\leq m_A \leq 28,1$ kg. (b) $3,46$ kg $\leq m_A \leq 18,49$ kg.
 8.121 (a) 7,79 kg. (b) 5,40 kg.
 *8.122 4,83 N.
 8.124 (a) 538 N · m \downarrow . (b) 1,142 kN \downarrow .
 8.125 (a) 538 N · m \uparrow . (b) 879 N \downarrow .
 8.126 0,350.
 8.127 0,266.
 8.130 81,7 N · m.
 *8.131 (a) 71,73 N · m. (b) 986 N.