Notas de Aula

Análise Funcional

Rodney Josué Biezuner [1]
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas (ICEx)
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Notas de aula do curso *Análise Funcional* do Programa
de Pós-Graduação em Matemática, ministrado no primeiro semestre de 2009.

6 de julho de 2009

[1] E-mail: rodney@mat.ufmg.br; homepage: http://www.mat.ufmg.br/∼rodney.

Sumário

Capítulo 1

Espaços Vetoriais Normados e Espaços de Banach

1.1 Definição

1.1 Definição. Seja E um espaço vetorial real. Uma **norma** em E é uma função $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\|x\| \geqslant 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0$ se e somente se $x = 0$;

(ii) (Homogeneidade) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in E$ vale
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \, ;$$

(iii) (Desigualdade Triangular) para todos $x, y \in E$ vale
$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \, .$$

Um espaço vetorial E munido de uma norma $\|\cdot\|$ é chamado um **espaço vetorial normado** e denotado $(E, \|\cdot\|)$.

1.2 Definição. Seja M um conjunto. Uma métrica em M é uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $d\,(x, y) \geqslant 0$ para todos $x, y \in M$ e $d\,(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;

(ii) (Desigualdade Triangular) para todos $x, y, z \in M$ vale
$$d\,(x, z) \leqslant d\,(x, y) + d\,(y, z) \, .$$

Um espaço vetorial normado torna-se naturalmente um espaço métrico com a métrica derivada da norma:
$$d\,(x, y) = \|x - y\| \, .$$

Desta forma, um espaço vetorial normado torna-se um espaço topológico com a topologia induzida pela métrica.

1.3 Proposição. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Então as funções soma de vetores $E \times E \longrightarrow E, (x, y) \mapsto x + y$, multiplicação de vetores por escalares $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E, (\alpha, x) \mapsto \alpha x$, e norma $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ são contínuas.*

1.4 Corolário. *Fixado $x_0 \in E$, a aplicação $x \mapsto x + x_0$ (translação) é um homeomorfismo. Fixado $\alpha \in \mathbb{R}$ não nulo, a aplicação $x \mapsto \alpha x$ (homotetia) é um homeomorfismo.*

Lembramos que um *espaço métrico completo* é um espaço métrico em que todas as sequências de Cauchy são convergentes, isto é, convergem para um elemento do próprio espaço.

1.5 Definição. Um espaço vetorial normado completo é chamado um **espaço de Banach**.

1.2 Exemplo 1: Os espaços $\ell^p(n)$

1.6 Definição. Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definimos o espaço $\ell^p(n)$ como sendo o espaço $\mathbb{R}^n$ dotado da norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \tag{1.1}$$

se $1 \leqslant p < \infty$, e

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| . \tag{1.2}$$

1.7 Proposição. *$\ell^p(n)$ é um espaço vetorial normado.*

Prova. As propriedades (i) e (ii) de uma norma na Definição 1.1 são claramente verificadas. Para provar a desigualdade triangular (que neste caso especial também recebe o nome de **desigualdade de Minkowski**)

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}, \tag{1.3}$$

recorremos à **desigualdade de Hölder** (que será demonstrada no final):

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_{p'} \quad \text{onde } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{1.4}$$

O número p' é chamado o **expoente conjugado** de p; observe que $p' = p/(p-1)$. De fato, escrevemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leqslant \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1} \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leqslant \|x\|_p \left\| \left(|x_1 + y_1|^{p-1}, \dots, |x_n + y_n|^{p-1} \right) \right\|_{\frac{p}{p-1}} + \|y\|_p \left\| \left(|x_1 + y_1|^{p-1}, \dots, |x_n + y_n|^{p-1} \right) \right\|_{\frac{p}{p-1}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1 - \frac{p-1}{p}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p .$$

A desigualdade de Hölder, por sua vez, segue da desigualdade mais geral

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leqslant \lambda a + (1 - \lambda) b \tag{1.5}$$

sempre que $a, b \geqslant 0$ e $0 < \lambda < 1$. Esta desigualdade pode ser provada da seguinte forma: se $b = 0$, ela é óbvia; se $b \neq 0$, divida a desigualdade por b e tome $t = a/b \geqslant 0$, de modo que provar a desigualdade torna-se equivalente a mostrar que a função $f(t) = t^\lambda - \lambda t$ é menor que ou igual a $1-\lambda$ para todo $t \geqslant 0$. E, de fato, como $f'(t) = \lambda\left(t^{\lambda-1} - 1\right)$, f é estritamente crescente para $0 \leqslant t < 1$ e estritamente decrescente para $t > 1$, logo f atinge o seu máximo em $t = 1$, onde f vale exatamente $1 - \lambda$. Tomando

$$a = \left|\frac{x_i}{\|x\|_p}\right|^p, \; b = \left|\frac{y_i}{\|y\|_{p'}}\right|^{p'} \text{ e } \lambda = \frac{1}{p},$$

para cada índice i, segue que

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_{p'}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'}\frac{|y_i|^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}}.$$

Daí, somando desde $i = 1$ até $i = n$, obtemos

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_{p'}} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'}\frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

■

1.8 Proposição. *$\ell^p(n)$ é um espaço de Banach.*

Prova. Para ver que $\ell^p(n)$ é completo, basta observar que uma sequência em $\ell^p(n)$ é de Cauchy se e somente se cada uma das sequências de coordenadas é de Cauchy e que, além disso, uma sequência em $\ell^p(n)$ é convergente se e somente se cada uma das sequências de coordenadas é de Cauchy. Outra maneira de ver que $\ell^p(n)$ é um espaço de Banach é lembrar que todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes e usar o fato bem conhecido que $\mathbb{R}^n$ com a norma usual é completo. ■

Observe que $\ell^2(n)$ é o espaço $\mathbb{R}^n$ munido da norma euclidiana, a qual é derivada de um produto interno.

1.3 Exemplo 2: Os espaços das sequências ℓ^p

1.9 Definição. Seja $1 \leqslant p < \infty$. Definimos o espaço ℓ^p como sendo o espaço das sequências reais p-somáveis, isto é,

$$\ell^p = \left\{ x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : \sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < \infty \right\},$$

dotado da norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{1/p}, \tag{1.6}$$

e o espaço ℓ^∞ como sendo o espaço das sequências reais limitadas, isto é,

$$\ell^\infty = \left\{ x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty \right\},$$

dotado da norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|. \tag{1.7}$$

1.10 Proposição. *ℓ^p é um espaço vetorial normado.*

Prova. Basta passar o limite na desigualdade de Minkowski fazendo $n \to \infty$. ■

1.11 Proposição. *ℓ^p é um espaço de Banach.*

Prova. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em ℓ^p ($\{x_n\}$ é uma sequência de sequências reais). Denote os termos de cada sequência x_n por $x_{n,m}$. Para cada m fixado, $\{x_{n,m}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é também uma sequência de Cauchy, logo converge para um certo número a_m; em outras palavras, a sequência de sequências $\{x_n\}$ converge termo a termo para a sequencia real $a = \{a_m\}$. Afirmamos que esta sequência está em ℓ^p e que $x_n \to a$ em ℓ^p.

De fato, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em ℓ^p, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k - x_l\|_p < \varepsilon$$

sempre que $k, l \geqslant N$; em particular, para todo $m \in \mathbb{N}$, vale

$$\sum_{i=1}^{m} |x_{k,i} - x_{l,i}|^p < \varepsilon^p$$

sempre que $k, l \geqslant N$. Fixando k e fazendo $l \to \infty$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{m} |x_{k,i} - a_i|^p < \varepsilon^p$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, sempre que $k \geqslant N$. Daí, fazendo $m \to \infty$, temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{k,i} - a_i|^p < \varepsilon^p$$

sempre que $k \geqslant N$,o que implica que $x_k - a \in \ell^p$ sempre que $k \geqslant N$, e portanto $a \in \ell^p$. Esta mesma desigualdade também implica que $x_k \to a$ em ℓ^p. ■

1.12 Exemplo. Subespaços de ℓ^∞ que são também espaços de Banach são

$$\ell_c^\infty = \{x \in \ell^\infty : x \text{ é uma sequência convergente}\},$$
$$\ell_0^\infty = \{x \in \ell^\infty : \lim x_n = 0\}.$$

A demonstração deste fatos é deixada como exercício. □

1.4 Exemplo 3: Os espaços $L^p(\Omega)$

1.13 Definição. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável. Seja $1 \leqslant p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções reais p-integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \int_\Omega |f|^p < \infty \right\},$$

dotado da norma

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}, \tag{1.8}$$

e o espaço $L^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções reais mensuráveis limitadas, isto é,

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \sup_\Omega |f| < \infty \right\},$$

dotado da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|. \tag{1.9}$$

Observe que nesta definição,

$$\sup_{\Omega} |f| = \inf \{c \in \mathbb{R} : |f(x)| \leqslant c \text{ q.t.p.}\}.$$

1.14 Proposição. *$L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial normado.*

Prova. $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial porque se $f, g \in L^p(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $f + g \in L^p(\Omega)$ e $\lambda f \in L^p(\Omega)$. De fato,

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant 2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\},$$

de modo que

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leqslant 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p),$$

donde

$$\int_{\Omega} |f + g|^p \leqslant 2^p \left(\int_{\Omega} |f|^p + \int_{\Omega} |g|^p \right)^{1/p}.$$

Além disso, $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ e $\|f\|_p = 0$ se e somente se $f = 0$ q.t.p.

Como nos espaços ℓ^p, para provar a desigualdade triangular ou **desigualdade de Minkowski**,

$$\left(\int_{\Omega} |f + g|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |g|^p \right)^{1/p}, \tag{1.10}$$

recorremos à **desigualdade de Hölder**

$$\int_{\Omega} |fg| \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'} \quad \text{onde } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{1.11}$$

Escrevemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f + g|^p &\leqslant \int_{\Omega} (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} \leqslant \int_{\Omega} |f| |f + g|^{p-1} + \int_{\Omega} |f| |g|^{p-1} \\
&\leqslant \|f\|_p \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_{\frac{p}{p-1}} + \|g\|_p \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_{\frac{p}{p-1}} \\
&= \left(\int_{\Omega} |f + g|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|f + g\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |f + g|^p \right)^{1 - \frac{p-1}{p}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

A desigualdade de Hölder segue, como na demonstração da Proposição 1.7, da desigualdade mais geral

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leqslant \lambda a + (1 - \lambda) b$$

sempre que $a, b \geqslant 0$ e $0 < \lambda < 1$. Desta vez tomamos, para cada $x \in \Omega$,

$$a = \left| \frac{f(x)}{\|f\|_p} \right|^p, \; b = \left| \frac{g(x)}{\|g\|_{p'}} \right|^{p'} \text{ e } \lambda = \frac{1}{p},$$

segue que

$$\frac{|f(x) g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}.$$

Daí, integrando sobre Ω, obtemos

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \int_{\Omega} |fg| \leqslant \frac{1}{p} \frac{\int_{\Omega} |f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{\int_{\Omega} |g|^p}{\|g\|_{p'}^{p'}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

■

1.15 Proposição. *$L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Prova. Consideraremos primeiro o caso $L^\infty(\Omega)$. Seja $\{f_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Então, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que
$$\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{1}{k}$$
sempre que $n, m > N_k$. Em particular,
$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}$$
q.t.p. em Ω, sempre que $n, m > N_k$. Isso implica que $\{f_n(x)\}$ é uma sequência de Cauchy para quase todo ponto $x \in \Omega$ e podemos definir $f(x) = \lim f_n(x)$ q.t.p. Resta mostrar que $f \in L^\infty(\Omega)$ e que $f_n \to f$ em $L^\infty(\Omega)$. Isso decorre da última desigualdade, fazendo $m \to \infty$:
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}.$$
Segue que $f_n \to f$ na norma de $L^\infty(\Omega)$; além disso, como para qualquer n, k fixados temos $|f(x)| \leqslant |f_n(x)| + 1/k$, logo $f \in L^\infty(\Omega)$.

Examinaremos agora o caso $1 \leqslant p < \infty$. Seja $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Em particular, podemos extrair uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ tal que
$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p < \frac{1}{2^k}.$$
Considere a sequência
$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|.$$
Então existe $g = \lim g_n$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, $\int_\Omega |g|^p = \lim \int_\Omega |g_n|^p$. Mas, usando a desigualdade de Jensen,
$$\begin{aligned}
\int_\Omega |g_n|^p &\leqslant \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|\right)^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|^p \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^k}\right)^p = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^p}\right)^k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^p}\right)^k \\
&= \frac{\frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2^p}} = \frac{1}{2^p - 1} < 1,
\end{aligned}$$
logo concluímos que $\|g\|_p \leqslant 1$ e, em particular, g assume valores reais em quase todo ponto.

Usaremos a sequência $\{g_n\}$ e seu limite g para verificar que a subsequência $\{f_{n_k}(x)\}$ é de Cauchy em quase todo ponto x. Com efeito, sejam $k > l > 1$ e escreva
$$|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| \leqslant \left|f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)\right| + \ldots + \left|f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)\right| = g_{k-1}(x) - g_{l-1}(x) \leqslant g(x) - g_{l-1}(x).$$
Como $g_l(x) \to g(x)$ q.t.p., para quase todo $x \in \Omega$ fixado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g(x) - g_{l-1}(x) < \varepsilon$ sempre que $l > N$; já que $k > l$, segue que $|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| < \varepsilon$ sempre que $k, l > N$.

Portanto, podemos definir, em quase todo ponto,
$$f(x) = \lim f_{n_k}(x).$$
Falta provar que $f \in L^p(\Omega)$ e que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$. Fazendo $k \to \infty$ na desigualdade $|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| \leqslant g(x) - g_{l-1}(x)$, obtemos
$$|f(x) - f_{n_l}(x)| \leqslant g(x) - g_{l-1}(x).$$

Como $g-g_{l-1} \in L^p(\Omega)$, segue em particular que $f-f_{n_l} \in L^p(\Omega)$ e, portanto, $f \in L^p(\Omega)$ já que $f_{n_l} \in L^p(\Omega)$. Além disso, integrando esta desigualdade sobre Ω, temos

$$\int_\Omega |f-f_{n_l}|^p \leqslant \int_\Omega |g-g_{l-1}|^p \to 0$$

quando $l \to \infty$ pelo Teorema da Convergência Dominada ($|g-g_{l-1}|$ é dominada por $2|g|$). Provamos, então, que uma subsequência da sequência de Cauchy $\{f_n\}$ converge para f em $L^p(\Omega)$; portanto, toda a sequência converge para f. ■

1.16 Exemplo. O espaço das funções contínuas $C\left(\overline{\Omega}\right)$ com a norma L^1 é um espaço vetorial normado mas não é um espaço de Banach. Por exemplo, tome $\Omega = [0,1]$ e considere a sequência de funções

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ n\left(t-\dfrac{1}{2}\right) & \text{se } \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}, \\ 1 & \text{se } \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Assumindo $n > m$ para fixar idéias, temos que

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\, dt$$

é a área do triângulo de altura 1 e comprimento da base $\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}$, de modo que

$$\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$$

sempre que $n, m > \varepsilon$, ou seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C([0,1])$ na norma L^1. Mas ela não converge para nenhuma função contínua na norma L^1. De fato, convergência L^1 implica em convergência q.t.p., a menos de uma subsequência, e $f_n(t) \to 0$ se $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}$, enquanto que $f_n(t) \to 1$ se $\dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$. Para uma demonstração mais direta, suponha por absurdo que existe $f \in C([0,1])$ tal que $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Como

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(t) - f(t)|\, dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |1 - f(t)|\, dt$$

e as três integrais são não-negativas, cada uma delas deve ser igual a 0 ou convergir para 0 quando $n \to \infty$. Concluímos que

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

e portanto f não é contínua. □

1.5 Exemplo 4: Os espaços $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ e os espaços de Hölder $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$

Usaremos a notação de multi-índice para denotar a derivada parcial

$$D^\gamma f(x) = \frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_n^{\gamma_n}}(x)$$

onde $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ e $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.

1.17 Definição. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Definimos o espaço $C^k(\overline{\Omega})$ como o espaço das funções reais definidas em Ω cujas derivadas parciais até a ordem k (inclusive) são limitadas e uniformemente contínuas (isso garante que elas possuem uma única extensão contínua para $\overline{\Omega}$), isto é,

$$C^k(\overline{\Omega}) = \left\{ f \in C^k(\Omega) : D^\gamma f \text{ é limitada e uniformemente contínua em } \Omega \text{ para todo } |\gamma| \leqslant k \right\}.$$

dotado da norma

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\gamma| \leqslant k} \|D^\gamma f\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{1.12}$$

Freqüentemente denotamos o espaço das funções contínuas $C^0(\Omega)$ simplesmente por $C(\Omega)$, e definimos $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$.

Relembramos o conceito de continuidade de Hölder:

1.18 Definição. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é **contínua de Hölder** com expoente α, se

$$\sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty$$

para algum $0 < \alpha \leqslant 1$. Neste caso, denotaremos $f \in C^\alpha(\Omega)$, se $\alpha < 1$, e $f \in C^{0,1}(\Omega)$ se $\alpha = 1$. Além disso, denotamos também

$$[f]_{C^\alpha(\Omega)} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}. \tag{1.13}$$

Em particular, note que se f é contínua de Hölder com expoente α em Ω, então

$$|f(x) - f(y)| \leqslant [f]_{C^\alpha(\Omega)} |x - y|^\alpha \quad \text{para todos } x, y \in \Omega.$$

Claramente, se uma função é contínua de Hölder em Ω, então ela é contínua em Ω; na verdade, ela é uniformemente contínua em Ω, o que motiva o nome de *função uniformemente contínua de Hölder* em Ω, às vezes usado na literatura. Uma função contínua de Hölder com expoente $\alpha = 1$ é uma função contínua de Lipschitz.

1.19 Definição. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Os **espaços de Hölder** $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ são definidos como os subespaços de $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ consistindo das funções cujas derivadas parciais até a ordem k (inclusive) são todas contínuas de Hölder com expoente α em Ω:

$$C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{ f \in C^k\left(\overline{\Omega}\right) : D^\gamma f \in C^\alpha(\Omega) \text{ para todo } |\gamma| \leqslant k \right\}$$

com norma

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\gamma| \leqslant k} [D^\gamma f]_{C^\alpha(\Omega)}. \tag{1.14}$$

Permitindo $\alpha = 0$, podemos incluir os espaços $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ entre os espaços de Hölder:

$$C^k\left(\overline{\Omega}\right) = C^{k,0}\left(\overline{\Omega}\right).$$

1.20 Proposição. $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ *é um espaço vetorial normado.*

Prova. Provemos a validade da desigualdade triangular. Para isso, já que $\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})}$ nada mais é que a soma de normas do máximo, portanto claramente uma norma, basta provar que a desigualdade triangular vale para a seminorma $[D^\gamma f]_{C^\alpha(\Omega)}$ (uma *seminorma* é uma função que satisfaz todas as propriedades que uma norma satisfaz, exceto a condição (i) da Definição 1.1). Isso significa provar que

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}} \frac{|(f+g)(x)-(f+g)f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Mas isso segue diretamente da desigualdade triangular

$$|(f+g)(x)-(f+g)f(y)| \leqslant |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)|$$

e do fato que

$$\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B.$$

■

1.21 Proposição. $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ *é um espaço de Banach.*

Prova. Exercício. ■

1.6 Exercícios

1.1 Mostre que

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p .$$

1.2 $C^1(\overline{\Omega})$ com a métrica L^∞ é um espaço vetorial normado? É um espaço de Banach?

1.3 Seja E um espaço vetorial normado em relação a duas normas, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$. Dizemos que estas duas normas são **equivalentes** se existirem constantes $C, D > 0$ tais que

$$\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2,$$
$$\|x\|_2 \leqslant D\|x\|_1,$$

para todo $x \in E$. Suponha que $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são normas equivalentes. Prove que $(E, \|\cdot\|_1)$ é de Banach se e somente se $(E, \|\cdot\|_2)$ é de Banach.

1.4 Mostre que $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ com a norma

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sum_{i=0}^{k} \|f\|_{C^i(\overline{\Omega})} + \sum_{|\gamma|\leqslant k} [D^\gamma f]_{C^\alpha(\Omega)}$$

é um espaço vetorial normado. Mostre que esta norma é equivalente à norma definida no texto.

1.5 Demonstre a Proposição 1.21.

Capítulo 2

Aplicações Lineares

2.1 Aplicações Lineares Limitadas

Em espaços vetoriais normados, um critério simples para a continuidade de aplicações lineares é encapsulado na seguinte definição, como veremos a seguir:

2.1 Definição. Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços vetoriais normados. Dizemos que uma aplicação linear $T : E \longrightarrow F$ é **limitada** se existe uma constante $M \geqslant 0$ tal que

$$\|Tx\|_F \leqslant M \|x\|_E$$

para todo $x \in E$.

Em geral, omitiremos os subscritos das normas quando for claro do contexto a quais espaços elas se referem.

2.2 Proposição. *Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *T é contínua.*

(ii) *T é contínua na origem.*

(iii) *T é limitada.*

Prova. (i)⇒(ii) Óbvio. (ii)⇒(iii) Tomando $\varepsilon = 1$ na definição (ε, δ) de continuidade em espaços métricos, existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| \leqslant \delta$ implica $\|Tx\| \leqslant 1$. Portanto, se $y \in E$ é um vetor não nulo qualquer, temos

$$\left\| T\left(\frac{\delta y}{\|y\|}\right) \right\| \leqslant 1.$$

Por linearidade concluímos que

$$\|Ty\| \leqslant \frac{1}{\delta} \|y\| .$$

(iii)⇒(i) Seja M tal que $\|Tx\| \leqslant M \|x\|$ para todo $x \in E$. Então

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leqslant M \|x - y\|$$

e portanto T é uma aplicação de Lipschitz, em particular (uniformemente) contínua. ■

2.3 Exemplo. Embora aplicações lineares em espaços vetoriais normados de dimensão finita sejam sempre contínuas, o mesmo não vale para espaços vetoriais normados de dimensão infinita. De fato, se E é um espaço vetorial normado de dimensão infinita e F é um espaço vetorial normado de dimensão maior ou igual a 1, podemos sempre construir uma aplicação linear $T : E \longrightarrow F$ que não é limitada. Para isso, seja $\mathcal{B}$ uma base para E, $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ um subconjunto enumerável de vetores e $y \in F$ um vetor não nulo qualquer. Definimos uma aplicação linear $T : E \longrightarrow F$ definindo T em $\mathcal{B}$ por

$$Tx_n = n \|x_n\| \, y \quad \text{se } x_n \in \mathcal{B}'$$

e

$$Tx = 0 \quad \text{se } x \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{B}'.$$

T não é limitada, pois

$$\|Tx_n\| = n \|y\| \|x_n\|,$$

logo não existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|Tx_n\| \leqslant M \|x_n\|.$$

Em particular, vemos que se E é um espaço vetorial normado de dimensão infinita, sempre existem funcionais lineares que não são contínuos, pois podemos tomar $F = \mathbb{R}$. $\square$

2.4 Definição. Se E, F são espaços vetoriais normados, denotaremos o espaço vetorial das aplicações lineares limitadas por $\mathcal{L}(E, F)$. Definimos a norma de uma aplicação linear limitada por

$$\|T\| = \inf \{ M \in \mathbb{R} : \|Tx\| \leqslant M \|x\| \text{ para todo } x \in E \}.$$

2.5 Proposição. *Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear limitada. Então*

$$\|T\| = \sup_{x \in E \backslash \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leqslant 1}} \|Tx\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} \|Tx\|.$$

Prova. Seja

$$M = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Então $\|Tx\| \leqslant M \|x\|$ para todo $x \in E$, logo $M \geqslant \|T\|$. Reciprocamente, como por definição $\|Tx\| \leqslant \|T\| \|x\|$ para todo $x \in E$, segue que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant \|T\|$$

para todo $x \in E \backslash \{0\}$, logo $\|T\| \leqslant M$. Isso prova a primeira identidade.

Para provar que

$$\sup_{x \in E \backslash \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} \|Tx\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leqslant 1}} \|Tx\|,$$

basta notar que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|.$$

■

Apesar de uma aplicação linear limitada ser contínua, não podemos trocar o sup na bola unitária ou na esfera unitária pelo máximo, pois em espaços vetoriais normados de dimensão infinita a bola e a esfera unitária nunca são compactas (veja o Corolário 1.39).

2.6 Proposição. *Se E, F são espaços vetoriais normados, então $\mathcal{L}(E,F)$ é um espaço vetorial normado.*

Prova. Sejam $T, S \in \mathcal{L}(E,F)$. Temos

$$\begin{aligned} \|(T+S)x\| &= \|Tx + Sx\| \leqslant \|Tx\| + \|Sx\| \leqslant \|T\| \|x\| + \|S\| \|x\| \\ &= (\|T\| + \|S\|) \|x\| \end{aligned}$$

para todo $x \in E$, de modo que obtemos simultaneamente que $T + S \in \mathcal{L}(E,F)$ e a validade da desigualdade triangular para a norma de aplicações lineares. ■

2.7 Proposição. *Se E é um espaço vetorial normado e F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E,F)$ é um espaço de Banach.*

Prova. Seja $\{T_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E,F)$. Como

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \|x\|,$$

segue que $\{T_n x\}$ é uma sequência de Cauchy em F para todo $x \in E$. Defina

$$Tx := \lim T_n x.$$

Afirmamos que $T = \lim T_n$ em $\mathcal{L}(E,F)$. De fato, em primeiro lugar, T é uma transformação linear, pois

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \lim T_n(\alpha x + \beta y) = \lim(\alpha T_n x + \beta T_n y) = \alpha \lim T_n x + \beta \lim T_n y \\ &= \alpha Tx + \beta Ty. \end{aligned}$$

Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ sempre que $n, m > N$. Então

$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \varepsilon \|x\|$$

para todo $x \in E$ e fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$\|(T - T_m)x\| = \|Tx - T_m x\| \leqslant \varepsilon \|x\|$$

para todo $x \in E$, sempre que $m > N$. Em particular, $T - T_m \in \mathcal{L}(E,F)$, portanto $T = (T - T_m) + T_m \in \mathcal{L}(E,F)$ e

$$\|T - T_m\| < \varepsilon$$

sempre que $m > N$, isto é, $T_m \to T$ em $\mathcal{L}(E,F)$. ■

Reciprocamente, com a ajuda do teorema de Hahn-Banach (veja a próxima seção), pode-se provar que (se $E \neq 0$) se F não é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E,F)$ não é um espaço de Banach (Proposição 2.26).

2.8 Definição. Se E é um espaço vetorial normado, denotaremos o espaço vetorial dos funcionais lineares limitadas por E^*. Ele é chamado o **espaço dual** de E.

2.9 Corolário. *Se E é um espaço vetorial normado, então E^* é um espaço de Banach.*

2.10 Proposição. *Sejam E, F, G espaços vetoriais normados. Se $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $S \in \mathcal{L}(F,G)$, então $ST \in \mathcal{L}(E,G)$ e*

$$\|ST\| \leqslant \|S\| \|T\|.$$

Prova. Temos

$$\|(ST)x\| \leqslant \|S\| \|Tx\| \leqslant \|S\| \|T\| \|x\|$$

para todo $x \in E$. ■

2.11 Definição. Sejam E, F espaços vetoriais normados. Dizemos que uma aplicação $T : E \longrightarrow F$ é **limitada inferiormente** se existe uma constante $m > 0$ tal que

$$\|Tx\| \geqslant m \|x\|$$

para todo $x \in E$.

2.12 Proposição. *Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então a inversa $T^{-1} : \operatorname{Im} T \longrightarrow E$ existe e é linear e limitada se e somente se T é limitada inferiormente.*

Prova. Suponha que T é limitada inferiormente. Então, se $x \neq y$ segue que

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \geqslant m \|x-y\| > 0,$$

logo T é injetiva e portanto a inversa $T^{-1} : \operatorname{Im} T \longrightarrow E$ está bem definida. Como $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$, tomando T^{-1} em ambos os lados desta equação, segue também que

$$T^{-1}(\alpha Tx + \beta Ty) = \alpha x + \beta y = \alpha T^{-1}(Tx) + \beta T^{-1}(Ty),$$

logo T^{-1} é linear. Finalmente,

$$\left\|T^{-1}(Tx)\right\| = \|x\| \leqslant m^{-1} \|Tx\|$$

para todo $y = Tx \in \operatorname{Im} T$, e portanto T^{-1} é limitada.

Reciprocamente, suponha que $T^{-1} : \operatorname{Im} T \longrightarrow E$ existe e é linear e limitada. Então

$$\|x\| = \left\|T^{-1}(Tx)\right\| \leqslant \left\|T^{-1}\right\| \|Tx\|$$

para todo $x \in E$, ou seja,

$$\|Tx\| \geqslant \left\|T^{-1}\right\|^{-1} \|x\|.$$

■

2.13 Definição. Sejam E, F espaços vetoriais normados. Dizemos que E e F são **topologicamente isomorfos** quando existe uma aplicação linear bijetiva $T : E \longrightarrow F$ tal que T e T^{-1} são limitadas.

2.14 Corolário. *$T : E \longrightarrow F$ é um isomorfismo topológico entre os espaços vetoriais normados E e F se e somente se existem constantes $m, M > 0$ tais que*

$$m \|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant M \|x\|.$$

Em particular, isomorfismos topológicos preservam sequências de Cauchy e sequências convergentes; daí, se E e F são topologicamente isomorfos, então E é um espaço de Banach se e somente se F é.

2.15 Proposição. *Sejam E, F espaços vetoriais normados de dimensão finita com a mesma dimensão. Então E e F são topologicamente isomorfos.*

Prova. Como a relação de isomorfismo topológico entre espaços vetorias normados é uma relação de equivalência, basta mostrar que se $\dim E = n$ então E é topologicamente isomorfo a $\ell^1(n)$. Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para E. Considere o isomorfismo $T : \ell^1(n) \longrightarrow E$ definido por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Afirmamos que T é um isomorfismo topológico. De fato, T é limitada porque

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_E &\leqslant \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\|_E = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_E \\
&\leqslant \left(\max_{i=1,\dots,n} \|e_i\|_E \right) \sum_{i=1}^n |x_i| \\
&= M \|x\|_{\ell^1(n)}
\end{aligned}$$

onde denotamos $M = \max\limits_{i=1,\dots,n} \|e_i\|_E$. Como T é contínua, a função $x \mapsto \|Tx\|$ também é e assume um valor mínimo m na esfera unitária $B = \left\{ x \in \ell^1(n) : \|x\| = 1 \right\}$. Necessariamente $m > 0$, pois $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um conjunto linearmente independente. Portanto,

$$\left\| T \frac{x}{\|x\|} \right\| \geqslant m$$

para todo $x \in E$, $x \neq 0$, o que mostra que $m \|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant M \|x\|$ para todo $x \in E$. ■

2.16 Corolário. *Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é de Banach.*

Todo subespaço vetorial de dimensão finita de um espaço vetorial normado é fechado.

2.17 Corolário. *Se E é um espaço vetorial normado de dimensão finita e $T : E \longrightarrow F$ é linear, então T é contínua.*

2.18 Corolário. *Se E é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então um subconjunto de E é compacto se e somente se ele for fechado e limitado.*

Além disso, se E é um espaço vetorial normado tal que a bola unitária $B = \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}$ é compacta, então E possui dimensão finita.

Prova. Vamos provar a última afirmação. Para isso, provaremos antes o seguinte resultado:

Seja E um espaço vetorial normado e $F \subset E$ um subespaço vetorial fechado próprio de E. Então para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe $y \in E$ tal que $\|y\| = 1$ e

$$\operatorname{dist}(y, F) \geqslant \varepsilon.$$

Seja $z \in E \backslash F$ e $d = \operatorname{dist}(z, F)$. Como F é fechado, $d \neq 0$ e pela definição de distância existe $x_0 \in F$ tal que

$$d \leqslant \|z - x_0\| \leqslant \frac{d}{\varepsilon}.$$

Tome

$$y = \frac{z - x_0}{\|z - x_0\|},$$

de modo que $\|y\| = 1$. Além disso, para todo $x \in F$ temos

$$\begin{aligned}
\|y - x\| &= \left\| \frac{z - x_0}{\|z - x_0\|} - x \right\| \\
&= \frac{1}{\|z - x_0\|} \|z - x_0 - \|z - x_0\| x\| \\
&\geqslant \frac{\varepsilon}{d} \|z - x_1\|,
\end{aligned}$$

onde $x_1 = x_0 - \|z - x_0\| \, x \in F$, logo
$$\|y - x\| \geqslant \frac{\varepsilon}{d} d = \varepsilon.$$

Agora, suponha por absurdo que E é um espaço de dimensão infinita. Vamos construir uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ que não possui subsequência convergente, mostrando que B não pode ser compacta. Tome $x_1 \in B$ qualquer. Como $\langle x_1 \rangle$ é um subespaço fechado de E e, por hipótese, $E \neq \langle x_1 \rangle$, existe $x_2 \in B$ tal que
$$\|x_1 - x_2\| \geqslant 1/2.$$
O subespaço $\langle x_1, x_2 \rangle$ também é um subespaço fechado próprio de E, logo existe $x_3 \in B$ tal que
$$\|x_1 - x_3\| \geqslant 1/2 \text{ e } \|x_2 - x_3\| \geqslant 1/2.$$
Continuando desta maneira, obtemos uma sequência $\{x_n\} \subset B$ tal que
$$\|x_n - x_m\| \geqslant 1/2$$
para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Como nenhuma subsequência desta sequência pode ser de Cauchy, ela não possui nenhuma subsequência convergente. ■

2.2 Exercícios

2.1 Verifique nos casos abaixo que o funcional linear está bem definido e é limitado e calcule sua norma.

a) $f : \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

b) $f : \ell_0^{\infty} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{2^{n+1}}$.

c) $f : L^1(-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = \int_{-1}^{1} t x(t) \, dt$.

2.2 Considere o operador linear $M_\lambda : \ell^p \longrightarrow \ell^p$ definido por
$$M_\lambda(x) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$$
onde $\lambda = (\lambda_n) \in \ell^\infty$. M_λ é chamado *multiplicação por* λ. Verifique que M_λ é um operador linear bem definido e limitado e calcule sua norma. Para que sequências λ existe o operador inverso M_λ^{-1}? Para que sequências λ o operador inverso M_λ^{-1} existe e é limitado?

2.3 Considere o operador *shift* $S : \ell^p \longrightarrow \ell^p$ definido por
$$Sx = (0, x_1, x_2, \ldots).$$
S^{-1} existe e é limitado? Considere agora o operador *truncamento* $T : \ell^p \longrightarrow \ell^p$ definido por
$$Tx = (x_2, x_3, \ldots).$$
T^{-1} existe e é limitado?

2.4 Seja $T : C([0, 1]) \longrightarrow C([0, 1])$ definida por
$$(Tf)(t) = f(t) + \int_0^t f(s) \, ds.$$
Mostre que T é um isomorfismo topológico.

2.5 Seja E um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E)$ um operador tal que $\|T\| < 1$. Mostre que $I - T$ é um operador bijetivo, $(I-T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} T^n$, $(I-T)^{-1}$ é limitado e que

$$\left\|(I-T)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1-\|T\|}.$$

2.6 Seja E um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E)$ um operador tal que $\|I - T\| < 1$. Mostre que T^{-1} existe e está em $\mathcal{L}(E)$.

2.7 Seja $E = \left\{f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0\right\}$. Dada $g \in C([0,1])$, considere a aplicação linear $T_g : E \longrightarrow C([0,1])$ definida por

$$(T_g f)(t) = f'(t) + g(t) f(t).$$

Mostre que T^{-1} existe e é limitada.

2.8 A aplicação linear $D : C^1([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ definida por

$$Df = f'$$

é limitada? Se for, calcule $\|D\|$.

2.9 Seja $E = \left\{f \in C([0,1]) : f \text{ é de classe } C^1\right\}$. Considere a aplicação linear $T : E \longrightarrow C([0,1])$ definida por

$$Df = f'.$$

D é limitada? Se for, calcule $\|D\|$.

2.10 A aplicação linear $I : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ definida por

$$(If)(t) = \int_0^t f(s)\, ds.$$

é limitada? Se for, calcule $\|I\|$.

2.11 Prove que não existe norma em $C^\infty([0,1])$ que torne o operador derivada $Df = f'$ limitado. [Sugestão: considere as funções $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$.]

2.3 O Teorema de Hahn-Banach

O teorema de Hahn-Banach garante que todo espaço vetorial normado é ricamente suprido de funcionais lineares, de modo que pode-se obter uma teoria satisfatória de espaços duais e de operadores adjuntos.

2.19 Definição. Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que um funcional $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é **semilinear** se ele for *subaditivo*, isto é,

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \text{para todos } x, y \in E,$$

e *positivo-homogêneo*, ou seja,

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \text{para todos } x \in E,\ \alpha > 0.$$

Um exemplo de funcional semilinear em um espaço vetorial normado é a própria norma deste espaço.

Para demonstrarmos o lema principal desta seção, que também é conhecido como o teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais (embora nestas notas não nos referiremos a ele deste modo em geral, preferindo reservar o nome *teorema de Hahn-Banach* para o teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais normados), relembramos o lema de Zorn:

2.20 Lema. (Lema de Zorn) *Seja $\mathcal{A} \neq \emptyset$ um conjunto parcialmente ordenado. Se todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{A}$ possui um limitante superior, então $\mathcal{A}$ tem pelo menos um elemento maximal.*

2.21 Lema. *Sejam E um espaço vetorial e $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional semilinear. Seja F um subespaço vetorial de E e $f_0 : F \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $f_0(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in F$. Então f_0 se estende a um funcional linear $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $f(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in E$.*

Prova. Este resultado é uma consequência do Lema de Zorn. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todas as extensões lineares $g : L(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ de f_0 a um subespaço vetorial $L(g) \supset F$ de E tais que $g(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in L(g)$. Note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ porque $f_0 \in \mathcal{A}$. Definimos uma ordem parcial em $\mathcal{A}$ declarando

$$g \leqslant h \text{ se } L(g) \subset L(h),$$

isto é, $g \leqslant h$ se h é uma extensão de g. Para ver que $\mathcal{A}$ satisfaz a hipótese do lema de Zorn, seja $A \subset \mathcal{A}$ um subconjunto totalmente ordenado. Então um limitante superior para A é o funcional $g : L(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ onde

$$L(g) = \bigcup_{h \in A} L(h)$$

e g é definido por

$$g(x) = h(x) \;\text{ se } x \in L(h) \;\text{ para qualquer } h \in A.$$

Observe que g está bem definido porque A é totalmente ordenado. Pelo lema de Zorn, existe um elemento maximal $f \in \mathcal{A}$. Para provar o resultado, basta mostrar que $L(f) = E$.

Suponha por absurdo que existe $x_0 \in E \backslash L(f)$. Considere o subespaço $L = L(f) + \langle x_0 \rangle$. Defina uma extensão linear $g : L \longrightarrow \mathbb{R}$ de f por

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha,$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante a ser definida apropriadamente para que tenhamos $h(y) \leqslant p(y)$ para todo $y \in L$, e portanto g contradizerá a maximalidade de f. De fato, dados $x_1, x_2 \in L(f)$, temos

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1 + x_0) + p(x_2 - x_0),$$

donde

$$f(x_2) - p(x_2 - x_0) \leqslant p(x_1 + x_0) - f(x_1).$$

Escolha α tal que

$$\sup_{x \in L(f)} [f(x) - p(x - x_0)] \leqslant \alpha \leqslant \inf_{x \in L(f)} [p(x + x_0) - f(x)].$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} h(x - x_0) &= f(x) - \alpha \leqslant p(x - x_0), \\ h(x + x_0) &= f(x) + \alpha \leqslant p(x + x_0), \end{aligned}$$

para todo $x \in L(f)$. Se $t > 0$, multiplicando

$$f\left(\frac{x}{t}\right) + \alpha \leqslant p\left(\frac{x}{t} + x_0\right)$$

por t obtemos

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \leqslant p(x + tx_0).$$

Se $t < 0$, multiplicando

$$f\left(\frac{x}{-t}\right) - \alpha \leqslant p\left(\frac{x}{-t} - x_0\right)$$

por $-t$ obtemos

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \leqslant p(x + tx_0).$$

Se $t = 0$, o resultado é óbvio. ■

2.22 Teorema. (Teorema de Hahn-Banach) *Sejam E um espaço vetorial normado e $f_0 : F \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado definido em um subespaço vetorial $F \subset E$. Então f_0 se estende a um funcional linear $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*
$$\|f\|_{E^*} = \|f_0\|_{F^*}.$$

Prova. Basta aplicar o teorema anterior ao funcional semilinear
$$p(x) = \|f_0\|_{F^*} \|x\|.$$
■

2.23 Corolário. *Sejam E um espaço vetorial normado e F um subespaço vetorial de E. Suponha que exista $x_0 \in E$ tal que*
$$\operatorname{dist}(x_0, F) = \inf_{x \in F} \|x - x_0\| > 0.$$
Então existe $f \in E^*$ tal que $f(x_0) = 1$, $\|f\|_{E^*} = 1/\operatorname{dist}(x_0, F)$ e $f \equiv 0$ sobre F.

Em particular, se F é um subespaço vetorial de E que não é denso em E, então existe $f \in E^*$ não-nulo que se anula em F.

Prova. Considere o subespaço vetorial $F_1 = F + \langle x_0 \rangle$. Defina um funcional linear $f_0 : F_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ por
$$f_0(x + tx_0) = t.$$
Note que $f_0 \equiv 0$ sobre F e que $f_0(x_0) = 1$. Escrevendo $y = x + tx_0$, se $t \neq 0$ temos que
$$\|y\| = \|x + tx_0\| = |t| \left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\| \geqslant |t| \operatorname{dist}(x_0, F) = |f_0(y)| \operatorname{dist}(x_0, F),$$
ou seja, $\dfrac{|f_0(y)|}{\|y\|} \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{dist}(x_0, F)}$ para todo $y \in F_1$, donde
$$\|f_0\|_{F_1^*} \leqslant \frac{1}{\operatorname{dist}(x_0, F)}. \tag{2.1}$$
Seja $\{y_n\} \subset F$ uma sequência tal que $\|x_0 - y_n\| \to \operatorname{dist}(x_0, F)$. Temos
$$1 = f_0(x_0 - y_n) \leqslant \|f_0\|_{F_1^*} \|x_0 - y_n\|,$$
de modo que ao passarmos o limite quando $n \to \infty$ segue que
$$\|f_0\|_{F_1^*} \geqslant \frac{1}{\operatorname{dist}(x_0, F)}. \tag{2.2}$$
Portanto,
$$\|f_0\|_{F_1^*} = \frac{1}{\operatorname{dist}(x_0, F)}.$$
Usando o teorema de Hahn-Banach, estendemos f linearmente a todo o espaço E. ■
Este resultado é frequentemente usado para verificar se um subespaço vetorial de um espaço vetorial normado é denso.

2.24 Corolário. *Seja E um espaço vetorial normado. Para todo vetor não-nulo $x_0 \in E$ existe $f \in E^*$ tal que*
$$\|f\|_{E^*} = 1 \quad e \quad f(x_0) = \|x_0\|.$$

Prova. Aplique o teorema de Hahn-Banach ao subespaço $F = \langle x_0 \rangle$ e ao funcional linear limitado $f_0 : F \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f_0 (tx_0) = t \|x_0\|$. ■

2.25 Corolário. *Seja E um espaço vetorial normado. Para todo vetor $x \in E$ vale*

$$\|x\| = \sup_{f \in E^* \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leqslant 1}} |f(x)| = \max_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leqslant 1}} |f(x)|.$$

Prova. Pelo corolário anterior existe $g \in E^*$ tal que $\|g\|_{E^*} = 1$ e $g(x) = \|x_0\|$. Logo,

$$\sup_{f \in E^* \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geqslant \frac{|g(x)|}{\|g\|} = \|x\|.$$

Como $|g(x)| \leqslant \|g\| \|x\|$, segue o resultado. ■

2.26 Proposição. *Sejam E, F espaços vetoriais normados. Se $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach, então F é um espaço de Banach.*

Prova. Em primeiro lugar, observamos que se f é funcional linear sobre E e $y \in F$ é um vetor qualquer, então podemos definir uma aplicação linear $T : E \longrightarrow F$ por

$$Tx = f(x)\, y.$$

Além disso, se f for um funcional linear limitado, então T também é uma aplicação linear limitada. De fato,

$$\|T\| = \sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|y\| \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|y\| \|f\|.$$

Seja $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em F. Pelo Corolário 2.24, existe um funcional linear $f \in E^*$ tal que $\|f\| = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina uma aplicação linear $T_n \in \mathcal{L}(E, F)$ por

$$T_n x = f(x)\, y_n.$$

Então $\|T_n\| = \|y_n\|$ e $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E, F)$. Como $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach, $T_n \to T$ em $\mathcal{L}(E, F)$. Em particular, $T_n x \to Tx$ em F para todo $x \in E$. Escolhendo $x \in E$ tal que $f(x) = 1$, segue que $T_n x = y_n$ e portanto $y_n \to Tx$. ■
Assim, juntamente com a Proposição 2.7, este resultado implica que $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach se e somente se F é um espaço de Banach.

2.4 Formas Geométricas do Teorema de Hahn-Banach: Conjuntos Convexos

2.27 Definição. Seja E um espaço vetorial. Um **hiperplano afim** é um conjunto da forma

$$H = f^{-1}(\alpha) = \{x \in E : f(x) = \alpha\},$$

onde $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear não-nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.28 Proposição. *Seja E um espaço vetorial normado. O hiperplano $H = f^{-1}(\alpha)$ é fechado se e somente se f é limitada.*

Prova. Suponha que H é fechado. Então $E\backslash H$ é aberto e não-vazio (porque f é não-nulo). Escolha $x_0 \in E\backslash H$ tal que $f(x_0) < \alpha$, para fixar idéias, e uma bola $B_r(x_0) \subset E\backslash H$. Afirmamos que $f(x) < \alpha$ para todo $x \in B_r(x_0)$. Com efeito, se $f(x_1) \geqslant \alpha$ para algum $x_1 \in B_r(x_0)$, considere o segmento

$$L = \{(1-t)\,x_0 + tx_1 : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

que está inteiramente contido em $B_r(x_0)$. Tomando $t = \dfrac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)}$ temos

$$\begin{aligned} f((1-t)\,x_1 + tx_0) &= (1-t)\,f(x_1) + tf(x_0) \\ &= \left(1 - \frac{f(x_1)-\alpha}{f(x_1)-f(x_0)}\right) f(x_1) + \frac{f(x_1)-\alpha}{f(x_1)-f(x_0)} f(x_0) \\ &= \frac{[\alpha - f(x_0)]\,f(x_1) + [f(x_1) - \alpha]\,f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)} \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

contradizendo $B_r(x_0) \subset E\backslash H$. Portanto, concluímos que

$$f(x_0 + rz) < \alpha$$

para todo $z \in B_1(0)$, donde (usando o fato que $f(z) = -f(-z)$)

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{r}\,(\alpha - f(x_0))$$

para todo $z \in B_1(0)$, o que implica que f é limitada e

$$\|f\| \leqslant \frac{1}{r}\,(\alpha - f(x_0))\,.$$

A recíproca é óbvia. ■

2.29 Definição. Seja E um espaço vetorial e $A, B \subset E$ subconjuntos quaisquer.

Dizemos que o hiperplano $H = f^{-1}(\alpha)$ **separa** A **e** B **no sentido amplo** se $f(x) \leqslant \alpha$ para todo $x \in A$ e $f(x) \geqslant \alpha$ para todo $x \in B$.

Dizemos que o hiperplano $H = f^{-1}(\alpha)$ **separa** A **e** B **no sentido estrito** se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon$ para todo $x \in A$ e $f(x) \geqslant \alpha + \varepsilon$ para todo $x \in B$.

2.30 Lema. (Funcional de Minkowski) *Seja E um espaço vetorial normado e $C \subset E$ um conjunto aberto convexo contendo a origem. Defina o funcional $p_C : E \longrightarrow \mathbb{R}$ por*

$$p_C(x) = \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}.$$

Então p_C é um funcional semilinear que satisfaz

(i) existe $M > 0$ tal que $0 \leqslant p_C(x) \leqslant M\,\|x\|$ para todo $x \in E$;

(ii) $C = \{x \in E : p_C(x) < 1\}$.

Prova. Para simplificar a notação, denotaremos p_C por p.

Prova de (i): Seja $r > 0$ tal que $B_r[0] \subset C$. Então, para todo $x \in E$, $r\dfrac{x}{\|x\|} \in C$, logo por definição $p(x) \leqslant \dfrac{r}{\|x\|}$.

Prova de (ii): Seja $x \in C$. Como C é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(1+\varepsilon)\,x \in C$, logo por definição

$$p(x) \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$

Reciprocamente, se $p(x) < 1$, então existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\dfrac{x}{\alpha} \in C$, donde $x = \alpha \dfrac{x}{\alpha} + (1-\alpha)\,0 \in C$, já que C é convexo e contém a origem.

Por fim, vamos verificar que p é semilinear. É fácil ver que p é positivo-homogêneo. Para verificar a subaditividade de p, sejam $x, y \in E$ e $\varepsilon > 0$. De (ii) e do fato de p ser positivo-homogêneo segue que

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon}, \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C.$$

Daí,

$$t\frac{x}{p(x)+\varepsilon} + (1-t)\,\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C \quad \text{para todo } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Em particular, escolhendo $t = \dfrac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$, temos que

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C.$$

Pela positivo-homogeneidade de p e por (ii), concluímos que

$$p(x+y) < p(x)+p(y)+2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue a subaditividade de p. ■

2.31 Lema. *Seja E um espaço vetorial normado e $C \subsetneq E$ um conjunto aberto convexo não-vazio. Seja $x_0 \in E \backslash C$. Então existe $f \in E^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in C$.*

Em particular, o hiperplano $H = f^{-1}(f(x_0))$ separa x_0 e C no sentido amplo.

Prova. Fazendo uma translação, podemos assumir que $0 \in C$ e definir o funcional de Minkowski p de C. Considere $F = \langle x_0 \rangle$ e o funcional linear sobre F dado por $f_0(tx_0) = t$. Como $p(x_0) \geqslant 1$ (por (ii) do lema anterior), temos $p(tx_0) = tp(x_0) \geqslant t$ se $t \geqslant 0$; se $t < 0$, $p(tx_0) > t$ trivialmente, porque o funcional de Minkowski p é não-negativo. Segue que $f_0(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in F$. Podemos portanto usar o teorema de Hahn-Banach (Lema 2.21) para concluir que f_0 possui uma extensão linear $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in E$. De (i) do lema anterior, segue que f é limitada. Finalmente, como $p(x) < 1$ para todo $x \in C$, segue que $f(x) \leqslant p(x) < 1 = f(x_0)$ para todo $x \in C$. ■

2.32 Teorema. (Teorema de Hahn-Banach, primeira forma geométrica) *Seja E um espaço vetorial normado. Sejam $A, B \subset E$ conjuntos convexos não-vazios disjuntos, com A aberto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido amplo.*

Prova. Seja

$$C = A - B = \{x - y : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

C é convexo, pois se $x_1 - y_1, x_2 - y_2 \in C$ então

$$t(x_1 - y_1) + (1-t)(x_2 - y_2) = tx_1 + (1-t)\,x_2 - [ty_1 + (1-t)\,y_2] \in C,$$

e C é aberto porque $C = \cup_{y \in B}(A - y)$, união de abertos (translação é um homeomorfismo). Além disso, $0 \notin C$ porque A e B são disjuntos. Pelo lema anterior, tomando $x_0 = 0$, existe $f \in E^*$ tal que $f(z) < 0$ para todo $z \in C$, ou seja, $f(x) < f(y)$ para todos $x \in A$ e $y \in B$. Escolhendo α tal que

$$\sup_A f \leqslant \alpha \leqslant \inf_B f,$$

concluímos que o hiperplano $H = f^{-1}(\alpha)$ separa A e B no sentido amplo. ■

2.33 Teorema. (Teorema de Hahn-Banach, segunda forma geométrica) *Seja E um espaço vetorial normado. Sejam $A, B \subset E$ conjuntos convexos não-vazios disjuntos, com A fechado e B compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido estrito.*

Prova. Dado $\varepsilon > 0$, sejam
$$A_\varepsilon = A + B_\varepsilon(0) \quad \text{e} \quad B_\varepsilon = B + B_\varepsilon(0),$$
de modo que A e B são abertos, convexos e não-vazios. Além disso, tomando $\varepsilon < \operatorname{dist}(A, B)$, segue que A_ε e B_ε são disjuntos. Pelo teorema anterior, existe um hiperplano fechado $H = f^{-1}(\alpha)$ que separa A_ε e B_ε no sentido amplo, logo
$$f(x + \varepsilon z) \leqslant \alpha \leqslant f(y + \varepsilon z)$$
para todos $x \in A$, $y \in B$ e $z \in B_1(0)$. Daí,
$$f(x) + \varepsilon \|f\| \leqslant \alpha \leqslant f(y) + \varepsilon \|f\|.$$

■

2.5 Exercícios

2.12 Sejam E um espaço vetorial e $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear. Mostre que a codimensão do núcleo de f é 1, ou seja, podemos escrever
$$E = \ker f \oplus \langle x_0 \rangle$$
onde x_0 é qualquer vetor de E tal que $f(x_0) \neq 0$.

2.13 Seja E um espaço vetorial normado. Se $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que para toda sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para 0 a sequência $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, mostre que f é limitado.

2.14 Seja E um espaço vetorial normado. Prove que um funcional linear $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitado se e somente se $\ker f$ é fechado.

2.15 Sejam E um espaço vetorial normado e $L = \langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ um subespaço vetorial gerado por um conjunto enumerável de vetores. Mostre que $x \in \overline{L}$ se e somente se para todo $f \in E^*$ tal que $f(x_n) = 0$ para todo n tem-se $f(x) = 0$.

2.16 Sejam E um espaço vetorial normado e $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado não-nulo. Considere o hiperplano $H = f^{-1}(1)$. Mostre que
$$\|f\| = \frac{1}{\inf\limits_{x \in H} \|x\|}.$$

2.17 Sejam E um espaço vetorial normado e F um subespaço vetorial próprio de E. Mostre que se $T_0 : F \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é uma aplicação linear limitada, então T se estende a uma aplicação linear limitada $T : E \longrightarrow \mathbb{R}^N$ com $\|T\| = \|T_0\|$.

Capítulo 3

Os Teoremas da Limitação Uniforme, da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado

3.1 O Teorema da Limitação Uniforme

3.1 Lema. (O Teorema da Categoria de Baire) *Seja X um espaço métrico completo. Seja $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma coleção enumerável de conjuntos fechados de X. Se $\operatorname{int} F_n = \emptyset$ para todo n, então $\operatorname{int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \emptyset$.*

Alternativamente, seja X um espaço métrico completo não-vazio. Seja $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma coleção enumerável de conjuntos fechados de X tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int} F_{n_0} \neq \emptyset$.

3.2 Teorema. (Teorema da Limitação Uniforme) *Sejam E, F espaços vetoriais normados, sendo E um espaço de Banach. Seja $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma coleção de operadores lineares limitados de E em F puntualmente limitados, isto é, para todo $x \in E$ existe $C_x > 0$ tal que*

$$\|T_\lambda x\| \leqslant C_x \quad \text{para todo } \lambda \in \Lambda.$$

Então $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é uniformemente limitada, ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$\|T_\lambda\| \leqslant C \quad \text{para todo } \lambda \in \Lambda.$$

Prova. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$F_n = \{x \in E : \|T_\lambda x\| \leqslant n \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\}.$$

Então F_n é fechado, porque $F_n = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda^{-1}[0,n]$ onde G_λ é a função contínua $G_\lambda = \|\cdot\| \circ T_\lambda$. Por hipótese, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, logo pelo Teorema da Categoria de Baire existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int} F_{n_0} \neq \emptyset$. Seja $B_r(x_0) \subset F_{n_0}$. Temos

$$\|T_\lambda (x_0 + rz)\| \leqslant n_0$$

para todo $z \in B_1(0)$ e para todo $\lambda \in \Lambda$. Logo,

$$\|T_\lambda (z)\| \leqslant \frac{n_0 + \|T_\lambda x_0\|}{r}$$

para todo $z \in B_1(0)$ e para todo $\lambda \in \Lambda$, ou seja,

$$\|T_\lambda\| \leqslant \frac{n_0 + C_x}{r}$$

para todo $\lambda \in \Lambda$. ■

3.3 Corolário. *Sejam E, F espaços vetoriais normados, sendo E um espaço de Banach. Seja $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de operadores lineares limitados de E em F tais que para todo $x \in E$ a sequência $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um elemento de F que denotaremos Tx. Então $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada, T é um operador linear limitado e*

$$\|T\| \leqslant \liminf \|T_n\|.$$

Prova. A limitação uniforme da sequência decorre do teorema anterior. O fato de T ser linear decorre das propriedades de limites de somas e multiplicação por escalar de sequências e da linearidades dos operadores da sequência, como na Proposição 2.7. Como, pelo teorema anterior, existe uma constante $C > 0$ independente de x tal que

$$\|T_n x\| \leqslant C \|x\|$$

para todo $x \in X$, tomando o limite quando $n \to \infty$ obtemos que T é limitado. Finalmente, como

$$\|T_n x\| \leqslant \|T_n\| \|x\|,$$

da definição de norma de um operador segue o último resultado. ■

3.4 Corolário. *Sejam E um espaço vetorial normado e $B \subset E$ um subconjunto. Se para todo $f \in E^*$ o conjunto $f(B)$ é limitado, então B é limitado.*

Prova. Aplicamos o Teorema da Limitação Uniforme substituindo $E = E^*$ (que é um espaço de Banach, como vimos no Corolário 2.9), $F = \mathbb{R}$ e $\Lambda = B$. Para todo $b \in B$ definimos um operador linear limitado $T_b : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$T_b f = f(b).$$

De fato,

$$\|T_b f\| = \|f(b)\| \leqslant \|f\| \|b\| = \|b\| \|f\|$$

A coleção $\{T_b f\}_{b \in B}$ é limitada para cada $f \in E^*$ por hipótese. Portanto, do Teorema 3.2 segue que existe uma constante $C > 0$ independente de f tal que

$$|f(b)| \leqslant C \|f\|$$

para todo $f \in E^*$. Usando o Corolário 2.25 concluímos que

$$\|b\| \leqslant C$$

para todo $b \in B$. ■

3.5 Corolário. *Sejam E um espaço de Banach e $B^* \subset E^*$ um subconjunto. Se para todo $x \in E$ o conjunto $\langle B^*, x \rangle = \bigcup_{f \in B^*} f(x)$ é limitado, então B^* é limitado.*

Prova. Aplicamos o Teorema da Limitação Uniforme substituindo $F = \mathbb{R}$ e $\Lambda = B^*$. Para todo $b^* \in B^*$ considere o funcional linear limitado

$$T_{b^*} = b^*.$$

A coleção $\{T_{b^*} x\}_{b^* \in B^*}$ é limitada para cada $x \in E$ por hipótese. Portanto, do Teorema 3.2 segue que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|b^*\| \leqslant C$$

para todo $b^* \in B^*$. ■

3.2 Os Teoremas da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado

3.6 Teorema. (Teorema da Aplicação Aberta) *Sejam E, F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear limitada e sobrejetiva. Então existe $r > 0$ tal que*

$$T(B_1(0)) \supset B_r(0)$$

Em particular, T é uma aplicação aberta.

Prova. Passo 1. *Seja $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear sobrejetiva. Então existe $r > 0$ tal que*

$$\overline{T(B_1(0))} \supset B_{2r}(0).$$

Seja

$$F_n = n\overline{T(B_1(0))}.$$

Então F_n é fechado e $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, logo pelo Teorema da Categoria de Baire (F é de Banach) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int} F_{n_0} \neq \emptyset$. Em particular, $\operatorname{int} \overline{T(B_1(0))} \neq \emptyset$. Sejam $y \in F$ e $r > 0$ tais que $B_{4r}(y) \subset \overline{T(B_1(0))}$. Em particular, $y, -y \in \overline{T(B_1(0))}$. Obtemos

$$B_{4r}(0) = -y + B_{4r}(y) \subset \overline{T(B_1(0))} + \overline{T(B_1(0))} = \overline{2T(B_1(0))}$$

a última igualdade valendo porque $\overline{T(B_1(0))}$ é convexo (pois aplicações lineares são aplicações convexas, isto é, levam conjuntos convexos em conjuntos convexos, o fecho de um conjunto convexo é convexo e podemos sempre escrever $x + y = 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$). Como $B_{4r}(y) \subset \overline{2T(B_1(0))}$, segue o resultado.
Passo 2. *Seja $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear limitada. Se existe $r > 0$ tal que*

$$\overline{T(B_1(0))} \supset B_{2r}(0),$$

então

$$T(B_1(0)) \supset B_r(0).$$

Dado $y \in B_r(0) \subset F$, queremos encontrar $x \in B_1(0) \subset E$ tal que $Tx = y$. Sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $z \in B_{1/2}(0) \subset E$ tal que $Tz \in B_\varepsilon(y)$. De fato, como $2y \in B_{2r}(0)$, existe $z' \in B_1(0)$ tal que $\|Tz' - 2y\| < \varepsilon$; daí, $\left\|T\frac{z'}{2} - y\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e podemos tomar $z = z'/2$. Escolhendo $\varepsilon = r/2$ obtemos $z_1 \in E$ tal que

$$\|z_1\| < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \|y - Tz_1\| < \frac{r}{2}.$$

Aplicando o mesmo argumento a $y - Tz_1$ e escolhendo $\varepsilon = r/4$, encontramos $z_2 \in E$ tal que

$$\|z_2\| < \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \|(y - Tz_1) - Tz_2\| < \frac{r}{2}.$$

Procedendo desta forma, obtemos uma sequência $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad \|y - T(z_1 + \ldots + z_n)\| < \frac{r}{2^n}$$

para todo n. Em particular, a sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_n = z_1 + \ldots + z_n$$

é de Cauchy. Como E é de Banach, podemos tomar $x = \lim x_n$ e x satisfaz

$$\|x\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

e

$$y = \lim Tx_n = T(\lim x_n) = Tx.$$

Juntando os dois passos, o teorema fica provado. Para ver que T é aberta, seja $U \subset E$ um aberto e mostremos que $T(U)$ é aberto. Dado $y \in T(U)$, seja $x \in E$ tal que $y = Tx$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U$, ou seja, $x + B_\varepsilon(0) \subset U$. Então $y + T(B_\varepsilon(0)) \subset T(U)$. Pelo teorema $T(B_\varepsilon(0)) \supset B_{\varepsilon r}(0)$, logo $B_{\varepsilon r}(y) \subset T(U)$. ■

3.7 Corolário. *Sejam E, F espaços de Banach. Se $T : E \longrightarrow F$ é uma aplicação linear limitada bijetiva, então a aplicação linear $T^{-1} : F \longrightarrow E$ é contínua.*

Prova. Pois a inversa de uma aplicação aberta é contínua. ■
Em outras palavras, um operador linear limitado bijetivo entre espaços de Banach é automaticamente um isomorfismo topológico.

3.8 Corolário. *Seja E um espaço de Banach. Se $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ são duas normas tais que existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_1 \leqslant C \|x\|_2 \quad \text{para todo } x \in E,$$

então elas são normas equivalentes.

3.9 Definição. Sejam E, F espaços vetoriais normados. Dizemos que uma aplicação linear $T : E \longrightarrow F$ é **fechada** se seu gráfico

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in E\}$$

é fechado em $E \times F$.

Observe que o gráfico de uma aplicação linear é um subespaço vetorial de $E \times F$. É claro que toda aplicação linear contínua é fechada, entretanto existem muitos exemplos de operadores lineares importantes na prática que não são contínuos mas pelo menos são fechados. Se E e F são espaços de Banach, os dois conceitos são equivalentes:

3.10 Teorema. (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam E, F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear fechada. Então T é limitada.*

Prova. Consideremos duas normas em E:

$$\|x\|_1 = \|x\|_E \quad \text{e} \quad \|x\|_2 = \|x\|_E + \|Tx\|_F .$$

(A segunda norma é às vezes chamada *norma do gráfico*.) Como $G(T)$ é fechado, E sob a norma do gráfico ainda é um espaço de Banach. De fato, se $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $(E, \|\cdot\|_2)$, então em particular $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $(E, \|\cdot\|_1)$ pois $\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2$ e $\{Tx_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $(F, \|\cdot\|_F)$ pois $\|Tx\|_F \leqslant \|x\|_2$. Se $x = \lim x_n$ e $y = \lim Tx_n$, segue que $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ em $E \times F$. Como G é fechado, temos que $(x, y) \in G$, logo $y = Tx$. Podemos então usar o Corolário 3.8 para concluir que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leqslant C \|x\|_1$$

para todo $x \in E$. Em particular, segue que

$$\|Tx\|_F \leqslant C \|x\|_1 .$$

■
A hipótese dos espaços E, F serem de Banach é necessária (veja os Exercícios 3.7 e 3.14).

3.3 Operadores Adjuntos

O teorema de Hahn-Banach também é crucial para estabelecer uma teoria satisfatória de operadores adjuntos. A partir desta seção, frequentemente usaremos a notação

$$\langle f, x \rangle = f(x)$$

se $x \in E$ e $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear.

3.11 Definição. Sejam E, F espaços vetoriais normados e $A : E \longrightarrow F$ um operador linear limitado. O **operador adjunto** $A^* : F^* \longrightarrow E^*$ é o único operador linear limitado que satisfaz

$$\langle g, Ax \rangle = \langle A^* g, x \rangle$$

para todos $x \in E$ e $g \in F^*$.

3.12 Proposição. *O operador adjunto está bem definido. Além disso,*

$$\|A^*\| = \|A\| .$$

Prova. De fato, se $A : E \longrightarrow F$ é um operador linear limitado e $g \in F^*$, então o funcional $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = g(Ax)$$

é um funcional linear limitado, pois

$$|f(x)| = |g(Ax)| \leqslant \|g\| \|Ax\| \leqslant \|g\| \|A\| \|x\| .$$

Logo, podemos definir $A^* : F^* \longrightarrow E^*$ por

$$A^* g = f.$$

A desigualdade que provamos acima implica que $\|A^* g\| = \|f\| \leqslant \|A\| \|g\|$, portanto

$$\|A^*\| \leqslant \|A\| .$$

Por outro lado,

$$\|A^*\| = \sup_{g \in F^* \setminus \{0\}} \frac{\|A^* g\|}{\|g\|}.$$

Pelo teorema de Hahn-Banach (Corolário 2.24), se $x_0 \in E$ é tal que $\|x_0\| = 1$ e $Ax_0 \neq 0$, então existe $g \in F^*$ tal que

$$\|g\| = 1 \quad \text{e} \quad g(Ax_0) = \|Ax_0\| .$$

Logo

$$\frac{\|A^* g\|}{\|g\|} = \|A^* g\| \geqslant \frac{|\langle A^* g, x_0 \rangle|}{\|x_0\|} = |\langle g, Ax_0 \rangle| = \|Ax_0\| .$$

Assim,

$$\|A^*\| \geqslant \|Ax_0\|$$

para todo $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| = 1$, donde

$$\|A^*\| \geqslant \sup_{\|x_0\|=1} \|Ax_0\| = \|A\| .$$

■

Usaremos a seguinte noção padrão no que se segue.

3.13 Definição. Sejam E, F espaços vetoriais e $A : E \longrightarrow F$ um operador linear. O **núcleo** de A é o subespaço vetorial de E definido por

$$N(A) = \{x \in E : Ax = 0\}$$

e a **imagem** de A é o subespaço vetorial de F definido por

$$R(A) = \{y \in F : y = Ax \text{ para algum } x \in E\}.$$

Uma das razões de se considerar operadores adjuntos é dada a seguir. Muitos problemas em matemática pura e aplicada podem ser formulados da seguinte forma: dados espaços vetoriais normados E, F e um operador linear $A : E \longrightarrow F$, encontrar uma solução para a equação

$$Ax = y.$$

Se $y \in R(A)$, esta equação possuir uma solução x. Então, para cada $g \in F^*$ nós temos

$$g(Ax) = g(y)$$

e tomando o operador adjunto segue que

$$(A^* g)(x) = g(y)$$

Se $g \in N(A^*)$, isto dá

$$g(y) = 0$$

Portanto, uma condição necessária para que $y \in R(A)$ é que $g(y) = 0$ para todo $g \in N(A^*)$. A questão fundamental a ser respondida é se esta condição também é suficiente. Em dimensão finita, esta condição é verdadeira, conhecida como a *alternativa de Fredholm*. Veremos como essa condição é traduzida para espaços vetoriais normados em geral. Antes, estabelecemos notação.

3.14 Definição. Sejam E um espaço vetorial normado e $V \subset E$ um subespaço vetorial. O **anulador** de V é o subespaço vetorial $V^\perp$ de E^* dos funcionais lineares que anulam V, isto é,

$$V^\perp = \{f \in E^* : f(x) = 0 \text{ para todo } x \in V\}.$$

Analogamente, se W é um subespaço vetorial de E^*, o **anulador** de W é o subespaço vetorial $W^\perp$ de E dos vetores que são anulados pelos funcionais lineares de W, ou seja,

$$W^\perp = \{x \in E : f(x) = 0 \text{ para todo } f \in W\}.$$

3.15 Proposição. *Se E é um espaço vetorial normado, V é um subespaço vetorial de E e W é um subespaço vetorial de E^*, então $V^\perp$ e $W^\perp$ são fechados. Além disso,*

$$\left(V^\perp\right)^\perp = \overline{V}$$

e

$$\left(W^\perp\right)^\perp \supset \overline{W}$$

Prova. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V^\perp$ tal que $f_n \to f$ em E^*. Então

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Em particular isso vale para $x \in V$, logo $f(x) = 0$ para todo $x \in V$, donde $f \in V^\perp$.

Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{\perp}$ tal que $x_n \to x$ em E. Então

$$f(x_n) \to f(x) \quad \text{para todo } f \in E^*$$

pois f é contínuo. Em particular isso vale para $f \in W$, logo $f(x) = 0$ para todo $f \in W$, donde $x \in W^{\perp}$.

Claramente $V \subset (V^{\perp})^{\perp}$ e como $(V^{\perp})^{\perp}$ é fechado, segue que $\overline{V} \subset (V^{\perp})^{\perp}$. Reciprocamente, suponha por absurdo que existe $x_0 \in (V^{\perp})^{\perp}$ tal que $x_0 \notin \overline{V}$. Pelo teorema de Hahn-Banach existe $f \in E^*$ tal que $f \equiv 0$ em V e $f(x_0) \neq 0$. Mas então $f \in V^{\perp}$ e não podemos ter $x_0 \in (V^{\perp})^{\perp}$. ■

Em particular, se V é um subespaço fechado de E, vale a igualdade

$$(V^{\perp})^{\perp} = V.$$

Veremos no próximo capítulo que se E é *reflexivo* vale a igualdade

$$(W^{\perp})^{\perp} = \overline{W}$$

3.16 Teorema. *Sejam E, F espaços vetoriais normados e $A : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. Então vale:*

(i) $N(A) = R(A^*)^{\perp}$.

(ii) $N(A^*) = R(A)^{\perp}$.

(iii) $\overline{R(A)} = N(A^*)^{\perp}$.

(iv) $\overline{R(A^*)} \subset N(A)^{\perp}$.

Prova. (i) Se $x \in N(A)$, então

$$\langle A^*g, x\rangle = \langle g, Ax\rangle = \langle g, 0\rangle = 0$$

para todo $g \in F^*$, ou seja, $x \in R(A^*)^{\perp}$. Reciprocamente, se $x \in R(A^*)^{\perp}$, então

$$\langle g, Ax\rangle = \langle A^*g, x\rangle = 0$$

para todo $g \in F^*$, ou seja, $Ax = 0$ e $x \in N(A)$.

(ii) Se $g \in N(A^*)$, então

$$\langle g, Ax\rangle = \langle A^*g, x\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$$

para todo $x \in E$, logo $g \in R(A)^{\perp}$. Reciprocamente, se $g \in R(A)^{\perp}$, então

$$\langle A^*g, x\rangle = \langle g, Ax\rangle = 0$$

para todo $x \in E$, logo $A^*g = 0$ e $g \in N(A^*)$.

(iii) e (iv) decorrem da aplicação da proposição anterior a (ii) e (i), respectivamente. ■

3.17 Corolário. *Seja E um espaço vetorial normado de dimensão finita e $A : E \longrightarrow E$ um operador linear. Então*

$$A \text{ é injetiva se e somente se } A^* \text{ é sobrejetiva}$$

e

$$A \text{ é sobrejetiva se e somente se } A^* \text{ é injetiva.}$$

No caso de espaços de Banach mais gerais, podemos concluir que se A é sobrejetiva então A^* é injetiva:

3.18 Teorema. *Sejam E, F espaços de Banach e $A : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear fechada. Então são equivalentes*

(i) $R(A) = F$.

(ii) A^* *é limitado inferiormente.*

(iii) A *é uma aplicação aberta.*

Prova. Pelo teorema do gráfico fechado, A é limitada.
(i)$\Rightarrow$(ii) Como A é sobrejetiva, pelo teorema da aplicação aberta existe $r > 0$ tal que $A(B_1(0)) \supset B_r(0)$. Logo,

$$\|A^*g\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle A^*g, x\rangle| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle g, Ax\rangle| \geqslant r \sup_{\|y\|\leqslant 1} |\langle g, y\rangle| = r\,\|g\|\,.$$

(ii)$\Longrightarrow$(iii)Vamos mostrar que A satisfaz o primeiro passo da demonstração do teorema da aplicação aberta: existe $r > 0$ tal que

$$\overline{A(B_1(0))} \supset B_r(0)\,.$$

Como A é limitada, seguirá do segundo passo da demonstração daquele teorema que A é aberta. Seja $r > 0$ tal que

$$\|A^*g\| \geqslant r\,\|g\|$$

para todo $g \in F^*$. Equivalentemente, mostraremos que se $y_0 \notin \overline{A(B_1(0))}$, então $\|y_0\| > r$. Aplicando a segunda forma geométrica do teorema de Hanh-Banach aos conjuntos convexos $\{y\}$ e $\overline{A(B_1(0))}$, obtemos $g \in F^*$ tal que

$$|g(y)| < 1 < |g(y_0)|$$

para todo $y \in \overline{A(B_1(0))}$ (podemos tomar $g = f/\alpha$ para f, α do enunciado daquele teorema). Em particular, isto implica que

$$\|A^*g\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle A^*g, x\rangle| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle g, Ax\rangle| \leqslant 1$$

e

$$r < r\,|g(y_0)| \leqslant r\,\|g\|\,\|y_0\| \leqslant \|A^*g\|\,\|y_0\| \leqslant \|y_0\|\,,$$

conforme queríamos.
(iii)$\Rightarrow$(i) Como A é aberta, $R(A)$ é um subespaço vetorial aberto de F. Isso só é possível se $R(A) = F$. ■

3.19 Teorema. (Teorema da Imagem Fechada de Banach) *Sejam* E, F *espaços de Banach e* $A : E \longrightarrow F$ *uma aplicação linear fechada. Então são equivalentes*

(i) $R(A)$ *é fechado.*

(ii) $R(A^*)$ *é fechado.*

(iii) $R(A) = N(A^*)^{\perp}$.

(iv) $R(A^*) = N(A)^{\perp}$.

Prova. (i)$\Leftrightarrow$(iii) segue diretamente do Teorema 3.16, logo é suficiente provar a cadeia de implicações (i)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(i).
(i)$\Rightarrow$(iv) Pelo Teorema 3.16, temos $R(A^*) \subset N(A)^{\perp}$, logo resta apenas mostrar que $N(A)^{\perp} \subset R(A^*)$. Seja $f \in N(A)^{\perp}$; vamos obter $g \in F^*$ tal que $A^*g = f$. Defina um funcional linear $g_0 : R(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_0(Ax) = f(x)$$

para todo $x \in E$. g_0 está bem definido, porque se $Ax_1 = Ax_2$ então $x_1 - x_2 \in N(A)$, logo $f(x_1 - x_2) = 0$. Para ver que g_0 é limitada, considere a restrição de contradomínio $A : E \longrightarrow R(A)$; como $R(A)$ é um subespaço vetorial fechado de um espaço de Banach, ele também é um espaço de Banach e podemos aplicar o teorema da aplicação aberta para concluir que existe $r > 0$ tal que

$$A(B_1(0)) \supset B_r(0)_{R(A)}$$

onde $B_r(0)_{R(A)}$ denota a bola aberta de centro na origem e raio r no espaço de Banach $R(A)$. Isso implica que existe $C > 0$ tal que para todo $y \in R(A)$ existe $x \in E$ satisfazendo $Ax = y$ e $\|x\| \leqslant C\|y\|$. De fato, se $y \in R(A)$, então $\dfrac{r}{2\|y\|} y \in B_r(0)_{R(A)}$, logo existe $z \in B_1(0)$ tal que

$$Az = \frac{r}{2\|y\|} y$$

e podemos tomar

$$x = \frac{2\|y\|}{r} z$$

de modo que $Ax = y$ e $\|x\| \leqslant \dfrac{r}{2}\|y\|$. Daí,

$$|g_0(y)| = |g_0(Ax)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\| \leqslant C\|f\|\,\|y\|.$$

Portanto, pelo teorema de Hahn-Banach g_0 pode ser estendida a um funcional $g \in F^*$ com

$$\langle A^* g, x\rangle = \langle g, Ax\rangle = \langle g_0, Ax\rangle = f(x).$$

(iv)⇒(ii) Pelo Teorema 3.16,

$$R(A^*) \subset \overline{R(A^*)} \subset N(A)^{\perp},$$

logo se $R(A^*) = N(A)^{\perp}$, segue que $R(A^*) = \overline{R(A^*)}$.
(ii)⇒(i) Seja $Z = \overline{R(A)}$. Como $R(A)$ é denso em Z, o anulador de $R(A)$ em Z só pode ser o funcional nulo. Defina $S : E \longrightarrow Z$ por $Sx = Ax$ (S é uma extensão do contradomínio de A). Observe que como A é fechada, pelo teorema do gráfico fechado A é limitada e portanto S também é. Além disso, $R(S) = R(A)$, donde $R(S)^{\perp} = 0$, como acabamos de observar. Mas, pelo Teorema 3.16, $N(S^*) = R(S)^{\perp}$, portanto concluímos que S^* é injetiva.

Agora vamos mostrar que $R(S^*) = R(A^*)$. Seja $g_0 \in Z^*$. Pelo teorema de Hahn-Banach, existe $g \in F^*$ extensão de g_0. Daí,

$$\langle A^* g, x\rangle = \langle g, Ax\rangle = \langle g, Sx\rangle = \langle g_0, Sx\rangle = \langle S^* g_0, x\rangle$$

para todo $x \in E$, o que mostra que $S^* g_0 \in R(A^*)$, ou seja, provamos que $R(S^*) \subset R(A^*)$. Reciprocamente, se $g \in F^*$, considere a restrição $g_0 = g|_Z$. Temos, de modo análogo,

$$\langle S^* g_0, x\rangle = \langle g_0, Sx\rangle = \langle g, Sx\rangle = \langle g, Ax\rangle = \langle A^* g, x\rangle$$

para todo $x \in E$, donde $R(A^*) \subset R(S^*)$. Por hipótese, temos então que $R(S^*)$ é fechado, portanto é um espaço de Banach, já que é um subespaço vetorial fechado do espaço de Banach Z^* (lembre-se que o dual de um espaço vetorial normado sempre é um espaço de Banach).

Obtemos então que a restrição de contradomínio $S^* : Z^* \longrightarrow R(S^*)$ é um operador linear contínuo bijetivo. Pelo Corolário 3.7, a inversa $(S^*)^{-1}$ existe e é contínua. Em particular, S^* é limitada inferiormente e existe $m > 0$ tal que

$$\|S^* g_0\| \geqslant m\|g_0\|$$

para todo $g_0 \in Z^*$. O teorema anterior implica que $R(S) = Z$, logo $R(A) = Z$ e portanto $R(A)$ é fechado. ■

Portanto, se $R(A)$ é fechado (por exemplo, se A for limitado), uma condição necessária e suficiente para que $y \in R(A)$ é que $g(y) = 0$ para todo $g \in N(A^*)$.

3.4 Exercícios

3.1 Seja $T : E \longrightarrow F$ um operador linear limitado inferiormente tal que $\operatorname{Im} T$ é um subespaço fechado de F. Mostre que T^{-1} é um operador linear fechado.

3.2 Mostre que se a inversa de um operador linear fechado existir, então ela também é um operador linear fechado.

3.3 Mostre que operador linear $D : C^1([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ definido por

$$Df = f'$$

é fechado.

3.4 Seja

$$E = \left\{ f \in C([0,1]) : \text{ existe } \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t} \right\}.$$

Defina uma aplicação linear $T : E \longrightarrow C([0,1])$ por

$$Tf(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{t} & \text{se } t \neq 0, \\ \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(t)}{t} & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Mostre que T é fechado.

3.5 Sejam E, F espaços de Banach e $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(E,F)$ tal que $\{f(T_n x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada para todo $x \in E$ e para todo $f \in F^*$. Mostre que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada.

3.6 Se E, F são espaços vetoriais normados, mostre que $(E \times F)^* = E^* \times F^*$.

3.7 Considere o seguinte subespaço de ℓ^1:

$$F = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 : \sum_{n=1}^{\infty} n\,|x_n| < \infty \right\}$$

a) Mostre que F é um subespaço vetorial próprio denso de ℓ^1, portanto F não é um espaço de Banach.

b) Verifique que a aplicação linear $T : F \longrightarrow \ell^1$ definida por

$$T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

é uma aplicação fechada que não é limitada.

c) Mostre que a inversa de T está bem definida, é limitada, sobrejetiva, mas não é aberta.

3.8 Sejam E, F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear limitado. Suponha que existam um espaço de Banach G e operadores lineares $A : E \longrightarrow G$ e $B : G \longrightarrow F$ tais que $T = B \circ A$. Usando o teorema do gráfico fechado, mostre que se B é limitado e injetivo, então A é limitado.

3.9 Sejam E um espaço de Banach e F um espaço vetorial normado. Seja $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(E,F)$ uma sequência de operadores lineares limitados tal que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = \infty$. Mostre que existe um ponto $x \in E$ tal que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| = \infty$.

3.10 Sejam E, F espaços de Banach. Se $T : E \longrightarrow F$ é uma aplicação linear tal que $f \circ T \in E^*$ para todo $f \in F^*$, mostre que T é limitada.

3.11 Sejam L, M subespaços vetoriais fechados de um espaço vetorial normado E. Mostre que se $L \neq M$, então $L^\perp \neq M^\perp$.

3.12 Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial próprio de E. Mostre que se $T_0 : F \longrightarrow \ell^\infty$ é uma aplicação linear limitada, então T se estende a uma aplicação linear limitada $T : E \longrightarrow \ell^\infty$ com $\|T\| = \|T_0\|$.

3.13 Considere ℓ^∞ e suponha que $\|\cdot\|$ é outra norma em ℓ^∞ tal que $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$ também é um espaço de Banach. Se para cada $i \in \mathbb{N}$ a projeção na i-ésima coordenada $\pi_i\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = x_i$ é contínua na norma $\|\cdot\|$, mostre que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x\| \leqslant C \|x\|_{\ell^\infty}$$

para todo $x \in \ell^\infty$ (sugestão: use o teorema do gráfico fechado). Conclua que as normas $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes.

3.14 Mostre que a aplicação identidade $I : \left(C^0[0,1], L^1\right) \longrightarrow \left(C^0[0,1], L^\infty\right)$ tem gráfico fechado mas não é limitada.

Capítulo 4

Espaços Reflexivos

4.1 Espaços Reflexivos

Seja E um espaço vetorial normado. Denote

$$(E^*)^* = E^{**}.$$

E^{**} é chamado o **espaço bidual** de E. Podemos definir um operador linear limitado canônico

$$J : E \longrightarrow E^{**} \tag{4.1}$$

da seguinte forma: para cada $x \in E$, o funcional linear limitado $Jx : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$(Jx)(f) = f(x) \tag{4.2}$$

para todo $f \in E^*$. De fato, Jx é um funcional linear limitado em E^* pois

$$|(Jx)(f)| = |f(x)| \leqslant \|f\| \|x\| = \|x\| \|f\|,$$

ou seja,

$$\|Jx\| \leqslant \|x\|.$$

Além disso, J é realmente uma isometria de E sobre sua imagem $J(E)$. Com efeito, pelo teorema de Hahn-Banach, para cada $x \in X$ existe um funcional linear $f_0 \in E^*$ tal que $\|f_0\| = 1$ e $f_0(x) = \|x\|$, logo

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\|=1} |(Jx)(f)| \geqslant |(Jx)(f_0)| = f_0(x) = \|x\|,$$

portanto

$$\|Jx\| = \|x\| \tag{4.3}$$

para todo $x \in E$. Em particular, J é injetivo. Se J for também sobrejetivo, dizemos que E é *reflexivo*. Isso implica que J é ao mesmo tempo um isomorfismo e uma isometria, em particular é um isomorfismo topológico. Como $E^{**} = (E^*)^*$ é um espaço de Banach, segue que uma condição necessária para que um espaço vetorial normado seja reflexivo é que ele seja de Banach. Em vista disso, definimos

4.1 Definição. Dizemos que um espaço de Banach E é **reflexivo** se o operador $J : E \longrightarrow E^{**}$ for um isomorfismo isométrico.

É importante saber que E e E^{**} serem isometricamente isomorfos através de um isomorfimo isométrico diferente do operador J não garante que E seja reflexivo, pois pode ocorrer que apesar disso o operador J não seja sobrejetivo (veja [James1] e [James2]).

Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é reflexivo (veja Exercício 4.1). Existem importante exemplos de espaços de Banach de dimensão infinita que não são reflexivos, como veremos mais tarde.

4.2 Teorema. *Seja E um espaço reflexivo. Se $F \subset E$ é um subespaço vetorial fechado, então F é reflexivo.*

Prova. Dado $f^* \in F^*$ temos que mostrar que existe $x \in F$ tal que $f^* = Jx$. Considere a submersão contínua $I : E^* \hookrightarrow F^*$ definida por

$$If = f|_F.$$

Pelo teorema de Hahn-Banach a submersão é sobrejetiva, pois todo funcional linear limitado definido em F se estende a um funcional linear limitado definido em E (obviamente ela não é injetiva se F é um subespaço próprio de E). Esta submersão é contínua pois

$$\|If\|_{F^*} = \sup_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{|If(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|_{E^*},$$

logo

$$\|If\| = \sup_{f \in E^* \setminus \{0\}} \frac{\|If\|_{F^*}}{\|f\|_{E^*}} \leqslant 1.$$

Através desta submersão, f^* induz um funcional linear $g^* \in E^{**}$ quando definimos

$$g^*(f) = (f^* \circ I)(f) = f^*(f|_F).$$

Como E é reflexivo, existe $x \in E$ tal que $g^* = Jx$, ou seja,

$$f^*(f|_F) = (Jx)(f)$$

para todo $f \in E$. Afirmamos que $x \in F$. De fato, se $x \notin F$, como F é fechado podemos aplicar o teorema de Hahn-Banach para concluir que existe um funcional linear f_0 que se anula em F tal que $f_0(x) = 1$ o que é uma contradição, pois

$$f^*(f_0|_F) = 0$$

enquanto que

$$(Jx)(f_0) = f_0(x) = 1.$$

■

Um subespaço vetorial de um espaço reflexivo que não é fechado obviamente não pode ser reflexivo, já que todo espaço reflexivo é de Banach.

4.3 Proposição. *Se E é um espaço reflexivo e W é um subespaço vetorial de E^*, então*

$$\left(W^\perp\right)^\perp = \overline{W}.$$

Prova. Já vimos na Proposição 4.15 que $\left(W^\perp\right)^\perp \supset \overline{W}$. Suponha por absurdo que existe $f_0 \in \left(W^\perp\right)^\perp$ tal que $f_0 \notin \overline{W}$. Pelo teorema de Hahn-Banach, existe $f^* \in E^{**}$ tal que $f^*(f) = 0$ para todo $f \in \overline{W}$ e $f^*(f_0) \neq 0$. Como E é reflexivo, existe $x \in E$ tal que $f^*(f) = f(x)$ para todo $f \in E^*$. Em particular, $f(x) = 0$ para todo $f \in \overline{W}$, logo $x \in W^\perp$. Mas então $f_0(x) = 0$, pois $f_0 \in \left(W^\perp\right)^\perp$, contradizendo $f_0(x) = f^*(f_0) \neq 0$. ■

4.4 Teorema. *Seja E um espaço de Banach. Então E é um espaço reflexivo se e somente se E^* for.*

Prova. Suponha que E seja reflexivo. Sejam $J : E \longrightarrow E^{**}$ e $J^* : E^* \longrightarrow E^{***}$ as aplicações canônicas, isto é,

$$(Jx)(f) = f(x)$$

e

$$(J^*f)(f^*) = f^*(f).$$

Seja $f^{**} \in E^{***}$. Para provar que E^* é reflexivo, precisamos encontrar $f \in E^*$ tal que $f^{**} = J^* f$. Considere $f := f^{**} \circ J \in E^*$:

$$E \xrightarrow{J} E^{**} \xrightarrow{f^{**}} \mathbb{R}.$$

Logo,

$$f^{**}(Jx) = f(x) = (Jx)(f)$$

para todo $x \in E$. Como E é reflexivo, para todo $f^* \in E^{**}$ existe $x \in E$ tal que $f^* = Jx$. Substituindo na última equação acima, segue que

$$f^{**}(f^*) = f^*(f)$$

para todo $f^* \in E^{**}$, ou seja,

$$f^{**} = J^* f.$$

Reciprocamente, suponha que E^* é reflexivo. Para provar que E também é reflexivo, observamos em primeiro lugar que porque E é um espaço de Banach, o subespaço vetorial $R(J)$ é um subespaço fechado de E^{**}. De fato, como J é uma isometria, se $Jx_n \to f^*$ em E^{**} então em particular $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em E. Como E é um espaço de Banach, existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$ em E. Logo, $Jx_n \to Jx$ e portanto $f^* = Jx \in R(J)$.

Suponha por absurdo que $R(J) \neq E^{**}$. Seja $f^* \in E^{**} \backslash R(J)$. Pelo teorema de Hahn-Banach, existe $f^{**} \in E^{***}$ tal que $f^{**} = 0$ em $R(J)$ e $f^{**}(f^*) \neq 0$. Como E^* é reflexivo, existe $f \in E^*$ tal que $f^{**} = J^* f$. Daí, para todo $x \in E$ vale

$$f(x) = (Jx)(f) = (J^* f)(Jx) = f^{**}(Jx) = 0,$$

isto é, f é o funcional nulo. Mas

$$f^*(f) = (J^* f)(f^*) = f^{**}(f^*) \neq 0,$$

contradição. ■

4.2 Espaços Separáveis

Lembramos que um espaço topológico é *separável* se ele possui um subconjunto denso enumerável.

4.5 Teorema. *Seja E um espaço vetorial normado. Se E^* é separável, então E também é.*

Prova. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um subconjunto enumerável denso em E^*. Como

$$\|f_n\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} |f_n(x)|,$$

podemos escolher para cada n um elemento $x_n \in E$ tal que $\|x_n\| = 1$ e

$$|f_n(x_n)| \geqslant \frac{\|f_n\|}{2}.$$

Seja

$$M = \overline{\langle x_1, x_2, \ldots \rangle}$$

o fecho do subespaço gerado pelo conjunto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Observe que M é separável, pois o subconjunto das combinações lineares dos x_n com coeficientes racionais formam um subconjunto enumerável denso em M. Afirmamos que $M = E$. De fato, se $x_0 \in E \backslash M$, pelo teorema de Hahn-Banach (Corolário 2.23) existe $f \in E^* \cap M^\perp$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x_0) \neq 0$. Em particular, $f(x_n) = 0$ para todo n, logo

$$\frac{\|f_n\|}{2} \leqslant |f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \|f_n - f\| \|x_n\| = \|f_n - f\|,$$

donde

$$1 = \|f\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f_n\| \leqslant 3\|f_n - f\|,$$

ou seja,

$$\|f_n - f\| \geqslant \frac{1}{3},$$

contradizendo o fato que $\{f_n\}$ é denso em E^*. ■
Vale a recíproca quando E é um espaço reflexivo:

4.6 Corolário. *Se E é um espaço reflexivo separável, então E^* também é.*

Prova. Pela Proposição 4.4 temos que E^* é reflexivo. Para mostrar que E^* é separável, pelo teorema anterior basta provar que E^{**} é separável. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um subconjunto enumerável denso em E. Dado $f^* \in E^{**}$, existe $x \in E$ tal que $Jx = f^*$, e dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Como J é uma isometria, segue que $\|Jx_n - f^*\| < \varepsilon$. Vemos portanto que $\{Jx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um subconjunto enumerável denso em E^{**}. ■

4.3 Exemplo 1: Espaços ℓ^p

Os espaços $\ell^p(n)$ tem dimensão finita, logo são reflexivos (veja o Exercício 4.1). Por outro lado, os espaços ℓ^p são reflexivos se e somente se $1 < p < \infty$, isto é, ℓ^1 e ℓ^∞ são exemplos de espaços de Banach que não são espaços reflexivos. Vamos provar estes fatos, além de alguns fatos auxiliares que por si só já são muito úteis.

4.7 Proposição. *ℓ^p são espaços separáveis para $1 \leqslant p < \infty$.*

Prova. Seja

$$e_n = (0, \ldots, 0, \underset{n}{1}, 0, \ldots),$$

de modo que todo elemento $x \in \ell^p$ se escreve de maneira única na forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

[Como veremos mais tarde, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *base de Schauder* para ℓ^p.] Então o conjunto de todas as combinações lineares com coeficientes racionais dos e_n é um subconjunto enumerável denso em ℓ^p.■

4.8 Proposição. *ℓ^∞ não é separável.*

Prova. Observe que em ℓ^∞, o fecho do subespaço gerado por $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é apenas o subespaço ℓ_0^∞ das sequências convergentes para 0. Para ver que ℓ^∞ não é enumerável, considere o subconjunto não-enumerável $\{0,1\}^\omega \subset \ell^\infty$ das sequências cujos elementos são apenas 0 ou 1 (uma tal sequência tem norma 1 em ℓ^∞). Se $x, y \in \{0,1\}^\omega$ e $x \neq y$, então $\|x - y\|_{\ell^\infty} = 1$, logo existe um número não-enumerável de bolas com centro nos pontos de $\{0,1\}^\omega$ e raio 1/2 que não se interceptam. ■

4.9 Proposição. *Se $1 < p < \infty$, então*

$$(\ell^p)^* = \ell^{p'}$$

no sentido que estes espaços são isometricamente isomorfos.

Prova. Afirmamos que a aplicação linear

$$\begin{aligned} \Phi : \ell^{p'} &\longrightarrow (\ell^p)^* \\ y &\mapsto f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n. \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico. Pela desigualdade de Hölder temos

$$|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \|y\|_{\ell^{p'}} \|x\|_{\ell^p},$$

de modo que $f \in (\ell^p)^*$ e

$$\|f\|_{(\ell^p)^*} \leqslant \|y\|_{\ell^{p'}}, \tag{4.4}$$

logo Φ é contínua.

Agora exibiremos a inversa de Φ e mostraremos que ela também é contínua. Já vimos que todo elemento $x \in \ell^p$ se escreve de maneira única na forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

Então, dado $f \in (\ell^p)^*$, por continuidade temos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n).$$

De fato, se para cada $k \in \mathbb{N}$ denotamos

$$z_k = \sum_{n=1}^{k} x_n e_n,$$

por linearidade temos

$$f(z_k) = \sum_{n=1}^{k} x_n f(e_n).$$

de modo que

$$f(x) = f\left(\lim_{k\to\infty} z_k\right) = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n).$$

Notando que $f(e_n) = (\Phi y)(e_n) = y_n$, vemos agora que a inversa de Φ é dada por

$$\begin{aligned} \Psi : (\ell^p)^* &\longrightarrow \ell^{p'} \\ f &\mapsto (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Para mostrar que Ψ está de fato bem definida e é contínua, defina $z_k \in \ell^p$ por

$$z_k^{(i)} = \begin{cases} \dfrac{|f(e_i)|^{p'}}{f(e_i)} & \text{se } i \leqslant k \text{ e } f(e_i) \neq 0, \\ 0 & \text{se } i > k \text{ ou } f(e_i) = 0, \end{cases}$$

de modo que

$$f(z_k) = \sum_{n=1}^{k} |f(e_n)|^{p'}.$$

Temos

$$|f(z_k)| \leqslant \|f\| \|z_k\| = \|f\| \left(\sum_{n=1}^{k} |f(e_n)|^{(p'-1)p}\right)^{1/p} = \|f\| \left(\sum_{n=1}^{k} |f(e_n)|^{p'}\right)^{1/p},$$

já que $p = p'/(p'-1)$, logo

$$\sum_{n=1}^{k} |f(e_n)|^{p'} = f(z_k) = |f(z_k)| \leqslant \|f\|_{(\ell^p)^*} \left(\sum_{n=1}^{k} |f(e_n)|^{p'} \right)^{1/p},$$

donde

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |f(e_n)|^{p'} \right)^{1/p'} \leqslant \|f\|_{(\ell^p)^*}.$$

Tomando o limite quando $k \to \infty$, segue que

$$\|(f(e_n))\|_{\ell^{p'}} \leqslant \|f\|_{(\ell^p)^*}, \tag{4.5}$$

ou seja, a inversa Ψ também está bem definida e é contínua.

Juntando as desigualdades (4.5) e (4.4) vemos que Φ é uma isometria. ■

4.10 Proposição. *ℓ^p é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$.*

Prova. Embora a aplicação do resultado anterior duas vezes produza

$$(\ell^p)^{**} = \left(\ell^{p'}\right)^* = \ell^p,$$

isso por si só não prova a reflexividade de ℓ^p, pois, como já observamos antes, a existência de um isomorfismo isométrico arbitrário não garante a sobrejetividade da aplicação canônica J. No entanto, como vimos na demonstração da proposição anterior, como $(\ell^p)^* = \ell^{p'}$, a cada $g \in (\ell^p)^{**}$ corresponde um funcional $\widetilde{g} \in \left(\ell^{p'}\right)^*$ tal que $g(f) = \widetilde{g}(y)$, onde

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

para todo $x \in \ell^p$. Analogamente, como $\left(\ell^{p'}\right)^* = \ell^p$, a cada $\widetilde{g} \in \left(\ell^{p'}\right)^*$ corresponde um elemento $x \in \ell^p$ tal que

$$\widetilde{g}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

para todo $y \in \ell^{p'}$. Portanto,

$$g(f) = \widetilde{g}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f(x) = (Jx)(f).$$

■

4.11 Proposição.

$$\left(\ell^1\right)^* = \ell^\infty$$

no sentido que estes espaços são isometricamente isomorfos.

Prova. Como na demonstração do resultado anterior, mostraremos que a aplicação linear

$$\begin{aligned} \Phi : \ell^\infty &\longrightarrow \left(\ell^1\right)^* \\ y &\mapsto f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n. \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico. Pela desigualdade de Hölder temos

$$|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \|y\|_{\ell^\infty} \|x\|_{\ell^1},$$

de modo que $f \in (\ell^1)^*$ e

$$\|f\|_{(\ell^1)^*} \leqslant \|y\|_{\ell^\infty}, \tag{4.6}$$

logo Φ é contínua.

A inversa de Φ, como na demonstração do teorema anterior é dada por

$$\begin{aligned} \Psi : (\ell^1)^* &\longrightarrow \ell^\infty \\ f &\mapsto (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Como $\|e_n\|_{\ell^1} = 1$, temos

$$|f(e_n)| \leqslant \|f\|_{(\ell^1)^*} \|e_n\|_{\ell^1} = \|f\|_{(\ell^1)^*},$$

de modo que Ψ está bem definida e

$$\|(f(e_n))\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(e_n)| \leqslant \|f\|_{(\ell^p)^*}. \tag{4.7}$$

(4.6) e (4.7) provam que Φ é uma isometria. ■

4.12 Proposição.

$$(\ell^\infty)^* \neq \ell^1.$$

Prova. Se tivéssemos $(\ell^\infty)^* = \ell^1$, como ℓ^1 é separável, ℓ^∞ também seria pelo Teorema 4.5, contradizendo a Proposição 4.8. ■

4.13 Corolário. *ℓ^1 e ℓ^∞ não são reflexivos.*

Prova. Como ℓ^1 é separável, enquanto que o seu dual é isometricamente isomorfo a ℓ^∞, que não é separável, segue do Corolário 4.6 que ℓ^1 não é reflexivo. Consequentemente, pelo Teorema 4.4, seu dual também não pode ser reflexivo, ou seja, ℓ^∞ não é reflexivo. ■

Veja também o Exercício 4.5 para uma demonstração alternativa.

4.4 Espaços Uniformemente Convexos

4.14 Definição. Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que E é **uniformemente convexo** se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos $x, y \in E$ que satisfazem $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$ e $\|x - y\| > \varepsilon$ vale

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

É importante ressaltar que a propriedade de ser uniformemente convexo é uma propriedade da norma: podem existir duas normas equivalentes tais que em relação a uma delas o espaço é uniformemente convexo, mas não em relação a outra. Mais especificamente, convexidade uniforme é uma propriedade da bola unitária: em um espaço uniformemente convexo a bola unitária é "bem redonda".

Note que o ε na definição de convexidade uniforme satisfaz

4.15 Exemplo. $\ell^2(n)$, ou seja, $\mathbb{R}^n$ com a norma euclideana, é uniformemente convexo, ao passo que $\ell^1(n)$, ou seja, $\mathbb{R}^n$ com a norma da soma, não é uniformemente convexo. Isso fica bastante claro quando se olha para as bolas unitárias em cada um destes espaços (para $n = 2$).

De fato, para ver que $\ell^1(n)$ não é uniformemente convexo, tome $x = e_1$ e $y = e_2$, de modo que $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| = 2$ enquanto que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1.$$

Para ver que $\ell^2(n)$ é uniformemente convexo, usamos a identidade do paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Assim, se $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$ e $\|x - y\| > \varepsilon$, então

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{4}\|x+y\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 \\ &< 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta$$

para $\delta = 1 - \left(1 - \dfrac{\varepsilon^2}{4}\right)^{1/2} > 0$ pois $\varepsilon < \|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant 2$. $\square$

4.16 Teorema. *Se E é um espaço de Banach uniformemente convexo, então E é reflexivo.*

Prova. A demonstração deste resultado requer o conhecimentos da topologia fraca e fica adiada para o próximo capítulo. $\blacksquare$

Este resultado é surpreendente, já que uma propriedade geométrica (a de ser uniformemente convexo) implica uma propriedade topológica (a de ser reflexivo). Ela pode ser usada para provar que certos espaços são reflexivos. Por outro lado, existem espaços reflexivos que não possuem nenhuma norma em relação a qual eles são uniformemente convexos [Day].

4.5 Exemplo 2: Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção consideraremos sempre $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Dado um conjunto A, denotaremos por χ_A a função característica de A, isto é,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Denotaremos por $C_c(\Omega)$ o conjunto das funções contínuas com suporte compacto em Ω.

4.17 Lema. *$C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leqslant p < \infty$.*

Prova. Primeiro Passo. *O conjunto das funções em $L^p(\Omega)$ com suporte compacto é denso em $L^p(\Omega)$.*

Seja

$$\Omega_n = \left\{ x \in \Omega : \text{dist}\left(x, \mathbb{R}^N \backslash \Omega\right) > \frac{1}{n} \text{ e } |x| < n \right\},$$

de modo que Ω_n é aberto, $\overline{\Omega}_n$ é compacto, $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ e $\Omega = \cup \Omega_n$. Dado $f \in L^p(\Omega)$, defina

$$f_n = f\chi_{\Omega_n}.$$

Do teorema da convergência dominada segue que

$$f_n \to f \quad \text{em } L^p(\Omega),$$

pois $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in \Omega$ (de fato, $f_n(x) = f(x)$ para todo n suficientemente grande) e $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant 2^p \|f\|_{L^p(\Omega)}$.

Segundo Passo.

Usando o passo anterior, dado $\varepsilon > 0$ e $f \in L^p(\Omega)$ existe $g \in L^p(\Omega)$ com suporte compacto em Ω tal que

$$\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por definição de integral, existe uma função simples de suporte compacto (contido no suporte de g)

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \in L^p(\Omega)$$

tal que

$$\|g - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Fixado i, existem um aberto U_i e um fechado F_i tal que $F_i \subset E_i \subset U_i$ e

$$|U_i \backslash F_i| < \left(\frac{\varepsilon}{4ka_i}\right)^p.$$

De fato, isso vale para qualquer conjunto mensurável E: dado $\delta > 0$, escolha um aberto W tal que $\mathbb{R}^N \backslash E \subset W$ e $\left|W \backslash \left(\mathbb{R}^N \backslash E\right)\right| < \delta/2$; tome $F = \mathbb{R}^N \backslash W$ e um aberto U tal que $E \subset U$ e $|E \backslash U| < \delta/2$. Como

$$U \backslash F = U \backslash E \cup W \backslash \left(\mathbb{R}^N \backslash E\right)$$

e esta união é disjunta, segue que

$$|U \backslash F| = |U \backslash E| + \left|W \backslash \left(\mathbb{R}^N \backslash E\right)\right| < \delta.$$

Agora, defina a função de Urysohn

$$h_i(x) = \frac{\operatorname{dist}\left(x, \mathbb{R}^N \backslash U_i\right)}{\operatorname{dist}\left(x, \mathbb{R}^N \backslash U_i\right) + \operatorname{dist}\left(x, F_i\right)}.$$

Então h_i é uma função contínua (pois seu denominador nunca se anula) que satisfaz $0 \leqslant h_i \leqslant 1$ e

$$h_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \backslash U_i, \\ 1 & \text{se } x \in F_i. \end{cases}$$

Em particular, o suporte de h_i é compacto. Seja

$$h = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i \in C_c(\Omega).$$

Temos

$$\begin{aligned}\|\varphi - h\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \sum_{i=1}^n a_i \|\chi_{E_i} - h_i\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \sum_{i=1}^n a_i \|\chi_{E_i} - h_i\|_{L^p(U_i\backslash F_i)} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n a_i \|1\|_{L^p(U_i\backslash F_i)} = \sum_{i=1}^n a_i |U_i\backslash F_i|^{1/p} \\ &< \frac{\varepsilon}{4},\end{aligned}$$

pois $\chi_{E_i} - h_i = 0$ em F_i ou em $\mathbb{R}^N\backslash U_i$ e $|\chi_{E_i} - h_i| \leqslant 1$ em $U_i\backslash F_i$. Portanto,

$$\|f - h\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f - g\|_{L^p(\Omega)} + \|g - \varphi\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi - h\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

■

De agora em diante, denotaremos os espaços $L^p(\Omega)$ simplesmente por L^p.

4.18 Proposição. *L^p são espaços separáveis para $1 \leqslant p < \infty$.*

Prova. Seja $\{\Omega_n\}$ como no lema anterior. Denote por $\mathbb{P}$ o conjunto enumerável das funções polinomiais em $\mathbb{R}^N$ com coeficientes racionais e considere

$$\mathbb{P}_n = \{p\chi_{\Omega_n} : p \in \mathbb{P}\}.$$

Dados $f \in L^p$ e $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua de suporte compacto g tal que $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon/2$. Seja n tal que

$$\frac{1}{n} < \operatorname{dist}\left(\operatorname{supp} g, \mathbb{R}^N\backslash\Omega\right),$$

o que garante $\operatorname{supp} g \subset \Omega_n$. Pelo teorema de aproximação de Weierstrass, existe $p \in \mathbb{P}_n$ tal que

$$\|g - p\|_{L^\infty} < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{|\Omega_n|^{1/p}}.$$

Daí

$$\begin{aligned}\|f - p\|_{L^p} &\leqslant \|f - g\|_{L^p} + \|g - p\|_{L^\infty} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_{\Omega_n} |g - p|^p\right)^{1/p} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{|\Omega_n|^{1/p}}\left(\int_{\Omega_n} 1\right)^{1/p} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

■

4.19 Proposição. *L^∞ não é separável.*

Prova. Dado $x \in \Omega$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B_{\varepsilon_x}(x) \subset \Omega$. Denote $u_x = \chi_{B_{\varepsilon_x}(x)}$ e considere as bolas

$$B_x = \{f \in L^\infty : \|f - u_x\|_{L^\infty} < 1/2\}.$$

Observe que se $x \neq y$ então $B_x \cap B_y = \emptyset$. Com efeito, se $x \neq y$, então existe $z \in B_x\backslash B_y$ e $w \in B_y\backslash B_x$ de modo que $\|u_x - u_y\|_{L^\infty} = 1$. Portanto, obtivemos um número não-enumerável de bolas com centro nos pontos u_x, $x \in \Omega$, que não se interceptam. ■

4.20 Lema. (Desigualdades de Clarkson) *Sejam* $f, g \in L^p$, $1 < p < \infty$.

Se $p \geqslant 2$, *então*

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leqslant \frac{1}{2} \left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right), \tag{4.8}$$

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^{p'} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^{p'} \geqslant \frac{1}{2^{p'-1}} \left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right)^{p'-1}. \tag{4.9}$$

Se $1 < p \leqslant 2$, *então*

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^{p'} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^{p'} \leqslant \frac{1}{2^{p'-1}} \left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right)^{p'-1}, \tag{4.10}$$

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \geqslant \frac{1}{2} \left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right). \tag{4.11}$$

Prova. Demonstração da Primeira Desigualdade de Clarkson (4.8).

Seja $p \geqslant 2$. Para provar (4.8), basta verificar

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leqslant \frac{1}{2} \left(|a|^p + |b|^p \right) \tag{4.12}$$

para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e integrar esta desigualdade sobre Ω. Para isso, o ponto de partida é a desigualdade

$$\alpha^p + \beta^p \leqslant \left(\alpha^2 + \beta^2 \right)^{p/2} \tag{4.13}$$

para todos $\alpha, \beta \geqslant 0$, tomando $\alpha = \dfrac{a+b}{2}$ e $\beta = \dfrac{a-b}{2}$. De fato,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p &\leqslant \left(\left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 \right)^{p/2} \\ &= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right)^{p/2} \\ &\leqslant \frac{|a|^p}{2} + \frac{|b|^p}{2}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre da convexidade (concavidade para cima) da função $t \mapsto t^q$ quando $q \geqslant 1$. Para verificar a desigualdade (4.13), tomando $t = \alpha/\beta$ (o caso $\beta = 0$ é trivial) vemos que ela é equivalente a mostrar que a função $f(t) = \left(t^2 + 1 \right)^{p/2} - t^p - 1$ é crescente para todo $t \geqslant 0$, já que $f(0) = 0$. Isso segue de

$$f'(t) = pt \left(t^2 + 1 \right)^{\frac{p-2}{2}} - pt^{p-1} = pt \left[\left(t^2 + 1 \right)^{\frac{p-2}{2}} - \left(t^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \right] \geqslant 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração da Segunda Desigualdade de Clarkson (4.10).

Seja agora $1 < p \leqslant 2$. A demonstração de (4.10) é mais difícil. Primeiro verificamos a desigualdade

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{a-b}{2} \right|^{p'} \leqslant \frac{1}{2^{p'-1}} \left(|a|^p + |b|^p \right)^{p'-1}. \tag{4.14}$$

Esta desigualdade é equivalente à desigualdade

$$\left| \frac{1+t}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{1-t}{2} \right|^{p'} \leqslant \frac{1}{2^{p'-1}} \left(1 + t^p \right)^{p'-1}. \tag{4.15}$$

para $0 \leqslant t \leqslant 1$. Para uma demonstração desta última, veja ([Adams]), Lema 2.26.

Em seguida, verificamos a *desigualdade de Minkowski reversa.* Ela decorre da *desigualdade de Hölder reversa.*

Desigualdade de Hölder reversa. *Seja $0 < p < 1$, de modo que $p' = p/(p-1) < 0$. Se $f \in L^p$, isto é,*

$$\int_\Omega |f|^p < \infty,$$

e

$$0 < \int_\Omega |g|^{p'} < \infty,$$

então

$$\int_\Omega |fg| \geqslant \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^{p'} \right)^{1/p'} . \tag{4.16}$$

Prova da Desigualdade de Hölder reversa: Podemos assumir $fg \in L^1(\Omega)$, caso contrário o lado esquerdo da desigualdade de Hölder reversa é infinito e a desigualdade é válida. Tome $\phi = |g|^{-p}$ e $\psi = |fg|^p$, de modo que $\phi\psi = |f|^p$. Temos que $\psi \in L^q$ para $q = 1/p > 1$, donde $\phi \in L^{q'}$, pois

$$q' = \frac{q}{q-1} = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p}-1} = \frac{p}{p(1-p)} = -\frac{p}{p(p-1)} = -\frac{p'}{p}.$$

Logo, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega |f|^p = \int_\Omega \phi\psi \leqslant \|\psi\|_{L^q} \|\phi\|_{L^{q'}} = \left(\int_\Omega |fg| \right)^p \left(\int_\Omega |g|^{p'} \right)^{1-p},$$

donde segue (4.16).

Desigualdade de Minkowski reversa. *Seja $0 < p < 1$, de modo que $p' = p/(p-1) < 0$. Se $f, g \in L^p$, então*

$$\| |f| + |g| \|_p \geqslant \|f\|_p + \|g\|_p . \tag{4.17}$$

Prova da Desigualdade de Minkowski reversa: Se $f = g = 0$, a desigualdade é trivial, caso contrário o lado esquerdo da desigualdade é positivo. Aplicando a desigualdade de Hölder reversa, obtemos

$$\begin{aligned}
\| |f| + |g| \|_p^p &= \int_\Omega (|f| + |g|)^{p-1} (|f| + |g|) \\
&= \int_\Omega (|f| + |g|)^{p-1} |f| + \int_\Omega (|f| + |g|)^{p-1} |g| \\
&\geqslant \left(\int_\Omega (|f| + |g|)^{(p-1)p'} \right)^{1/p'} \|f\|_p + \left(\int_\Omega (|f| + |g|)^{(p-1)p'} \right)^{1/p'} \|g\|_p \\
&= \| |f| + |g| \|_p^{p/p'} \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right),
\end{aligned}$$

donde segue (4.17).

Retornando à demonstração da segunda desigualdade de Clarkson, pela desigualdade de Hölder reversa com o expoente $p - 1 < 1$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^{p'} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^{p'} &= \left\| \left| \frac{f+g}{2} \right|^{p'} \right\|_{L^{p-1}} + \left\| \left| \frac{f-g}{2} \right|^{p'} \right\|_{L^{p-1}} \\
&\leqslant \left[\int_\Omega \left(\left| \frac{f+g}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{f-g}{2} \right|^{p'} \right)^{p-1} \right]^{1/(p-1)},
\end{aligned}$$

de modo que ao aplicarmos (4.14), observando que $p' - 1 = 1/(p-1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^{p'} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^{p'} &\leqslant \left[\int_\Omega \left(\frac{1}{2^{p'-1}} \left(|f|^p + |g|^p \right)^{p'-1} \right)^{p-1} \right]^{1/(p-1)} \\
&= \left[\int_\Omega \frac{1}{2} \left(|f|^p + |g|^p \right) \right]^{1/(p-1)} \\
&= \frac{1}{2^{p'-1}} \left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right)^{p'-1}.
\end{aligned}$$

Para uma demonstração das desigualdades (4.9) e (4.11), consulte [Adams]. ■

4.21 Teorema. L^p *é um espaço uniformemente convexo se* $1 < p < \infty$.

Prova. Sejam $f, g \in L^p$ satisfazendo $\|f\|_{L^p}, \|g\|_{L^p} \leqslant 1$ e $\|f - g\|_{L^p} > \varepsilon$. Se $p \geqslant 2$, a primeira desigualdade de Clarkson (4.8) produz

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^{p} &\leqslant \frac{1}{2} \left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right) - \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^{p} \\
&\leqslant 1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p},
\end{aligned}$$

logo

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} < 1 - \delta$$

para $\delta = 1 - \left(1 - \dfrac{\varepsilon^p}{2^p} \right)^{1/p} > 0$. Se $1 < p \leqslant 2$, a segunda desigualdade de Clarkson (4.10) dá

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^{p'} &\leqslant \frac{1}{2^{p'-1}} \left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \right)^{p'-1} - \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^{p'} \\
&\leqslant 1 - \frac{\varepsilon^{p'}}{2^{p'}},
\end{aligned}$$

logo

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} < 1 - \delta$$

para $\delta = 1 - \left(1 - \dfrac{\varepsilon^{p'}}{2^{p'}} \right)^{1/p'} > 0$. ■

4.22 Corolário. L^p *é um espaço reflexivo se* $1 < p < \infty$.

4.23 Teorema. (Teorema da Representação de Riesz) *Seja* $1 < p < \infty$. *Dado* $f \in (L^p)^*$ *existe um único* $g \in L^{p'}$ *tal que*

$$F(f) = \int_\Omega fg$$

para todo $f \in L^p$. *Além disso,*

$$\|F\|_{(L^p)^*} = \|g\|_{L^{p'}}.$$

Em particular,

$$(L^p)^* = L^{p'}$$

no sentido que estes espaços são isometricamente isomorfos.

Prova. Apesar deste teorema poder ser provado diretamente através do teorema de Radon-Nikodym da teoria da medida, daremos uma demonstração usando Análise Funcional como em [Brezis] (uma demonstração mais elementar usando a convexidade uniforme de L^p e um argumento variacional pode ser vista em [Adams]).

Defina o operador $T : L^{p'} \longrightarrow (L^p)^*$ por

$$\langle Tg, f\rangle = \int_\Omega fg$$

para todo $f \in L^p$. De fato, pela desigualdade de Hölder $Tg \in (L^p)^*$

$$|\langle Tg, f\rangle| \leqslant \|g\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p}$$

e

$$\|Tg\|_{(L^p)^*} \leqslant \|g\|_{L^{p'}} .$$

Além disso, escolhendo

$$f_0(x) = \begin{cases} |g(x)|^{p'-2} g(x) & \text{se } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{se } g(x) = 0, \end{cases}$$

temos que

$$|f_0(x)|^p = |g(x)|^{(p'-1)p} = |g(x)|^{p'} ,$$

de modo que $f_0 \in L^p$ e

$$\|Tg\|_{(L^p)^*} = \sup_{f \in L^p \setminus \{0\}} \frac{|\langle Tg, f\rangle|}{\|f\|_{L^p}} \geqslant \frac{|\langle Tg, f_0\rangle|}{\|f_0\|_{L^p}} = \frac{\int_\Omega f_0 g}{\left(\int_\Omega |f_0|^p\right)^{1/p}} = \frac{\int_\Omega |g|^{p'}}{\left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{1/p}} = \|g\|_{L^{p'}} .$$

Portanto,

$$\|Tg\|_{(L^p)^*} = \|g\|_{L^{p'}}$$

e para provar o teorema basta provar que T é sobrejetivo. Seja $L = T\left(L^{p'}\right)$. Então L é um subespaço fechado de $(L^p)^*$ porque $L^{p'}$ é um espaço de Banach. Suponha por absurdo que $L \subsetneq T\left(L^{p'}\right)$. Pelo teorema de Hahn-Banach existe um funcional $F^* \in (L^p)^{**}$ tal que F^* se anula em L, mas $F^* \neq 0$. Por outro lado, usando o fato que L^p é reflexivo, de modo que $(L^p)^{**} = L^p$, existe $f \in L^p$ tal que

$$F^*(F) = (Jf)(F) = F(f)$$

para todo $F \in (L^p)^*$. Em particular, se $F \in L = T\left(L^{p'}\right)$ vale o teorema de representação de Riesz, de modo que nós temos

$$0 = F^*(F) = \int_\Omega fg$$

para todo $g \in L^{p'}$. Tomando

$$g(x) = \begin{cases} |f(x)|^{p-2} f(x) & \text{se } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{se } f(x) = 0, \end{cases}$$

segue que

$$\int_\Omega |f(x)|^p = 0$$

e $f = 0$, ou seja, F^* é o funcional nulo, contradição. ■

O teorema da representação de Riesz implica a reflexividade dos espaços L^p, semelhante à demonstração da Proposição 4.10 (o que é relevante quando levamos em conta o fato que o teorema da representação de Riesz pode ser demonstrado sem usar o fato que L^p é reflexivo):

4.24 Corolário. *L^p é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$.*

Prova. Como $(L^p)^* = L^{p'}$, a cada $G \in (L^p)^{**}$ corresponde um funcional $\widetilde{G} \in \left(L^{p'}\right)^*$ tal que $G(F) = \widetilde{G}(f)$, onde

$$F(f) = \int_\Omega fg$$

para todo $f \in L^p$. Analogamente, como $\left(L^{p'}\right)^* = L^p$, a cada $\widetilde{G} \in \left(L^{p'}\right)^*$ corresponde um elemento $f \in L^p$ tal que

$$\widetilde{G}(g) = \int_\Omega fg$$

para todo $g \in L^{p'}$. Portanto,

$$G(F) = \widetilde{G}(f) = \int_\Omega fg = F(f) = (Jf)(F).$$

■

4.25 Proposição. (Teorema da Representação de Riesz) *Dado $F \in \left(L^1\right)^*$ existe um único $g \in L^\infty$ tal que*

$$F(f) = \int_\Omega fg$$

para todo $f \in L^1$. Além disso,

$$\|F\|_{(L^1)^*} = \|g\|_{L^\infty}.$$

Em particular,

$$\left(L^1\right)^* = L^\infty.$$

no sentido que estes espaços são isometricamente isomorfos.

Prova. Se $F = 0$, podemos tomar $g = 0$. Assuma portanto $F \neq 0$.
Caso 1. Ω tem medida finita.

Como $|\Omega| < \infty$, vale a inclusão $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ para todo $1 < p < \infty$. De fato, pela desigualdade de Hölder, se $f \in L^p(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1} &= \int_\Omega |f| = \int_\Omega |f| \cdot 1 \\
&\leqslant \|f\|_{L^p} \|1\|_{L^{p'}} = \left(\int_\Omega 1\right)^{1/p'} \|f\|_{L^p} \\
&= |\Omega|^{1/p'} \|f\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$|F(f)| \leqslant \|F\|_{(L^1)^*} \|f\|_{L^1} \leqslant \left(\|F\|_{(L^1)^*} |\Omega|^{1/p'}\right) \|f\|_{L^p},$$

o que implica que $F \in (L^p)^*$ para todo $1 < p < \infty$ e

$$\|F\|_{(L^p)^*} \leqslant \|F\|_{(L^1)^*} |\Omega|^{1/p'}.$$

Pelo teorema de representação de Riesz, existe $g_p \in L^{p'}$ tal que

$$F(f) = \int_\Omega f g_p$$

para todo $f \in L^p$ e tal que
$$\|g_p\|_{L^{p'}} \leqslant \|F\|_{(L^1)^*} |\Omega|^{1/p'} .$$
Como $C_c(\Omega)$ é denso em L^p para todo $1 < p < \infty$ e portanto para todo $f \in C_c(\Omega)$, para todos $1 < p, q < \infty$ vale
$$\int_\Omega f g_p = F(f) = \int_\Omega f g_q,$$
segue que
$$g_p = g_q.$$
Podemos então denotar g_p simplesmente por uma função $g \in L^p$ para todo $1 < p < \infty$. Segue que
$$\|g\|_{L^\infty} = \lim_{p' \to \infty} \|g\|_{L^{p'}} \leqslant \|F\|_{(L^1)^*} \lim_{p' \to \infty} |\Omega|^{1/p'} = \|F\|_{(L^1)^*} .$$
Em particular $g \in L^\infty$ e como
$$F(f) = \int_\Omega fg$$
para todo $f \in C_c(\Omega)$ e $C_c(\Omega)$ é denso em L^1, segue que
$$F(f) = \int_\Omega fg$$
para todo $f \in L^1$. Para terminar a demonstrar deste caso, resta apenas mostrar que
$$\|g\|_{L^\infty} \geqslant \|F\|_{(L^1)^*} .$$
Isso segue direto da fórmula de representação e da desigualdade de Hölder:
$$\|F\|_{(L^1)^*} = \sup_{f \in L^1 \backslash \{0\}} \frac{|F(f)|}{\|f\|_{L^1}} = \sup_{f \in L^1 \backslash \{0\}} \frac{\left|\int_\Omega fg\right|}{\|f\|_{L^1}} \leqslant \sup_{f \in L^1 \backslash \{0\}} \frac{\|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^1}} = \|g\|_{L^\infty} .$$
Caso 2. Ω tem medida infinita.

Escreva $\Omega = \cup \Omega_n$, onde $\Omega_n = \{x \in \Omega : n - 1 \leqslant |x| < n\}$ tem medida finita e os conjuntos Ω_n são dois a dois disjuntos. Se $f_n \in L^1(\Omega_n)$, seja
$$\widetilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{se } x \in \Omega_n, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega_n \end{cases}$$
a extensão de f_n que é 0 fora de Ω_n. Defina
$$F_n(f_n) := F\left(\widetilde{f}_n\right).$$
Então $F_n \in \left[L^1(\Omega_n)\right]^*$ e $\|F_n\|_{[L^1(\Omega_n)]^*} \leqslant \|F\|_{[L^1(\Omega)]^*}$, pois
$$|F_n(f_n)| = \left|F\left(\widetilde{f}_n\right)\right| \leqslant \|F\|_{[L^1(\Omega)]^*} \left\|\widetilde{f}_n\right\|_{L^1(\Omega)} = \|F\|_{[L^1(\Omega)]^*} \|f_n\|_{L^1(\Omega_n)} .$$
Pelo caso anterior, existe $g_n \in L^1(\Omega_n)$ tal que $\|g_n\|_{L^\infty} \leqslant \|F\|_{[L^1(\Omega)]^*}$ e
$$F_n(f_n) = \int_{\Omega_n} f_n g_n = \int_\Omega \widetilde{f}_n g$$
para todo $f_n \in L^1(\Omega_n)$, onde
$$g(x) := g_n(x) \quad \text{se } x \in \Omega_n.$$

Se $f \in L^1(\Omega)$, podemos escrever

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{\Omega_n},$$

pois pelo teorema da convergência dominada esta série converge em $L^1(\Omega)$. Daí, como

$$F\left(\sum_{n=1}^{k} f\chi_{\Omega_n}\right) = \sum_{n=1}^{k} F(f\chi_{\Omega_n}) = \sum_{n=1}^{k} F_n(f\chi_{\Omega_n}) = \sum_{n=1}^{k} \int_{\Omega} (f\chi_{\Omega_n})\, g = \int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^{k} f\chi_{\Omega_n}\right) g,$$

passando o limite quando $k \to \infty$ através do teorema da convergência dominada concluímos que

$$F(f) = \int_{\Omega} fg.$$

Como no caso anterior, a fórmula de representação juntamente com a desigualdade de Hölder pode ser usada para provar que $\|F\|_{(L^1)^*} = \|g\|_{L^\infty}$. ■

4.26 Proposição.

$$(L^\infty)^* \neq L^1.$$

Prova. A demonstração é idêntica à da Proposição 4.12. ■

4.27 Corolário. *L^1 e L^∞ não são reflexivos.*

Prova. A demonstração é idêntica à do Corolário 4.13. ■

4.6 Exercícios

4.1 Mostre que todo espaço vetorial de dimensão finita é reflexivo.

4.2 Sejam E, F espaços topologicamente isomorfos. Mostre que E é reflexivo se e somente se F é reflexivo.

4.3 Sejam E, F espaços de Banach, com E reflexivo. Mostre que se existe um operador linear limitado $A : E \longrightarrow F$ tal que $R(A) = F$, então F também é reflexivo.

4.4 Prove que todo subespaço vetorial de um espaço vetorial normado separável é separável.

4.5 Seja E um espaço reflexivo. Mostre que se $f \in E^*$, então existe $x \neq 0$ tal que

$$f(x) = \|f\| \|x\|.$$

4.6 Utilizando o exercício anterior e o funcional sugerido, mostre que os espaços a seguir não são reflexivos:

a) $C^0([-1,1])$; funcional sugerido: $F : C^0([-1,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(f) = \int_{-1}^{0} f - \int_{0}^{1} f.$$

b) ℓ^1;funcional sugerido: $f : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n.$$

c) $\ell_0^\infty = \{x \in \ell^\infty : \lim x_n = 0\}$;funcional sugerido: $f : \ell_0^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}.$$

4.7 Prove que $C^0[a,b]$ não é reflexivo.

4.8 Para que valores de p $\ell^p(n)$ é uniformemente convexo?

4.9 Prove que ℓ^p é uniformemente convexo se e somente se $1 < p < \infty$.

4.10 Sejam $1 \leqslant p < q < r \leqslant \infty$.

a) Mostre que $L^p \cap L^r$ é um espaço de Banach com a norma $\|f\| = \|f\|_{L^p} + \|f\|_{L^r}$. Por que $L^p \cap L^r \neq \emptyset$?

b) Prove a seguinte *desigualdade de interpolação*:

$$\|f\|_{L^q} \leqslant \|f\|_{L^p}^{\lambda} \|f\|_{L^r}^{1-\lambda},$$

onde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\lambda}{p} + \dfrac{1-\lambda}{r}$.

c) Conclua que vale a inclusão $L^p \cap L^r \hookrightarrow L^q$ e que ela é contínua.

Capítulo 5

Topologia Fraca e Topologia Fraca*

5.1 Topologia Fraca

Dado um conjunto de funções $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de um conjunto X para um espaço topológico Y, a topologia $\mathfrak{T}$ *mais grosseira* (ou *menos fina*) para X é aquela com o número mínimo de abertos que tornam todas as funções f_λ contínuas. Ela é evidentemente a topologia que tem como sub-base a coleção $\left\{f_\lambda^{-1}(V) : V \text{ é aberto em } Y \text{ e } \lambda \in \Lambda\right\}$.

5.1 Definição. Seja E um espaço vetorial normado. A **topologia fraca** sobre E é a topologia menos fina tal que todos os funcionais lineares $f \in E^*$ são contínuos.

Denotando a topologia fraca de E por $\mathfrak{T}_W$ e a topologia da métrica por $\mathfrak{T}$, segue imediatamente da definição de topologia fraca que $\mathfrak{T}_W \subset \mathfrak{T}$. A topologia fraca em geral tem menos abertos que a topologia da métrica, logo tem a chance de ter mais compactos.

5.2 Proposição. *Um espaço vetorial normado E sob a topologia fraca é um espaço de Hausdorff.*

Prova. Se $x, y \in E$ com $x \neq y$, pelo teorema de Hahn-Banach existe $f \in E^*$ tal que $f(x-y) = \|x-y\|$. Em particular, $f(x) \neq f(y)$ e se $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que $f(x) < \alpha < f(y)$, então os abertos $f^{-1}(-\infty, \alpha)$ e $f^{-1}(\alpha, \infty)$ separam x e y. ■

5.3 Proposição. *Seja E espaço vetorial normado e $x_0 \in E$. Um sistema fundamental de vizinhanças em x_0 na topologia fraca consiste de todos os conjuntos da forma*

$$V = \{x \in E : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon,\ f_1, \ldots, f_n \in E^*\}.$$

Prova. Se U é um aberto contendo x_0, então existe um elemento-base $\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_i) \subset U$ contendo x_0, com $V_1, \ldots, V_n$ abertos em $\mathbb{R}$. Se $f_i(x_0) = a_i$, temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \subset V_i$, logo tomando

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon),$$

segue que $V \subset U$. ■

5.4 Proposição. *Seja E um espaço vetorial normado de dimensão finita. Então a topologia fraca de E coincide com a topologia da métrica.*

Prova. Já sabemos que $\mathfrak{T}_W \subset \mathfrak{T}$, qualquer que seja o espaço vetorial normado E. No caso de um espaço vetorial normado de dimensão finita, vale a recíproca. De fato, seja $U \subset E$ um aberto na topologia da métrica. Dado $x_0 \in U$, vamos obter uma vizinhança aberta fraca $V \subset U$ contendo x_0. Dada uma base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_N\}$ para E, escolha a norma da soma em relação a esta base (todas as normas são equivalentes em um espaço vetorial normado de dimensão finita) e seja $B_\varepsilon(x_0) \subset U$. As projeções $f_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre a i-ésima coordenada definidas por

$$f_i\left(\sum_{i=1}^{N} x_i e_i\right) = x_i$$

são funcionais lineares contínuos e

$$\sum_{i=1}^{N} |f_i(x) - f_i(x_0)| = \sum_{i=1}^{N} |x_i - (x_0)_i| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in B_\varepsilon(x_0),$$

de modo que

$$V = \{x \in E : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \, 1 \leqslant i \leqslant N\}$$

é uma vizinhança aberta fraca contendo x_0 que satisfaz $V \subset U$. Portanto $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}_W$. ■

Se E é um espaço vetorial normado de dimensão infinita, a topologia fraca é estritamente mais grosseira (estritamente menos fina) que a topologia da métrica, como veremos daqui a pouco. Esta última é também chamada **topologia forte**, quando comparada com a primeira.

Como a topologia forte $\mathfrak{T}$ contém a topologia fraca $\mathfrak{T}_W$, por definição, segue em particular que os conjuntos que são fechados na topologia fraca também são fechados na topologia usual. A recíproca é falsa para espaços de dimensão infinita, como veremos a seguir. No entanto, para conjuntos convexos as duas noções coincidem (este é o nosso primeiro exemplo de como a topologia fraca se comporta bem em conjuntos convexos):

5.5 Proposição. *Seja E um espaço vetorial normado e $C \subset E$ um conjunto convexo. Então C é fechado na topologia fraca se e somente se C é fechado na topologia forte.*

Prova. Suponha que C é fortemente fechado. Seja $x_0 \notin C$. De acordo com o teorema de Hahn-Banach, primeira forma geométrica, existem $f \in E^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_0) < \alpha < f(y)$$

para todo $y \in C$. Então $V = f^{-1}(-\infty, \alpha)$ é uma vizinhança aberta fraca de x_0 que não intercepta C. Portanto $E \backslash C$ é fracamente aberto, logo C é fracamente fechado. ■

5.6 Proposição. *Se E é um espaço vetorial normado com dimensão infinita, então a esfera unitária não é fechada na topologia fraca.*

De fato, o fecho fraco da esfera unitária é a bola unitária fechada.

Prova. Sejam $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ a esfera unitária de E, $\overline{B_1(0)} = \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}$ a bola unitária fechada e denote por $\overline{S}^W$ o fecho de S na topologia fraca. Queremos então provar que

$$\overline{S}^W = \overline{B_1(0)}.$$

Seja $x_0 \in B_1(0)$ e U é qualquer aberto fraco contendo x_0. Pela Proposição 5.4, V contém uma vizinhança aberta fraca de x_0 da forma

$$V = \{x \in E : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \, f_1, \ldots, f_n \in E^*\}.$$

Como E possui dimensão infinita, existe $y_0 \in E$ tal que

$$f_i(y_0) = 0 \quad \text{para todo } i,$$

caso contrário a aplicação linear $T : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $Tx = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ seria injetiva, o que implicaria $\dim E \leqslant n$. (outra maneira de ver isso é invocar o resultado do Exercício 2.11: o núcleo de um funcional linear tem codimensão 1, logo a interseção de um número finito de núcleos de funcionais lineares em um espaço vetorial de dimensão infinita também tem dimensão infinita). Em particular, V contém a reta $t \mapsto x_0 + ty_0$, pois

$$f_i(x_0 + t_0 y_0) - f_i(x_0) = f_i(x_0 + t_0 y_0 - x_0) = t_0 f(y_0) = 0$$

para todo i. (*Assim, em um espaço vetorial normado de dimensão infinita, toda vizinhança aberta fraca de um ponto x_0 contém uma reta passando por x_0; na verdade, infinitas tais retas.*) Considere agora a função $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \|x_0 + ty_0\|.$$

Esta função é contínua e satisfaz $\varphi(0) < 1$ e $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$, o que implica pelo teorema do valor intermediário que existe $t_0 > 0$ tal que $g(t_0) = 1$, isto é, $x_0 + t_0 y_0 \in S \cap V$. Concluímos que toda vizinhança aberta fraca de x_0 intercepta S, portanto $x_0 \in \overline{S}^W$. Este argumento prova que $\overline{B_1(0)} = B_1(0) \cup S \subset \overline{S}^W$. Como $\overline{B_1(0)}$ é fechado na topologia fraca pela Proposição 5.5, não existem pontos do fecho fraco de $S \subset \overline{B_1(0)}$ fora de $B_1(0)$. Portanto vale a igualdade $\overline{S}^W = \overline{B_1(0)}$. ■

5.7 Corolário. *Se E é um espaço vetorial normado com dimensão infinita, então o interior fraco da bola unitária é vazio.*

Consequentemente, a bola unitária não é fracamente aberta e portanto a topologia fraca é estritamente mais grossa que a topologia forte.

Prova. Vimos na demonstração da proposição anterior que todo aberto fraco contém uma reta. Como a bola unitária não contém retas, obviamente, segue que ela não contém nenhum aberto fraco. ■

5.8 Lema. *Sejam E um espaço vetorial normado e Y um espaço topológico. Então uma aplicação $\Phi : Y \longrightarrow E$ é contínua quando E é munido da topologia fraca se e somente se $f \circ \Phi$ é contínua para todo $f \in E^*$.*

Prova. Se Φ é contínua e $f \in E^*$, como f é contínua na topologia fraca pela definição desta, segue que $f \circ \Phi$ é contínua, pois é a composta de funções contínuas. Reciprocamente, suponha que $f \circ \Phi$ é contínua para todo $f \in E^*$. Para provar que Φ é contínua, vamos mostrar que se $V \subset E$ é aberto na topologia fraca, então $\Phi^{-1}(V)$ é aberto em Y. Pela Proposição 5.3 podemos escrever

$$V = \bigcup_{x \in V} \left(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n_x} f_{x,i}^{-1}(I_{x,i}) \right),$$

onde $n_x \in \mathbb{N}$, $I_{x,i}$ são intervalos abertos da reta e $f_{x,i} \in E^*$. Como a inversa de uma função preserva uniões e interseções arbitrárias, segue que

$$\Phi^{-1}(V) = \bigcup_{x \in V} \left(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n_x} \Phi^{-1}\left[f_{x,i}^{-1}(I_{x,i})\right] \right) = \bigcup_{x \in V} \left(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n_x} (f_{x,i} \circ \Phi)^{-1}(I_{x,i}) \right).$$

Por hipótese, $(f_{x,i} \circ \Phi)^{-1}(I_{x,i})$ é aberto em Y para cada x, i, logo $\Phi^{-1}(V)$ é aberto. ■

5.9 Proposição. *Sejam E, F espaços de Banach. Seja $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. Então T é contínua quando E, F são munidos com a topologia forte se e somente se T é contínua quando E, F são munidos com a topologia fraca.*

Prova. Suponha que T é contínua nas topologias fortes de E e F. Pelo lema anterior, basta provar que $g \circ T : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua para todo $g \in F^*$ quando E é munido da topologia fraca. Mas, como T é linear, $g \circ T \in E^*$, logo é contínua na topologia fraca de E pela definição desta.

Reciprocamente, suponha que T é contínua nas topologias fracas de E e F. Então o gráfico $G(T)$ é fechado em $E \times F$ na topologia do produto das topologias fracas, que é a topologia fraca da topologia produto de $E \times F$. Portanto, como observado antes, $G(T)$ é fechado na topologia forte. Pelo teorema do gráfico fechado, T é contínua nas topologias fortes de E e F. ■

A hipótese que T é linear não pode ser removida neste resultado (veja [Brezis]).

5.2 Sequências Fracamente Convergentes

5.10 Definição. Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ **converge fracamente** para x se ela converge para x na topologia fraca. Denotaremos este fato por

$$x_n \rightharpoonup x.$$

5.11 Proposição. *Sejam E um espaço vetorial normado e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência. Então valem as seguintes afirmações:*

(i) *$x_n \rightharpoonup x$ se e somente se $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in E^*$.*

(ii) *Se $x_n \to x$, então $x_n \rightharpoonup x$.*

(iii) *Se $x_n \rightharpoonup x$, então $\{x_n\}$ é limitada e além disso*

$$\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\| .$$

(iv) *Se $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \to f$ em E^*, então $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Prova. (i) Se $x_n \rightharpoonup x$ então $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in E^*$ porque f é contínua na topologia fraca. Reciprocamente, suponha que $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in E^*$. Para provar que $x_n \rightharpoonup x$, mostraremos que dada qualquer vizinhança aberta fraca U de x temos $x_n \in U$ para todo n suficientemente grande. De fato, seja $\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(V_i) \subset U$ um elemento-base da topologia fraca contendo x_0, com $V_1, \ldots, V_m$ abertos em $\mathbb{R}$. Para cada i, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i(x_n) \in V_i$ para todo $n > N_i$. Tomando $N = \max\{N_1, \ldots, N_m\}$, segue que se $n > N$ então $f_i(x_n) \in V_i$ para todo i, logo $x_n \in \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(V_i) \subset U$ para todo $n > N$.

(ii) segue de (i), pois para todo $f \in E^*$ temos $|f(x) - f(x_n)| \leqslant \|f\| \|x - x_n\|$.

(iii) segue de (i) e do Corolário 3.4 do teorema da limitação uniforme: como $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in E^*$, em particular $\{f(x_n)\}$ é limitada para todo $f \in E^*$. Além disso, como $|f(x_n)| \leqslant \|f\| \|x_n\|$, tomando o limite temos

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \liminf \|x_n\|$$

para todo $f \in E^*$. Segue do teorema da Hahn-Banach (Corolário 2.25) que

$$\|x\| = \sup_{f \in E^* \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leqslant \liminf \|x_n\| .$$

(iv) segue de (i) e (iii) escrevendo

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &\leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &= |(f_n - f)(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leqslant \|f_n - f\| \|x_n\| + |f(x_n) - f(x)| . \end{aligned}$$

■

Embora uma sequência convergir fracamente é equivalente a uma sequência convergir fortemente em espaços vetoriais normados de dimensão finita, existem exemplos de espaços de Banach de dimensão infinita em que toda sequência fracamente convergente também é fortemente convergente, apesar de que, conforme vimos no Corolário 5.7, a topologia fraca ser estritamente mais grossa que a topologia forte nestes casos. Um exemplo é ℓ^1 (veja [Conway], Proposition V.5.2). Por outro lado, se E é reflexivo, sempre existem exemplos de sequências fracamente convergentes que não convergem fortemente, conforme veremos.

É importante também ressaltar que a continuidade de uma função não é equivalente à continuidade sequencial no caso da topologia fraca. Embora em espaços vetoriais normados estes conceitos sejam equivalentes, pois a topologia forte é a topologia da métrica, a qual satisfaz o axioma da enumerabilidade, o mesmo não vale para a topologia fraca que não satisfaz este axioma (veja o Exercício 5.9 para um exemplo). Assim, para provar que uma função $f : E \longrightarrow Y$ de um espaço vetorial normado E dotado da topologia fraca em um espaço topológico Y qualquer é contínua, não é suficiente provar que ela leva sequências fracamente convergentes de E em sequências convergentes de Y.

5.3 Topologia Fraca*

5.12 Definição. Seja E um espaço vetorial normado e considere a imersão canônica $J : E \longrightarrow E^{**}$. A **topologia fraca*** sobre o dual E^* é a topologia menos fina tal que todos os funcionais lineares na imagem $J(E)$ são contínuos.

Evidentemente, se E for um espaço reflexivo então a topologia fraca* coincide com a topologia fraca de E^*. Caso contrário, em geral a topologia fraca* de E^* é mais grosseira que a topologia fraca de E^*, que por sua vez é mais grosseira que a topologia forte de E^*.

5.13 Proposição. *Seja E um espaço vetorial normado. Então E^* sob a topologia fraca* é um espaço de Hausdorff.*

Prova. Se $f, g \in E^*$ com $f \neq g$, então existe $x \in E$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que $f(x) < \alpha < g(x)$, então os abertos $(Jx)^{-1}(-\infty, \alpha)$ e $(Jx)^{-1}(\alpha, \infty)$ separam f e g. ■

5.14 Proposição. *Seja E espaço vetorial normado e $f_0 \in E^*$. Um sistema fundamental de vizinhanças em f_0 na topologia fraca* consiste de todos os conjuntos da forma*

$$V = \{f \in E^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon,\ x_1, \ldots, x_n \in E\}.$$

Prova. Se U é um aberto contendo f_0, então existe um elemento-base $\bigcap_{i=1}^{n} (Jx_i)^{-1}(V_i) \subset U$ contendo f_0, com $V_1, \ldots, V_n$ abertos em $\mathbb{R}$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$. Em particular, $(Jx_i)(f_0) = f_0(x_i) \in V_i$ para todo i, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $(f_0(x_i) - \varepsilon, f_0(x_i) + \varepsilon) \subset V_i$. Tomando

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} (Jx_i)^{-1}(f_0(x_i) - \varepsilon, f_0(x_i) + \varepsilon),$$

segue que $V \subset U$. Mas, por definição,

$$V = \{f \in E^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

■

Denotaremos a convergência fraca* de uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$ para um elemento $f \in E^*$ por

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f.$$

5.15 Proposição. *Sejam E um espaço vetorial normado e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$ uma sequência. Então valem as seguintes afirmações:*

(i) *$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ se e somente se $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in E$.*

(ii) *Se $f_n \to f$, então $f_n \rightharpoonup f$. Se $f_n \rightharpoonup f$, então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*

(iii) *Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, então $\{f_n\}$ é limitada e além disso, se E for de Banach,*

$$\|f\| \leqslant \liminf \|f_n\|.$$

(iv) *Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ e $x_n \to x$ em E, se E for de Banach então $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Prova. Exercício. Observe que em (iii) e (iv) da Proposição 5.11 não precisamos da hipótese do espaço ser de Banach porque E^* sempre é de Banach. ■

No que se segue, denotaremos a bola unitária fechada de um espaço vetorial normado E por B_E.

5.16 Lema. *Sejam E um espaço vetorial normado e Y um espaço topológico. Então uma aplicação $\Phi : Y \longrightarrow E^*$ é contínua quando E é munido da topologia fraca* se e somente se $(Jx) \circ \Phi : Y \to \mathbb{R}$ é contínua para todo $x \in E$.*

Prova. Suponha Φ é contínua. Como para cada $x \in E$ a função valor $Jx : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua na topologia fraca*, por definição, a composta $(Jx) \circ \Phi$ também é contínua.

Reciprocamente, suponha que $(Jx) \circ \Phi$ é contínua para todo $x \in E$. Para provar que Φ é contínua, vamos mostrar que se $V \subset E^*$ é aberto na topologia fraca, então $\Phi^{-1}(V)$ é aberto em Y. Pela Proposição 5.14 podemos escrever

$$\begin{aligned} V &= \bigcup_{f\in V} \left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n_f} \{g \in E^* : |g(x_{f,i}) - f(x_{f,i})| < \varepsilon_f\} \right) \\ &= \bigcup_{f\in V} \left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n_f} (Jx_{f,i})^{-1} (f(x_{f,i}) - \varepsilon, f(x_{f,i}) + \varepsilon) \right), \end{aligned}$$

onde $n_f \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_f > 0$ e $x_{f,i} \in E$. Como a inversa de uma função preserva uniões e interseções arbitrárias, segue que

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(V) &= \bigcup_{f\in V} \left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n_f} \Phi^{-1} \left[(Jx_{f,i})^{-1} (f(x_{f,i}) - \varepsilon, f(x_{f,i}) + \varepsilon) \right] \right) \\ &= \bigcup_{f\in V} \left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n_f} (Jx_{f,i} \circ \Phi)^{-1} (f(x_{f,i}) - \varepsilon, f(x_{f,i}) + \varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Por hipótese, $(Jx_{f,i} \circ \Phi)^{-1} (f(x_{f,i}) - \varepsilon, f(x_{f,i}) + \varepsilon)$ é aberto em Y para cada f, i, logo $\Phi^{-1}(V)$ é aberto. ■

5.17 Teorema. (Teorema de Alaoglu) *Seja E um espaço vetorial normado. Então B_{E^*} é compacta na topologia fraca*.*

Prova. Para cada $x \in E$, considere o intervalo real compacto

$$I_x = [-\|x\|, \|x\|].$$

Pelo teorema de Tychonoff, o produto cartesiano

$$I = \prod_{x \in E} I_x$$

é compacto na topogia produto $\mathbb{R}^E$. Para provar que B_{E^*} é compacta na topologia fraca* considere a aplicação

$$\Phi : E^* \longrightarrow \mathbb{R}^E$$

definida por

$$\Phi(f) = (f(x))_{x \in E}.$$

Como para cada $f \in B_{E^*}$ temos $|f(x)| \leqslant \|x\|$, note que a imagem $I' = \Phi(B_{E^*})$ está contida em I. Vamos mostrar que Φ é um homeomorfismo sobre sua imagem, de modo que o teorema será demonstrado se mostrarmos que a imagem I' é compacta. Claramente Φ é injetiva. Para ver que $\Phi : E^* \longrightarrow \mathbb{R}^E$ é contínua quando E^* está munida da topologia fraca*, como $\mathbb{R}^E$ tem a topologia produto, basta provar que $\pi_x \circ \Phi$ é contínua para todo $x \in E$, onde $\pi_x : \mathbb{R}^E \longrightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na coordenada x: $\pi_x\left((t_y)_{y \in E}\right) = t_x$. E, de fato, como

$$(\pi_x \circ \Phi)(f) = \pi_x\left((f(y))_{y \in E}\right) = f(x) = (Jx)(f),$$

segue que $\pi_x \circ \Phi = Jx$. Para provar que $\Phi^{-1} : \Phi(E^*) \longrightarrow E^*$ é contínua, pelo lema anterior basta mostrar que $(Jx) \circ \Phi^{-1}$ é contínua para todo $x \in E$; mas isso é óbvio, pois $(Jx) \circ \Phi^{-1} = \pi_x|_{\Phi(E^*)}$.

Como $I' \subset I$ e I é compacta, para provar que I' é compacta basta mostrar que I' é fechada. Seja $F \in \overline{I'}$. Para mostrar que $F = (f(x))_{x \in E}$ para algum funcional $f \in B_{E^*}$, basta mostrar que o funcional $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = F_x$$

(isto é, $f(x)$ é a coordenada x de F) está em B_{E^*}. Primeiro verificaremos que f é linear. Sejam $x_1, x_2 \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere a seguinte vizinhança aberta de F na topologia do produto:

$$U = \left\{(t_x)_{x \in E} : |t_{x_1} - F_{x_1}| < \varepsilon,\ |t_{x_2} - F_{x_2}| < \varepsilon \text{ e } |t_{\alpha x_1 + \beta x_2} - F_{\alpha x_1 + \beta x_2}| < \varepsilon\right\}$$

(t_x é arbitrário se $x \neq x_1, x_2, \alpha x_1 + \beta x_2$). Como $F \in \overline{I'}$, existe um elemento $(g(x))_{x \in E} \in U$ com $g \in E^*$. Daí,

$$\begin{aligned} |g(x_1) - F_{x_1}| &< \varepsilon, \\ |g(x_2) - F_{x_2}| &< \varepsilon \\ |g(\alpha x_1 + \beta x_2) - F_{\alpha x_1 + \beta x_2}| &< \varepsilon \end{aligned}$$

e

$$g(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha g(x_1) + \beta g(x_2).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} |f(\alpha x_1 + \beta x_2) - [\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)]| &= |F_{\alpha x_1 + \beta x_2} - (\alpha F_{x_1} + \beta F_{x_2})| \\ &\leqslant |F_{\alpha x_1 + \beta x_2} - g(\alpha x_1 + \beta x_2)| + |\alpha g(x_1) - \alpha F_{x_1}| + |\beta g(x_2) - \beta F_{x_2}| \\ &< (1 + |\alpha| + |\beta|)\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε é arbitrário, segue que

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

e f é linear. Agora, como $|F_x| \leqslant \|x\|$ para todo $x \in E$ temos imediatamente que $f \in E^*$ e $\|f\| = 1$. ■

5.4 Convexidade Uniforme e Topologia Fraca

5.18 Lema. *Seja E um espaço de Banach. Sejam $f_1, \ldots, f_n \in E^*$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. As afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in E$ tal que $\|x_\varepsilon\| \leqslant 1$ e*

$$\left|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i\right| < \varepsilon \quad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

(ii) *Para todos $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ vale*

$$\left|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i\right| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\right\|.$$

Prova. (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja

$$|\beta| = \sum_{i=1}^n |\beta_i|.$$

Por (i) temos

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x_\varepsilon) - \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i\right| &\leqslant \sum_{i=1}^n \left|\beta_i f_i(x_\varepsilon) - \beta_i \alpha_i\right| = \sum_{i=1}^n |\beta_i| \left|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i\right| \\ &< \varepsilon \sum_{i=1}^n |\beta_i| \\ &= |\beta|\, \varepsilon\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$, donde

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i\right| &\leqslant \left|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x_\varepsilon)\right| + \left|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x_\varepsilon) - \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i\right| \\ &\leqslant \left\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\right\| \|x_\varepsilon\| + |\beta|\, \varepsilon \\ &= \left\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\right\| + |\beta|\, \varepsilon.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Seja

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

e considere a aplicação linear $T : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$Tx = (f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

Para provar (i), basta provar que $\alpha \in T\left(\overline{B_1(0)}\right)$. Suponha por absurdo que $\alpha \notin T\left(\overline{B_1(0)}\right)$. Então podemos separar estritamente α e $T\left(\overline{B_1(0)}\right)$, ou seja, existe $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tal que

$$Tx \cdot \beta < c < \alpha \cdot \beta$$

para todo $x \in \overline{B_1(0)}$, onde $\cdot$ denota o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$. Logo,

$$\left|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x)\right| = Tx \cdot \beta < c < \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i$$

para todo $x \in \overline{B_1(0)}$, donde

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\| = \sup_{x \in \overline{B_1(0)}} \left| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x) \right| < c < \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i,$$

contrariando (ii). ■

5.19 Lema. *Seja E um espaço de Banach. Então $J(B_E)$ é denso em $B_{E^{**}}$ na topologia fraca*.*

Prova. Seja $F \in B_{E^{**}}$ e seja

$$V = \{G \in E^{**} : |G(f_i) - F(f_i)| < \varepsilon,\, f_i \in E^*,\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

uma vizinhança aberta fraca* de F. Mostraremos que $J(B_E) \cap V \neq \emptyset$. Isso significa encontrar $x \in B_E$ tal que

$$|(Jx)(f_i) - F(f_i)| = |f_i(x) - F(f_i)| < \varepsilon \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Tomando $\alpha_i = F(f_i)$, isso seguirá do lema anterior se provarmos que vale (ii) do mesmo. E, de fato, para todos $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ vale

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i \right| = \left| F\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right) \right| \leqslant \|F\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\|.$$

■

5.20 Teorema. *Se E é um espaço de Banach uniformemente convexo, então E é reflexivo.*

Prova. Seja $F \in E^{**}$ com $\|F\| = 1$. Mostraremos que existe $x \in B_E \subset E$ tal que $F = Jx$. Como $J(B_E)$ é fechado em E^{**} (porque B_E é fechado no espaço de Banach E e J é uma isometria), basta provar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in B_E$ tal que

$$\|F - Jx\| < \varepsilon.$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$ aquele dado pela definição de convexidade uniforme. Escolha $f \in E^*$ com $\|f\| = 1$ tal que

$$F(f) > 1 - \frac{\delta}{2}, \tag{5.1}$$

o que é possível, já que $\|F\| = \sup_{\|f\|=1} |F(f)| = 1$. Considere a vizinhança aberta fraca* de F definida por

$$V = \left\{ G \in E^{**} : |F(f) - G(f)| < \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Segue do Lema 5.19 que $V \cap J(B_E) \neq \emptyset$, logo existe $x \in B_E$ tal que $Jx \in V$. Mostraremos que $F \in Jx + \varepsilon B_{E^{**}}$, o que terminará a demonstração.

Suponha por absurdo que $F \in W = E^{**} \backslash (Jx + \varepsilon B_{E^{**}})$. Observe que W também é uma vizinhança aberta fraca*, pois $B_{E^{**}}$ é fechada na topologia fraca* (mais que isso, ela é compacta). Aplicando novamente o Lema 5.19, segue que $(V \cap W) \cap J(B_E) \neq \emptyset$, logo existe $\overline{x} \in B_E$ tal que $J\overline{x} \in V \cap W$. Como $Jx, J\overline{x} \in V$, segue que

$$|F(f) - (Jx)(f)| < \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad |F(f) - (J\overline{x})(f)| < \frac{\delta}{2}.$$

Daí, somando as duas desigualdades,

$$2F(f) \leqslant (Jx)(f) + (J\overline{x})(f) + \delta = J(x + \overline{x})(f) + \delta \leqslant \|x + \overline{x}\| + \delta,$$

donde, por (5.1),

$$\left\| \frac{x+\overline{x}}{2} \right\| > 1-\delta.$$

Por outro lado, como $J\overline{x} \in W$, temos $\|x-\overline{x}\| > \varepsilon$ e pela definição de convexidade uniforme segue que

$$\left\| \frac{x+\overline{x}}{2} \right\| < 1-\delta,$$

contradição. ■

5.21 Teorema. *Seja E é um espaço de Banach uniformemente convexo. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência tal que $x_n \rightharpoonup x$ e*

$$\|x\| \geqslant \limsup \|x_n\|.$$

Então $x_n \to x$.

Prova. Como, pela Proposição 5.11 (iii),

$$\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\| \leqslant \limsup \|x_n\| \leqslant \|x\|,$$

temos que

$$\|x\| = \lim \|x_n\|.$$

Logo, se $x=0$ o resultado é óbvio. Suponha então $x \neq 0$ e defina

$$\lambda_n = \max\{\|x\|, \|x_n\|\} = \frac{\|x\| + \|x_n\| + |\|x\| - \|x_n\||}{2},$$

de modo que $\lambda_n \to \|x\|$. Defina

$$y_n = \frac{x_n}{\lambda_n} \quad \text{e} \quad y = \frac{x}{\|x\|}.$$

Então $\|y_n\| \leqslant 1$, $\|y\| = 1$ e

$$y_n \rightharpoonup y,$$

pois

$$f(y_n) = \frac{1}{\lambda_n} f(x_n) \to \frac{1}{\|x\|} f(x) = f(y)$$

para todo $f \in E^*$. Como $\dfrac{y+y_n}{2} \rightharpoonup y$ (veja o Exercício 5.6), temos que

$$1 = \|y\| \leqslant \liminf \left\| \frac{y+y_n}{2} \right\| \leqslant 1,$$

donde

$$\lim \left\| \frac{y+y_n}{2} \right\| = 1.$$

Pela definição de convexidade uniforme, isso implica que

$$\lim \|y-y_n\| = 0,$$

ou seja, $y_n \to y$. Portanto, $x_n = \lambda_n y_n \to \|x\| y = x$. ■

5.5 Reflexividade, Separabilidade e Topologias Fracas

A topologia fraca permite a seguinte caracterização dos espaços de Banach reflexivos:

5.22 Teorema. *Seja E um espaço de Banach. Então E é reflexivo se e somente se a bola unitária fechada é fracamente compacta.*

Prova. Suponha que E seja reflexivo, de modo que $J(B_E) = B_{E^{**}}$. Pelo teorema de Alaoglu, $B_{E^{**}}$ é compacta na topologia fraca*. Para provar que B_E é compacto, basta verificar que J^{-1} é contínua quando E está munido da topologia fraca e E^{**} está munido da topologia fraca*, já que uma função contínua leva compactos em compactos. Para isso, pelo Lema 5.8, temos que mostrar que $f \circ J^{-1} : E^{**} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua para todo $f \in E^*$ quando E^{**} está munido da topologia fraca*. Mas $\left(f \circ J^{-1}\right)(F) = F(f)$, pois se $x = J^{-1}(F)$ então $Jx = F$, ou seja, $f(x) = (Jx)(f) = F(f)$ para todo $f \in E^*$. Por definição de topologia fraca*, a aplicação $J^*f : E^{**} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(J^*f)(F) = F(f)$ para $f \in E^*$ fixado é contínua na topologia fraca* de E^{**}. Portanto, $f \circ J^{-1} = J^*f$ é contínua na topologia fraca*.

Reciprocamente, suponha que B_E é compacto na topologia fraca. Pela Proposição 5.9, $J : E \longrightarrow E^{**}$ é uma aplicação contínua quando E e E^{**} são munidos com a topologia fraca. Como a topologia fraca* está incluída na topologia fraca, segue que $J : E \longrightarrow E^{**}$ também é uma aplicação contínua quando E é munido com a topologia fraca e E^{**} é munido com a topologia fraca*. Consequentemente, $J(B_E)$ é compacto na topologia fraca*. Mas pelo Lema 5.19, $J(B_E)$ é denso em $B_{E^{**}}$ na topologia fraca*, logo $J(B_E) = B_{E^{**}}$ e portanto $J(E) = E^{**}$. ■

5.23 Corolário. *Seja E um espaço reflexivo. Se $C \subset E$ é convexo, fechado e limitado, então C é fracamente compacto.*

Prova. Pela Proposição 5.5, C é fracamente fechado. Como existe uma constante $r > 0$ tal que $rC = \{rx : x \in C\} \subset B_E$ e B_E é fracamente compacta, segue que C, um subconjunto fracamente fechado de um conjunto fracamente compacto, também é fracamente compacto. ■

5.24 Teorema. *Se E é um espaço vetorial normado separável, então toda sequência limitada em E^* possui uma subsequência convergente na topologia fraca*.*

Prova. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ um subconjunto enumerável denso e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$ uma sequência limitada, digamos

$$\|f_n\|_{E^*} \leqslant M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

A sequência $\{f_n(x_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência real limitada, logo possui uma subsequência convergente $\{f_{n_1}(x_1)\}_{n_1\in\mathbb{N}}$. Considere a subsequência limitada $\{f_{n_1}(x_2)\}_{n_1\in\mathbb{N}}$; ela possui uma subsequência covergente $\{f_{n_2}(x_2)\}_{n_2\in\mathbb{N}}$. Procedendo desta maneira, para cada $k \in \mathbb{N}$ obtemos uma subsequência convergente $\{f_{n_k}(x_k)\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ da subsequência convergente $\left\{f_{n_{k-1}}(x_k)\right\}_{n_{k-1}\in\mathbb{N}}$. Defina

$$g_n = (f_{n_n})_n$$

(isto é, g_n é o n-ésimo termo da subsequência f_{n_n}; método da diagonal de Cantor). Então g_n é uma subsequência de f_n tal que $\{g_n(x_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $k \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $\{g_n(x_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $x \in E$. De fato, dados $x \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x - x_k\| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\|g_n(x) - g_m(x)\| &\leqslant \|g_n(x) - g_n(x_k)\| + \|g_n(x_k) - g_m(x_k)\| + \|g_m(x_k) - g_m(x)\| \\
&\leqslant \|g_n\| \|x - x_k\| + \|g_n(x_k) - g_m(x_k)\| + \|g_m\| \|x_k - x\| \\
&\leqslant \|g_n(x_k) - g_m(x_k)\| + \frac{2}{3}\varepsilon,
\end{aligned}$$

de modo que, como $\{g_n(x_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, $\{g_n(x_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ também é.

Defina $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ por
$$g(x) = \lim g_n(x).$$
Então g é linear e limitada pois
$$|g(x)| \leqslant \lim |g_n(x)| \leqslant M\,\|x\|.$$
Pela Proposição 5.15 (i), segue que $g_n \overset{*}{\rightharpoonup} g$. ■

O próximo resultado é extremamente útil nas aplicações:

5.25 Teorema. *Se E é um espaço reflexivo, então toda sequência limitada em E possui uma subsequência fracamente convergente.*

Prova. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência limitada e $L = \overline{\langle x_1, x_2, \ldots\rangle}$ o fecho do subespaço vetorial gerado pelos x_n. Como já vimos antes no capítulo anterior, L é separável. Além disso, como L é um subespaço fechado de um espaço reflexivo, L também é reflexivo. Pelo Corolário 3.6 L^* é separável, logo podemos aplicar o teorema anterior: como J é uma isometria, $\{Jx_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^{**}$ é uma sequência limitada, logo possui uma subsequência convergente na topologia fraca*. Logo, $Jx_n \overset{*}{\rightharpoonup} Jx$ para algum $x \in E$, pois E é reflexivo. Pela Proposição 5.15 (i), isso significa que $(Jx_n)(f) \to (Jx)(f)$ para todo $f \in E^*$, isto é, $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in E^*$, o que implica $x_n \rightharpoonup x$ pela Proposição 5.11 (i). ■

5.26 Corolário. *Se E é um espaço reflexivo de dimensão infinita, então existem sequências fracamente convergentes que não são fortemente convergentes.*

Prova. Basta tomar uma subsequência fracamente convergente de uma sequência de pontos na bola unitária de E que não possui nenhuma subsequência de Cauchy na topologia forte (veja o Corolário 2.18). ■

A recíproca do Teorema 5.24 é verdadeira e bem mais difícil de provar:

5.27 Teorema. (Teorema de Eberlein-Smulian) *Seja E um espaço de Banach tal que toda sequência limitada possui uma subsequência fracamente convergente. Então E é reflexivo.*

Prova. Veja [Dunford-Schwartz], p. 430, ou, para uma demonstração mais elementar, [Whitley]. O teorema de Eberlein-Smulian é usualmente formulado da seguinte maneira: *se E é um espaço de Banach e $A \subset E$ é um subconjunto, então toda sequência de A possuir uma subsequência fracamente convergente é equivalente ao fecho fraco de A ser fracamente compacto.* Tomando $A = B_E$, como a bola unitária fechada B_E é fracamente fechada porque é um conjunto convexo, segue que se toda sequência em B_E possui uma subsequência fracamente convergente, então B_E é fracamente compacto. Pelo Teorema 5.22, concluímos então que E é reflexivo. ■

5.6 Metrizabilidade e Topologia Fraca

Embora a topologia fraca no espaço E todo e a topologia fraca* no espaço E^* todo nunca serem metrizáveis [Brezis], elas são metrizáveis quando restritas a bolas sob certas condições (o que costuma ser suficiente nas aplicações):

5.28 Teorema. *Seja E um espaço de Banach. Então E^* é separável se e somente se B_E na topologia fraca é metrizável.*

Prova. Suponha E^* separável. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um subconjunto enumerável denso de B_{E^*}. Vamos definir uma métrica em B_E da seguinte forma:
$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|.$$

De fato, a validade da desigualdade triangular é fácilmente verificada. Além disso, se $x, y \in B_E$, então $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$: se $x \neq y$, pelo teorema de Hahn-Banach existe $f \in B_{E^*}$ tal que $f(x - y) = \varepsilon > 0$; se $n \in \mathbb{N}$ é tal que $\|f - f_n\| < \varepsilon/4$, temos

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_n(y)| &\geqslant |f(x) - f(y)| - |f(x) - f_n(x)| - |f(y) - f_n(y)| \\
&> \varepsilon - \|f - f_n\| \|x\| - \|f - f_n\| \|y\| \\
&\geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} > 0.
\end{aligned}$$

Para mostrar que a métrica d induz sobre B_E a topologia fraca restrita a B_E, seja

$$V = \{x \in B_E : |g_i(x) - g_i(x_0)| < \varepsilon,\ g_1, \ldots, g_k \in B_{E^*}\}$$

um elemento base da topologia fraca restrita a B_E contendo um ponto arbitrário $x_0 \in B_E$ (observe que não há perda de generalidade em tomar $g_1, \ldots, g_k \in B_{E^*}$) Vamos mostrar que existe $r > 0$ tal que

$$B = B_r^d(x_0) \cap B_E = \{x \in B_E : d(x, x_0) < r\}$$

está contida em V. Para cada $i = 1, \ldots, k$, seja $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|g_i - f_{n_i}\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Seja $r > 0$ tal que

$$r < \frac{\varepsilon}{2^{n_i+1}} \qquad \text{para cada } i = 1, \ldots, k.$$

Se $x \in B$, vale em particular

$$\frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)| < r$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, logo

$$\begin{aligned}
|g_i(x) - g_i(x_0)| &\leqslant |(g_i - f_{n_i})(x - x_0)| + |f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_0)| \\
&< \|g_i - f_{n_i}\| \|x - x_0\| + 2^{n_i} r \\
&< \frac{\varepsilon}{4}(\|x\| + \|x_0\|) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, dado um elemento base $B = B_r^d(x_0) \cap B_E$ da topologia da métrica restrita a B_E, vamos encontrar uma vizinhança fraca de x_0. Seja $\varepsilon < \frac{r}{2}$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$. Tome

$$V = \{x \in B_E : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon,\ n = 1, \ldots, k\}.$$

Se $x \in V$, então

$$\begin{aligned}
d(x, x_0) &= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(x_0)| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(x_0)| \\
&< \varepsilon \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|f_n\| \|x - x_0\| \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{1}{2^{k-1}} < r.
\end{aligned}$$

Para a recíproca do teorema veja [Dunford-Schwartz]. ■

Não é suficiente que o próprio E seja separável para que B_E seja metrizável, como o exemplo de ℓ^1 mostra. Com efeito, como sequências fracamente convergentes em ℓ^1 são equivalentes a sequências fortemente convergentes, como já observamos antes, a metrizabilidade da bola unitária fechada na topologia fraca de ℓ^1

implicaria então que as topologias fraca e forte de ℓ^1 coincidem (porque em um espaço métrico a topologia pode ser toda formulada em termos de convergência de sequências, isto é, os fechados (e, consequentemente, os abertos) podem ser caracterizados através de sequências convergentes), o que não é verdade porque ℓ^1 tem dimensão infinita.

5.29 Teorema. *Seja E um espaço de Banach. Então E é separável se e somente se B_{E^*} na topologia fraca* é metrizável.*

Prova. Suponha E separável. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um subconjunto enumerável denso de B_E. Vamos definir uma métrica em B_{E^*} da seguinte forma:

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| f(x_n) - g(x_n) \right|.$$

De fato, se $d(f,g) = 0$, então $f = g$ em um subconjunto denso de B_E, logo $f = g$ em B_E e portanto em E; a validade da desigualdade triangular é fácilmente verificada. Para mostrar que a métrica d induz sobre B_{E^*} a topologia fraca* restrita a B_{E^*}, seja

$$V = \{f \in B_{E^*} : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon,\ y_1, \ldots, y_k \in B_E\}$$

um elemento base da topologia fraca* restrita a B_{E^*} contendo um ponto arbitrário $f_0 \in B_{E^*}$ (observe que não há perda de generalidade em tomar $y_1, \ldots, y_k \in B_E$). Vamos mostrar que existe $r > 0$ tal que

$$B = B_r^d(f_0) \cap B_{E^*} = \{f \in B_{E^*} : d(f, f_0) < r\}$$

está contida em V. Para cada $i = 1, \ldots, k$, seja $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|y_i - x_{n_i}\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Seja $r > 0$ tal que

$$r < \frac{\varepsilon}{2^{n_i+1}} \qquad \text{para cada } i = 1, \ldots, k.$$

Se $f \in B$, vale em particular

$$\frac{1}{2^n} |f(x_n) - f_0(x_n)| < r$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, logo

$$\begin{aligned}
|f(x_i) - f_0(x_i)| &\leqslant |(f - f_0)(y_i - x_{n_i})| + |f(x_{n_i}) - f_0(x_{n_i})| \\
&< \|f - f_0\| \|y_i - x_{n_i}\| + 2^{n_i} r \\
&< (\|f\| + \|f_0\|) \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, dado um elemento base $B = B_r^d(f_0) \cap B_{E^*}$ da topologia da métrica restrita a B_{E^*}, vamos encontrar uma vizinhança fraca* de f_0. Seja $\varepsilon < \frac{r}{2}$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$. Tome

$$V = \{f \in B_{E^*} : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon,\ n = 1, \ldots, k\}.$$

Se $f \in V$, então

$$\begin{aligned}
d(x, x_0) &= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} |f(x_n) - f_0(x_n)| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f(x_n) - f_0(x_n)| \\
&< \varepsilon \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|f - f_0\| \|x_n\| \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{1}{2^{k-1}} < r.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que B_{E^*} munida da topologia fraca* é metrizável e denote por d uma métrica que induz a topologia fraca* sobre B_{E^*}. Para obter um subconjunto enumerável denso em E, considere as bolas abertas B_n em torno do funcional nulo de raio $1/n$, isto é,

$$B_n = \left\{ f \in B_{E^*} : d\,(f, 0) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Como esta bola é aberta na topologia fraca*, para cada n existe uma vizinhança fraca* $V_n \subset U_n$ contendo a origem, digamos,

$$V_n = \{ f \in B_{E^*} : |f\,(x_{i,n})| < \varepsilon_n,\ i = 1, \ldots, i_n \}.$$

Afirmamos que o subespaço vetorial gerado pelo conjunto enumerável $D = (x_{i,n})_{i=1,\ldots,i_n, n\in\mathbb{N}}$ é denso em E. De fato, como $\cap B_n = \{0\}$, segue que $\cap V_n = \{0\}$ também. Em particular, se $f\,(x) = 0$ para todo $x \in D$, então $f \in \cap V_n$ e consequentemente $f = 0$. Pelo teorema de Hahn-Banach, isso só pode ser verdade se o subespaço vetorial gerado por D é denso em E. Tomando apenas combinações lineares racionais dos elementos de D, obtemos um subconjunto enumerável denso em E. ■

5.7 Exercícios

5.1 Seja E um espaço reflexivo e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência tal que $\{f\,(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $f \in E^*$. Mostre que existe $x \in E$ tal que $x_n \rightharpoonup x$.

5.2 (Teorema de Mazur) Seja E um espaço vetorial normado e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência que converge fracamente para x. Mostre que existe uma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $y_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ com $\lambda_i \geqslant 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ (isto é, cada y_n é uma combinação linear convexa de $x_1, \ldots, x_n$) tal que $\{y_n\}$ converge fortemente para x.

5.3 Sejam E, F espaços de Banach. Seja $T : E \longrightarrow F$ um operador linear que leva sequências fortemente convergentes para 0 em sequências fracamente convergentes para 0. Mostre que T é contínuo.

5.4 Se $f_n \in C\,[0,1]$ e $f_n \rightharpoonup f$ em $C\,[0,1]$, mostre que $f_n\,(t) \to f\,(t)$ para todo $t \in [0,1]$.

5.5 Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear limitado. Mostre que se $x_n \rightharpoonup x$ em E, então $Tx_n \rightharpoonup Tx$ em F.

5.6 Seja E um espaço vetorial normado. Mostre que se $x_n \rightharpoonup x$ e $y_n \rightharpoonup y$ em E, então $x_n + y_n \rightharpoonup x + y$ e $\alpha x_n \rightharpoonup \alpha x$ em E, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é um escalar qualquer.

5.7 Seja E um espaço vetorial normado. Mostre que todo conjunto fracamente compacto em E é limitado.

5.8 Se E é um espaço reflexivo, então um conjunto é fracamente compacto se e somente se ele é fracamente fechado e limitado.

5.9 Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em ℓ^p, $1 < p < \infty$. Denote cada elemento $x_n = \left(x_n^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$.

a) Mostre que $x_n \rightharpoonup x$ se e somente se $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e $x_n^i \to x^i$ para cada i.

b) A sequência $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para 0, mas não converge fortemente para 0.

c) Defina $F = \{e_n + ne_m : m > n\}$. Mostre que a distância entre dois elementos de F é pelo menos 1. Conclua que F é fortemente fechado.

d) Mostre que 0 está no fecho fraco de F, mas não existe nenhuma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ tal que $y_n \rightharpoonup 0$. Isso mostra que os conjuntos fechados na topologia fraca não podem ser caracterizados por meio de sequências, logo ela não satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade e que a topologia fraca não é metrizável.

5.10 Prove o teorema de Eberlein-Smulian usando o teorema de James: *Se E é um espaço de Banach não-reflexivo, então existe $f_0 \in E^*$ tal que não existe nenhum elemento $x \in E$ satisfazendo $f_0(x) = \|f_0\| \|x\|$.* [Compare este teorema com o Exercício 4.4.]

5.11 Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que um subconjunto $B \subset E$ é **fracamente limitado** se $f(B) \subset \mathbb{R}$ é limitado para todo $f \in E^*$.

Mostre que se E é um espaço de Banach, então B é fracamente limitado se e somente se B é limitado.

5.12 Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é **fracamente de Cauchy** se $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy para todo $f \in E^*$.

Mostre que se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, então $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

5.13 Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que E é **fracamente completo** se toda sequência fracamente de Cauchy é fracamente convergente.

Mostre que se E é reflexivo, então E é fracamente completo. Dê um exemplo para mostrar que a recíproca não é válida.

Capítulo 6

Espaços de Hilbert

6.1 Produto Interno

6.1 Definição. Seja E um espaço vetorial. Um **produto interno** em E é uma forma bilinear simétrica definida positiva, isto é, uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ para todos $x, y, z \in E$ e para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para todos $x, y \in E$.

(iii) $\langle x, x \rangle > 0$ para todo $x \neq 0$.

6.2 Proposição. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Defina*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Então

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\| \tag{6.1}$$

para todos $x, y \in E$.

Prova: Para todos $x, y \in E$ vale

$$\langle x + ty, x + ty \rangle \geqslant 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Mas

$$\langle x + ty, x + ty \rangle = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle t + \|y\|^2 t^2,$$

logo o discriminante deste polinômio do segundo grau não pode ser positivo:

$$4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0.$$

Daí segue a desigualdade de Cauchy-Schwartz. ■

6.3 Proposição. *Seja E um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{6.2}$$

define uma norma em E.

Prova: A condição (i) da Definição 1.1 decorre imediatamente da condição (iii) da Definição 6.1. A condição (ii) da Definição 1.1 decorre de

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\| .$$

Finalmente, a desigualdade triangular é provada usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 . \end{aligned}$$

■

A norma definida na Proposição 6.3 é chamada a **norma derivada do produto interno** ou *norma induzida pelo produto interno*. De agora em diante, se E é um espaço vetorial com produto interno, assumiremos que E é um espaço vetorial normado com a norma derivada do produto interno.

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$\frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \leqslant 1.$$

6.4 Definição. Seja E um espaço vetorial com produto interno. Dados dois vetores $x, y \in V$ definimos o seu **ângulo** $\measuredangle(x, y)$ por

$$\measuredangle(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

Em particular, se $\langle x, y \rangle = 0$, então$\measuredangle(x, y) = \pi/2$. Dizemos que dois vetores x, y são **ortogonais** se $\langle x, y \rangle = 0$.

6.5 Proposição. (Teorema de Pitágoras) *Seja E um espaço vetorial com produto interno. Então $x, y \in E$ são vetores ortogonais se e somente se*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 . \tag{6.3}$$

Prova: Temos

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 ,$$

logo x, y satisfazem a identidade de Pitágoras se e somente se $\langle x, y \rangle = 0$. ■

6.6 Proposição. (Identidade Polar) *Seja E um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 . \tag{6.4}$$

Prova:

$$\frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{4}(\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle) - \frac{1}{4}(\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle) = \langle x, y \rangle .$$

■

6.7 Proposição. (Identidade do Paralelogramo) *Seja E um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) . \tag{6.5}$$

Prova: Temos

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= (\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle)+(\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle)\\ &= 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).\end{aligned}$$

■

6.8 Teorema. *Seja E um espaço vetorial normado, cuja norma $\|\cdot\|$ satisfaz a identidade do paralelogramo*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

Então a identidade polar

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\|x+y\|^2-\frac{1}{4}\|x-y\|^2$$

define um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em E tal que a sua norma é derivada dele.

Prova: Vamos verificar que $\langle\cdot,\cdot\rangle$satisfaz todas as condições da Definição 6.1 para ser um produto interno em E.

Linearidade com relação à primeira variável:

Temos

$$\begin{aligned}\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle &= \frac{1}{4}\|x+z\|^2-\frac{1}{4}\|x-z\|^2+\frac{1}{4}\|y+z\|^2-\frac{1}{4}\|y-z\|^2\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2+\|y+z\|^2\right)-\frac{1}{4}\left(\|x-z\|^2+\|y-z\|^2\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(\|x+z+y+z\|^2+\|x+z-(y+z)\|^2\right)\\ &- \frac{1}{8}\left(\|x-z+y-z\|^2+\|x-z-(y-z)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(\|x+z+y+z\|^2+\|x-y\|^2\right)-\frac{1}{8}\left(\|x-z+y-z\|^2+\|x-y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(\|x+z+y+z\|^2\right)-\frac{1}{8}\left(\|x-z+y-z\|^2\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(2\|x+y+z\|^2+2\|z\|^2-\|(x+y+z)-z\|^2\right)\\ &- \frac{1}{8}\left(2\|x+y-z\|^2+2\|z\|^2-\|(x+y-z)+z\|^2\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(2\|x+y+z\|^2-\|x+y\|^2\right)-\frac{1}{8}\left(2\|x+y-z\|^2-\|x+y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\|x+y+z\|^2-\frac{1}{4}\|x+y-z\|^2\\ &= \langle x+y,z\rangle,\end{aligned}$$

donde

$$\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle=\langle x+y,z\rangle \tag{6.6}$$

para todos $x,y,z\in E$.

Se $\alpha=n\in\mathbb{N}$, por iteração de (6.6) obtemos

$$\langle nx,y\rangle=n\langle x,y\rangle;$$

por exemplo, para $n=2$ temos

$$\langle 2x,y\rangle=\langle x+x,y\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,y\rangle=2\langle x,y\rangle.$$

Se $n = -1$, notando que

$$\langle 0, y \rangle = \frac{1}{4} \|0 + y\|^2 - \frac{1}{4} \|0 - y\|^2 = \frac{1}{4} \|y\|^2 - \frac{1}{4} \|-y\|^2 = \frac{1}{4} \|y\|^2 - \frac{1}{4} \|y\|^2 = 0,$$

escrevemos

$$0 = \langle 0, y \rangle = \langle x - x, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle -x, y \rangle,$$

de modo que

$$\langle -x, y \rangle = - \langle x, y \rangle.$$

Daí, se $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle -nx, y \rangle = \langle n(-x), y \rangle = n \langle -x, y \rangle = (-1) n \langle x, y \rangle = -n \langle x, y \rangle.$$

Portanto, $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$. Em seguida, para provar que

$$\left\langle \frac{1}{n} x, y \right\rangle = \frac{1}{n} \langle x, y \rangle$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, notamos que

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum \frac{1}{n} x, y \right\rangle = \sum \left\langle \frac{1}{n} x, y \right\rangle = n \left\langle \frac{1}{n} x, y \right\rangle.$$

Reunindo os dois resultados, concluímos que $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{Q}$. Para obter o resultado geral para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, basta observar que a função norma é contínua e, como o produto interno foi definido a partir da norma, ele também é uma função contínua. Assim, dado qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, tomamos uma seqüência $(\alpha_n) \subset \mathbb{Q}$ tal que $\alpha_n \to \alpha$ e obtemos

$$\begin{array}{ccc} \langle \alpha_n x, y \rangle & = & \alpha_n \langle x, y \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle \alpha x, y \rangle & & \alpha \langle x, y \rangle \end{array}$$

donde

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

para todos $x, y \in E$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Simetria:

Temos

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 = \frac{1}{4} \|y + x\|^2 - \frac{1}{4} \|y - x\|^2 = \langle y, x \rangle.$$

Linearidade com relação à segunda variável:

Segue da simetria e da linearidade com relação à primeira variável.

Definida positiva:

Se $x \neq 0$, temos

$$\langle x, x \rangle = \frac{1}{4} \|x + x\|^2 - \frac{1}{4} \|x - x\|^2 = \frac{1}{4} \|2x\|^2 = \|x\|^2 > 0.$$

■

6.9 Corolário. *Seja E um espaço vetorial normado. Então a norma de E deriva de um produto interno se e somente se ela satisfaz a identidade do paralelogramo.*

6.2 Espaços de Hilbert

6.10 Definição. Dizemos que H é um **espaço de Hilbert** se H for um espaço vetorial com produto interno que é um espaço de Banach com a norma derivada do produto interno.

6.11 Exemplo. $\ell^2(n)$, ℓ^2 e $L^2(\Omega)$ são espaços de Hilbert. $\square$

6.12 Teorema. *Todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo.*

Prova: Se $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$ e $\|x-y\| > \varepsilon$, pela identidade do paralelogramo temos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 &= \frac{1}{4}\|x+y\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 \\ &< 1 - \frac{\varepsilon^2}{4},\end{aligned}$$

de modo que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta$$

para $\delta = 1 - \left(1-\dfrac{\varepsilon^2}{4}\right)^{1/2} > 0$ pois $\varepsilon < \|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant 2$. $\blacksquare$

6.13 Corolário. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

6.3 Teorema de Representação de Riesz

6.14 Teorema. (Vetor que minimiza a distância) *Sejam H um espaço de Hilbert e $C \subset H$ um subconjunto convexo fechado não-vazio. Para todo $x \in H$ existe um único $y_0 \in C$ tal que*

$$\|x - y_0\| = \min_{y\in C} \|x-y\|.$$

Prova: Denote $d = \inf_{y\in C} \|x-y\|$ e seja $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ uma sequência minimizante para a distância, isto é,

$$\|x-y_n\| = d_n \to d.$$

Afirmamos que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. De fato, pela identidade do paralelogramo temos

$$\|x-y_n+(x-y_m)\|^2 + \|x-y_n-(x-y_m)\|^2 = 2\left(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_m\|^2\right).$$

Como $\dfrac{y_n+y_m}{2} \in C$, porque C é convexo, segue que

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\|^2 &= 2\left(d_n^2+d_m^2\right) - 4\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant 2\left(d_n^2+d_m^2\right) - 4d^2 \\ &\to 0\end{aligned}$$

quando $n, m \to \infty$. Como H é completo e C é fechado, podemos tomar

$$y_0 = \lim y_n \in C.$$

Para provar a unicidade, suponha que existam $y_0, \widetilde{y}_0 \in C$ tais que

$$\|x - y_0\| = \|x - \widetilde{y}_0\| = d.$$

Usando a identidade do paralelogramo novamente, temos

$$\|y_0 - \widetilde{y}_0\|^2 = 2\left(d^2 + d^2\right) - 4\left\|x - \frac{y_0 + \widetilde{y}_0}{2}\right\|^2 \leqslant 4d^2 - 4d^2 = 0.$$

■

6.15 Corolário. *Sejam H um espaço de Hilbert e $L \subset H$ um subespaço vetorial fechado. Para todo $x \in H$ o único $y_0 \in L$ tal que*

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in L} \|x - y\|,$$

dado pelo teorema anterior, satisfaz

$$x - y_0 \perp L.$$

Prova: Para provar a ortogonalidade do vetor $x - y_0$, primeiro mostraremos que

$$\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leqslant 0 \quad \text{para todo } y \in L. \tag{6.7}$$

Com efeito, para todo $0 \leqslant t \leqslant 1$ temos $z = (1-t)\, y_0 + ty \in L$, logo

$$\|x - y_0\| \leqslant \|x - [(1-t)\, y_0 + ty]\| = \|x - y_0 - t\,(y - y_0)\|,$$

de modo que

$$\|x - y_0\|^2 \leqslant \|x - y_0\|^2 - 2t\,\langle x - y_0, y - y_0 \rangle + t^2\,\|y - y_0\|,$$

donde

$$2\,\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leqslant t\,\|y - y_0\|.$$

Fazendo $t \to 0$, segue (6.7). Agora, dado $y \in L$, segue de (6.7) que

$$\langle x - y_0, ty - y_0 \rangle \leqslant 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

logo

$$t\,\langle x - y_0, y \rangle \leqslant \langle x - y_0, y_0 \rangle$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, o que implica que necessariamente $\langle x - y_0, y \rangle = 0$. ■

6.16 Lema. *Sejam H um espaço de Hilbert e $L \subset H$ um subespaço vetorial fechado próprio. Então existe $z \in H \backslash L$ tal que $\|z\| = 1$ e $z \perp L$.*

Prova: Pelo teorema anterior, dado $w \in H \backslash L$, existe $y_0 \in L$ tal que $w - y_0 \perp L$. Claramente, $w - y_0 \notin L$, logo podemos tomar

$$z = \frac{w - y_0}{\|w - y_0\|}.$$

■

Os funcionais lineares em um espaço de Hilbert podem ser representados através do produto interno:

6.17 Teorema. (Teorema de Representação de Riesz) *Seja H um espaço de Hilbert. Dado $f \in H^*$ existe um único $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

para todo $x \in H$. Além disso,

$$\|f\|_{H^*} = \|y\|_H.$$

Em particular,

$$H^* = H$$

no sentido que estes espaços são isometricamente isomorfos.

Prova: Como $f \in H^*$, $L = \ker f$ é fechado. Se $L = H$, então $f \equiv 0$ e tomamos $y = 0$. Caso contrário, pelo lema anterior existe $z \in H \backslash L$ tal que $\|z\| = 1$ e $z \perp L$. Temos $H = \langle z \rangle \oplus L$. Mais especificamente, dado $x \in H$ podemos escrever

$$x = \frac{f(x)}{f(z)} z + \left(x - \frac{f(x)}{f(z)} z \right) \tag{6.8}$$

e

$$x - \frac{f(x)}{f(z)} z \in L$$

Afirmamos que $y = f(z) z$. De fato, fazendo o produto interno de (6.8) com o vetor $y = f(z) z$ segue que

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \frac{f(x)}{f(z)} z + \left(x - \frac{f(x)}{f(z)} z \right), f(z) z \right\rangle = \left\langle \frac{f(x)}{f(z)} z, f(z) z \right\rangle = f(x) \langle z, z \rangle \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz temos $|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$, de modo que $\|f\|_{H^*} \leqslant \|y\|$ e

$$\|f\|_{H^*} \geqslant f\left(\frac{y}{\|y\|} \right) = \frac{\langle y, y \rangle}{\|y\|} = \|y\|.$$

■

6.18 Corolário. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Prova: Como $H^* = H$, temos também $(H^*)^* = H^*$. Assim, a cada $F \in H^{**} = (H^*)^*$ corresponde um funcional $f \in H^*$ tal que $F(g) = f(y)$ para todo $g \in H^*$, onde $y \in H$ satisfaz

$$g(x) = \langle x, y \rangle$$

para todo $x \in H$. Do mesmo modo, como $H^* = H$, a cada $f \in H^*$ corresponde um elemento $x \in H$ tal que

$$f(y) = \langle y, x \rangle$$

para todo $y \in H$. Portanto,

$$F(g) = f(y) = \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle = g(x) = (Jx)(g)$$

para todo $g \in H^*$. ■

6.4 Bases de Schauder e Bases de Hilbert

6.19 Definição. Seja E um espaço de Banach. Uma **base de Schauder** para E é um conjunto de vetores $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que todo vetor $x \in E$ se escreve de maneira única como uma série infinita $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ para alguns escalares únicos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Se um espaço de Banach admite uma base de Hilbert, então ele é separável. No entanto, existem exemplos de espaços de Banach separáveis que não possuem bases de Schauder, até mesmo espaços de Banach com bases de Schauder que possuem subespaços sem base de Schauder (veja [Brezis]). Veremos nesta seção que todo espaço de Hilbert separável possui uma base de Schauder ortonormal (existem espaços de Hilbert que não são separáveis; veja [EMT]).

6.20 Definição. Seja H um espaço vetorial com produto interno. Dizemos que $S = \{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset H$ é um **sistema ortonormal** se $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = 0$ para todos $\alpha \neq \beta$ e $\|e_\lambda\| = 1$ para todo λ. Dizemos que um sistema ortonormal S é **completo** se não existir nenhum sistema ortonormal em H que contenha S propriamente.

6.21 Exemplo. Em $\ell^2(n)$, a base canônica de $\mathbb{R}^n$ é um sistema ortonormal completo. Em ℓ^2, a base canônica

$$(e_n)_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = n, \\ 0 & \text{se } i \neq n, \end{cases}$$

é um sistema ortonormal completo. Em $L^2(\Omega)$, as autofunções do operador Laplaciano, isto é, as soluções linearmente independentes do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

formam um sistema ortonormal completo. Por este motivo, $S = \left\{1, \sqrt{2}\,\text{sen}\, n\pi x, \sqrt{2}\cos n\pi x\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo para $L^2(0,1)$ (séries de Fourier). □

6.22 Proposição. *Seja H um espaço vetorial com produto interno não-nulo. Então H admite um sistema ortonormal completo.*

Além disso, se S é um sistema ortonormal para H, então S pode ser completado até um sistema ortonormal completo.

Prova: Seja S um sistema ortonormal para H (todo espaço vetorial com produto interno admite um sistema ortonormal: se $e \in H$ é um vetor não-nulo, basta tomar $S = \{e\}$). Seja $\mathcal{S} = \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ a coleção de todos os sistemas ortonormais de H que contêm S. Introduza um ordem parcial nesta coleção definindo

$$S_\alpha \leqslant S_\beta \quad \text{se } S_\alpha \subset S_\beta.$$

Qualquer subcoleção $\mathcal{S}_0 = \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_0} \subset \mathcal{S}$ possui um limitante superior: $S_{\lambda_0} = \cup_{\lambda\in\Lambda_0} S_\lambda$. Pelo lema de Zorn, $\mathcal{S}$ possui um elemento maximal; este é um sistema ortonormal completo para H contendo S. ■

6.23 Lema. (Lema da Melhor Aproximação) *Sejam H um espaço vetorial com produto interno e $S = \{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset H$ um sistema ortonormal. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Lambda$ índices quaisquer, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ escalares quaisquer e se $x \in H$ denote $x_i = \langle x, e_{\alpha_i}\rangle$. Então*

(i)
$$\left\| x - \sum_{i=1}^n c_i e_{\alpha_i} \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - c_i)^2 .$$

(ii) $\left\| x - \sum_{i=1}^n c_i e_{\alpha_i} \right\|$ *assume o valor mínimo se e somente se $c_i = x_i$.*

(iii)
$$\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leqslant \|x\|^2 .$$

Prova: Temos

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^n c_i e_{\alpha_i} \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_{i=1}^n c_i e_{\alpha_i}, x - \sum_{i=1}^n c_i e_{\alpha_i} \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n c_i^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n |x_i|^2 - 2\sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n c_i^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - c_i)^2 , \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração de (i). (ii) e (iii) seguem imediatamente de (i). ■

6.24 Definição. Sejam H um espaço vetorial com produto interno e $S = \{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset H$ um sistema ortonormal completo. Dado $x \in H$, os **coeficientes de Fourier** de x são os escalares $x_\lambda = \langle x, e_\lambda \rangle$, $\lambda \in \Lambda$.

Lembramos que se Λ é um conjunto de índices e $\{c_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathbb{R}$ é um conjunto de números reais positivos indexados por Λ, então definimos

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda = \sup_{\substack{F\subset\Lambda \\ F \text{ finito}}} \sum_{\lambda\in F} c_\lambda.$$

6.25 Corolário. (Desigualdade de Bessel) *Sejam H um espaço vetorial com produto interno e $S = \{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset H$ um sistema ortonormal. Então*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |x_\lambda|^2 \leqslant \|x\|^2$$

para todo $x \in H$. Em particular, para cada $x \in H$ o subconjunto de índices $\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ é enumerável.

Prova: Para cada $n \in \mathbb{N}$, o subconjunto de índices $\Lambda_n = \left\{ \lambda \in \Lambda : |x_\lambda|^2 \geqslant \dfrac{\|x\|^2}{n} \right\}$ possui no máximo n elementos e $\Lambda_0 = \cup \Lambda_n$. ■

Em espaços de Hilbert, a desigualdade de Bessel é uma identidade:

6.26 Teorema. *Seja H um espaço de Hilbert. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $S = \{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é um sistema ortonormal completo para H.*

(ii) *Se $x \perp e_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, então $x = 0$.*

(iii) (Expansão em série de Fourier) *Se $x \in H$, então*

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda.$$

(iv) (Identidade de Parseval) *Se $x \in H$, então*

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |x_\lambda|^2.$$

Prova: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) decorre da definição de sistema ortonormal completo. (ii) $\Rightarrow$ (iii) Seja $\{x_{\lambda_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ o conjunto enumerável dos coeficientes de Fourier não-nulos de x. Defina

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} x_{\lambda_i} e_{\lambda_i}.$$

Então $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em H, pois

$$\|y_n - y_m\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} |x_{\lambda_i}|^2 \to 0$$

quando $n, m \to \infty$ pela desigualdade de Bessel. Como H é um espaço de Hilbert, seja

$$y = \lim y_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\lambda_i} e_{\lambda_i} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle e_\lambda.$$

Mostraremos que $x = y$: se $\lambda = \lambda_j$ para algum j temos

$$\left\langle x - y, e_{\lambda_j} \right\rangle = \lim \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} x_{\lambda_i} e_{\lambda_i}, e_{\lambda_j} \right\rangle = \left\langle x, e_{\lambda_j} \right\rangle - x_{\lambda_j} = 0;$$

se $\lambda \neq \lambda_j$ para todo j temos

$$\langle x - y, e_\lambda \rangle = \lim \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} x_{\lambda_i} e_{\lambda_i}, e_\lambda \right\rangle = \langle x, e_\lambda \rangle = 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Usando (i) do Lema 6.23 podemos escrever

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |x_\lambda|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_{\lambda_n}|^2 = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} |x_{\lambda_n}|^2 = \|x\|^2 - \lim_{k \to \infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{k} x_{\lambda_n} e_{\lambda_n} \right\|^2 = \|x\|^2.$$

(iv) $\Rightarrow$ (ii) Se $x \perp e_\lambda$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$, então

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |x_\lambda|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x, e_\lambda \rangle^2 = 0.$$

■

6.27 Teorema. *Seja H um espaço de Hilbert. Então H possui um sistema ortonormal completo enumerável se e somente se H é separável.*

Prova: Seja $S = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um sistema ortonormal completo enumerável para H. Então $H = \overline{\langle e_1, e_2, \ldots \rangle}$ e portanto é separável.

Reciprocamente, suponha que $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ é um subconjunto enumerável denso de H. Aplicando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt a X, obtemos um sistema ortonormal enumerável $S = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para H. Mas então $H = \overline{\langle e_1, e_2, \ldots \rangle}$: para todo $n \in \mathbb{N}$ o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt garante que

$$\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle,$$

logo $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i,n} e_i$ para alguns escalares $\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{n,n}$. Segue que S é um sistema ortonormal completo: se $x \perp e_i$ para todo i, como podemos escrever

$$x = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{i,n_k} e_i,$$

porque existe um subconjunto $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ convenientemente reindexado tal que $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x$, temos

$$\|x\|^2 = \left\langle x, \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{i,n_k} e_i \right\rangle = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{i,n_k} \langle x, e_i \rangle = 0.$$

■

6.28 Corolário. *Seja H um espaço de Hilbert separável. Se H tem dimensão infinita, então H é isometricamente isomorfo a ℓ^2.*

Prova: Se H_1, H_2 são dois espaços de Hilbert com sistemas ortonormais completos $S_1 = \left\{e_\lambda^1\right\}_{\lambda \in \Lambda}, S_2 = \left\{e_\lambda^2\right\}_{\lambda \in \Lambda}$, respectivamente, então a aplicação linear $T : H_1 \longrightarrow H_2$ definida por

$$T\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \left\langle x, e_\lambda^1 \right\rangle e_\lambda^1 \right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left\langle x, e_\lambda^1 \right\rangle e_\lambda^2$$

é um isomorfismo isométrico. ■

6.5 Exercícios

6.1 Mostre que $\ell^p(n)$, ℓ^p e $L^p(\Omega)$ não é um espaço de Hilbert se $p \neq 2$.

6.2 Mostre que os espaços de Hölder $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ não são espaços de Hilbert.

6.3 Sejam H um espaço de Hilbert e $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ uma sequência de vetores ortonormais. Mostre que $e_n \rightharpoonup 0$.

6.4 Seja H um espaço de Hilbert. Prove que $x_n \to x$ em H se e somente se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$.

6.5 Seja H um espaço de Hilbert e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ sequências tais que $\|x_n\|, \|y_n\| \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\langle x_n, y_n \rangle \to 1$ quando $n \to \infty$. Mostre que $\|x_n - y_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$.

6.6 Seja H um espaço de Hilbert e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ uma sequência que converge fracamente para $x \in H$. Mostre que ela possui uma subsequência $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\frac{y_1 + \ldots + y_k}{k} \to x.$$

(Compare com o Teorema de Mazur, Exercício 5.2.)

6.7 Mostre que todo espaço de Banach possui uma base de Schauder é separável.

6.8 Mostre que em um espaço de Hilbert separável qualquer sistema ortonormal completo é no máximo enumerável.

6.9 Prove o Teorema da Projeção: *Seja H um espaço de Hilbert e $L \subset H$ um subespaço vetorial fechado. Então a projeção ortogonal $P : H \longrightarrow L \subset H$ de H sobre L é um operador linear limitado e $\|P\| \leqslant 1$.*

6.10 Sejam H um espaço de Hilbert, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um sistema ortonormal completo para H e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de vetores ortonormais. Mostre que se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1,$$

então $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ também é um sistema ortonormal completo para H.

Capítulo 7

Operadores Compactos

7.1 Operadores Completamente Contínuos e Operadores Compactos

7.1 Definição. Sejam E, F espaços vetoriais normados. Dizemos que um operador linear $T : E \longrightarrow F$ é **completamente contínuo** se T leva sequências fracamente convergentes em E em sequências convergentes em F.

Como um operador completamente contínuo leva em particular sequências convergentes em sequências convergentes e continuidade sequencial é equivalente à continuidade em espaços métricos, operadores completamente contínuos são de fato contínuos.

7.2 Definição. Sejam E, F espaços vetoriais normados. Dizemos que um operador linear $T : E \longrightarrow F$ é **compacto** se T leva conjuntos limitados em E em conjuntos relativamente compactos em F.

Equivalentemente, T é compacto se $T(B_E)$ é relativamente compacto em F. Todo operador compacto é contínuo: como $\overline{T(B_E)}$ é compacto e conjuntos compactos em espaços métricos são limitados, segue que $T(B_E)$ é limitado.

7.3 Proposição. *Sejam E, F espaços vetoriais normados. Então $T : E \longrightarrow F$ é compacto se e somente se T leva sequências limitadas em E em sequências que possuem subsequências convergentes em F.*

Prova: Se T é compacto e $\{x_n\}$ é limitada em E, então $\{Tx_n\}$ é relativamente compacto em F, logo possui subsequência convergente em F. Reciprocamente, suponha que para toda sequência limitada $\{x_n\}$ em E, $\{Tx_n\}$ possui uma subsequência convergente em F. Em particular, toda sequência $\{y_n\} \subset \overline{T(B_E)}$ possui subsequência convergente em E para algum limite; como este limite está necessariamente em $\overline{T(B_E)}$, segue que $\overline{T(B_E)}$ é compacto. ■

7.4 Proposição. *Sejam E, F espaços vetoriais normados. Se $T : E \longrightarrow F$ é compacto, então T é completamente contínuo.*

Prova: Seja $x_n \rightharpoonup x$ em E. Primeiro observe que $Tx_n \rightharpoonup Tx$ em F. De fato, dado $g \in F^*$, temos $g \circ T \in E^*$. Como $x_n \rightharpoonup x$ em E, temos que $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in E^*$, logo $g(Tx_n) \to g(Tx)$ para todo $g \in F^*$, o que implica $Tx_n \rightharpoonup Tx$. Suponha por absurdo que $Tx_n \not\to Tx$. Então existe $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $\{Tx_{n_k}\}$ tal que

$$\|Tx_{n_k} - Tx\| \geqslant \varepsilon$$

para todo n_k. Mas como $\{x_n\}$ é fracamente convergente, ela é limitada, logo $\{Tx_{n_k}\}$ também é limitada e possui uma subsequência fortemente convergente pela proposição anterior. Digamos, $Tx_{n_k} \to y$. Em particular, $Tx_{n_k} \rightharpoonup y$ e como o limite fraco é único, segue que $y = Tx$, ou seja, $Tx_{n_k} \to Tx$, uma contradição. ■

7.5 Corolário. *Sejam E um espaço reflexivo e F um espaço vetorial normado. Então $T : E \longrightarrow F$ é compacto se e somente se T é completamente contínuo.*

Prova: Pois em espaços reflexivos toda sequência limitada possui uma subsequência fracamente convergente. ■

Se E não for reflexivo, podemos ter T completamente contínuo sem ser compacto (veja Exercício 7.2).

Sejam E, F espaços vetoriais normados. Denotaremos o subespaço vetorial dos operadores compactos em $\mathcal{L}(E, F)$ (veja Exercício 7.1) por

$$K(E, F) = \{T \in \mathcal{L}(E, F) : T \text{ é compacto}\}.$$

Lembramos que em espaços métricos completos X, um conjunto $K \subset X$ é compacto se e somente se ele for fechado e *totalmente limitado*, isto é, se para todo $\varepsilon > 0$ existir uma cobertura finita de K por bolas de raio ε.

7.6 Proposição. *Seja F um espaço de Banach. Então $K(E, F)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Em particular, $K(E, F)$ é um espaço de Banach.

Prova: Seja $\{T_n\} \subset K(E, F)$ tal que $T_n \to T$ em $\mathcal{L}(E, F)$. Para mostrar que T é compacto, provaremos que para todo $\varepsilon > 0$ podemos cobrir $T(B_E)$ por um número finito de bolas de raio ε; como F é um espaço métrico completo, isso será suficiente para estabelecer que $\overline{T(B_E)}$ é compacto. Fixe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|T - T_n\| < \varepsilon/2$. Como $\overline{T_n(B_E)}$ é compacto, temos

$$T_n(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{y_i}(\varepsilon/2)$$

para alguns $y_1, \ldots, y_n \in F$. Então, como

$$\|Tx - y_i\| \leqslant \|T - T_n\| \|x\| + \|T_n x - y_i\| = \|T - T_n\| + \|T_n x - y_i\|$$

para todo $x \in B_E$ e para todo i, segue que

$$T(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{y_i}(\varepsilon).$$

■

7.7 Exemplo. Se E, F são espaços vetoriais normados, dizemos que um operador linear $T : E \longrightarrow F$ tem **posto finito** se a imagem $R(T)$ é um subespaço vetorial de dimensão finita. Claramente, operadores lineares limitados de posto finito são operadores compactos. □

7.8 Corolário. *Seja F um espaço de Banach. Se $\{T_n\}$ é uma sequência de operadores limitados de posto finito tal que $T_n \to T$ em $\mathcal{L}(E, F)$, então T é um operador compacto.*

Se F possuir uma base de Schauder vale a recíproca: dado um operador compacto $T \in K(E, F)$, existe uma sequência de operadores de posto finito $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(E, F)$ tal que $T_n \to T$ (veja o Exercício 7.3 para o caso de espaços de Hilbert). No caso geral, a recíproca é falsa (veja [Brezis]).

7.9 Proposição. *Sejam E, F, G espaços vetoriais normados. Sejam $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $S \in \mathcal{L}(F, G)$. Se T é compacto ou se S é compacto, então $S \circ T$ é compacto.*

Prova: Exercício. ■

7.2 Teoria de Riesz-Fredholm para Operadores Compactos

7.10 Proposição. *Sejam E, F espaços vetoriais normados. Então $T : E \longrightarrow F$ é compacto se e somente se $T^* : F^* \longrightarrow E^*$ é compacto.*

Prova: Suponha que T é compacto. Para mostrar que o operador adjunto T^* é compacto, mostraremos que toda sequência em $T^*(B_{F^*})$ possui uma subsequência convergente. Seja $\{g_n\} \subset B_{F^*}$. Temos

$$\|g_n(y_1) - g_n(y_2)\| \leqslant \|g_n\| \|y_1 - y_2\| \leqslant \|y_1 - y_2\|$$

para todos $y_1, y_2 \in F$, logo $\{g_n\}$ é uma família equicontínua limitada de funcionais lineares. Como $\overline{T(B_E)}$ é compacto, pelo teorema de Arzelá-Ascoli existe uma subsequencia $\{g_{n_k}\}$ que converge uniformemente em $\overline{T(B_E)}$. Logo,

$$\|T^*g_{n_k} - T^*g_{n_l}\|_{E^*} = \sup_{x \in B_E} |\langle T^*g_{n_k} - T^*g_{n_l}, x\rangle| = \sup_{x \in B_E} |\langle g_{n_k} - g_{n_l}, Tx\rangle| \leqslant \sup_{y \in T(B_E)} |\langle g_{n_k} - g_{n_l}, y\rangle| \to 0$$

quando $k, l \to \infty$, isto é, $\{T^*g_{n_k}\}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach E^*, portanto convergente.

Reciprocamente, suponha que T^* é compacto. Pela primeira parte da demonstração segue que a adjunta T^{**} é compacta. Note que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ \downarrow^{J_E} & & \downarrow^{J_F} \\ E^{**} & \underset{T^{**}}{\longrightarrow} & F^{**} \end{array}$$

é comutativo, isto é, $J_F \circ T = T^{**} \circ J_E$. De fato, para todo $x \in E$ e para todo $g \in F^*$ temos

$$\langle J_F T x, g\rangle = \langle g, Tx\rangle = \langle T^* g, x\rangle = \langle J_E x, T^* g\rangle = \langle T^{**} J_E x, g\rangle .$$

Em particular, $J_F(T(B_E)) \subset T^{**}(B_{E^{**}})$ porque se $x \in B_E$ então $J_E x \in B_{E^{**}}$ e vale $J_F T x = T^{**} J_E x$. Como J_F é contínua, $J_F\left(\overline{T(B_E)}\right) \subset \overline{T^{**}(B_{E^{**}})}$. Este último é compacto porque T^{**} é um operador compacto. Como J_F é uma isometria $J_F\left(\overline{T(B_E)}\right)$ é fechado e portanto compacto; logo, pelo mesmo motivo, $\overline{T(B_E)}$ é compacto. ■

Dado um operador linear $T : E \longrightarrow F$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, denotaremos

$$\begin{aligned} &T_\lambda = \lambda I - T, \; T_\lambda^* = \lambda I - T^*, \\ &N_\lambda = \ker(T_\lambda), \; N_\lambda^* = \ker(T_\lambda^*), \\ &R_\lambda = R(T_\lambda), \; R_\lambda^* = R(T_\lambda^*). \end{aligned}$$

7.11 Lema. *Sejam E um espaço de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ um operador compacto e $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Então*

(i) *N_λ, N_λ^* são subespaços vetoriais de dimensão finita.*

(ii) *R_λ, R_λ^* são subespaços vetoriais fechados.*

Prova: (i) Como T é limitado, N_λ é fechado. Mas $B_{N_\lambda} \subset \lambda^{-1}T(B_E)$ pois se $Tx = \lambda x$ então $x = \lambda^{-1}Tx$. Como $\lambda^{-1}T(B_E)$ é compacto (a dilatação $y \mapsto \lambda^{-1}y$ é um homeomorfismo), segue que o conjunto fechado B_{N_λ} também é compacto. Já que as bolas unitária fechadas em espaços vetoriais normados de dimensão infinita nunca são compactas, necessariamente $\dim N_\lambda < \infty$. Em virtude da proposição anterior, a afirmação para N_λ^* segue analogamente.

(ii) Pelo teorema da imagem fechada de Banach (Teorema 3.19), R_λ é fechado se e somente se R_λ^* é fechado. Vamos mostrar que R_λ é fechado.

Seja $\{y_n\} \subset R_\lambda$ tal que $y_n \to y$. Provaremos que $y \in R_\lambda$. Temos $y_n = T_\lambda x_n$ para algum $x_n \in E$. Seja

$$d_n = \operatorname{dist}(x_n, N_\lambda).$$

Como N_λ tem dimensão finita, existe $z_n \in N_\lambda$ tal que

$$\operatorname{dist}(x_n, z_n) = d_n.$$

Defina $w_n = x_n - z_n$, de modo que $y_n = T_\lambda w_n$.
Afirmação: *a sequência $\{w_n\}$ é limitada.*
Suponha por absurdo que uma subsequência $d_n = \|w_n\| \to \infty$ (mantemos a notação para não sobrecarrregá-la). Seja $v_n = w_n / \|w_n\|$. Então

$$T_\lambda v_n = \frac{y_n}{d_n} \to 0,$$

já que $y_n \to y$. Como a sequência $\{v_n\}$ é limitada e T é compacto, a menos de uma subsequência podemos assumir que

$$Tv_n \to v,$$

donde

$$\lambda v_n = T_\lambda v_n + Tv_n \to v$$

e

$$T_\lambda v = \lim T_\lambda (\lambda v_n) = \lambda \lim T_\lambda v_n = 0,$$

ou seja, $v \in N_\lambda$. Por outro lado,

$$\operatorname{dist}(v_n, N_\lambda) = \frac{\operatorname{dist}(w_n, N_\lambda)}{\|w_n\|} = \frac{\operatorname{dist}(x_n, N_\lambda)}{d_n} = 1,$$

um absurdo.

Como a sequência $\{w_n\}$ é limitada e T é compacto, a menos de uma subsequência podemos assumir que

$$Tw_n \to w.$$

Em particular,

$$\lambda w_n = T_\lambda w_n + Tw_n = y_n + Tw_n \to y + w.$$

Tome

$$x = \lambda^{-1}(y + w).$$

Então

$$Tx = \lambda^{-1} T[\lim(\lambda w_n)] = \lambda^{-1} \lim T(\lambda w_n) = \lim Tw_n = w,$$

donde

$$y = \lambda x - w = \lambda x - Tx = T_\lambda x.$$

■

7.12 Teorema. (Alternativa de Fredholm para Operadores Compactos) *Sejam E um espaço de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ um operador compacto e $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Então vale:*

(i) $R_\lambda = (N_\lambda^*)^\perp$.

(ii) $R_\lambda^* = (N_\lambda)^\perp$.

Prova: Segue do lema anterior e do teorema da imagem fechada de Banach (Teorema 3.19). ■

No que se segue, denotaremos

$$N_\lambda^k = \ker T_\lambda^k.$$

Observe que sempre temos $N_\lambda^{k+1} \supset N_\lambda^k$.

7.13 Lema. *Sejam E um espaço de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ um operador compacto e $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.*

Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N_\lambda^{k+1} \supsetneqq N_\lambda^k$ para todo $k < n$ e $N_\lambda^{k+1} = N_\lambda^k$ para todo $k \geqslant n$.

Prova: Como

$$T_\lambda^k = \lambda^k I - \sum_{l=1}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} \lambda^{k-l} T^l,$$

segue que $T_\lambda^k = U_\mu$, onde $\mu = \lambda^k$ e $U = \sum_{l=1}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} \lambda^{k-l} T^l$ é um operador compacto, combinação linear de operadores compactos. Portanto, segue do Lema 7.11 que N_λ^k tem dimensão finita.

Primeiro observe que se $N_\lambda^{k+1} = N_\lambda^k$, então $N_\lambda^{k+2} = N_\lambda^k$. De fato, seja $x \in N_\lambda^{k+2}$. Então $T_\lambda^{k+1}(T_\lambda x) = T_\lambda^{k+2} x = 0$, de modo que $T_\lambda x \in N_\lambda^{k+1} = N_\lambda^k$, ou seja, $T_\lambda^k (T_\lambda x) = 0$ e portanto $x \in N_\lambda^{k+1} = N_\lambda^k$. Por indução, segue que se $N_\lambda^{k+1} = N_\lambda^k$, então $N_\lambda^{k+l} = N_\lambda^k$ para todo $l \in \mathbb{N}$.

Assim, para provar o resultado, basta mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N_\lambda^{n+1} = N_\lambda^n$. Suponha por absurdo que $N_\lambda^{n+1} \supsetneqq N_\lambda^n$ para todo n. Então existe uma sequência $\{x_n\} \subset E$ tal que $x_n \in N_\lambda^{n+1}$, $\|x_n\| = 1$ e $\|x_n - x\| > 1/2$ para todo $x \in N_\lambda^n$ (Corolário 2.18). Se $n > m$, temos

$$T_\lambda^n (T_\lambda x_n + T x_m) = T_\lambda^{n+1} x_n + T T_\lambda^n x_m = 0 + 0 = 0,$$

logo $T_\lambda x_n + T x_m \in N_\lambda^n$. Segue que

$$\begin{aligned}
\left|\lambda^{-1}\right| \|T x_n - T x_m\| &= \left|\lambda^{-1}\right| \|\lambda x_n - (T_\lambda x_n + T x_m)\| \\
&= \left\| x_n - \lambda^{-1} (T_\lambda x_n + T x_m) \right\| \\
&> \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

ou seja, $\{T x_n\}$ não pode possuir subsequências convergentes, contrariando a compacidade de T, já que $\{x_n\}$ é limitada. ■

7.14 Teorema. *Sejam E um espaço de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ um operador compacto e $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.*

Então $R_\lambda = E$ se e somente se $N_\lambda = 0$.

Prova: Suponha $R_\lambda = E$. Se $N_\lambda \neq 0$, seja $x_0 \in N_\lambda$ um vetor não nulo. Usando o fato que $R_\lambda = E$ podemos construir uma sequência $\{x_n\} \subset E$ tal que

$$\begin{gathered}
T_\lambda x_1 = x_0, \\
T_\lambda x_2 = x_1, \\
\vdots \\
T_\lambda x_{n+1} = x_n, \\
\vdots
\end{gathered}$$

Então $T_\lambda^n x_n = x_0 \neq 0$ e $T_\lambda^{n+1} x_n = T_\lambda x_0 = 0$, o que implica $N_\lambda^{n+1} \neq N_\lambda^n$ para todo n, contrariando o lema anterior.

Reciprocamente, suponha $N_\lambda = 0$. Pela alternativa de Fredholm, temos $R_\lambda^* = E^*$. Como T^* é compacto, podemos aplicar a primeira parte deste teorema para concluir que $N_\lambda^* = 0$. Novamente pela alternativa de Fredholm segue que $R_\lambda = E$. ■

7.15 Lema. *Sejam E um espaço vetorial normado e $y_1^*, \ldots, y_n^* \in E^*$ linearmente independentes. Então existem $y_1, \ldots, y_m \in E$ tais que*

$$y_i^* (y_j) = \delta_{ij}$$

para todos $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Prova: Denote $N_i = \ker y_i^*$. Seja $M_j = N_1 \cap \ldots \cap \widehat{N_j} \cap \ldots \cap N_n$. Afirmamos que

$$M_j \not\subset N_j.$$

É suficiente provar esta afirmação para $j = 1$. Suponha por absurdo que $M_1 \subset N_1$. Então

$$y_1^*(x) = 0 \quad \text{sempre que } y_2^*(x) = \ldots = y_n^*(x) = 0.$$

Considere a aplicação linear $A : E \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ definida por

$$Ax = (y_2^*(x), \ldots, y_n^*(x))$$

e defina um funcional linear $g_0 : A(E) \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(Ax) = y_1^*(x).$$

g_0 está bem definido porque se $Ax = Ay$, então $y_2^*(x-y) = \ldots = y_n^*(x-y) = 0$, logo $y_1^*(x-y) = 0$. Estenda g_0 a um funcional linear $g : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$. Mas então g se escreve na forma

$$g(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i$$

para algumas constantes $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Segue que

$$y_1^*(x) = g(y_2^*(x), \ldots, y_n^*(x)) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i y_i^*(x),$$

contrariando a independência linear dos funcionais $y_1^*, \ldots, y_n^*$. Escolhendo $z_j \in M_j \backslash N_j$, o resultado segue para

$$y_j = \frac{z_j}{y_j^*(z_j)}.$$

■

7.16 Teorema. *Sejam E um espaço de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ um operador compacto e $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.*
Então $\dim N_\lambda = \dim N_\lambda^*$.

Prova: Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base para N_λ e $\{y_1^*, \ldots, y_m^*\}$ uma base para N_λ^*. Pelo teorema de Hahn-Banach existem $x_1^*, \ldots, x_n^* \in E^*$ tais que

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$$

para todos $1 \leqslant i, j \leqslant n$, enquanto que pelo lema anterior existem $y_1, \ldots, y_m \in E$ tais que

$$y_i^*(y_j) = \delta_{ij}$$

para todos $1 \leqslant i, j \leqslant m$.

Suponha $n < m$. Defina

$$Sx = Tx + \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)\, y_i.$$

Como S é uma combinação linear de operadores compactos, S também é compacto. Afirmamos que

$$\ker S_\lambda = 0.$$

De fato, seja $x \in \ker S_\lambda$. Então $Sx = \lambda x$, ou seja,

$$T_\lambda x = \sum_{i=1}^{n} x_i^* (x)\, y_i.$$

Daí, como $y_j^* \in N_\lambda^*$, temos que

$$0 = \left\langle T_\lambda^* y_j^*, x \right\rangle = \left\langle y_j^*, T_\lambda x \right\rangle = x_j^* (x)$$

para todo j. Em particular, $T_\lambda x = 0$, ou seja, $x \in N_\lambda$ e portanto $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ para alguns escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Mas então $0 = x_i^* (x) = \alpha_i$ para todo i, donde $x = 0$.

Isso implica pelo Teorema 7.14 que S_λ é sobrejetivo. Em particular, existe $x \in E$ tal que $S_\lambda x = y_{n+1}$. Então, como $y_{n+1}^* \in N_\lambda^*$ e $y_{n+1}^* (y_1) = \ldots = y_{n+1}^* (y_n) = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
1 &= y_{n+1}^* (y_{n+1}) = y_{n+1}^* (S_\lambda x) \\
&= y_{n+1}^* \left(\lambda x - Tx - \sum_{i=1}^{n} x_i^* (x)\, y_i \right) \\
&= y_{n+1}^* (T_\lambda x) - \sum_{i=1}^{n} x_i^* (x)\, y_{n+1}^* (y_i) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

um absurdo. Portanto $\dim N_\lambda \geqslant \dim N_\lambda^*$.

Aplicando este resultado a T^*, concluímos que $\dim N_\lambda^* \geqslant \dim N_\lambda^{**}$, onde $N_\lambda^{**} = \ker T_\lambda^{**}$ e $T_\lambda^{**} = \lambda I - T^{**}$. Mas $\dim N_\lambda^{**} \geqslant \dim N_\lambda$, porque (veja a demonstração da Proposição 7.10)

$$J \circ T_\lambda = T_\lambda^{**} \circ J,$$

ou seja, $J (N_\lambda) \subset N_\lambda^{**}$ e J é uma isometria. Segue que $\dim N_\lambda = \dim N_\lambda^*$. ■

Os Teoremas 7.12, 7.14 e 7.16 juntos constituem a teoria de Riez-Fredholm para operadores compactos.

7.3 O Espectro de Operadores Compactos

7.17 Definição. Seja E um espaço vetorial normado e $T \in \mathcal{L}(E)$. O **resolvente** de T é o conjunto

$$\rho (T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T_\lambda \text{ é bijetivo}\}.$$

O **espectro** de T é o conjunto

$$\sigma (T) = \mathbb{R} \backslash \rho (T).$$

O espectro de T contém os autovalores de T, mas podem existir valores em $\sigma (T)$ que não são autovalores de T. Pelo Teorema 7.14, se T é um operador compacto então o espectro de T coincide com o conjunto de autovalores de T, com a possível exceção de $\lambda = 0$. Além disso, pelo Lema 7.11 cada autoespaço tem dimensão finita.

7.18 Exemplo. Considere o operador $T \in \mathcal{L}\left(\ell^2\right)$ definido por

$$Tx = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

Então T é injetivo mas não é sobrejetivo, logo $0 \in \sigma (T)$ mas não é autovalor de T. □

Seja E um espaço métrico. Dada uma aplicação $S : E \longrightarrow E$, dizemos que S é uma **contração** se existe uma constante $C < 1$ tal que

$$\operatorname{dist}(Sx, Sy) \leqslant C \operatorname{dist}(x, y)$$

para todos $x, y \in E$.

7.19 Lema. (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Sejam E um espaço métrico completo e $S : E \to E$ uma contração. Então existe um único $x \in E$ tal que $Sx = x$.*

7.20 Proposição. *Sejam E um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E)$. Então $\sigma(T)$ é compacto e $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.*

Prova: Se $|\lambda| > \|T\|$, mostraremos que $\lambda \in \rho(T)$. De fato, dado $y \in E$, defina $S_y : E \longrightarrow E$ por

$$S_y x = \lambda^{-1}(Tx + y).$$

O operador T_λ ser bijetivo é equivalente a existir um único $x \in E$ tal que $S_y x = x$ para todo $y \in E$. Portanto, basta verificar que S é uma contração:

$$\|S_y x_1 - S_y x_2\| = |\lambda|^{-1} \|Tx_1 - Tx_2\| \leqslant |\lambda|^{-1} \|T\| \|x_1 - x_2\|$$

e $|\lambda|^{-1} \|T\| < 1$ por hipótese. Portanto, $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

Para mostrar que $\sigma(T)$ é compacto, basta verificar que ele é fechado, o que é equivalente a mostrar que $\rho(T)$ é aberto. Se $\lambda_0 \in \rho(T)$, dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $y \in E$, defina $S_y : E \longrightarrow E$ por

$$S_y x = T_{\lambda_0}^{-1}[y - (\lambda - \lambda_0)x].$$

O operador T_λ ser bijetivo é equivalente a existir um único $x \in E$ tal que $S_y x = x$ para todo $y \in E$, pois $S_y x = x$ é equivalente a

$$T_{\lambda_0} x = y - (\lambda - \lambda_0)x,$$

que equivale

$$\lambda_0 x - Tx = y - \lambda x + \lambda_0 x,$$

ou

$$\lambda x - Tx = y.$$

Mas S_y é uma contração para todo λ suficientemente próximo de λ_0, independentemente de y, pois

$$\|S_y x_1 - S_y x_2\| = \left\|T_{\lambda_0}^{-1}[(\lambda - \lambda_0)(x_1 - x_2)]\right\| \leqslant |\lambda - \lambda_0| \left\|T_{\lambda_0}^{-1}\right\| \|x_1 - x_2\|.$$

■

7.21 Teorema. (Espectro de Operadores Compactos) *Sejam E um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E)$ um operador compacto. Então $\sigma(T)$ é finito ou é uma sequência que possui 0 como único ponto de acumulação. Em particular, os autovalores não-nulos de T são enumeráveis e isolados.*

Além disso, se E tem dimensão infinita, então $0 \in \sigma(T)$.

Prova: Seja $\{\lambda_n\} \subset \sigma(T)$ uma sequência de números reais distintos com $\lambda_n \to \lambda$. Mostraremos que $\lambda = 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir $\lambda_n \neq 0$ para todo n (já que isso se cumpre para todo n suficientemente grande). Como observado antes, é uma consequência do Teorema 7.14 que λ_n é um autovalor de T, logo existe $e_n \in B_E$ tal que $Te_n = \lambda_n e_n$ para todo n. Como os autovalores λ_n são distintos, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é linearmente independente para todo n. Seja $E_n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, de modo que $E_n \subsetneqq E_{n+1}$ e

$(T - \lambda_n I) E_n \subset E_{n-1}$ para todo n. Pelo Corolário 2.18, existe $x_n \in B_{E_n}$ tal que $\operatorname{dist}(x_n, E_{n-1}) > 1/2$ para todo n. Daí, se $n - 1 > m$,

$$\begin{aligned}
\left\| T\frac{x_n}{\lambda_n} - T\frac{x_m}{\lambda_m} \right\| &= \left\| \frac{Tx_n - \lambda_n x_n}{\lambda_n} - \frac{Tx_m - \lambda_m x_m}{\lambda_m} + x_n - x_m \right\| \\
&= \left\| x_n - \left(x_m - \frac{(T - \lambda_n I)\, x_n}{\lambda_n} + \frac{(T - \lambda_m I)\, x_m}{\lambda_m} \right) \right\| \\
&\geqslant \operatorname{dist}(x_n, E_{n-1}) \\
&> \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e portanto $\{T(x_n/\lambda_n)\}$ não pode possuir uma subsequência convergente, contrariando a compacidade de T.

Se $\dim E = \infty$ e T é compacto, então T não pode ser sobrejetivo (veja Exercício 7.11). ■

7.4 Teoria Espectral para Operadores Autoadjuntos Compactos

7.22 Definição. Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que uma forma bilinear $B : H \times H \longrightarrow H$ é **limitada** se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|B(x, y)| \leqslant C \|x\| \|y\|$$

para todos $x, y \in H$.

7.23 Definição. Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que uma forma bilinear $B : H \times H \longrightarrow H$ é **coerciva** se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$B(x, x) \geqslant \alpha \|x\|^2$$

para todo $x \in H$.

O próximo resultado é uma generalização do teorema da representação de Riesz.

7.24 Teorema. (Teorema de Lax-Milgram) *Sejam H um espaço de Hilbert e $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear limitada e coerciva. Então para todo $f \in H^*$ existe um único $z \in H$ tal que*

$$f(x) = B(x, z)$$

para todo $x \in H$.

Prova: Fixado y, $g(x) = B(x, y)$ define um funcional linear em H^*, logo pelo teorema da representação de Riesz existe um único $Ty \in H$ tal que

$$B(x, y) = \langle x, Ty \rangle$$

para todo $x \in H$. Para provar o resultado, pelo teorema de representação de Riesz basta mostrar que $T : H \to H$ é bijetiva. Temos T linear, pois

$$\begin{aligned}
\langle x, T(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle &= B(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha B(x, y_1) + \beta B(x, y_2) \\
&= \alpha \langle x, Ty_1 \rangle + \beta \langle x, Ty_2 \rangle = \langle x, \alpha Ty_1 + Ty_2 \rangle,
\end{aligned}$$

e como

$$\|Ty\|^2 = \langle Ty, Ty \rangle = B(y, Ty) \leqslant C \|y\| \|Ty\|,$$

segue que

$$\|Ty\| \leqslant C \|y\|,$$

isto é, T é limitado. Além disso,

$$\alpha \|y\|^2 \leqslant B(y,y) = \langle y, Ty\rangle \leqslant \|y\| \|Ty\|,$$

de modo que

$$\|Ty\| \geqslant \alpha \|y\|,$$

isto é T é limitada inferiormente e portanto injetiva. Em particular, segue que $T(H)$ é fechado: se $Ty_n \to z$, então

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geqslant \alpha \|y_n - y_m\|$$

de modo que $y_n \to y \in H$ e $z = T(\lim y_n) = Ty$. Se $T(H) \neq H$, então pelo Corolário 6.15 existe $z \in H \backslash T(H)$ tal que $z \perp T(H)$. Em particular,

$$0 = \langle z, Tz\rangle = B(z,z) \geqslant \alpha \|z\|^2,$$

um absurdo.

Finalmente, se $z_1, z_2 \in H$ são tais que

$$B(x, z_1) = f(x) = B(x, z_2)$$

para todo $x \in H$, então $B(x, z_1 - z_2) = 0$ para todo $x \in H$; em particular

$$B(z_1 - z_2, z_1 - z_2) = 0$$

e a coercividade de B implica que $z_1 = z_2$. ■

7.25 Corolário. *Sejam H um espaço de Hilbert e $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear limitada e coerciva. Se B é simétrica, então o vetor $z \in H$ que representa o funcional linear $f \in H^*$ dado pelo teorema de Lax-Milgram é caracterizado por*

$$q(z) = \min_{x \in H} q(x)$$

onde q é a forma quadrática definida por

$$q(x) = \frac{1}{2} B(x,x) - f(x).$$

Prova: Veja [Brezis]. ■

7.26 Proposição. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador autoadjunto. Sejam*

$$m = \inf_{x \in B_H} \langle Tx, x\rangle = \inf_{x \in H \backslash \{0\}} \frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2},$$
$$M = \sup_{x \in B_H} \langle Tx, x\rangle = \sup_{x \in H \backslash \{0\}} \frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2}.$$

Então $\sigma(T) \subset [m, M]$. Além disso, $m, M \in \sigma(T)$ e

$$\|T\| = \max(|m|, |M|).$$

Prova: Seja $\lambda > M$. Considere a forma bilinear limitada

$$B(x,y) = \langle T_\lambda x, y\rangle.$$

Temos

$$B(x,x) = \langle T_\lambda x, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle \geqslant (\lambda - M) \|x\|^2$$

para todo $x \in H$ e como $\lambda - M > 0$, segue que B é coerciva. Segue do teorema de Lax-Milgram que T_λ é bijetiva, ou seja, $\lambda \in \rho(T)$.

Agora mostraremos que $M \in \sigma(T)$. A forma bilinear limitada

$$B(x, y) = \langle T_M x, y \rangle$$

é simétrica, porque $MI - T$ é autoadjunta. Além disso,

$$B(x, x) \geqslant 0$$

para todo $x \in H$, o que significa que a desigualdade de Cauchy-Schwarz vale para a forma bilinear B (veja a demonstração da Proposição 6.2):

$$|B(x, y)| \leqslant B(x, x)^{1/2} B(y, y)^{1/2}.$$

Segue que

$$|\langle T_M x, y \rangle| \leqslant \langle T_M x, x \rangle^{1/2} \langle T_M y, y \rangle^{1/2}$$

para todos $x, y \in H$. Pelo teorema de representação de Riesz e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|T_M x\| = \|\langle T_M x, \cdot \rangle\|_{H^*} &= \sup_{y \in H \setminus \{0\}} \frac{|\langle T_M x, y \rangle|}{\|y\|} \\ &\leqslant \langle T_M x, x \rangle^{1/2} \sup_{y \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle T_M y, y \rangle^{1/2}}{\|y\|} \\ &\leqslant \|T_M\|^{1/2} \langle T_M x, x \rangle^{1/2} \end{aligned}$$

para todo $x \in H$. Seja $\{x_n\} \subset B_H$ tal que $\langle T x_n, x_n \rangle \to M$. Então

$$\begin{aligned} \|T_M x_n\| &\leqslant \|T_M\|^{1/2} \langle T_M x_n, x_n \rangle^{1/2} \\ &= \|T_M\|^{1/2} (\langle M x_n, x_n \rangle - \langle T x_n, x_n \rangle)^{1/2} \\ &= \|T_M\|^{1/2} (M - \langle T x_n, x_n \rangle)^{1/2} \to 0 \end{aligned}$$

e portanto T_M não pode ser invertível, pois se fosse teríamos $x_n = T_M^{-1} T_M x_n \to 0$, um absurdo.

A demonstração para m segue da demonstração para M ao considerarmos o operador $-T$.

Finalmente, seja

$$\mu = \max(|m|, |M|).$$

Por definição de m e M e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz vale

$$\mu = \sup_{x \in B_H} |\langle T x, x \rangle| \leqslant \sup_{x \in B_H} \|T x\| \|x\| \leqslant \sup_{x \in B_H} \|T\| \|x\|^2 = \|T\|.$$

Para mostrar que $\|T\| \leqslant \mu$, se $T = 0$ isto é óbvio, logo vamos assumir $T \neq 0$. Seja $z \in H$ tal que $\|z\| = 1$ e $Tz \neq 0$ e tome

$$v = \|Tz\|^{1/2} z \quad \text{e} \quad w = \|Tz\|^{-1/2} Tz,$$

de modo que $\|v\|^2 = \|w\|^2 = \|Tz\|$. Tome

$$y_1 = v + w \quad \text{e} \quad y_2 = v - w.$$

Usando o fato que T é autoadjunta, temos que

$$\begin{aligned}
\langle Ty_1, y_1\rangle - \langle Ty_2, y_2\rangle &= \langle T(v+w), v+w\rangle - \langle T(v-w), v-w\rangle \\
&= \langle Tv, v\rangle + \langle Tv, w\rangle + \langle Tw, v\rangle + \langle Tw, w\rangle \\
&- (\langle Tv, v\rangle - \langle Tv, w\rangle - \langle Tw, v\rangle + \langle Tw, w\rangle) \\
&= 2\langle Tv, w\rangle + 2\langle Tw, v\rangle \\
&= 2\langle Tz, Tz\rangle + 2\langle T^2 z, z\rangle \\
&= 2\langle Tz, Tz\rangle + 2\langle Tz, Tz\rangle \\
&= 4\|Tz\|^2 .
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
|\langle Ty_1, y_1\rangle - \langle Ty_2, y_2\rangle| &\leqslant |\langle Ty_1, y_1\rangle| + |\langle Ty_2, y_2\rangle| \\
&\leqslant \mu\left(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2\right) \\
&= 2\mu\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right) \\
&= 4\mu\|Tz\| .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$4\|Tz\|^2 \leqslant 4\mu\|Tz\| ,$$

donde

$$\mu \geqslant \|Tz\|$$

para todo $z \in B_H$, o que implica $\mu \geqslant \|T\|$. ■

7.27 Corolário. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador autoadjunto tal que $\sigma(T) = \{0\}$. Então $T = 0$.*

Prova: Pelo resultado anterior segue que $\|T\| = 0$. ■

7.28 Teorema. (Decomposição Espectral de Operadores Autoadjuntos Compactos) *Sejam H um espaço de Hilbert separável e $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador autoadjunto compacto. Então os autovetores linearmente independentes de T formam uma base de Hilbert para H.*

Prova: Pelo Teorema 7.21, seja $\lambda_0 = 0$ e $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de autovalores não nulos distintos de T. Denote $E_0 = \ker T$ e $E_n = N_{\lambda_n}$ os correspondentes autoespaços; pelo Lema 7.11, cada E_n, $n \neq 0$, tem dimensão finita. Observe que $E_n \perp E_m$ se $n \neq m$: se $x \in E_n$ e $y \in E_m$ então

$$\lambda_n\langle x, y\rangle = \langle \lambda_n x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle x, \lambda_m y\rangle = \lambda_m\langle x, y\rangle ;$$

como $\lambda_n \neq \lambda_m$, segue que

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Mostraremos que

$$F = \bigoplus_{n\geqslant 0} E_n$$

é denso em H. Claramente, $T(F) \subset F$. Segue que $T\left(F^\perp\right) \subset F^\perp$, pois se $x \in F^\perp$ e $y \in F$ então

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0.$$

Podemos assim considerar o operador $T|_{F^\perp} : F^\perp \longrightarrow F^\perp$, que é um operador autoadjunto compacto. Mas $\sigma(T|_{F^\perp}) = \{0\}$, pois se $\lambda \in \sigma(T|_{F^\perp}) \setminus \{0\}$ então λ é um autovalor de T em $F^\perp$, um absurdo. Pelo corolário anterior, segue que $T|_{F^\perp} = 0$, isto é, $F^\perp = \{0\}$. Tomando um sistema ortonormal completo em cada subespaço E_n, a união destas bases será um sistema ortonormal completo para H formado de autovetores de H. ■

7.5 Aplicação: Problemas de Sturm-Liouville e Operadores Integrais

Nesta seção consideraremos o seguinte problema de valor de fronteira (*problema de Sturm-Liouville*)

$$\begin{cases} -x'' + qx = \lambda x + f & \text{se } a < t < b, \\ \alpha x(a) + \beta x'(a) = 0 \\ \gamma x(b) + \delta x'(b) = 0 \end{cases}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$, $q \in C^0[a,b]$, $f \in L^2(a,b)$ e $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ são tais que α e β não são ambos nulos e γ e δ não são ambos nulos. Para estudar este problema, definimos o espaço vetorial normado

$$E = \{x \in C^1[a,b] : x \text{ satisfaz as condições de fronteira do problema de Sturm-Liouville,} \\ x' \text{ é absolutamente contínua e } x'' \in L^2(a,b)\}$$

A condição de x' ser absolutamente contínua garante que x'' está definida em quase todo ponto, de modo que faz sentido falar em $x'' \in L^2(a,b)$. Defina o *operador de Sturm-Liouville* $L : E \longrightarrow L^2(a,b)$ por

$$Lx = -x'' + qx.$$

L é um operador linear e existir uma solução para o problema de Sturm-Liouville é equivalente a $f \in R(L - \lambda I)$. Embora o operador L possa ser considerado um operador limitado através de uma escolha conveniente de norma para E, isso não ajuda muito. O melhor procedimento é considerar o operador inverso L^{-1}, que pode ser definido através de um operador integral (integração é a inversa de diferenciação) que veremos ser um operador compacto. Para definir L^{-1}, precisamos assumir que L *é injetivo* (quando L não é injetivo, ainda é possível estudar o problema através de uma pequena modificação: veja o Exercício 7.19).

Vamos considerar os seguintes espaços vetoriais normados:

$$E_a = \left\{x \in C^1[a,b] : \alpha x(a) + \beta x'(a) = 0,\ x' \text{ é absolutamente contínua e } x'' \in L^2(a,b)\right\},$$
$$E_b = \left\{x \in C^1[a,b] : \gamma x(b) + \delta x'(b) = 0,\ x' \text{ é absolutamente contínua e } x'' \in L^2(a,b)\right\}.$$

Claramente, $E = E_a \cap E_b$. O seguinte resultado vem da teoria de equações diferenciais ordinárias e garante a existência de soluções não nulas para certos problemas com condições iniciais:

7.29 Lema. *Existem funções não nulas $x_a \in E_a$ e $x_b \in E_b$ tais que $L(x_a) = 0$ e $L(x_b) = 0$.*

Lembre que o *Wronskiano* de duas funções $x, y \in C^1[a,b]$ é definido por

$$W_{x,y}(t) = \det \begin{bmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{bmatrix} = x(t)\,y'(t) - x'(t)\,y(t).$$

Como

$$W'_{x,y}(t) = x(t)\,y''(t) - x''(t)\,y(t),$$

segue que

$$W'_{x_a,x_b}(t) = x_a(t)\,x_b''(t) - x_a''(t)\,x_b(t) = x_a(t)\,qx_b(t) - qx_a(t)\,x_b(t) = 0,$$

ou seja,

$$W_{x_a,x_b}(t) \equiv W_{x_a,x_b}(a).$$

7.30 Lema. *Se $x_a \in E_a$ e $x_b \in E_b$ são funções não nulas que satisfazem $L(x_a) = L(x_b) = 0$ e L é injetivo, então $W_{x_a,x_b}(a) \neq 0$ consequentemente x_a e x_b são linearmente independentes.*

Prova: Se $W_{x_a,x_b}(a) = 0$, então as colunas da matriz do Wronskiano são linearmente dependentes, logo existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_b(a) = cx_a(a)$ e $x_b'(a) = cx_a'(a)$. Consequentemente, ambos $x_a, x_b \in E$, de modo que o operador L tem núcleo não trivial, contradizendo o enunciado. ■

Definimos a *função de Green* $G : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ para o operador L por

$$G(t,s) = -\frac{1}{W_{x_a,x_b}(a)} \begin{cases} x_a(t)\, x_b(s) & \text{se } a \leqslant t \leqslant s \leqslant b, \\ x_a(s)\, x_b(t) & \text{se } a \leqslant s \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

Da definição de G vemos imediatamente que

7.31 Lema. *A função de Green é contínua e simétrica, isto é,*

$$G(t,s) = G(s,t).$$

7.32 Lema. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $F \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Então o operador integral $T : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ definido por*

$$(Tf)(x) = \int_\Omega F(x,y) f(y)\, dy$$

é compacto e

$$\|T\| \leqslant \|F\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}.$$

Além disso, se

$$F(x,y) = F(y,x),$$

então T é autoadjunto.

Prova: Em primeiro lugar, vamos verificar que T está bem definido e é um operador limitado. Se $f \in L^2(\Omega)$, temos pela desigualdade de Hölder e pelo teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega \left| \int_\Omega F(x,y) f(y)\, dy \right|^2 dx \\ &\leqslant \int_\Omega \left(\int_\Omega |F(x,y)|^2\, dy \right) \left(\int_\Omega |f(y)|^2\, dy \right) dx \\ &= \left(\int_\Omega |f(y)|^2\, dy \right) \int_\Omega \left(\int_\Omega |F(x,y)|^2\, dy \right) dx \\ &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \int_{\Omega\times\Omega} |F(x,y)|^2\, dydx \\ &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|F\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}. \end{aligned}$$

Para verificar que T é compacto, antes de mais nada observamos que se $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$, então $\{e_{nm}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ definido por

$$e_{nm}(x,y) = e_n(x)\, e_m(y)$$

é um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega \times \Omega)$. De fato, pela desigualdade de Hölder $e_{nm} \in L^2(\Omega \times \Omega)$ e pelo teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \langle e_{nm}, e_{kl} \rangle_{L^2(\Omega\times\Omega)} &= \int_{\Omega\times\Omega} e_{nm}(x,y)\, e_{kl}(x,y)\, dxdy \\ &= \int_{\Omega\times\Omega} e_n(x)\, e_m(y)\, e_k(x)\, e_l(y)\, dxdy \\ &= \left(\int_\Omega e_n(x)\, e_k(x)\, dx \right) \left(\int_\Omega e_m(y)\, e_l(y)\, dy \right) \\ &= \langle e_n, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} \langle e_m, e_l \rangle_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

de modo que $\langle e_{nm}, e_{kl} \rangle_{L^2(\Omega\times\Omega)} = \delta_{nk}\delta_{ml}$ e portanto $\{e_{nm}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal para $L^2(\Omega\times\Omega)$. Agora, seja $h(x,y) \in L^2(\Omega\times\Omega)$ satisfazendo $\langle h, e_{nm} \rangle_{L^2(\Omega\times\Omega)} = 0$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Denotando

$$h_y(x) = h(x,y),$$

pelo teorema de Fubini podemos escrever

$$\begin{aligned}
\langle h, e_{nm} \rangle_{L^2(\Omega\times\Omega)} &= \int_{\Omega\times\Omega} h(x,y)\, e_{nm}(x,y)\; dxdy \\
&= \int_\Omega \left(\int_\Omega h_y(x)\, e_n(x)\; dx \right) e_m(y)\; dy \\
&= \Big\langle \langle h_y(x), e_n(x) \rangle_{L^2(\Omega)}, e_m(y) \Big\rangle_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle h_y(x), e_n(x) \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \text{para todo } n \text{ e para todo } y \in \Omega,$$

donde $h_y(x) = 0$ para todo $y \in \Omega$. Isso mostra que $\{e_{nm}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega\times\Omega)$.

Assim, fixando um sistema ortonormal completo $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $L^2(\Omega)$, podemos escrever

$$F(x,y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} e_{ij}(x,y).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina o operador limitado de posto finito $T_n : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ por

$$(T_n f)(x) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} e_{ij}(x,y) \right) f(y)\; dy.$$

De fato, a continuidade de T_n segue da primeira parte da demonstração deste teorema e como

$$(T_n f)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \left(\int_\Omega e_j(y)\, f(y)\; dy \right) e_i(x),$$

segue que $R(T_n) \subset \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$. Para provar que T é compacto, basta então mostrar que $T_n \to T$. Mas, como vimos na primeira parte da demonstração deste teorema,

$$\|T - T_n\| \leqslant \left\| F(x,y) - \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} e_{ij}(x,y) \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Finalmente, para ver que T é autoadjunto se $F(x,y) = F(y,x)$, pelo teorema de Fubini temos

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \left(\int_\Omega F(x,y)\, f(y)\; dy \right) g(x)\; dx = \int_{\Omega\times\Omega} F(x,y)\, g(x)\, f(y)\; dxdy \\
&= \int_{\Omega\times\Omega} F(y,x)\, g(x)\, f(y)\; dydx = \int_\Omega \left(\int_\Omega F(y,x)\, g(x)\; dy \right) f(y)\; dx \\
&= \langle f, Tg \rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

■

7.33 Teorema. *Assuma L injetivo. Defina o operador integral $K : L^2(a,b) \longrightarrow L^2(a,b)$ por*

$$(Kf)(t) = \int_a^b G(t,s)\, f(s)\, ds.$$

Então K é um operador autoadjunto compacto, $R(K) = E$ e $K = L^{-1}$.

Prova: Pelo lema anterior, K é um operador compacto autoadjunto. Seja $f \in L^2(a,b)$. Mostraremos que $g = Kf \in E$. Defina

$$\begin{aligned} g_a(t) &= -\frac{1}{W_{x_a,x_b}(a)} \int_a^t x_a(s)\, f(s)\, ds, \\ g_b(t) &= -\frac{1}{W_{x_a,x_b}(a)} \int_t^b x_b(s)\, f(s)\, ds, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_a^b G(t,s)\, f(s)\, ds = -\frac{1}{W_{x_a,x_b}(a)} \left[\int_a^t x_a(s)\, x_b(t)\, f(s)\, ds + \int_t^b x_a(t)\, x_b(s)\, f(s)\, ds \right] \\ &= -\frac{1}{W_{x_a,x_b}(a)} \left[x_b(t) \int_a^t x_a(s)\, f(s)\, ds + x_a(t) \int_t^b x_b(s)\, f(s)\, ds \right] \\ &= g_a(t)\, x_b(t) + g_b(t)\, x_a(t), \end{aligned}$$

isto é,

$$g = g_a x_b + g_b x_a.$$

Derivando esta expressão obtemos

$$\begin{aligned} g' &= g_a' x_b + g_a x_b' + g_b x_a' + g_b' x_a \\ &= -\frac{1}{W_{x_a,x_b}(a)} x_a f x_b + g_a x_b' + g_b x_a' + \frac{1}{W_{x_a,x_b}(a)} x_b f x_a \\ &= g_a x_b' + g_b x_a' \end{aligned}$$

em quase todo ponto (lembre-se que $f \in L^2(a,b)$ não é contínua em geral), o que mostra que g' é absolutamente contínua. Mas de fato $g' = g_a x_b' + g_b x_a'$ em todo ponto, pois se

$$\varphi(t) = g(a) + \int_a^t (g_a x_b' + g_b x_a')(s)\, ds,$$

temos $\varphi(a) = g(a)$ e $\varphi'(t) = g'(t)$ em quase todo ponto; logo $g = \varphi$ em todo ponto e como $\varphi \in C^1[a,b]$ segue que $g \in C^1[a,b]$ também. Resta provar que $g'' \in L^2[a,b]$. Derivando $g' = g_a x_b' + g_b x_a'$ obtemos

$$\begin{aligned} g'' &= g_a' x_b' + g_a x_b'' + g_b x_a'' + g_b' x_a' \\ &= -\frac{1}{W_{x_a,x_b}(a)} x_a f x_b' + g_a x_b'' + g_b x_a'' + \frac{1}{W_{x_a,x_b}(a)} x_b f x_a' \\ &= g_a x_b'' + g_b x_a'' - \frac{1}{W_{x_a,x_b}(a)} (x_a x_b' - x_a' x_b)\, f \\ &= g_a x_b'' + g_b x_a'' - f. \end{aligned}$$

e cada um dos termos nesta última expressão é uma função em $L^2[a,b]$.

Para ver que g satisfaz as condições de fronteira do problema de Sturm-Liouville, note que $g_a(a) = 0$ e $x_a \in E_a$, logo

$$\begin{aligned}\alpha g(a) + \beta g'(a) &= \alpha (g_a x_b + g_b x_a)(a) + \beta (g_a x_b' + g_b x_a')(a) \\ &= g_b(a)[\alpha x_a(a) + \beta x_a'(a)] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Similarmente, de $g_b(b) = 0$ e $x_b \in E_b$ obtemos $\gamma g(b) + \delta g'(b) = 0$.

Para mostrar que $L \circ K = I : L^2(a,b) \longrightarrow L^2(a,b)$, seja $g = Kf$. Então

$$\begin{aligned}Lg = -g'' + qg &= -(g_a x_b'' + g_b x_a'' - f) + q(g_a x_b + g_b x_a) \\ &= f + (-x_b'' + qx_b) g_a + (-x_a'' + qx_a) g_b \\ &= f + g_a L x_b + g_b L x_a \\ &= f.\end{aligned}$$

Finalmente, para ver que $K \circ L = I : E \longrightarrow E$, seja $x \in E$. Então $Lx \in L^2(a,b)$ e pelo que acabamos de provar segue que $LK(Lx) = Lx$, ou seja, $KLx - x \in \ker L = 0$. Portanto, $KLx = x$. ■

7.34 Lema. *Assuma L injetivo. Se $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$, então* $\dim \ker K_\lambda = 1$.

Prova: Suponha que $x \in \ker K_\lambda$. Isso significa que $Kx = \lambda x$, consequentemente $Lx = \lambda^{-1} x$. Então supondo por absurdo que existem $x_1, x_2 \in \ker K_\lambda$ linearmente independentes, segue que x_1, x_2 são duas soluções linearmente independentes da equação diferencial de segunda ordem linear

$$-x'' + qx = \lambda^{-1} x,$$

portanto toda solução desta equação é combinação linear de x_1, x_2. Por outro lado, $x_1, x_2 \in E$, logo qualquer combinação linear de x_1, x_2 satisfaz as mesmas condições de fronteira que x_1, x_2 satisfazem, em particular em $t = a$. Mas uma solução para a equação diferencial pode ser encontrada para qualquer outra condição inicial diferente em $t = a$, contradição. ■

7.35 Teorema. *Assuma L injetivo. Então existe uma sequencia $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ e um sistema ortonormal completo $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $L^2(a,b)$ tais que*

(i) $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots$ *e* $|\lambda_n| \to \infty$.

(ii) $e_n \in E$ *e* $Le_n = \lambda_n e_n$.

(iii) *Se $\lambda \neq \lambda_n$ para todo n e $f \in L^2(a,b)$, então existe um único $x \in E$ tal que $Lx = \lambda x + f$.*

(iv) *Se $f \in L^2(a,b)$, então existe $x \in E$ tal que $Lx = \lambda_n x + f$ se e somente se $\langle f, e_n \rangle = 0$. Neste caso, se x_1, x_2 são duas soluções de $Lx = \lambda_n x + f$, então $x_1 = x_2 + ce_n$ para algum $c \in \mathbb{R}$.*

Prova: Segue do Teorema 7..3, da teoria de Riesz-Fredholm e da teoria espectral para operadores autoadjuntos compactos desenvolvida neste capítulo, bem como do lema anterior. ■

7.6 Exercícios

7.1 Prove que se E, F são espaços vetoriais normados, então $K(E,F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E,F)$.

7.2 Mostre que o operador inclusão $C^0([0,1]) \hookrightarrow L^2([0,1])$, quando estes espaços são dotados de suas normas usuais, é completamente contínuo mas não é compacto.

7.3 Seja H um espaço de Hilbert. Prove que para todo operador compacto $T : H \longrightarrow H$ existe uma sequência $T_n \subset \mathcal{L}(H)$ de operadores com posto finito tal que $T_n \to T$. (Sugestão: use o teorema da projeção.)

7.4 Mostre que a sequência de operadores limitados $\{T_n\} \subset \mathcal{L}\left(\ell^2\right)$ de posto finito definidos por

$$T_n x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$$

converge puntualmente para um operador limitado que não é compacto.

7.5 Mostre que os seguintes operadores são compactos:

a) $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ definido por

$$Tx = \left(x_1, \frac{x_2}{2} \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right).$$

b) $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ definido por

$$Tx = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2} \ldots, \frac{x_n}{2^n}, \ldots\right).$$

c) $T : \ell^p \longrightarrow \ell^p$, $1 \leqslant p < \infty$, definido por

$$Tx = \left(x_1, \frac{x_2}{2} \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right).$$

d) $T : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$ definido por

$$Tx = \left(x_1, \frac{x_2}{2} \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right).$$

7.6 Sejam H um espaço de Hilbert, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um sistema ortonormal completo para H e $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência de números reais tal que $\lambda_n \to 0$. Defina um operador $T : H \longrightarrow H$ por

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Mostre que T é um operador compacto.

7.7 Sejam H um espaço de Hilbert, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um sistema ortonormal completo para H, F um espaço de Banach e $T : H \longrightarrow F$ um operador limitado. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$ é uma série convergente, então T é um operador compacto.

7.8 Seja $E = \left\{f \in C^2([0,1]) : f(0) = f'(0) = 0\right\}$ e considere o operador $T : E \longrightarrow C^0([0,1])$ definido por $Tf = f''$. Mostre que $T^{-1} : C^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ é um operador compacto.

7.9 Sejam E um espaço reflexivo, F um espaço vetorial normado e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear compacto. Mostre que $T(B_E)$ é compacto.

7.10 Defina $T : C^0([-1,1]) \longrightarrow C^0([-1,1])$ por

$$(Tf)(x) = \int_{-1}^{x} t f(t)\, dt.$$

Mostre que T é um operador compacto mas $T\left(B_{C^0([-1,1])}\right)$ não é compacto.

7.11 Sejam E, F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear compacto. Mostre que se F tem dimensão infinita, então T não pode ser sobrejetivo. Conclua que se $R(T)$ é fechado, então $R(T)$ tem dimensão finita.

7.12 Sejam E, F espaços vetoriais normados com $\dim E = \infty$ e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear compacto. Mostre que existe uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo n e $Tx_n \to 0$.

7.13 Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \longrightarrow H$ um operador linear compacto. Mostre que existe $x \neq 0$ tal que

$$\|Tx\| = \|T\| \|x\| .$$

7.14 Sejam E um espaço reflexivo e F um espaço de Banach com a propriedade que toda sequência que satisfaz $y_n \rightharpoonup 0$ satisfaz $y_n \longrightarrow 0$. Mostre que se $T : E \longrightarrow F$ é um operador linear limitado, então T é compacto.

7.15 Sejam E, F espaços vetoriais normados. Um operador linear $T : E \longrightarrow F$ que leva sequências limitadas em E em sequências que possuem sequências fracamente convergentes em F é chamado um **operador fracamente compacto**.

a) Mostre que operadores fracamente compactos são limitados.

b) Mostre que se E ou F é reflexivo, então todo operador limitado é fracamente compacto.

7.16 Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear compacto. Mostre que $R(T)$ é separável.

7.17 Mostre que toda forma bilinear limitada é contínua.

7.18 Sejam H um espaço de Hilbert separável, $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador autoadjunto compacto, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de autovalores não nulos distintos de T e $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a correspondente sequência de autovetores ortonormais. Mostre que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Tx, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n.$$

7.19 Neste exercício estudaremos o problema de Sturm-Liouville sem assumir que o operador L é injetivo. Assumiremos a notação da seção deste capítulo que trata do problema de Sturm-Liouville.

a) Sejam $x, y \in C^1[a, b]$ tais que x', y' é absolutamente contínua e $x'', y'' \in L^2(a, b)$. Então

$$\int_a^b (x''y - xy'') = [x'(b)\, y(b) - x(b)\, y'(b)] - [x'(a)\, y(a) - x(a)\, y'(a)] .$$

b) Se $x, y \in E$, então $\langle Lx, y\rangle = \langle x, Ly\rangle$.

c) Se $x, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, com $\lambda \neq \mu$, e $x \in \ker L_\lambda, y \in \ker L_\mu$, então $x \perp y$.

d) Mostre que existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\ker L_\mu = 0$. Assim, substituindo a função q pela função $q - \mu$, ainda valem as conclusões do Teorema 7.35.

Capítulo 8

Espaços de Sobolev e Equação de Laplace

8.1 O Princípio de Dirichlet

Considere o problema de Dirichlet para a equação de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8.1}$$

para funções f, g dadas. O princípio de Dirichlet afirma que podemos encontrar a solução para o problema acima encontrando a função que minimiza um funcional de energia apropriado:

8.1 Proposição. (Princípio de Dirichlet) *Suponha que* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *satisfaz* $u = g$ *sobre* $\partial\Omega$ *e*

$$I(u) = \min_{v \in E} I(v)$$

onde $E = \left\{ v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) : v = g \text{ sobre } \partial\Omega \right\}$ *e*

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega fv.$$

Então u *é uma solução de* (8.1).

Prova: Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Por hipótese, a função $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\gamma(t) = I(u + t\varphi)$$

possui um mínimo em $t = 0$, porque $u + t\varphi = g$ em $\partial\Omega$. Expandindo esta expressão, obtemos

$$\gamma(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + t \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 + \int_\Omega fu + t \int_\Omega f\varphi.$$

Em particular, γ é diferenciável e

$$\gamma'(t) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + t \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 + \int_\Omega f\varphi.$$

Como $\gamma'(0) = 0$, segue que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Integrando esta equação por partes, isto é, usando a primeira identidade de Green

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_\Omega \varphi \Delta u,$$

obtemos

$$\int_\Omega \Delta u \, \varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty (\Omega),$$

o que implica

$$\Delta u = f \quad \text{em } \Omega.$$

■

O princípio de Dirichlet sugere então que para resolver o problema de Dirichlet para a equação de Poisson basta encontrar a função que minimiza o funcional (às vezes chamado *funcional* ou *integral de Dirichlet*)

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega f u$$

na classe de funções de classe C^2 em Ω que satisfazem a condição de fronteira especificada. No entanto, não está claro que o funcional de Dirichlet assume o seu ínfimo nesta classe de funções. Esta constitui a dificuldade principal em se aplicar este *método variacional* para encontrar a solução do problema de Dirichlet. Talvez fosse melhor tentar minimizar o funcional de Dirichlet em um espaço maior de funções para aumentar as chances de obter um minimizante naquele espaço. Se formos usar esta estratégia, no entanto, a nova dificuldade passa a ser mostrar que o minimizante obtido é de classe C^2 em Ω, satisfazendo os nossos critérios de solução para o problema de Dirichlet. Por exemplo, o funcional de Dirichlet está bem definido para funções em $C^1(\Omega)$, que é uma classe maior de funções que $C^2(\Omega)$, logo faz sentido procurar um minimizante para o funcional em $C^1(\Omega)$ (embora nada indique que seja mais fácil encontrá-lo neste espaço do que no espaço $C^2(\Omega)$); por outro lado, mesmo que encontremos um minimizante em $C^1(\Omega)$, é necessário provar que ele está também em $C^2(\Omega)$. Assim, o que determinará a escolha da estratégia é saber o que é mais fácil: encontrar o minimizante em um espaço maior W e provar a regularidade $C^2(\Omega)$ deste minimizante, ou encontrar diretamente o minimizante no espaço $C^2(\Omega)$? A experiência mostra que a primeira estratégia é mais promissora. Define-se um *espaço de Sobolev* $W_0^{1,2}(\Omega)$, que é um subespaço de $L^2(\Omega)$ onde o funcional de Dirichlet está bem definido. $W_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e tem belas propriedades de compacidade, o que facilita bastante provar a existência de um minimizante para o funcional de Dirichlet. Além disso $W_0^{1,2}(\Omega)$ contém $C^2(\Omega)$ e, através da consideração de outros espaços de Sobolev de definição análoga, é possível provar a regularidade do minimizante encontrado usando certos resultados de imersão.

8.2 A Derivada Fraca

Vemos que o termo quadrático do funcional de Dirichlet está bem definido para funções u que tem apenas derivadas parciais de primeira ordem definidas em quase todo ponto e que estão em $L^2(\Omega)$; além disso, o termo linear está bem definido para funções $u \in L^2(\Omega)$ desde que $f \in L^2(\Omega)$ também. Esta percepção nos leva a tentar definir um conceito mais abrangente de derivada.

8.2.1 Definição

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Suponha que $u \in C^1(\Omega)$ é uma função real continuamente diferenciável. Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ é uma função suave com suporte compacto em Ω, segue da fórmula de integração por partes

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v = \int_{\partial\Omega} uv \, \eta_i - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

que
$$\int_\Omega u\,(\partial_i\varphi) = -\int_\Omega (\partial_i u)\,\varphi \tag{8.2}$$
para $i = 1,\dots,n$ (aqui denotamos por ∂_i a derivada parcial de primeira ordem $\partial/\partial x_i$) Não há termos de fronteira exatamente porque φ tem suporte compacto em Ω.

8.2 Definição. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dizemos que uma função $v_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é a **derivada parcial fraca** de u em relação a x_i, se
$$\int_\Omega u(\partial_i\varphi) = -\int_\Omega v_i\varphi, \tag{8.3}$$
para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Neste caso, denotaremos
$$v_i = \partial_i u. \tag{8.4}$$
Dizemos que u é **fracamente diferenciável** se todas as derivadas parciais fracas de primeira ordem de u existirem. O espaço vetorial das funções fracamente diferenciáveis será denotado por $W^k(\Omega)$.

Quando existe, v_i é ûnicamente determinada a menos de conjuntos de medida nula. Claramente $C^1(\Omega) \subset W^1(\Omega)$: o conceito de derivada fraca é uma extensão do conceito clássico de derivada que mantém a validade da fórmula de integração por partes.

8.3 Exemplo. Sejam $n = 1$, $\Omega = (0,2)$ e
$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{se } 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$
Então, se
$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{se } 1 \leqslant x < 2, \end{cases}$$
temos $u'(x) = v(x)$. De fato, dada $\varphi \in C_0^\infty((0,2))$, temos
$$\begin{aligned}\int_0^2 u\varphi' &= \int_0^1 x\varphi + \int_1^2 \varphi' = \varphi(1) - 0 - \int_0^1 \varphi + 0 - \varphi(1) \\ &= -\int_0^2 v\varphi.\end{aligned}$$
□

8.4 Exemplo. Por outro lado, se $n = 1$, $\Omega = (0,2)$ e
$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leqslant 1, \\ 2 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$
então u não possui uma derivada fraca. Com efeito, suponha por absurdo que exista uma função $v \in L^1_{\text{loc}}((0,2))$ satisfazendo
$$\int_0^2 u\varphi' = -\int_0^2 v\varphi\,,$$
para toda $\varphi \in C_0^\infty((0,2))$. Então
$$\begin{aligned}-\int_0^2 v\varphi &= \int_0^1 x\varphi' + 2\int_1^2 \varphi' = \varphi(1) - 0 - \int_0^1 \varphi + 0 - 2\varphi(1) \\ &= -\varphi(1) - \int_0^1 \varphi,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi(1) = -\int_0^1 \varphi + \int_0^2 v\varphi.$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty((0,2))$. Escolhendo uma seqüência de funções-teste $(\varphi_m) \subset C_0^\infty((0,2))$ satisfazendo $\varphi_m(1) = 1$, $0 \leqslant \varphi_m \leqslant 1$ e $\varphi_m(x) \to 0$ para todo $x \neq 1$, obtemos através do teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$1 = \lim_{m\to\infty} \varphi_m(1) = \lim_{m\to\infty} \left[-\int_0^1 \varphi_m + \int_0^2 v\varphi_m \right] = 0,$$

uma contradição. □

Estes exemplos não são acidentais. Conforme veremos daqui a pouco, uma função real em uma variável real possui uma derivada fraca se e somente se ela for absolutamente contínua; lembre-se que neste caso ela é diferenciável no sentido clássico em quase todo ponto. Uma caracterização completa das funções fracamente diferenciáveis, especialmente suas propriedades no que se refere à diferenciabilidade clássica, será considerada após um resultado de aproximação.

8.2.2 Um Teorema de Aproximação para Funções Fracamente Diferenciáveis

Para estabelecer algumas das propriedades básicas das funções fracamente diferenciáveis é conveniente aproximá-las por suas regularizações.

8.5 Definição. Uma **função suavizante** é uma função não-negativa $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\operatorname{supp}\varphi = B_1(0)$ e satisfazendo $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$.

O exemplo típico de função suavizante é a função

$$\varphi(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

onde a constante c é escolhida de forma que tenhamos $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$.

8.6 Definição. Considere $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Dado $\varepsilon > 0$, a **regularização** u_ε de u é definida como sendo a convolução

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\,dy. \tag{8.5}$$

Observe que $\operatorname{supp}\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = B_\varepsilon(x)$. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, estendemos u como valendo 0 fora de Ω de forma a aplicar a definição acima, mas mesmo assim a função u_ε pode não estar definida para todo $x \in \Omega$, já que u é apenas localmente integrável em Ω (o que significa que u é integrável apenas em vizinhanças compactas de Ω). Para uma tal função, a regularização u_ε está definida em $x \in \Omega$ apenas para aqueles ε tais que $\varepsilon < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$; u_ε não está definida em todo o aberto Ω se u é apenas localmente integrável em Ω.

Uma das propriedades principais da regularização u_ε de u é ser uma função suave onde estiver definida. De fato, se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, dado $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ temos para qualquer multi-índice γ

$$D^\gamma u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega D^\gamma \left[\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] u(y)\,dy$$

para todo $x \in \Omega'$; ou seja, $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega')$. Assim, se $u \in L^1(\Omega)$, de modo que u_ε está definida em todo o aberto Ω para qualquer $\varepsilon > 0$, segue que $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ para qualquer $\varepsilon > 0$; se, além disso, Ω for limitado, então $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $\varepsilon > 0$. Finalmente, se $\operatorname{supp} u \subset \Omega$ e $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, \partial\Omega)$, então $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ também.

A propriedade essencial das regularizações de uma função u, o que justifica o seu uso, é serem aproximações de u na topologia natural do espaço em que u se encontra, em particular para os espaços L^p. Apenas devemos observar que os espaços $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ não são espaços vetoriais normados, mas possuem uma topologia definida da seguinte maneira: dizemos que uma seqüência $\{u_m\} \subset L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ converge para u na topologia de $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ se $u_m \to u$ em $L^p(\Omega')$ para todo aberto $\Omega' \subset\subset \Omega$.

8.7 Lema. *Se $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ [resp. $L^p(\Omega)$, se Ω é um aberto limitado], então $u_\varepsilon \to u$ em $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ [resp. $L^p(\Omega)$, se Ω é um aberto limitado] quando $\varepsilon \to 0$.*

Prova: Pela desigualdade de Hölder, para qualquer função $w \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ nós temos

$$\begin{aligned}
|w_\varepsilon(x)| = \left| \int_{B_1(0)} \varphi(z) w(x - \varepsilon z)\, dz \right| &\leqslant \left(\int_{B_1(0)} \left| \varphi^{\frac{p-1}{p}}(z) \right|^{\frac{p}{p-1}} dz \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B_1(0)} \left| \varphi^{\frac{1}{p}}(z) w(x - \varepsilon z) \right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{B_1(0)} \varphi(z)\, dz \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B_1(0)} \varphi(z) \left| w(x - \varepsilon z) \right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{B_1(0)} \varphi(z) \left| w(x - \varepsilon z) \right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}};
\end{aligned}$$

portanto, se $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $\varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)/2$, segue do Teorema de Fubini que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} |w_\varepsilon(x)|^p\, dx &\leqslant \int_{\Omega'} \left(\int_{B_1(0)} \varphi(z) \left| w(x - \varepsilon z) \right|^p dz \right) dx = \int_{B_1(0)} \varphi(z) \left(\int_{\Omega'} \left| w(x - \varepsilon z) \right|^p dx \right) dz \\
&\leqslant \int_{B_1(0)} \varphi(z) \left(\int_{B_\varepsilon(\Omega')} |w(y)|^p\, dy \right) dz \\
&= \int_{B_\varepsilon(\Omega')} |w|^p,
\end{aligned}$$

onde $B_\varepsilon(\Omega') = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega') < \varepsilon\}$ é a vizinhança ε de Ω'. Em outras palavras, nós provamos que para qualquer função $w \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ vale

$$\|w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega')} \leqslant \|w\|_{L^p(B_\varepsilon(\Omega'))}.$$

Agora, aproxime u em $B_\varepsilon(\Omega')$. Mais precisamente, dado $\varepsilon > 0$, seja $v \in C^0(B_\varepsilon(\Omega'))$ tal que

$$\|u - v\|_{L^p(B_\varepsilon(\Omega'))} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pelo resultado que acabamos de obter, chamando $w = u - v$ nós também temos (pois $(u - v)_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$) que

$$\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega')} \leqslant \|u - v\|_{L^p(B_\varepsilon(\Omega'))} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como $v_\varepsilon \to v$ uniformemente em $B_\varepsilon(\Omega')$, se ε é suficientemente pequeno nós temos

$$\|v - v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega')} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Segue que

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega')} \leqslant \|u - v\|_{L^p(\Omega')} + \|v - v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega')} + \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon.$$

Para provar o resultado se $u \in L^p(\Omega)$, quando Ω é um aberto limitado, estendemos u como sendo 0 fora de Ω e aplicamos o resultado acima para $u \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. ■

8.8 Lema. *Sejam $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, e suponha que $\partial_i u$ existe. Então*

$$\partial_i u_\varepsilon(x) = (\partial_i u)_\varepsilon(x) \tag{8.6}$$

para todo $x \in \Omega_\varepsilon = \{y \in \Omega : \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

Prova: Observe que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = (-1)\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right).$$

Derivando sob o sinal de integral, como para $x \in \Omega_\varepsilon$ a função $\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \in C_0^\infty(\Omega)$, podemos usar a definição de derivada fraca para obter

$$\begin{aligned}
\partial_i u_\varepsilon(x) &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^n} \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u}{\partial y_i}(y)\, dy \\
&= (\partial_i u)_\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

■

Observe que, mesmo que tenhamos $u \in L^1(\Omega)$ e $\partial_i u \in L^1(\Omega)$ (e, conseqüentemente, $u_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ e $(\partial_i u)_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ pelo Lema 8.8) não podemos concluir que $\partial_i u_\varepsilon(x) = (\partial_i u)_\varepsilon(x)$ para todo $x \in \Omega$, já que para $x \in \Omega \backslash \overline{\Omega}_\varepsilon$ a função $\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \notin C_0^\infty(\Omega)$ e portanto não podemos usar a definição de derivada fraca.

Agora estamos em condições de provar o seguinte teorema básico de aproximação para derivadas fracas.

8.9 Teorema. *Sejam $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Então $v = \partial_i u$ se e somente se existe uma seqüência de funções $(u_m) \subset C^1(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\partial_i u_m \to v$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Prova: Suponha que existe uma seqüência de funções $(u_m) \subset C^k(\Omega)$ satisfazendo $u_m \to u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\partial_i u_m \to v$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Então, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega u(\partial_i \varphi)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m(\partial_i \varphi)\, dx = -\lim_{m\to\infty} \int_\Omega (\partial_i u_m)\varphi\, dx = -\int_\Omega v\varphi\, dx,$$

e portanto $v = \partial_i u$.

Agora assuma $v = \partial_i u$. Temos então $u_\varepsilon \to u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $(\partial_i u)_\varepsilon \to \partial_i u = v$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, quando $\varepsilon \to 0$. Como $(\partial_i u)_\varepsilon = \partial_i u_\varepsilon$, segue a recíproca. ■

8.2.3 Caracterização das Funções Fracamente Diferenciáveis

Em geral, temos a seguinte caracterização das funções fracamente diferenciáveis, que tem como conseqüência o fato de que as derivadas parciais de uma função fracamente diferenciável existem em quase todo ponto.

8.10 Teorema. *Uma função $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é fracamente diferenciável se e somente se ela é igual, a menos de um conjunto de medida nula, a uma função que*

(i) é absolutamente contínua em quase todos os segmentos em Ω paralelos aos eixos coordenados e

(ii) as derivadas parciais (clássicas) de primeira ordem de u são localmente integráveis.

Prova: Assuma primeiro $u \in W^1(\Omega)$. Obviamente, pela definição de função fracamente diferenciável, temos $\partial_i u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ para $i = 1, ..., n$. Tome um bloco retangular $R = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \Omega$ e fixe uma coordenada i. Escrevemos um ponto $x \in R$ na forma $x = (x', x_i)$, onde $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_i \in [a_i, b_i]$;

denotaremos também $R' = [a_1, b_1] \times ... \times \widehat{[a_i, b_i]} \times ... \times [a_n, b_n]$. Temos que provar que para quase todo $x' \in R'$ a função $u(x', \cdot)$ é absolutamente contínua em $[a_i, b_i]$. Pelo Teorema 8.8, existe uma seqüência de funções $(u_m) \subset C^\infty(\Omega)$ satisfazendo $u_m \to u$ e $\partial_i u_m \to \partial_i u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ para todo i. Pelo Teorema de Fubini, podemos então escrever para quase todo $x' \in R'$

$$\int_{R'} \left[\int_{a_i}^{b_i} |u_m(x', x_i) - u(x', x_i)| \; dx_i \right] dx' = \int_R |u_m(x) - u(x)| \; dx \to 0 \tag{8.7}$$

$$\int_{R'} \left[\int_{a_i}^{b_i} |\partial_i u_m(x', x_i) - \partial_i u(x', x_i)| \; dx_i \right] dx' = \int_R |\partial_i u_m(x) - \partial_i u(x)| \; dx \to 0 \tag{8.8}$$

quando $m \to \infty$. Como convergência em L^1 implica convergência q.t.p. a menos de uma subseqüência, podemos assumir que

$$\int_{a_i}^{b_i} |u_m(x', x_i) - u(x', x_i)| \; dx_i \to 0 \tag{8.9}$$

$$\int_{a_i}^{b_i} |\partial_i u_m(x', x_i) - \partial_i u(x', x_i)| \; dx_i \to 0 \tag{8.10}$$

para quase todo $x' \in R'$ (por exemplo, definindo $F_m(x') = \int_{a_i}^{b_i} |u_m(x', x_i) - u(x', x_i)| \; dx_i$, temos por (8.7) que $F_m \to 0$ em $L^1(R')$). Em outras palavras, para quase todo $x' \in R'$, temos que $u_m(x', \cdot) \to u(x', \cdot)$ em $L^1([a_i, b_i])$ e $\partial_i u_m(x', \cdot) \to \partial_i u(x', \cdot)$ em $L^1([a_i, b_i])$. Fixe qualquer um x' com esta propriedade.

Verificaremos agora que a seqüência $\{u_m(x', \cdot)\}$ cumpre as condições do Teorema de Arzelà-Ascoli. De fato, como as funções u_m são pelo menos continuamente diferenciáveis, nós temos que, dado $\eta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t \in [a_i, b_i]$ e $m > N$ vale

$$\begin{aligned} |u_m(x', t) - u_m(x', a_i)| &= \left| \int_{a_i}^{t} \partial_i u_m(x', x_i) \, dx_i \right| \\ &\leqslant \int_{a_i}^{b_i} |\partial_i u_m(x', x_i)| \; dx_i \\ &< \int_{a_i}^{b_i} |\partial_i u_m(x', x_i)| \; dx_i + \eta. \end{aligned}$$

Logo, a seqüência $\{u_m(x', \cdot)\}$ é uniformemente limitada em $[a_i, b_i]$. Além disso, a seqüência $\{u_m(x', \cdot)\}$ também é uniformemente absolutamente eqüicontínua, porque a convergência de uma seqüência em $L^1([a_i, b_i])$ implica que a seqüência é uniformemente integrável: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\int_E |\partial_i u_m(x', x_i)| \; dx_i < \varepsilon$$

para qualquer conjunto $E \subset [a_i, b_i]$ satisfazendo $|E| < \delta$; assim, se $|t - s| < \delta$, segue que

$$|u_m(x', t) - u_m(x', s)| \leqslant \int_s^t |\partial_i u_m(x', x_i)| \; dx_i < \varepsilon$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Segue do Teorema de Arzelà-Ascoli que $u_m(x', \cdot)$ converge uniformemente em $[a_i, b_i]$ para uma função absolutamente contínua que coincide em quase todo ponto com u.

Suponha agora que u é absolutamente contínua em quase todos os segmentos de reta em Ω paralelos aos eixos coordenados e que as primeiras derivadas parciais de u são localmente integráveis. Então isso vale também para $u\varphi$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, logo temos

$$\int_L u \, (\partial_i \varphi) \; dx = - \int_L (\partial_i u) \, \varphi \, dx$$

em quase todo segmento de reta L paralelo ao i-ésimo eixo coordenado cujos extremos estão em $\Omega \backslash \operatorname{supp} \varphi$. Pelo Teorema de Fubini, segue que

$$\int_\Omega u\,(\partial_i \varphi)\;dx = -\int_\Omega (\partial_i u)\,\varphi\,dx,$$

e portanto $u \in W^1(\Omega)$. ■

8.11 Corolário. *Seja $u \in W^1(\Omega)$. Se $\nabla u = 0$ q.t.p. em algum subconjunto conexo de Ω, então u é constante neste subconjunto.*

8.2.4 Regra do Produto e Regra da Cadeia

8.12 Proposição. (Regra do Produto) *Se $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $\psi u \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\partial_i(\psi u) = (\partial_i \psi)\,u + \psi\,(\partial_i u)\,.$$

Prova: Para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, usando a regra do produto para funções diferenciáveis no sentido clássico e a definição de derivada fraca (pois $\psi\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$), temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\psi u)(\partial_i \varphi)\,dx &= \int_\Omega u[\psi(\partial_i \varphi)]\,dx = \int_\Omega u[\partial_i(\psi\varphi) - \varphi(\partial_i \psi)]\,dx \\ &= -\int_\Omega (\partial_i u)\psi\varphi\,dx - \int_\Omega u(\partial_i \psi)\varphi\,dx \\ &= -\int_\Omega [(\partial_i u)\psi + u(\partial_i \psi)]\varphi\,dx.\end{aligned}$$

■

Sob hipóteses razoáveis, a regra da cadeia vale para funções fracamente diferenciáveis.

8.13 Proposição. *Sejam $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $u \in W^1(\Omega)$. Então a função composta $f \circ u \in W^1(\Omega)$ e*

$$\nabla(f \circ u) = f'(u)\nabla u.$$

Prova: Pelo Teorema 8.10, para provar este resultado basta encontrar uma seqüência de funções continuamente diferenciáveis convergindo para $f \circ u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, tais que suas derivadas convergem para $f'(u)\partial_i u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Em vista do mesmo teorema, como $u \in W^1(\Omega)$, sabemos que existe uma seqüência $(u_m) \subset C^1(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ e $\partial_i u_m \to \partial_i u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ para todo i. Então, se $\Omega' \subset\subset \Omega$, nós temos

$$\int_{\Omega'} |f(u_m) - f(u)| \leqslant \sup|f'| \int_{\Omega'} |u_m - u| \to 0$$

quando $m \to \infty$, ou seja, $f \circ u_m \to f \circ u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Pela regra da cadeia para funções diferenciáveis $\partial_i(f \circ u_m) = f'(u_m)\partial_i u_m$ e nós temos

$$\int_{\Omega'} |f'(u_m)\partial_i u_m - f'(u)\partial_i u| \leqslant \sup|f'| \int_{\Omega'} |\partial_i u_m - \partial_i u| + \int_{\Omega'} |f'(u_m) - f'(u)|\,|\partial_i u|\,.$$

A primeira integral do lado direito desta desigualdade converge para 0 porque $\partial_i u_m \to \partial_i u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos assumir que $u_m \to u$ q.t.p. em Ω; como f' é contínua, segue que $f'(u_m) \to f'(u)$ q.t.p. em Ω. Como $|f'(u_m) - f'(u)|\,|\partial_i u| \leqslant 2\sup|f'|\,|\partial_i u| \in L^1(\Omega')$, segue do teorema da convergência dominada que a segunda integral também converge para 0 e portanto que $\partial_i(f \circ u_m) \to f'(u)\partial_i u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. ■

As partes positiva e negativa de uma função são as funções definidas respectivamente por

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\} \qquad \text{e} \qquad u^-(x) = \min\{u(x), 0\}.$$

Segue que

$$u = u^+ + u^- \qquad \text{e} \qquad |u| = u^+ - u^-.$$

8.14 Proposição. *Seja $u \in W^1(\Omega)$. Então $u^+, u^-, |u| \in W^1(\Omega)$ e*

$$\nabla u^+(x) = \begin{cases} \nabla u(x) & \textit{se } u(x) > 0, \\ 0 & \textit{se } u(x) \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\nabla u^-(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } u(x) \geqslant 0, \\ \nabla u(x) & \textit{se } u(x) < 0, \end{cases}$$

$$\nabla |u|(x) = \begin{cases} \nabla u(x) & \textit{se } u(x) > 0, \\ 0 & \textit{se } u(x) = 0, \\ -\nabla u(x) & \textit{se } u(x) < 0. \end{cases}$$

Prova: Para cada $\varepsilon > 0$ defina

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon & \textit{se } t > 0, \\ 0 & \textit{se } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Então

$$f_\varepsilon'(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + \varepsilon^2}} & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \leqslant 0. \end{cases}$$

de modo que $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ e $f_\varepsilon' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Segue do lema anterior que para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ nós temos

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u) \partial_i \varphi \, dx = -\int_\Omega \varphi \frac{u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \partial_i u \, dx.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, segue do teorema da convergência dominada (pois $0 \leqslant f_\varepsilon(u) \leqslant u^+$ e $0 \leqslant f_\varepsilon'(u) \leqslant 1$) que

$$\int_\Omega u^+ \partial_i \varphi \, dx = -\int_\Omega \varphi \partial_i u \, dx,$$

e portanto o lema é provado para u^+. Os outros resultados seguem imediatamente de $u^- = -(-u)^+$ e $|u| = u^+ - u^-$. ■

8.15 Corolário. *Seja $u \in W^1(\Omega)$. Se u é constante q.t.p. em algum subconjunto de Ω, então $\nabla u = 0$ neste subconjunto.*

Prova: Sem perda de generalidade, podemos assumir $u \equiv 0$ neste subconjunto. O resultado segue então imediatamente de $\nabla u = \nabla u^+ + \nabla u^-$. ■

8.16 Corolário. *Seja $u \in W^1(\Omega)$. Então*

$$|\nabla |u|| = |\nabla u|.$$

8.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $p \geqslant 1$. No que se segue convencionaremos denotar

$$\partial_0 u = u.$$

8.17 Definição. Definimos o **espaço de Sobolev** $W^{1,p}(\Omega)$ como sendo o espaço vetorial normado

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial_i u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } i = 0, 1, \ldots, n\}$$

com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\sum_{i=0}^{n} \int_\Omega |\partial_i u|^p \right)^{1/p}$$

que é equivalente à norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_\Omega |\partial_i u|^p \right)^{1/p} = \sum_{i=0}^{n} \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Definimos ainda

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \text{ fecho de } C_0^\infty(\Omega) \text{ em } W^{1,p}(\Omega).$$

8.18 Teorema. *$W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, separável se $1 \leqslant p < \infty$, e reflexivo e uniformemente convexo se $1 < p < \infty$.*

$W^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = \sum_{i=0}^{n} \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Todas estas conclusões valem para $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Prova: Seja $\{u_m\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ uma seqüência de Cauchy. Então, para cada i, $\{\partial_i u_m\}$ é uma seqüência de Cauchy em $L^p(\Omega)$; como $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach, para cada i existem funções $v_i \in L^p(\Omega)$ tais que

$$\partial_i u_m \to v_i \qquad \text{em } L^p(\Omega).$$

Denote $u := v_0$, de modo que $u_m \to u$ em $L^p(\Omega)$. Para provar que $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, basta então provar que $\partial_i u = v_i$ para todo i, pois isso automaticamente implicará por definição que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e que $u_m \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. E, de fato, como convergência em $L^p(\Omega)$ implica em convergência em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, temos para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u(\partial_i \varphi)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m(\partial_i \varphi)\, dx = -\lim_{m\to\infty} \int_\Omega (\partial_i u_m)\varphi\, dx = -\int_\Omega v_i \varphi\, dx.$$

Para provar a separabilidade e a reflexividade (quando $p > 1$) de $W^{1,p}(\Omega)$, basta considerar a imersão natural de $W^{1,p}(\Omega)$ em $n+1$ cópias de $L^p(\Omega)$:

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow \underbrace{L^p(\Omega) \times \ldots \times L^p(\Omega)}_{n+1 \text{ vezes}} \\ u &\mapsto (\partial_i u)_{0 \leqslant i \leqslant n} \end{aligned}$$

e usar o fato de que produtos finitos e subespaços fechados de espaços de Banach separáveis [resp. reflexivos; resp. uniformemente convexos] são também separáveis [resp. reflexivos; resp. uniformemente convexos]. ■

8.19 Teorema. *Seja Ω um aberto de classe C^1. Então $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ é denso em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Prova: Veja [Adams]. ■

8.4 Caracterização dos Espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$

As funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ são, a grosso modo, as funções $u \in W^{1,p}(\Omega)$ que se anulam na fronteira $\partial\Omega$. É necessário dar um sentido preciso a esta noção, já que as funções em $W^{1,p}(\Omega)$ são definidas somente a menos de conjuntos de medida nula e a fronteira $\partial\Omega$ é um conjunto de medida nula.

8.20 Lema. *Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfaz $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$, então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Prova: Seja Ω_0 um aberto de classe C^1 tal que $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega_0 \subset\subset \Omega$. Escolha uma função corte $\eta \in C_0^\infty(\Omega_0)$ tal que $\eta \equiv 1$ em $\operatorname{supp} u$; logo, $\eta u = u$. Pelo Teorema 8.19, existe uma seqüência de funções $(u_m) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m|_\Omega \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Logo $\eta u_m \to \eta u$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e portanto $\eta u = u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

8.21 Teorema. *Seja Ω um aberto de classe C^1. Se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se e somente se $u = 0$ em $\partial\Omega$.*

Prova: Suponha que $u = 0$ em $\partial\Omega$. Para obter uma seqüência de funções em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que converge para u em $W^{1,p}(\Omega)$, assuma inicialmente que $\operatorname{supp} u$ é limitado. Fixe uma função $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $|f(t)| \leqslant |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \leqslant 1, \\ t & \text{se } |t| \geqslant 2, \end{cases}$$

e defina a seqüência de funções

$$u_j = \frac{1}{j} f(ju). \tag{8.11}$$

Pela regra da cadeia $u_j \in W^{1,p}(\Omega)$ e pelo teorema da convergência dominada temos que $u_j \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Com efeito, $u_j(x) \to u(x)$ para todo $x \in \Omega$, porque se $u(x) = 0$, então $u_j(x) = 0$ para todo j, e se $u(x) \neq 0$, então $u_j(x) = \dfrac{1}{j} ju(x) = u(x)$ para todo j suficientemente grande; além disso,

$$|u_j(x)| = \frac{1}{j} |f(ju(x))| \leqslant \frac{1}{j} |ju(x)| = |u(x)| \in L^p(\Omega).$$

Isso prova que $u_j \to u$ em $L^p(\Omega)$. Analogamente, $\partial_i u_j(x) \to \partial_i u(x)$ q.t.p. em Ω, pois $\partial_i u_j(x) = f'(ju(x))\partial_i u(x)$ e $f'(ju(x)) = 1$ se $u(x) \neq 0$, para todo j suficientemente grande, enquanto que $f'(ju(x)) = 0$ se $u(x) = 0$, mas o conjunto dos pontos $x \in \Omega$ tais que $u(x) = 0$ e $\partial_i u(x) \neq 0$ tem medida nula (Corolário 8.15). Finalmente, $|\partial_i u_j(x)| \leqslant (\sup_{\mathbb{R}} |f|) |\partial_i u(x)| \in L^p(\Omega)$, o que prova que $\partial_i u_j \to \partial_i u$ em $L^p(\Omega)$ para todo índice i. Como $\operatorname{supp} u_j \subset \{x \in \Omega : |u(x)| \geqslant 1/j\} \subset \operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$, segue do lema anterior que $u_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e, portanto, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Se $\operatorname{supp} u$ não é limitado, consideramos os truncamentos $\eta_k u$, onde η_k é definida por $\eta_k(x) = \eta\left(\dfrac{x}{k}\right)$ para uma função $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ que satisfaz $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ e

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant 2. \end{cases}$$

Os truncamentos $\eta_k u$ possuem suporte limitado, logo podemos aplicar o argumento anterior para concluir que $\eta_k u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $\eta_k u \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$, segue que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Reciprocamente, suponha $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Usando cartas locais, é suficiente considerar o semicilindro superior

$$Q_+ = \{x = (x', x_n) : |x'| < 1 \text{ e } 0 < x_n < 1\},$$

e provar que toda $u \in W^{1,p}(Q_+) \cap C(\overline{Q}_+)$ que é o limite em $W^{1,p}(Q_+)$ de uma seqüência $(u_j) \subset C^\infty(Q_+)$ tal que $u_j = 0$ em $Q_0 = \overline{Q}_+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ satisfaz $u = 0$ em Q_0.

Sejam $u \in W^{1,p}(Q_+) \cap C(\overline{Q}_+)$ e $(u_j) \subset C^\infty(Q_+)$ uma tal seqüência. Como $u_j = 0$ em Q_0, para todo $(x', x_n) \in Q_+$ nós temos

$$|u_j(x', x_n)| \leqslant \int_0^{x_n} |\partial_n u_j(x', t)| \, dt.$$

Integrando com respeito a x_n, de 0 a $\varepsilon > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\varepsilon |u_j(x', x_n)| \, dx_n &\leqslant \int_0^\varepsilon \left[\int_0^{x_n} |\partial_n u_j(x', t)| \, dt \right] dx_n \\
&\leqslant \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon |\partial_n u_j(x', t)| \, dt \, dx_n \\
&= \varepsilon \int_0^\varepsilon |\partial_n u_j(x', t)| \, dt.
\end{aligned}$$

Integrando agora com respeito a x', temos

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{|x'| \leqslant 1} \int_0^\varepsilon |u_j(x', x_n)| \, dx' dx_n \leqslant \int_{|x'| \leqslant 1} \int_0^\varepsilon |\partial_n u_j(x', x_n)| \, dx' dx_n.$$

Mantendo ε fixo e fazendo $j \to \infty$, segue pelo teorema de Fubini e do fato de $u_j \to u$ em $W^{1,p}(Q_+)$ que

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{|x'| \leqslant 1} \int_0^\varepsilon |u(x', x_n)| \, dx' dx_n \leqslant \int_{|x'| \leqslant 1} \int_0^\varepsilon |\partial_n u_j| \, dx' dx_n.$$

Agora, fazendo $\varepsilon \to 0$, como $u \in C(\overline{Q}_+)$, obtemos pelo teorema do valor médio para integrais que

$$\int_{|x'| \leqslant 1} |u(x', 0)| \, dx' = 0,$$

e portanto $u = 0$ em Q_0. ■

8.5 Imersão Contínua de Espaços de Sobolev

Trivialmente, a imersão

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é contínua, já que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

por definição da norma dos espaços de Sobolev. Veremos nesta seção os outros valores de q para os quais a imersão

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

é contínua.

Lema 8.22. (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Se $1 \leqslant p < n$, então existe uma constante $C = C(n, p)$ tal que para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ nós temos*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Prova: Como por definição $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$, basta provar o resultado acima para funções $u \in C_0^1(\Omega)$. De fato, se o resultado é válido para tais funções, dada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, podemos tomar uma seqüência $\{u_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$; aplicando o resultado a $u_k - u_l$, obtemos

$$\|u_k - u_l\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u_k - \nabla u_l\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \|u_k - u_l\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

o que prova que $\{u_k\}$ também é uma seqüência de Cauchy em $L^{p^*}(\Omega)$ e portanto $u_k \to u$ em $L^{p^*}(\Omega)$. Daí segue que a desigualdade é válida para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Caso $p = 1$.

Como u tem suporte compacto, para cada $i = 1, ..., n$ nós temos

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)\, dy_i,$$

logo

$$|u(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dy_i,$$

de modo que

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Esta desigualdade é agora integrada sucessivamente em cada uma das variáveis $x_1, ..., x_n$ e a desigualdade de Hölder generalizada

$$\left| \int_\Omega f_1 \dots f_m \right| \leqslant \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdots \|f_m\|_{L^{p_m}(\Omega)}$$

onde

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1$$

é aplicada depois de cada integração para $m = p_1 = ... = p_m = n - 1$. Assim, integrando na primeira variável x_1, nós obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\ dx_1 &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dy_i\, dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Integrando em seguida com respeito à variável x_2, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\ dx_1 dx_2 \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \right] dx_2 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \right] dx_2 \\
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\ dx_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Continuando desta maneira, finalmente obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\ dx \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\ dx \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\ dx \right)^{\frac{n}{n-1}},$$

donde
$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leqslant \|\nabla u\|_{L^1},$$
que é a desigualdade de Sobolev para $p = 1$.

Caso $1 < p < n$.

O caso geral pode ser obtido usando a desigualdade acima para $p = 1$ substituindo u por uma potência de $|u|$ e usando a desigualdade de Hölder. Com efeito, se $\gamma > 1$, temos
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma \frac{n}{n-1}} \, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(|u|^\gamma)| \, dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |\nabla u| \, dx \leqslant \gamma \left\| |u|^{\gamma-1} \right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \|\nabla u\|_{L^p}.$$
Escolhemos então γ de tal modo que
$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1},$$
ou seja, $\gamma = p\dfrac{n-1}{n-p}$, e portanto $\dfrac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\dfrac{p}{p-1} = \dfrac{np}{n-p}$. Daí
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant p\frac{n-1}{n-p} \|\nabla u\|_{L^p}.$$
■

O expoente p^* na desigualdade acima não é arbitrário. De fato, se $1 \leqslant p < n$, para que uma desigualdade da forma
$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$
seja válida para todo $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos que ter necessariamente $q = p^*$. Para ver isso, fixe qualquer $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ não-nula e defina para $\lambda > 0$
$$u_\lambda(x) = u(\lambda x).$$
Nós temos
$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q \, dx \right)^{1/q} = \left(\lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \, dy \right)^{1/q} = \lambda^{-n/q} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$
$$\|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\lambda \nabla u(\lambda x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\lambda^{p-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|^p \, dy \right)^{1/p} = \lambda^{1-n/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$
Como $\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, segue que
$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant \lambda^{1 + \frac{n}{q} - \frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$
Se $1 + \dfrac{n}{q} - \dfrac{n}{p} \neq 0$, fazendo $\lambda \to 0$ ou $\lambda \to \infty$, conforme o sinal deste expoente, obtemos $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 0$, uma contradição. Portanto, necessariamente $1 + \dfrac{n}{q} - \dfrac{n}{p} = 0$, ou seja, $q = \dfrac{np}{n-p}$.

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, obtemos a seguinte imersão contínua:

8.23 Teorema. (Teorema de Imersão de Sobolev) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto. Se* $1 \leqslant p < n$*, então*
$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

8.24 Corolário. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado. Se* $p \geqslant 1$ *e* $p < n$*, então*
$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$
para todo $1 \leqslant q \leqslant p^*$.

Prova: Como Ω é limitado, pela desigualdade de Hölder vale a imersão contínua $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para qualquer $1 \leqslant q \leqslant p^*$. Compondo esta imersão com a imersão contínua do corolário anterior, obtemos o resultado desejado. ■

8.25 Corolário. (Desigualdade de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Então existe uma constante $C = C(n, \Omega)$ tal que para todo $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ nós temos*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} .$$

Consequentemente, a norma

$$\|u\|_0 := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

é uma norma equivalente em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e este é um espaço de Hilbert sob o produto interno

$$\langle u, v\rangle_0 := \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle .$$

Prova: Segue da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev e da imersão contínua $L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. ■

8.6 Imersão Compacta de Espaços de Sobolev

Dado um espaço vetorial normado E, denotaremos a imersão compacta de um subespaço vetorial F de E em E por

$$F \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow E.$$

8.26 Teorema. (Teorema de Rellich–Kondrakhov) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $1 \leqslant p < n$, então*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow L^q(\Omega),$$

para todo $1 \leqslant q < p^*$.

Prova: Pelo Corolário 8.24, temos a imersão contínua

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo $1 \leqslant q \leqslant p^*$. É suficiente estabelecer o caso $q = 1$, pois o caso geral segue deste através de um argumento de interpolação: se $1 < q < p^*$, podemos escrever

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\lambda} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{1-\lambda} ,$$

onde λ é definido por $\dfrac{1}{q} = \lambda + \dfrac{1-\lambda}{p^*}$, logo

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\lambda} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{1-\lambda} ;$$

assim, se (u_m) é uma seqüência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que possui uma subseqüência de Cauchy em $L^1(\Omega)$, segue desta desigualdade que a subseqüência é de Cauchy também em $L^q(\Omega)$.

Vamos provar o caso $q = 1$. Seja (u_m) uma seqüência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, e para cada $\varepsilon > 0$ considere a seqüência (u_m^ε), onde $u_m^\varepsilon = [u_m]_\varepsilon$ é a regularização de u_m. Afirmamos que para cada $\varepsilon > 0$ a seqüência (u_m^ε) é uniformemente limitada e eqüicontínua. De fato,

$$|u_m^\varepsilon(x)| = \left| \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy \right| \leqslant \int_{B_1(0)} \varphi(z) \left| u_m(x - \varepsilon z)\right| \, dz \leqslant \frac{1}{\varepsilon^n} \left(\max_{B_1(0)} \varphi \right) \|u_m\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \frac{C}{\varepsilon^n},$$

pois, como Ω é limitado, vale a imersão contínua $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ e (u_m) é portanto uma seqüência limitada em $L^1(\Omega)$, também. Isso prova que (u_m^ε) é uniformemente limitada. Analogamente,

$$\begin{aligned}|\nabla u_m^\varepsilon(x)| &= \left| \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon(x)} \nabla\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy \right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_1(0)} |\nabla\varphi(z)|\, |u_m(x-\varepsilon z)|\, dz \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \left(\max_{B_1(0)} |\nabla\varphi| \right) \|u_m\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{n+1}},\end{aligned}$$

e segue do Teorema do Valor Médio que (u_m^ε) é eqüicontínua. Portanto, concluímos do Teorema de Arzelá-Ascoli que uma subseqüência de u_m^ε é uma seqüência de Cauchy em $C^0(\overline{\Omega})$ e, portanto, em $L^1(\Omega)$.

Agora, pelo Lema 8.8, sabemos que $u_m^\varepsilon \to u_m$ em $L^1(\Omega)$ quando $\varepsilon \to 0$. Afirmamos que no nosso caso, mais que isso, esta convergência é uniforme em m. Com efeito,

$$\begin{aligned}|u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)| &= \left| \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) [u(y) - u(x)]\, dy \right| \\ &\leqslant \int_{B_1(0)} \varphi(z)\, |u_m(x-\varepsilon z) - u_m(x)|\, dz \\ &\leqslant \int_{B_1(0)} \varphi(z) \int_0^1 \left| \frac{du_m}{dt}(x-\varepsilon z t) \right| dt\, dz \\ &\leqslant \varepsilon \int_{B_1(0)} \varphi(z) \int_0^1 |\nabla u_m(x-\varepsilon z t)|\, |z|\, dt\, dz,\end{aligned}$$

logo, integrando com respeito a x,

$$\begin{aligned}\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\, dx \\ &\leqslant \varepsilon \int_0^1 \int_{B_1(0)} \varphi(z) \int_\Omega |\nabla u_m(x - t\varepsilon z)|\, dx\, dz\, dt \\ &\leqslant \varepsilon \int_0^1 \int_{B_1(0)} \varphi(z) \int_\Omega |\nabla u_m(y)|\, dy\, dz\, dt \\ &= \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_m(y)|\, dy \\ &\leqslant C\varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, para cada $\delta > 0$ existe $\varepsilon_\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\|u_m^{\varepsilon_\delta} - u_m\|_{L^1(\Omega)} < \frac{\delta}{2}.$$

para todo m. Para este ε_δ existe uma subseqüência $(u_{m_j}^{\varepsilon_\delta})$ de Cauchy em $L^1(\Omega)$; pela desigualdade triangular

$$\|u_{m_k} - u_{m_l}\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \left\|u_{m_k}^{\varepsilon_\delta} - u_{m_k}\right\|_{L^1(\Omega)} + \left\|u_{m_k}^{\varepsilon_\delta} - u_{m_l}^{\varepsilon_\delta}\right\|_{L^1(\Omega)} + \left\|u_{m_l}^{\varepsilon_\delta} - u_{m_l}\right\|_{L^1(\Omega)}$$

segue que

$$\limsup_{k,l\to\infty} \|u_{m_k} - u_{m_l}\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \delta.$$

Escolhendo sucessivamente $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots$ e usando o argumento da diagonal, obtemos uma subseqüência de Cauchy de (u_m) em $L^1(\Omega)$. ■

8.27 Corolário. (Teorema de Rellich–Kondrakhov) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Para todo $p \geqslant 1$ vale*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow L^p(\Omega).$$

Prova: Se $p \geqslant n$, escreva

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow L^p(\Omega)$$

onde $r < n$ é suficientemente próximo de n de tal modo que que $r^* > p$. ■

A imersão

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega),$$

nunca é compacta. Por este motivo, o expoente p^* é chamado **expoente crítico**. No exemplo seguinte, construímos uma seqüencia limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que não possui nenhuma subseqüência convergente em $L^{p^*}(\Omega)$.

8.28 Exemplo. (Perda de Compacidade no Expoente Crítico) Seja Ω um aberto qualquer de $\mathbb{R}^n$ e tome uma função não nula $\phi \in C_0^\infty(B_1(0))$. Seja $\{a_m\}$ uma seqüência de pontos distintos de Ω tais que $a_m \to x_0 \in \Omega$. Seja $0 < r_m < 1$ uma seqüência de números positivos tais que $B_{r_m}(a_m) \subset \Omega$ e todas as bolas $B_{r_m}(a_m)$ são mutualmente disjuntas; em particular, devemos ter $r_m \to 0$. Definimos então funções $u_m \in C_0^\infty(B_{r_m}(a_m))$ por

$$u_m(x) = r_m^{-\frac{n-p}{p}}\,\phi\left(\frac{x-a_m}{r_m}\right).$$

Note que $u_m \to 0$ exceto em x_0, e que $u_m(x_0) \to \infty$. Esta é exatamente a mudança de escala sob a qual as normas $\|\cdot\|_{L^{p^*}}$ e $\|\nabla(\cdot)\|_{L^p}$ são invariantes, isto é,

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \|\phi\|_{L^{p^*}(B_1(0))}\,,$$
$$\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} = \|\nabla\phi\|_{L^p(B_1(0))}\,.$$

Com efeito, nós temos

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \left[r_m^{-n}\int_\Omega \left|\phi\left(\frac{x-a_m}{r_m}\right)\right|^{p^*} dx\right]^{1/p^*} = \left[r_m^{-n}\int_{B_1(0)} |\phi(y)|^{p^*} r_m^n dy\right]^{1/p^*} = \|\phi\|_{L^{p^*}(\Omega)}\,,$$

e

$$\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} = \left[r_m^{-n+p}\int_\Omega \left|r_m^{-1}\nabla\phi\left(\frac{x-a_m}{r_m}\right)\right|^p dx\right]^{1/p} = \left[r_m^{-n}\int_{B_1(0)} |\nabla\phi(y)|^p r_m^n dy\right]^{1/p} = \|\nabla\phi\|_{L^p(\Omega)}\,,$$

Segue, em particular, que a seqüência (u_m) é limitada em $W_0^{1.p}(\Omega)$. Pelo Teorema de Rellich–Kondrachov, nós temos que $u_m \to u$ em $L^p(\Omega)$. E, de fato, nós podemos calcular explicitamente

$$\|u_m\|_{L^p(\Omega)} = \left[r_m^{-n+p}\int_\Omega \left|\phi\left(\frac{x-a_m}{r_m}\right)\right|^p dx\right]^{1/p} = \left[r_m^{-n+p}\int_{B_1(0)} |\phi(y)|^p r_m^n dy\right]^{1/p} = r_m\,\|\phi\|_{L^p(\Omega)}\,,$$

de modo que $u_m \to 0$ em $L^p(\Omega)$. Por outro lado, como as funções u_m tem suportes disjuntos, para todos inteiros k, l nós temos

$$\|u_k - u_l\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \left(\|u_k\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} + \|u_k\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*}\right)^{1/p^*} = 2^{1/p^*}\,\|\phi\|_{L^{p^*}(B_1(0))}\,,$$

portanto (u_m) não possui nenhuma subseqüência de Cauchy em $L^{p^*}(\Omega)$. □

Para a maioria dos abertos ilimitados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ as imersões contínuas de Sobolev

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para $p \leqslant q < p^*$ não são compactas, como o contraexemplo a seguir ilustra. Existem, no entanto, certos domínios ilimitados de $\mathbb{R}^n$ para os quais a imersão

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é compacta (veja [Adams]).

8.29 Exemplo. (Perda de Compacidade em Abertos Ilimitados) Se Ω é um aberto ilimitado de $\mathbb{R}^n$ que possui um conjunto enumerável de bolas disjuntas $B_R(x_m)$ de mesmo raio $R > 0$ (por exemplo, isso vale para $\Omega = \mathbb{R}^n$), então não pode haver uma imersão compacta

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

para nenhum q. De fato, tomando uma função não nula $\phi \in C_0^\infty(B_R(x_1))$, defina u_m como sendo a translação de ϕ com suporte compacto em $B_R(x_m)$. Como

$$\|u_m\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} = \|\phi\|_{W_0^{k,p}(\Omega)},$$

a seqüência (u_m) é limitada em $W_0^{k,p}(\Omega)$, mas para qualquer $q \geqslant 1$ e para quaisquer inteiros k, l, nós temos

$$\|u_k - u_l\|_{L^q(\Omega)} = \left(\|u_k\|_{L^q(\Omega)}^q + \|u_k\|_{L^q(\Omega)}^q \right)^{1/q} = 2^{1/q} \|\phi\|_{L^q(\Omega)}.$$

□

8.7 Resolução do Problema de Dirichlet

Nesta seção, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ será sempre um aberto limitado.

8.30 Definição. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in W^{1,2}(\Omega)$. Dizemos que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma **solução fraca** para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8.12}$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

e

$$u - g \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Se os dados do problema de Dirichlet (8.12) são suficientemente regulares e a solução fraca também é suficientemente regular, então ela é uma solução clássica:

8.31 Proposição. (Soluções Fracas Regulares são Soluções Clássicas) *Sejam $f \in C^0(\Omega)$ e $g \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Se existir uma solução fraca $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \textit{em } \Omega, \\ u = g & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então u é uma solução clássica.

Prova: Pela Primeira Identidade de Green, para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v - \int_\Omega (\Delta u)\, v = -\int_\Omega (\Delta u)\, v.$$

Daí e da definição de solução fraca segue que

$$\int_\Omega (-\Delta u)\, v = \int_\Omega f v$$

para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$, ou seja,

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \Omega.$$

Além disso, como $u - g \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, segue da caracterização dos espaços $W_0^{1,2}(\Omega)$ que $u - g = 0$ em $\partial\Omega$, isto é,

$$u = g \quad \text{em } \partial\Omega.$$

■

Quando uma solução fraca existe ela é única:

8.32 Proposição. (Unicidade da Solução Fraca) *Sejam* $f \in L^2(\Omega)$ *e* $g \in W^{1,2}(\Omega)$. *Se existir uma solução fraca para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então ela é única.

Prova: O resultado segue imediatamente da *estabilidade fraca* da equação de Poisson, isto é, se $u_1, u_2 \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfazem

$$-\Delta u_1 = f_1, \ -\Delta u_2 = f_2 \quad \text{em } \Omega$$

para $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$, e

$$u_1 - u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

então existe uma constante $C = C(n, \Omega)$ tal que

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant C \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}. \tag{8.13}$$

De fato, temos

$$\int_\Omega \nabla (u_1 - u_2) \cdot \nabla v = \int_\Omega (f_1 - f_2)\, v,$$

para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, em particular para $v = u_1 - u_2$. Portanto segue da desigualdade de Poincaré que

$$\begin{aligned} \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega |\nabla (u_1 - u_2)|^2 \\ &= \int_\Omega (f_1 - f_2)(u_1 - u_2) \\ &\leqslant \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant C \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde

$$\|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

Novamente usando a desigualdade de Poincaré, isso é suficiente para estabelecer (8.13). ■

A existência de uma única solução fraca para o problema de Dirichlet homogêneo é uma consequência imediata do teorema de representação de Riesz:

8.33 Teorema. (Problema de Dirichlet Homogêneo) *Seja* $f \in L^2(\Omega)$. *Então existe uma única solução fraca* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8.14}$$

Prova: De acordo com o Corolário 8.25, a existência de uma única solução fraca $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ para o problema de Dirichlet homogêneo é equivalente à existência de um único vetor $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\langle u, v \rangle_0 = F(v),$$

onde $F : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é o funcional

$$F(v) = \int_\Omega fv.$$

Pela desigualdade de Hölder temos $F \in \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*$, pois

$$|F(v)| \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Portanto, o resultado segue imediatamente do teorema de representação de Riesz para espaços de Hilbert. ■

Para o caso geral, usaremos o princípio de Dirichlet:

8.34 Teorema. (Existência da Solução Fraca) *Sejam* $f \in L^2(\Omega)$ *e* $g \in W^{1,2}(\Omega)$. *Então existe uma única solução fraca* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8.15}$$

Prova: Vamos primeiro provar a existência de uma função $u \in W^{1,2}(\Omega)$ que minimiza o funcional $I : E \to \mathbb{R}$

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega fv,$$

onde $E = \left\{ v \in W^{1,2}(\Omega) : v - g \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\}$ é o espaço de funções admissíveis para (8.15), isto é, a existência de $u \in E$ tal que

$$I(u) = \min_{v \in E} \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega fv \right).$$

Pela desigualdade de Poincaré, o funcional I é limitado por baixo, pois

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_\Omega f(v-g) - \int_\Omega fg \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)} \|(v-g)\|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega fg \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - C\|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(v-g)\|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega fg \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - C\|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} - C\|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega fg, \end{aligned}$$

e a função real $h(t) = \dfrac{t^2}{2} - at + b$ é limitada por baixo para $t \in \mathbb{R}$, quaisquer que sejam os valores de $a, b \in \mathbb{R}$. Podemos então definir

$$I_0 = \inf_{v \in E} I(u).$$

Seja $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma seqüência minimizante para I, isto é,

$$I(u_m) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m|^2 \; dx - \int_\Omega f u_m \to I_0.$$

É fácil ver, que o funcional I é convexo. Isto é uma conseqüência imediata da convexidade da função $x \mapsto |x|^2$

$$I(tu + (1-t)v) = \int_\Omega |t\nabla u + (1-t)\nabla v|^2 \; dx \leqslant \int_\Omega \left[t|\nabla u|^2 + (1-t)|\nabla v|^2 \right] dx = tI(u) + (1-t)I(v).$$

Por sua vez, a convexidade da função $x \mapsto |x|^2$ pode ser provada do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
|tx + (1-t)y|^2 - t|x|^2 - (1-t)|y|^2 &= \left(t^2 - t\right)|x|^2 + 2t(1-t)\, x\cdot y + \left[(1-t)^2 - (1-t)\right]|y|^2 \\
&= -t(1-t)|x-y|^2 \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$I_0 \leqslant I\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} I(u_k) + \frac{1}{2} I(u_l) \to I_0$$

quando $k, l \to \infty$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u_k - u_l)|^2 \; dx &= \int_\Omega |\nabla u_k|^2 \; dx + \int_\Omega |\nabla u_l|^2 \; dx - 2\int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right)\right|^2 dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u_k|^2 \; dx + 2\int_\Omega f u_k + \int_\Omega |\nabla u_l|^2 \; dx + 2\int_\Omega f u_l \\
&\quad - 2\int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right)\right|^2 dx - 4\int_\Omega f\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right) \\
&= 2I(u_k) + 2I(u_l) - 4I\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right),
\end{aligned}$$

donde concluímos que (∇u_m) é uma seqüência de Cauchy em $L^2(\Omega)$. Pela desigualdade de Poincaré, como $u_m - g \in W_0^{1,2}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\|u_k - u_l\|_{L^2(\Omega)} &= \|(u_k - g) - (u_l - g)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C\,\|\nabla(u_k - g) - \nabla(u_l - g)\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C\,\|\nabla u_k - \nabla u_l\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

logo (u_m) também é uma seqüência de Cauchy em $L^2(\Omega)$ e portanto (u_m) é uma seqüência de Cauchy em $W^{1,2}(\Omega)$, ou seja, existe $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Em particular, segue que $I(u) = I_0$ e $u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pois $W_0^{1,2}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{1,2}(\Omega)$. Como $u_m \to u$ em $L^2(\Omega)$ e $\nabla u_m \to \nabla u$ em $L^2(\Omega)$, temos que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m|^2 \; dx - \int_\Omega f u_m \to \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx - \int_\Omega f u,$$

e concluímos que u é o minimizador do funcional de Dirichlet.

Em seguida, verificamos que u é a solução fraca de (8.15). De fato, como u é um minimizante para o funcional I, segue em particular que:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\left[I(u + tv)\right|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u + tv)|^2 - \int_\Omega f(u + tv)\right|_{t=0} \\
&= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Omega f v
\end{aligned}$$

para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. ■

A teoria da regularidade permite concluir que a solução fraca do problema de Dirichlet obtida no teorema anterior é suave se os dados f, g forem (veja [Gilbarg-Trudinger]).

8.8 O Problema de Autovalor para o Laplaciano

O problema de autovalor para o laplaciano consiste em encontrar os valores λ tais que

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{em } \Omega$$

admite soluções não triviais, com alguma condição de fronteira imposta sobre u. Consideraremos o problema de autovalor com condição de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este problema pode ser formulado fracamente da seguinte forma: dizemos que λ é um autovalor do laplaciano com condição de Dirichlet e $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é uma autofunção correspondente se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega uv \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Em particular,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \lambda \int_\Omega u^2,$$

de modo que todos os autovalores do laplaciano com condição de Dirichlet são positivos (se $\lambda = 0$, pela Proposição 8.32, a única solução do problema é a solução nula).

8.35 Teorema. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Então o problema de autovalor*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \textit{em } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

possui um número infinito enumerável de autovalores $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfazem

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$$

tais que

$$\lambda_k \to \infty,$$

e autofunções $\{u_k\}$ que constituem um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$, isto é,

$$v = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i u_i$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. Em particular,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^\infty \langle v, u_i\rangle_{L^2(\Omega)}^2.$$

Prova: Pelo Teorema 8.33, o operador laplaciano $(-\Delta) : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é um operador bijetivo, enquanto que pela Proposição 8.32 a sua inversa é limitada. Considere o operador inverso $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$. Usando a imersão compacta $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow L^2(\Omega)$, podemos considerar o operador inverso como um operador compacto $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$. Além disso, $(-\Delta)^{-1}$ é um operador autoadjunto. Com efeito, se $u = (-\Delta)^{-1}(f)$ e $v = (-\Delta)^{-1}(g)$, ou seja, se $-\Delta u = f$ e $-\Delta v = g$, em particular

$$\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)},$$
$$\langle \nabla v, \nabla u\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle g, u\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Daí,

$$\left\langle (-\Delta)^{-1}(f), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle f, (-\Delta)^{-1}(g) \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto, o resultado segue da teoria espectral para operadores autoadjuntos compactos. ■

A teoria da regularidade permite concluir que as autofunções do laplaciano obtidas no teorema anterior são suaves (veja [Gilbarg-Trudinger]).

Referências Bibliográficas

[Adams] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[Brezis] BREZIS, H., *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[Conway] CONWAY, J. B., *A Course in Functional Analysis*, 2nd. Ed., Springer, 1990.

[Day] DAY, M. M., *Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces*, Bull. A. M. S. **47** (1941), 313–317.

[Dunford-Schwartz] DUNFORD, N. e SCHWARTZ, J., *Linear Operators*, 3 volumes, Interscience, 1958.

[EMT] EIDELMAN, Y., MILMAN, V. e TSOLOMITIS, A., *Functional Analysis: An Introduction*, Graduate Studies in Mathematics 66, American Mathematical Society, 2004.

[Folland] FOLLAND, G.B., *Real analysis, modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons, 1984.

[Friedman] FRIEDMAN, A., *Foundations of Modern Analysis*, Dover, 1982.

[Gilbarg-Trudinger] GILBARG, David e TRUDINGER, Neil S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd Ed., Springer-Verlag, 1983.

[James1] JAMES, R. C., *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Annals of Math. **52** (1950), no. 2, 518–527.

[James2] JAMES, R. C., *A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space*, Proc. Nat. Acad. Sci. **37** (1951) 174–177.

[Munkres] MUNKRES, J. R., *Topology: a first course*, Prentice-Hall, 1975.

[Kreyszig] KREYSZIG, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1978.

[Royden] ROYDEN, H. L., *Real Analysis*, 3ª edição, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988.

[Rudin] RUDIN, W., *Functional Analysis*, 2nd. Ed., McGraw Hill International Editions, 1991.

[Schechter] SCHECHTER, M., *Principles of Functional Analysis*, 2nd. Ed., Graduate Studies in Mathematics 36, American Mathematical Society, 2001.

[Whitley] WHITLEY, R. J., *An elementary proof of the Eberlein-Smulian theorem*, Math. Ann. **172** (1967) 116–118.