Fibrações e Espaços Projetivos Complexos

Marcel Vinhas Bertolini[1]

1. Aluno do Bacharelado em Matemática do IME-USP

1. Objetivo

Apresentar a Teoria de Fibrações e, como exemplo de aplicação, utilizá-la para demonstrar que o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ é simplesmente conexo para $n \geqslant 1$.

2. Métodos

A Teoria de Fibrações diz respeito a espaços topológicos que localmente "se parecem" com um espaço produto. Temos a seguinte definição:

Sejam E, B e F espaços topológicos. Uma *fibração localmente trivial* é uma função contínua sobrejetora $p: E \to B$ tal que para cada ponto $x \in B$, existe vizinhança U de x, para a qual existe homeomorfismo $h: p^{-1}(U) \to U \times F$ tal que $\pi_U \circ h = p$ (onde π_U é a projeção em U). Neste caso, E é chamado de *espaço total*, B de *espaço base*, F de *fibra típica*, e h de *trivialização local*.

Da definição segue que para cada $x \in U$, $\{x\} \times F$ é homeomorfo a $p^{-1}(x)$, ou seja, a pré-imagem de cada ponto do espaço base é homeomorfa à fibra típica. Deste modo, temos que o espaço total é constituído localmente, mas não necessariamente globalmente, por espaços produto. Consideremos os seguintes exemplos:

- O caso mais simples é quando o espaço total E é o produto $B \times F$. Neste caso, sendo $p: E \to B$ a projeção na primeira coordenada, as verificações da definição são imediatas.
- Assumindo a Faixa de Möbius como espaço total, S^1 é espaço base e um intervalo real é fibra típica. Intuitivamente, note que a Faixa de Möbius não é equivalente ao produto de S^1 com um intervalo, mas que localmente ela é equivalente ao produto de um arco de círculo com um intervalo.

O próximo exemplo é o de principal interesse neste trabalho:

Seja $S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$ com a topologia de subespaço. Definimos o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ como o espaço quociente de S^{2n+1} pela relação de equivalência dada pelas órbitas da ação natural do grupo multiplicativo S^1 em S^{2n+1} . Seja $p: S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ a projeção que leva cada ponto de S^{2n+1} em sua classe de equivalência. Então p é uma fibração localmente trivial, e a fibra típica é S^1 .

3. Resultados

A propriedade de fibrações localmente triviais que conduz ao resultado " $\mathbb{C}P^n$ é simplesmente conexo para $n \geqslant 1$ " é: dada uma fibração localmente trivial $p: E \to B$, se a fibra típica associada é conexa por caminhos, então, para $x_0 = p(z_0)$, o homomorfismo induzido $\psi: \pi_1(E, z_0) \to \pi_1(B, x_0)$ é sobrejetivo.

No caso de $\mathbb{C}P^n$, a fibra típica S^1 é conexa por caminhos. Além disso, assumindo $n \geqslant 1$, S^{2n+1} é simplesmente conexo, isto é, $\pi_1(S^{2n+1})$ é trivial. Pelo resultado, há sobrejeção $\pi_1(S^{2n+1}) \to \pi_1(\mathbb{C}P^n)$, e portanto $\pi_1(\mathbb{C}P^n)$ tem cardinalidade igual a um (não pode ser menor pois é não-vazio). Logo, $\pi_1(\mathbb{C}P^n)$ é trivial, e $\mathbb{C}P^n$ é simplesmente conexo.

Observe que a generalidade do resultado utilizado permite sua aplicação em diversas outras situações. Através de procedimentos análogos, determina-se o grupo fundamental (e, mais geralmente, outros grupos de homotopia) de diversos outros espaços, por exemplo, o espaço projetivo dos quatérnios $\mathbb{H}P^n$, com fibra S^3 .

4. Conclusões

A Teoria das Fibrações é uma ferramenta simples e eficiente para determinar o grupo fundamental de muitos espaços, como foi exemplificado acima no caso de $\mathbb{C}P^n$. Considerando-se que a determinação desses grupos é a princípio um problema de difícil solução, a Teoria das Fibrações se mostra um instrumento valioso.

5. Referências Bibliográficas

E. L. Lima, Grupo fundamental e espaços de recobrimento, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq (1998).

A. Hatcher, Algebraic topology, Cambridge University Press (2002).