

Capítulo 5

Grupos de transformações

Neste capítulo são estudadas as ações diferenciáveis de grupos de Lie. O primeiro estágio nesse estudo consiste em construir uma estrutura de variedade diferenciável num espaço homogêneo (espaço quociente) G/H , onde G é um grupo de Lie e H é um subgrupo fechado. O caso particular em que H é subgrupo normal dá origem aos grupos quocientes, que são também grupos de Lie.

Uma vez feita a construção dos espaços homogêneos, deve-se passar ao estudo das órbitas das ações em geral. Uma questão básica é a de verificar que as órbitas são subvariedades imersas. Isso é feito verificando que as órbitas são variedades integrais maximais de uma distribuição singular (veja apêndice B), o que fornece a informação adicional de que elas são subvariedades imersas quase-regulares. Outra questão é a de identificar cada órbita com um espaço homogêneo. No caso de ações diferenciáveis isso significa mostrar que uma órbita $G \cdot x$ é difeomorfa ao espaço quociente G/G_x , onde G_x é o grupo de isotropia.

5.1 Espaços homogêneos

Sejam G é um grupo topológico e H um subgrupo de G . Conforme foi discutido no capítulo 2 a topologia quociente no espaço homogêneo G/H é aquela em que os abertos são conjuntos da forma $A \subset G/H$ tal que $\pi^{-1}(A)$ é aberto em G , onde $\pi : G \rightarrow G/H$ é a projeção canônica. Essa topologia é Hausdorff se, e somente se, H é um subgrupo fechado.

No contexto diferenciável em que G é um grupo de Lie, o teorema de

Cartan garante que se H é fechado então H é subgrupo de Lie. Nesse caso existe uma estrutura de variedade diferenciável em G/H compatível com a topologia quociente. Essa estrutura será construída a seguir.

Seja H um subgrupo fechado do grupo de Lie G . Denote por \mathfrak{g} e \mathfrak{h} as álgebras de Lie de G e H , respectivamente. Seja também $\mathfrak{e} \subset \mathfrak{g}$ um subespaço vetorial que complementa \mathfrak{h} em \mathfrak{g} , isto é, $\mathfrak{g} = \mathfrak{e} \oplus \mathfrak{h}$. As cartas em G/H serão difeomorfismos definidos em abertos de \mathfrak{e} .

A construção das cartas está baseada no lema 4.14 que foi utilizado na demonstração do teorema do subgrupo fechado. Esse lema diz que existem vizinhanças da origem $V \subset \mathfrak{e}$, $U \subset \mathfrak{h}$ e $W \subset G$ tal que a aplicação $\psi : V \times U \rightarrow W$, definida por

$$\psi(Y, X) = e^Y e^X,$$

é um difeomorfismo, de tal forma que $W = e^V e^U$ e tal que $W \cap H = e^U$.

No que segue será conveniente supor que o sistema de coordenadas adaptado W está contido num sistema análogo W_1 , isto é, $W_1 = e^{V_1} e^{U_1}$ com $V_1 \subset \mathfrak{e}$ e $U_1 \subset \mathfrak{h}$ tal que $V \subset V_1$ e $U \subset U_1$. A existência do novo sistema de coordenadas pode ser garantida diminuindo as vizinhanças de um sistema adaptado (e mudando convenientemente as notações). Tomando, eventualmente, vizinhanças menores, pode-se supor sem perda de generalidade que $W^2 \subset W_1$ e $W^{-1}W \subset W_1$.

Os sistemas de coordenadas adaptados satisfazem a seguinte propriedade:

Lema 5.1 *Com as notações acima seja $\eta : V \times H \rightarrow G$, $\eta(Y, h) = e^Y h$, a extensão de ψ a $V \times H$. Então, η é um homeomorfismo sobre $e^V H$ e este conjunto é aberto em G .*

Demonstração: Em primeiro lugar, η é injetora. De fato, suponha que $e^{Y_1} h_1 = e^{Y_2} h_2$. Então, $e^{-Y_2} e^{Y_1} = h_2 h_1^{-1}$. O primeiro membro dessa igualdade está em W_1 , já que $W^{-1}W \subset W_1$. Como o segundo membro está em H , segue que

$$e^{-Y_2} e^{Y_1} \in W_1 \cap H = e^{U_1},$$

isto é, $e^{Y_1} = e^{Y_2} e^{X_1}$, para algum $X_1 \in U_1$. Como $\psi : V_1 \times U_1 \rightarrow W_1$ é difeomorfismo, segue que $Y_1 = Y_2$ e daí que $h_1 = h_2$, isto é, η é injetora. Portanto, η é bijetora sobre $e^V H$.

A continuidade de η é consequência da continuidade da aplicação exponencial juntamente com a do produto.

Para verificar η é aplicação aberta tome um aberto $A_1 \subset V$ e um aberto $A_2h \subset H$ com $A_2 \subset U$. Então, $\eta(A_1 \times A_2h) = \psi(A_1 \times A_2)h$. O conjunto $\psi(A_1 \times A_2)$ é uma vizinhança da origem pois ψ é difeomorfismo. Portanto,

$$\eta(A_1 \times A_2h) = \psi(A_1 \times A_2)h$$

contém uma vizinhança de h . Como toda vizinhança de h dentro de H é da forma A_2h , isso mostra que η é uma aplicação aberta.

Por fim, $e^V H = e^V e^U H = WH$. Como W é aberto, conclui-se que $e^V H$ é aberto em G . \square

Corolário 5.2 *Seja $\eta : V \times H \rightarrow e^V H$ a aplicação do lema anterior. Então, η é difeomorfismo.*

Demonstração: Dado $(Y, h) \in V \times H$, a definição de η mostra que

$$d\eta_{(Y,h)} = (dD_h)_{e^Y} \circ d\psi_{(Y,1)}$$

o que implica de imediato que $d\eta$ é isomorfismo em todo ponto. Como η é homeomorfismo, segue que essa aplicação é de fato um difeomorfismo. \square

A existência de sistemas de coordenadas adaptados do tipo descrito acima fornece facilmente uma carta ao redor da origem $x_0 = 1 \cdot H \in G/H$. De fato, seja $\sigma : V \rightarrow G/H$ a aplicação definida por

$$\sigma(Y) = \pi(\exp Y)$$

onde $\pi : G \rightarrow G/H$, $\pi(g) = gH$, é a projeção canônica. O lema a seguir mostra que σ é um sistema de coordenadas de sua imagem.

Lema 5.3 *Seja σ a aplicação definida acima. Então, sua imagem $\sigma(V)$ é um aberto de G/H e $\sigma : V \rightarrow \sigma(V)$ é um homeomorfismo.*

Demonstração: A aplicação σ é injetora. De fato, sejam $Y_1, Y_2 \in V$ tais que $\sigma(Y_1) = \sigma(Y_2)$. Pela definição de σ , isto significa que $e^{Y_1}H = e^{Y_2}H$ e daí que existem $h_1, h_2 \in H$ tais que $e^{Y_1}h_1 = e^{Y_2}h_2$. Mas, pelo lema anterior, η é injetora, o que implica que $Y_1 = Y_2$, garantindo que σ é injetora e, portanto, bijetora sobre sua imagem $\sigma(V)$.

O conjunto $\sigma(V)$ coincide com $\pi(e^V H)$. Pelo lema anterior $e^V H$ é aberto de G , o que implica que $\sigma(V)$ é aberto na topologia quociente.

Para verificar que σ é homeomorfismo sejam $A \subset V$ e $B \subset \sigma(V)$ conjuntos relacionados por $B = \sigma(A)$. Então, $\pi^{-1}(B) = e^A H$, pois $B = \pi(e^A)$. Suponha que A seja aberto em V . Então, $e^A H$ é aberto já que a aplicação η do lema anterior é homeomorfismo. Portanto, $\pi^{-1}(B)$ é aberto se A for aberto, isto é, B é aberto na topologia quociente. Isso mostra que σ é uma aplicação aberta.

Por outro lado σ é contínua, pois se B é aberto em G/H então $e^A H = \pi^{-1}(B)$ é aberto em G o que implica que A é aberto em V pois η é homeomorfismo entre $V \times H$ e $e^V H$. \square

Agora pode-se construir cartas ao redor dos demais pontos G/H por translação. De fato, para $g \in G$ defina

$$\sigma_g = g \circ \sigma : V \rightarrow g\sigma(V).$$

A aplicação $g : G/H \rightarrow G/H$ induzida por g em G/H é um homeomorfismo. Daí que $g\sigma(V)$ é um aberto e σ_g é também um homeomorfismo. Como $G/H = \bigcup_{g \in G} g\sigma(V)$, o conjunto dos homeomorfismos σ_g , $g \in G$, define um atlas em G/H .

Para verificar a diferenciabilidade desse atlas deve-se mostrar que se $g\sigma(V) \cap h\sigma(V) \neq \emptyset$ então a função de transição

$$\sigma_g^{-1} \circ \sigma_h : \sigma_h^{-1}(g\sigma(V) \cap h\sigma(V)) \longrightarrow V \quad (5.1)$$

é diferenciável. Isso é feito através da seguinte descrição de σ_g .

Dado $g \in G$, denote por π_g a restrição da projeção canônica $\pi : G \rightarrow G/H$ a ge^V . No caso particular em que $g = 1$, a aplicação π_1 é um homeomorfismo entre e^V e $\sigma(V)$. Da igualdade $g \circ \pi = \pi \circ E_g$, isto é, $\pi = g \circ \pi \circ E_{g^{-1}}$ segue que

$$\pi_g = g \circ \pi_1 \circ E_{g^{-1}}. \quad (5.2)$$

Portanto,

Lema 5.4 π_g é um homeomorfismo entre ge^V e $g\sigma(V)$.

A relação entre π_g e σ_g também é dada pela igualdade (5.2). De fato, por definição de σ ($= \sigma_1$), $\sigma_1 = \pi_1 \circ \exp$. Daí que

$$\pi_g \circ E_g \circ \exp = g \circ \pi_1 \circ \exp = g \circ \sigma_1 = \sigma_g. \quad (5.3)$$

Lema 5.5 *Se $g\sigma(V) \cap h\sigma(V) \neq \emptyset$ então a função de transição (5.1) é diferenciável.*

Demonstração: Pela fórmula para σ_g em (5.3) a função de transição é dada por

$$\sigma_g^{-1} \circ \sigma_h = \exp^{-1} \circ E_{g^{-1}} \circ (\pi_g^{-1} \circ \pi_h) \circ E_h \circ \exp.$$

Para verificar a diferenciabilidade do segundo membro basta mostrar que $(\pi_g^{-1} \circ \pi_h)$ é diferenciável. A demonstração disso segue da fórmula (5.2) para π_g :

$$\pi_g^{-1} \circ \pi_h = E_{g^{-1}} \circ \pi_1^{-1} \circ g^{-1} \circ h \circ \pi_1 \circ E_{h^{-1}}.$$

□

As aplicações σ_g definem, portanto, um atlas diferenciável em G/H . Além do mais, $\dim G/H = \dim V = \dim \mathfrak{e}$, portanto, $\dim G/H = \dim G - \dim H$. Em resumo, obtém-se o seguinte resultado.

Teorema 5.6 *Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Então, existe uma estrutura diferenciável em G/H com $\dim G/H = \dim G - \dim H$, que é compatível com a topologia quociente tal que a projeção canônica $\pi : G \rightarrow G/H$ é uma submersão.*

Demonstração: Só falta verificar que a projeção é uma submersão. Mas isso segue do fato que para todo $g \in G$, a restrição de π à vizinhança $gW = ge^V e^U$ corresponde à projeção $V \times U \rightarrow V$. □

A estrutura diferenciável definida neste teorema é denominada de *estrutura quociente*. As seguintes aplicações são diferenciáveis em relação à estrutura quociente:

Assim como no caso de aplicações contínuas em relação à topologia quociente, a diferenciabilidade em relação à estrutura quociente também é caracterizada por composição com a projeção canônica.

Proposição 5.7 *Uma função $f : G/H \rightarrow M$ é diferenciável se, e só se, $f \circ \pi$ é diferenciável.*

Demonstração: Suponha que $f \circ \pi$ seja diferenciável. Então, sua restrição a um conjunto da forma ge^V também é diferenciável. Isso implica que f é

diferenciável nos sistemas de coordenadas e, portanto, diferenciável. \square

A partir dessa caracterização das aplicações diferenciáveis prova-se, como no caso topológico a diferenciabilidade da ação de G em G/H (veja a proposição 2.24).

Proposição 5.8 *Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Então,*

1. *A ação $\phi : G \times G/H \rightarrow G/H$, $\phi(g, xH) = (gx)H$ é diferenciável.*
2. *Para cada $g \in G$ a aplicação $\phi_g : G/H \rightarrow G/H$ é um difeomorfismo.*
3. *Se H for um subgrupo normal então G/H é um grupo de Lie com a estrutura quociente.*

5.2 Ações de grupos

Os diversos conceitos e resultados desenvolvidos no estudo das ações de grupos topológicos continuam valendo para grupos de Lie. Em particular, uma ação do grupo de Lie G é uma aplicação $\phi : G \times M \rightarrow M$, $\phi(g, x) = gx$, tal que a aplicação parcial $g \mapsto \phi_g$, $\phi_g(x) = \phi(g, x)$ é um homomorfismo de G no grupo das transformações inversíveis de M . A ação é diferenciável se ϕ for uma aplicação diferenciável.

Nesse caso as aplicações parciais $\phi_g : M \rightarrow M$ e $\phi_x : G \rightarrow M$, $\phi_g(x) = \phi_x(g) = \phi(g, x)$ são diferenciáveis para todo $g \in G$ e $x \in M$. Da igualdade $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$, segue que essas aplicações são difeomorfismos, isto é, o homomorfismo $g \mapsto \phi_g$ assume valores no grupo $\text{Dif}(M)$, dos difeomorfismos de M . Como anteriormente o difeomorfismo ϕ_g é denotado apenas por g .

No caso de uma ação diferenciável o subgrupo de isotropia $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ é fechado e, portanto, um subgrupo de Lie de G . Existe uma bijeção natural entre a órbita $G \cdot x$ e o espaço homogêneo G/G_x . Adiante será mostrado que $G \cdot x$ é uma subvariedade de M e que a bijeção com G/G_x é, de fato, um difeomorfismo, quando em G/G_x é considerado com a estrutura quociente.

A álgebra de Lie \mathfrak{g}_x do grupo de isotropia G_x é denominada de *álgebra de isotropia* em x . A álgebra de Lie de um subgrupo de Lie H é formada pelos elementos $X \in \mathfrak{g}$ tais que $\exp(tX) \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Dessa forma, a

álgebra de isotropia \mathfrak{g}_x é dada por $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\exp(tX)x = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Para $g \in G$ e $x \in M$, vale a igualdade $G_{gx} = gG_xg^{-1}$, o que implica que $\mathfrak{g}_{gx} = \text{Ad}(g)(\mathfrak{g}_x)$.

Como ocorre normalmente na teoria dos grupos de Lie, uma técnica fundamental no estudo das ações de grupos surge com a introdução do objeto infinitesimal correspondente.

Definição 5.9 *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e M uma variedade diferenciável. Denote por $\Gamma(TM)$ a álgebra de Lie dos campos de vetores em M munido do colchete de Lie. Uma ação infinitesimal de \mathfrak{g} em M é um homomorfismo de $\mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(TM)$.*

Uma ação diferenciável de G em M induz uma ação infinitesimal de \mathfrak{g} da seguinte maneira: dados $X \in \mathfrak{g}$ e $x \in M$, a curva em M definida por $t \mapsto \exp(tX)x$ é diferenciável. Sua derivada na origem

$$\tilde{X}(x) = \frac{d}{dt}(\exp(tX)x)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\phi_x(\exp(tX))|_{t=0} = (d\phi_x)_1(X).$$

é um vetor tangente a $x \in M$. Portanto $x \in M \mapsto \tilde{X}(x) \in T_xM$ define um campo de vetores em M .

O fluxo \tilde{X}_t de \tilde{X} é exatamente $\exp(tX)$ (ou melhor $\phi_{\exp(tX)}$). De fato, para todo $x \in X$ a curva $t \mapsto \exp(tX)x$ é uma trajetória de \tilde{X} pois

$$\frac{d}{dt}(\exp(tX)x) = \frac{d}{ds}(\exp((t+s)X)x)|_{s=0} = \tilde{X}(\exp(tX)).$$

Por consequência os campos de vetores \tilde{X} são completos seus fluxos $\exp(tX)$ são definidos globalmente, para todo $t \in \mathbb{R}$. Além do mais, o campo invariante à direita $X \in \mathfrak{g}$ e o campo associado \tilde{X} são ϕ_x -relacionados, para todo $x \in M$, pois $\phi_x \circ E_{\exp tX} = \phi_{\exp tX} \circ \phi_x$, isto é, ϕ_x faz o intercâmbio entre os fluxos de X e de \tilde{X} .

Do último comentário segue que a aplicação $X \in \mathfrak{g} \mapsto \tilde{X} \in \Gamma(TM)$ é uma ação infinitesimal (quando X é visto como campo invariante à direita). De fato, como os campos $X, Y \in \mathfrak{g}$ são ϕ_x -relacionados, os seus colchetes também são ϕ_x -relacionados, portanto

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}](x) = (d\phi_x)_1[X, Y] = \widetilde{[X, Y]}(x).$$

Proposição 5.10 *A aplicação $X \in \mathfrak{g} \mapsto \widetilde{X} \in \Gamma(TM)$ é um homomorfismo se \mathfrak{g} é a álgebra de Lie dos campos de vetores invariantes à direita em G .*

Nesta proposição aparece o colchete de Lie entre campos invariantes à direita em G pelo fato de que está implícito que a ação de G em M é uma ação à esquerda. Caso se considere ações à direita, a mesma aplicação $X \mapsto \widetilde{X}$ define um homomorfismo cujo domínio é a álgebra de Lie dos campos invariantes à esquerda.

A translação dos campos \widetilde{X} pelos elementos de G é dada pela seguinte fórmula, que é bastante útil.

Proposição 5.11 *Dados $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$, vale $g_*\widetilde{X} = \widetilde{(\text{Ad}(g)X)}$, isto é,*

$$(dg)_{g^{-1}x}(\widetilde{X}(gx)) = \widetilde{(\text{Ad}(g)X)}(x).$$

Demonstração: Basta verificar que as translações, por g , das trajetórias de \widetilde{X} são trajetórias de $\widetilde{(\text{Ad}(g)X)}$. Como o fluxo é $\widetilde{X}_t = \exp(tX)$, a translação da trajetória de \widetilde{X} que passa por $g^{-1}x$ é

$$ge^{tX}g^{-1}x = e^{t\text{Ad}(g)X}x$$

e o segundo membro é a trajetória de $\widetilde{(\text{Ad}(g)X)}$ iniciada em x . □

Em notação simplificada (como descrita na seção 3.1) a fórmula da proposição acima pode ser escrita como

$$g\widetilde{X}(x) = g\widetilde{Xg^{-1}(gx)},$$

isto é, ela é obtida por divisão e multiplicação por g .

Como caso particular de ação infinitesimal, considere a ação de G em G/H , onde H um subgrupo fechado. Nesse caso, vale a seguinte descrição de \widetilde{X} .

Proposição 5.12 *Sejam G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado e denote por $\pi : G \rightarrow G/H$ a projeção canônica. Tome X um campo invariante à direita em G . Então, \widetilde{X} é a projeção de X , isto é, X e \widetilde{X} são π -relacionados, isto é, $\pi_*X = \widetilde{X}$.*

Demonstração: De fato, $\pi = \phi_{x_0}$ onde x_0 □

A álgebra de Lie \mathfrak{g}_x do grupo de isotropia G_x é formada por $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\exp(tX)x = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Derivando essa igualdade se vê que, em termos da ação infinitesimal, \mathfrak{g}_x é dada por

$$\mathfrak{g}_x = \{X \in \mathfrak{g} : \tilde{X}(x) = 0\},$$

isto é, \mathfrak{g}_x é o núcleo da aplicação $X \in \mathfrak{g} \mapsto \tilde{X}(x) \in T_x M$. Já o núcleo $\{X : \tilde{X} \equiv 0\}$ do homomorfismo $X \mapsto \tilde{X}$ é a álgebra de Lie do núcleo do homomorfismo a que define a ação.

Exemplos: .

1. Considere a ação canônica de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n , $(g, x) \mapsto gx$. Se $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ é uma matriz então

$$\tilde{A}(x) = \frac{d}{dt} (e^{tA}x)_{|t=0} = Ax,$$

isto é, o campo de vetores \tilde{A} induzido pela representação é nada mais nada menos que o campo de vetores linear em \mathbb{R}^n definido pela matriz A . A propriedade de homomorfismo aqui significa que o colchete de Lie dos campos de vetores \tilde{A} e \tilde{B} é o campo linear definido pela matriz $BA - AB$.

2. O exemplo anterior se generaliza para representação de grupos: se $\rho : G \rightarrow \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ é uma representação (diferenciável) de G , então a aplicação $G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $(g, x) \mapsto \rho(g)x$ define uma ação de G em \mathbb{R}^n . A ação infinitesimal correspondente é dada por

$$\tilde{X}(x) = d\rho_1(X)x$$

se $X \in \mathfrak{g}$, a álgebra de Lie de G . Essa ação corresponde à representação infinitesimal de \mathfrak{g} .

3. Um grupo de Lie G age em si mesmo por translações à esquerda. Como o fluxo de um campo invariante à direita é dado por translações à esquerda da exponencial, segue que \tilde{X} é o campo invariante à direita correspondente a $X \in \mathfrak{g}$.

4. Seja $\phi : G \rightarrow H$ um homomorfismo diferenciável. Então G age à esquerda em H por $(g, h) \in G \times H \mapsto \phi(g)h$. Da mesma forma que no exemplo anterior, \tilde{X} é o campo invariante à direita em H determinado por $d\phi_1(X)$.
5. O grupo linear $G = \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ age na esfera de raio 1, $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ (em relação ao produto interno canônico), através da identificação da esfera com o conjunto das semi-retas em \mathbb{R}^n iniciadas na origem. Uma semi-reta intercepta S^{n-1} num único ponto e vice-versa um elemento de S^{n-1} define uma semi-reta estabelecendo uma bijeção entre os dois conjuntos.

Se r é uma semi-reta iniciada na origem e $g \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ então gr é uma semi-reta, o que define a ação $(g, r) \mapsto gr$ no conjunto das semi-retas e, portanto, em S^{n-1} . Para $x \in S^{n-1}$ e $g \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ a ação é denotada por $g * x$. Por definição $g * x$ é a intersecção com S^{n-1} do raio gerado por gx , isto é,

$$g * x = \frac{gx}{|gx|}$$

onde $|gx|$ denota a norma euclidiana. Essa ação é diferenciável. A ação infinitesimal correspondente é dada por

$$\tilde{A}(x) = \frac{d}{dt} (e^{tA} * x)_{|t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{tA}x}{|e^{tA}x|} \right)_{|t=0}.$$

O cálculo desta derivada fornece

$$\tilde{A}(x) = Ax - \langle Ax, x \rangle x,$$

que é o vetor tangente à S^{n-1} em x obtido pela projeção de Ax ao longo da semi-reta gerada por x .

6. Uma pequena alteração no exemplo anterior fornece uma ação de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ no espaço projetivo \mathbb{P}^{n-1} formado pelos subespaços de dimensão um de \mathbb{R}^n . De fato, basta substituir as semi-retas pelas retas correspondentes. Ao identificar o espaço tangente a \mathbb{P}^{n-1} em $[x]$ com o espaço tangente a S^{n-1} em $x \in S^{n-1}$, a expressão de \tilde{A} coincide com a que foi apresentada acima.

□

Nessa altura dos acontecimentos é natural perguntar se as ações infinitesimais são provenientes de ações de grupos de Lie, no sentido em que se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie real de dimensão finita e $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(TM)$ uma ação infinitesimal de \mathfrak{g} então existe um grupo de Lie G cuja álgebra de Lie é \mathfrak{g} e uma ação $\phi : G \times M \rightarrow M$ tal que θ é a ação infinitesimal correspondente a ϕ . Uma condição necessária para que isso aconteça é que os campos de vetores $\theta(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, sejam completos, uma vez que os campos \tilde{X} obtidos de uma ação de grupo são campos completos. Pode-se provar que essa condição é suficiente, isto é, uma ação infinitesimal é integrável a uma ação global de um grupo de Lie conexo desde que os campos de vetores correspondentes sejam completos¹. Em particular, se M é uma variedade compacta, toda ação infinitesimal é proveniente de uma ação global. O exemplo a seguir ilustra o caso de uma ação infinitesimal que pode ser integrada a uma ação local, mas não global, pois os campos de vetores não são completos.

Exemplo: A imagem da aplicação

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

é a reta horizontal r que passa por $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. O conjunto das retas que passam pela origem e cruzam r é aberto e denso na reta projetiva \mathbb{P}^1 . Dessa forma, a aplicação acima define um mergulho de \mathbb{R} num conjunto aberto e denso de \mathbb{P}^1 . A restrição da ação canônica de $\text{Gl}(2, \mathbb{R})$ a esse conjunto aberto denso define uma ação local de $\text{Gl}(2, \mathbb{R})$ em \mathbb{R} por transformações lineares fracionárias. De fato, seja $g * p$, $g \in \text{Gl}(2, \mathbb{R})$ e $p \in \mathbb{P}^1$ a ação na reta projetiva. Se p é o subespaço gerado por $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ e $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ então $g * p$ é o subespaço gerado por

$$\begin{pmatrix} ax + b \\ cx + d \end{pmatrix}.$$

Se $cx + d \neq 0$ esse vetor gera o mesmo subespaço que

$$\begin{pmatrix} (ax + b)/(cx + d) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¹Veja R. Palais, *A global formulation of the Lie theory of transitive groups*, *Memoirs of AMS*, 22 (1957).

Usando a notação

$$g * x = \frac{ax + b}{cx + d},$$

a aplicação $\phi(g, x) = g * x$ define uma ação local de $\text{Gl}(2, \mathbb{R})$ em \mathbb{R} . É claro que ϕ não está definida em todo $\text{Gl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, porém para os valores em que está definida vale $g * (h * x) = (gh) * x$. Em todo caso ϕ está definida nas vizinhanças de $(1, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ o que permite definir os campos de vetores

$$\tilde{A}(x) = \frac{d}{dt} (e^{tA} * x)_{|t=0} = d(\phi_x)_1(A)$$

onde ϕ_x é a aplicação parcial $\phi_x(g) = \phi(g, x)$. Como ϕ é a restrição de uma ação global, $A \mapsto \tilde{A}$ define uma ação infinitesimal de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ em \mathbb{R} . Para calcular \tilde{A} escreva

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\tilde{A}(x) = \frac{d}{dt} \left(\frac{a_t x + b_t}{c_t x + d_t} \right)_{|t=0}.$$

Como $a_0 = d_0 = 1$ e $c_0 = \gamma = 0$, segue que

$$\tilde{A}(x) = \beta + (\alpha - \delta)x - \gamma x^2.$$

Esses campos de vetores estão associados às equações diferenciais de Ricatti e, em geral, eles não são completos. \square

Uma das aplicações da ação infinitesimal em M induzida pela ação de um grupo de Lie G está no estudo das órbitas de G . A razão é que as órbitas podem ser obtidas como as variedades integrais maximais da distribuição definida pela ação infinitesimal.

Seja $\phi : G \times M \rightarrow M$ e $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(TM)$, $\theta(X) = \tilde{X}$, a ação infinitesimal correspondente. Para $x \in M$ defina o subespaço $\Delta_{\mathfrak{g}}(x) \subset T_x M$ por

$$\Delta_{\mathfrak{g}}(x) = \{\tilde{X}(x) \in T_x M : X \in \mathfrak{g}\}.$$

A aplicação $x \mapsto \Delta_{\mathfrak{g}}(x)$ é uma distribuição em M . Pela própria definição, $\Delta_{\mathfrak{g}}$ é uma distribuição diferenciável, pois ela é gerada pelos campos de vetores

\tilde{X} , $X \in \mathfrak{g}$. Em geral, a dimensão de $\Delta_{\mathfrak{g}}$ não é constante. Por exemplo, para a ação canônica de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n , $\Delta_{\mathfrak{g}}$ se reduz a 0 na origem, enquanto que $\Delta_{\mathfrak{g}}(x)$ é todo o espaço tangente se $x \neq 0$. Em geral, $\dim \Delta_{\mathfrak{g}} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_x$ pois \mathfrak{g}_x é o núcleo da aplicação linear $X \in \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{X}(x) \in T_x M$.

Proposição 5.13 *A distribuição $\Delta_{\mathfrak{g}}$ é invariante pela ação de G , isto é, $g_* \Delta_{\mathfrak{g}} = \Delta_{\mathfrak{g}}$, ou melhor*

$$dg_x \Delta_{\mathfrak{g}}(x) = \Delta_{\mathfrak{g}}(gx)$$

para todo $g \in G$.

Demonstração: A translação por $g \in G$ de um campo \tilde{X} é dada pela fórmula $g_* \tilde{X} = \widetilde{\mathrm{Ad}(g) X}$. Isso implica que para todo $g \in G$ e $x \in X$, vale

$$dg_x \left(\tilde{X}(x) \right) = \widetilde{\mathrm{Ad}(g) X}(gx).$$

Como a distribuição $\Delta_{\mathfrak{g}}$ é gerada pelos campos \tilde{X} , $X \in \mathfrak{g}$, isso implica que $dg_x \Delta_{\mathfrak{g}}(x) \subset \Delta_{\mathfrak{g}}(gx)$. A inclusão contrária se obtém da mesma forma transladando por g^{-1} , ao invés de g . \square

Essa proposição mostra que a distribuição $\Delta_{\mathfrak{g}}$ é característica (veja a definição B.8). Portanto, pelo teorema B.9 essa distribuição é integrável.

Proposição 5.14 *A distribuição $\Delta_{\mathfrak{g}}$ é integrável.*

As variedades integrais dessa distribuição fornecem as órbitas da ação de G . Para ver isso seja $I_{\mathfrak{g}}(x)$ a variedade integral maximal de $\Delta_{\mathfrak{g}}$, que passa por x . Pelo fato da distribuição ser G -invariante (pela proposição 5.13), conclui-se que para cada $g \in G$ o conjunto $gI_{\mathfrak{g}}(x)$ é uma variedade integral da distribuição. É claro que $gx \in gI_{\mathfrak{g}}(x)$ o que implica que $gI_{\mathfrak{g}}(x) \subset I_{\mathfrak{g}}(gx)$. Esta inclusão não é própria, pois se fosse $g^{-1}(I_{\mathfrak{g}}(gx))$ seria uma variedade integral de $\Delta_{\mathfrak{g}}$, que conteria $I_{\mathfrak{g}}(x)$. Vale portanto a igualdade

$$gI_{\mathfrak{g}}(x) = I_{\mathfrak{g}}(gx) \quad g \in G, x \in M. \quad (5.4)$$

Em particular, o lema a seguir mostra que se G é conexo então seus elementos preservam as variedades integrais maximais.

Lema 5.15 *Com as notações anteriores, suponha que G seja conexo. Então, $gI_{\mathfrak{g}}(x) = I_{\mathfrak{g}}(gx) = I_{\mathfrak{g}}(x)$ para todo $g \in G$ e $x \in M$. Isto é, as variedades integrais maximais de $\Delta_{\mathfrak{g}}$ são G -invariantes.*

Demonstração: Dado $g \in G$ escreva $g = e^{X_k} \dots e^{X_1}$ e defina a curva contínua $\alpha : [0, k] \rightarrow M$ por

$$\alpha(t) = e^{(t-i+1)X_i} e^{X_{i-1}} \dots e^{X_1} x \quad t \in [i-1, i].$$

Essa curva é uma concatenação de trajetórias dos campos \tilde{X}_i , que são tangentes a $\Delta_{\mathfrak{g}}$. Portanto a curva está contida numa única variedade integral maximal de $\Delta_{\mathfrak{g}}$. O seu ponto inicial é x e o ponto final é gx . Daí que $I_{\mathfrak{g}}(gx) = I_{\mathfrak{g}}(x)$, mostrando o lema. \square

A partir da invariança do lema se obtém, no caso conexo, uma ação $G \times I_{\mathfrak{g}}(x) \rightarrow I_{\mathfrak{g}}(x)$ sobre cada variedade integral maximal. Essas ações são diferenciáveis, pois as variedades integrais são quase-regulares. Além do mais, a órbita $G \cdot x$ está contida em $I_{\mathfrak{g}}(x)$. Na verdade, o seguinte resultado mostra que $G \cdot x = I_{\mathfrak{g}}(x)$, obtendo uma caracterização das órbitas de G em termos da ação infinitesimal.

Teorema 5.16 *Suponha que G seja conexo. Então, para todo $x \in M$ a órbita $G \cdot x$ coincide com a variedade integral maximal $I_{\mathfrak{g}}(x)$ de $\Delta_{\mathfrak{g}}$ que passa por x .*

Demonstração: A idéia é provar que as G -órbitas são conjuntos abertos nas variedades integrais. Seja X_1, \dots, X_k uma base de \mathfrak{g} e tome $y \in I_{\mathfrak{g}}(x)$. Defina a aplicação

$$(t_1, \dots, t_k) \longmapsto e^{t_1 X_1} \dots e^{t_k X_k} y.$$

A imagem dessa aplicação está contida na órbita $G \cdot y$. Além do mais, sua diferencial na origem é gerada pelas derivadas parciais $\tilde{X}_i(y)$, que por sua vez geram o espaço tangente $\Delta_{\mathfrak{g}}(y)$ a $I_{\mathfrak{g}}(x)$. Portanto, y está no interior da imagem (em relação à topologia intrínseca de $I_{\mathfrak{g}}(x)$). Isso implica que $y \in (G \cdot y)^\circ$ e daí que as órbitas $G \cdot y$ são abertas em $I_{\mathfrak{g}}(x)$. Porém, o complementar de uma órbita é uma união de órbitas. Assim, $G \cdot x$ é aberto e fechado (e $\neq \emptyset$) no conjunto conexo $I_{\mathfrak{g}}(x)$, mostrando que $G \cdot x = I_{\mathfrak{g}}(x)$. \square

Corolário 5.17 *Em geral as órbitas dos grupos não conexos são uniões de variedades integrais maximais de $\Delta_{\mathfrak{g}}$.*

Demonstração: De fato, a órbita $G_0 \cdot x$ da componente da identidade é $I_{\mathfrak{g}}(x)$. Então,

$$G \cdot x = \bigcup_{g \in G} gG_0 \cdot x = \bigcup_{g \in G} gI_{\mathfrak{g}}(x) = \bigcup_{g \in G} I_{\mathfrak{g}}(gx).$$

□

O próximo objetivo é fazer a identificação de uma órbita $G \cdot x$ com o espaço homogêneo G/G_x . Conforme foi visto no capítulo 2 a aplicação $\psi_x : G/G_x \rightarrow G \cdot x$ definida por $\psi_x(gG_x) = gx$ é bijetora. Essa aplicação é contínua e diferenciável em relação à estrutura quociente, uma vez que $\psi_x \circ \pi = \phi_x$ onde $\phi_x(g) = gx$ é a aplicação parcial da ação $\phi : G \times M \rightarrow M$. Como a órbita $G \cdot x$ é uma subvariedade quase-regular, ϕ_x é diferenciável a valores em $G \cdot x$. Da proposição 5.7, segue que ψ_x também é diferenciável.

Proposição 5.18 *A aplicação $\psi_x : G/G_x \rightarrow G \cdot x$ é um difeomorfismo.*

Demonstração: Como ψ_x é diferenciável e bijetora, basta verificar que ela é um difeomorfismo local, o que é equivalente a que sua diferencial seja bijetora em todo ponto. Como $\psi_x \circ \pi = \phi_x$ a imagem da diferencial da ψ em $gG_x \in G/G_x$ coincide com a imagem da diferencial $(d\phi_x)_g$. Pela observação acima esta última é formada pelos vetores $\tilde{X}(gx)$, isto é, a imagem é $\Delta_{\mathfrak{g}}(g)$. Como $G \cdot x$ é variedade integral da distribuição, segue que $d\psi_x$ é sobrejetora em todo ponto. Então, essas diferenciais são bijetoras pois as dimensões de G/G_x e $G \cdot x$ coincidem com $\dim G - \dim G_x$. □

Um caso particular coberto por esta proposição é o da ação transitiva, quando existe uma única órbita, que é a própria variedade M . Nesse caso $\psi_x : G/G_x \rightarrow M$ é um difeomorfismo. Nesse caso os espaços tangentes $T_z M$, $z \in M$, coincidem com $\Delta_{\mathfrak{g}}(z)$, o que significa que todo vetor tangente $v \in T_z M$ é da forma $v = \tilde{X}(z)$ para algum $X \in \mathfrak{g}$.

Por fim, vale o seguinte resultado sobre ações transitivas da componente conexa da identidade.

Proposição 5.19 *Suponha que a ação de G em M é transitiva e seja C uma componente conexa de M . Então, a restrição da ação de G à sua componente conexa da identidade G_0 é uma ação transitiva de G_0 em C .*

Demonstração: Antes de mais nada, a restrição a G_0 de fato define ações nas componentes conexas de M , pois se $g \in G_0$, então $g(C)$ está contido numa componente conexa de M , por continuidade da ação. Como $g(C)$ e $1(C)$ estão necessariamente na mesma componente conexa, segue que $g(C) \subset C$.

Dado $x \in C$ a órbita G_0x é uma subvariedade própria de C . Como a ação de G é transitiva, $C \subset Gx$, o que implica que $C \subset \bigcup_{g \in G} G_0(gx)$ (já que $C \subset \bigcup_{g \in G} \{gx\}$). No entanto, para todo $g \in G$, $G_0(gx) = (gG_0g^{-1})gx = g(G_0x)$, já que G_0 é subgrupo normal. Portanto, $C \subset \bigcup_{g \in G} g(G_0x)$. Essa união é no máximo enumerável, uma vez que isso ocorre com a quantidade de componentes conexas de G . Pelo teorema de categorias, segue que pelo menos um dos conjuntos $g(G_0x)$ é aberto. Mas, eles esses conjuntos são difeomorfos entre si. Portanto, G_0x é aberto em C o que pela proposição anterior mostra que $G_0x = C$. \square

5.3 Fibrados

5.3.1 Fibrados principais

Definição 5.20 Um fibrado principal $P(M, G)$ (ou simplesmente $P \rightarrow M$) se constitui de

- P o espaço total,
- M a base do fibrado e
- G o grupo estrutural.

A relação entre eles é dada por:

1. G age livremente à direita em P : $(p, a) \mapsto pa$, $p \in P$, $a \in G$.
2. O espaço das órbitas dessa ação é M . Isso significa que existe uma aplicação sobrejetora

$$\pi : P \longrightarrow M$$

tal que as órbitas de G são os conjuntos $\pi^{-1}\{x\}$, $x \in M$.

3. P é localmente trivial no sentido em que para todo $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e uma aplicação bijetora

$$\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G,$$

que é da forma

$$\psi(p) = (\pi(p), \phi(p))$$

onde $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ é uma aplicação que satisfaz

$$\phi(pa) = \phi(p)a \tag{5.5}$$

para todo $p \in \pi^{-1}(U)$ e $a \in G$.

O fibrado $P \rightarrow M$ é dito *fibrado topológico* se os espaços envolvidos são espaços topológicos e as aplicações são contínuas (e homeomorfismos quando bijetoras). O fibrado principal é de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, se os espaços envolvidos são variedades diferenciáveis de classe \mathcal{C}^k (em particular G deve ser grupo de Lie) e as aplicações envolvidas são diferenciáveis de classe \mathcal{C}^k (e difeomorfismos no caso das bijeções). Nesse caso a projeção $\pi : P \rightarrow M$ torna-se uma submersão, pois através do difeomorfismo ψ ela se identifica com a projeção na primeira coordenada $U \times G \rightarrow U$.

As fibras do fibrado principal são denotadas por $P_x = \pi^{-1}\{x\}$, $x \in M$, ou $P_p = \pi^{-1}\{\pi(p)\}$, $p \in P$.

Exemplos: .

1. O produto $M \times G$ é um fibrado principal com grupo estrutural G , cuja ação à direita é $R_h(x, g) = (x, g)h = (x, gh)$. Em particular, um grupo G pode ser visto como fibrado principal em que a base se reduz a um ponto $M = \{x\}$. Esse produto é chamado de *fibrado trivial*.
2. Seja M uma variedade diferenciável e TM seu fibrado tangente. O fibrado *fibrado das bases* ou *fibrado dos referenciais* de M é o conjunto BM de todas as bases de TM . Isto é, um elemento p de BM é uma base

$$\{f_1, \dots, f_n\} \tag{5.6}$$

de algum espaço tangente T_xM , $x \in M$. De forma equivalente, $p \in BM$ pode ser visto como uma aplicação linear inversível (referencial) $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_xM$, $x \in M$. Dada a aplicação p , o conjunto

$$\{p(e_1), \dots, p(e_n)\},$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n , é uma base de $T_x M$. Vice-versa, a base (5.6) determina a aplicação $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ dada por

$$p(x_1, \dots, x_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n.$$

A projeção $BM \rightarrow M$ associa a $p\mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ o ponto $x \in M$, de tal forma que a fibra BM_x é o conjunto dos referenciais de $T_x M$.

O grupo $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ age à direita em BM por

$$(p, g) \rightarrow pg = p \circ g,$$

com $p \in BM$ e $g \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$. Essa ação é livre pois os elementos de BM são transformações lineares inversíveis ($p \circ g = p$ se e só se $g = 1$) e transitiva nas fibras pois dada a transformação linear $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ as demais são da forma $q = p \circ g$ para algum $g \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$. Essa construção define BM como um fibrado principal de grupo estrutural $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ e base M . A condição de trivialização local se obtém tomando cartas de M . Através das cartas se obtém para todo $x \in M$ uma vizinhança U e campos de vetores X_1, \dots, X_n definido em U (campos coordenados) que são linearmente independentes em todo ponto de U , esse fibrado é localmente trivial (os campos definem seções de BM). Essas seções são suficientes para garantir que BM é localmente trivial e tem uma estrutura de variedade diferenciável (veja a discussão abaixo).

3. Denote por $B_k(n)$ o conjunto formado pelas transformações lineares injetoras

$$p : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

(os elementos de $B_k(n)$ se identificam aos conjuntos de k elementos linearmente independentes de \mathbb{R}^n ou ainda às das matrizes $n \times k$ de posto k .)

O grupo $\text{GL}(k, \mathbb{R})$ age em $B_k(n)$ por multiplicação à direita de matrizes. Essa ação é livre pois os elementos de $B_k(n)$ são transformações lineares injetoras.

O quociente por essa ação à direita é a Grassmanniana $\text{Gr}_k(n)$ dos subespaços de dimensão k de \mathbb{R}^n . De fato, as imagens das aplicações lineares em $B_k(n)$ são subespaços de dimensão k de \mathbb{R}^n . Isso define uma aplicação

$$p \in B_k(n) \longmapsto \text{imp} \in \text{Gr}_k(n),$$

cujas fibras coincidem com as órbitas de $\text{Gl}(k, \mathbb{R})$. De fato, se p e $q = pa$ são dois elementos numa mesma órbita então as imagens de p e q coincidem. Por outro lado, se as imagens de p e q coincidem então é possível escrever $p^{-1}q$ onde p^{-1} denota a inversa de p como aplicação de \mathbb{R}^k sobre sua imagem. Então $p^{-1}q \in \text{Gl}(k, \mathbb{R})$ e como $q = p(p^{-1}q)$, isso mostra que dois elementos com mesma imagem estão numa mesma órbita de $\text{Gl}(k, \mathbb{R})$.

Por essa construção, fica definido o fibrado principal $B_k(n) (\text{Gr}_k(n), \text{Gl}(k, \mathbb{R}))$ com grupo estrutural $\text{Gl}(k, \mathbb{R})$.

O fato de que esse fibrado é localmente trivial pode ser visto diretamente, construindo seções locais, ou indiretamente olhando esse fibrado como um fibrado associado do fibrado $\text{Gl}(n, \mathbb{R}) (\text{Gr}_k(n), P)$ obtido da ação transitiva de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ em $\text{Gl}_k(n)$.

No caso em que $k = 1$, a Grassmanniana é o espaço projetivo \mathbb{P}^{n-1} . Nesse caso $B_k(n)$ é nada mais nada menos que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ e a projeção

$$\mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

é a identificação canônica das retas de \mathbb{R}^n .

4. Como variação do exemplo anterior considere, ao invés de todas as bases de um subespaço de dimensão k , somente as bases ortonormais (em relação a um produto interno fixado em \mathbb{R}^n). Isso fornece a variedade de Stiefel $\text{St}_k(n)$ que é constituída pelos conjuntos linearmente independentes de \mathbb{R}^n , com k elementos, que são ortonormais. De forma equivalente, $p \in \text{St}_k(n)$ pode ser visto como uma transformação linear

$$p : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que é uma isometria entre os produtos internos canônicos de \mathbb{R}^k e de \mathbb{R}^n . Ou ainda, pode-se pensar $p \in \text{St}_k(n)$ como uma matriz $n \times k$. A condição de ser isometria se traduz aqui pela condição

$$p^t p = 1$$

onde como sempre p^t significa a transposta da matriz e 1 é a matriz identidade $k \times k$. A projeção

$$\text{St}_k(n) \longrightarrow \text{Gr}_k(n)$$

dada pela imagem de um elemento define um fibrado principal com grupo estrutural $O(k)$.

No caso em que $k = 1$, $St_k(n)$ é a esfera S^{n-1} e a projeção

$$S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

é dada por identificação de antípodas na esfera.

5. Seja M uma variedade e \widetilde{M} seu recobrimento universal. A aplicação canônica de recobrimento $\widetilde{M} \rightarrow M$ define um fibrado principal cujo grupo estrutural é o grupo fundamental de M .

□

A condição de trivialidade local na definição de um fibrado principal $P \rightarrow M$ é para que P seja um feixe bem organizado de grupos (ou grupos de Lie no caso diferenciável).

Essa condição também está ligada à idéia básica da definição de variedade diferenciável. Esta é feita tomando as cartas e o ponto principal é o tipo de condição que deve satisfazer as funções de mudança de coordenadas (de cartas, isto é, $\alpha_1 \alpha_2^{-1}$ onde α_1 e α_2 são cartas da variedade). Por exemplo o grau de diferenciabilidade de uma variedade é determinado pelo grau de diferenciabilidade dessas funções de mudanças de coordenadas.

De forma análoga, um fibrado principal também pode ser definido como uma variedade em que as funções de mudança de coordenadas pertencem a uma determinada classe de transformações. Essa afirmação está mais ou menos implícita na seguinte discussão:

Seja $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ uma trivialização local como previsto na definição e $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ a segunda coordenada de ψ . O conjunto

$$\psi^{-1}\{(x, 1) : x \in M\}$$

é uma subvariedade em $\pi^{-1}(U)$ e como a primeira coordenada de ψ é a projeção sobre M , essa subvariedade cruza cada fibra $\pi^{-1}\{x\}$, $x \in U$, em um único ponto. Chame esse ponto de $\sigma(x)$. Então $\sigma : U \rightarrow P$ é uma *seção local* de P , isto é, satisfaz $\pi(\sigma(x)) = x$. Por definição de ϕ , tem-se que $\phi(\sigma(x)) = 1$ e devido a (5.5) ϕ é dada a partir de σ por

$$\phi(\sigma(x)a) = \phi(\sigma(x))a = a$$

com $a \in G$ e portanto $\sigma(x)a$ percorrendo toda a fibra sobre x . Como ψ é completamente determinada por ϕ , ela é também determinada por σ . De forma explícita,

$$\psi(\sigma(x)a) = (x, \phi(\sigma(x)a)) = (x, a), \quad (5.7)$$

o que mostra que a existência da seção local garante a existência da trivialização.

Sejam $\psi_1 : \pi^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times G$ e $\psi_2 : \pi^{-1}(U_2) \rightarrow U_2 \times G$ duas trivializações locais tais que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Use as notações ϕ_1 e ϕ_2 para as segundas coordenadas e σ_1 e σ_2 para as seções correspondentes.

Como $\sigma_1(x)$ e $\sigma_2(x)$ pertencem à mesma fibra, para cada $x \in U_1 \cap U_2$ existe $\theta(x) \in G$ tal que

$$\sigma_2(x) = \sigma_1(x)\theta(x).$$

Isso define uma função $\theta : U_1 \cap U_2 \rightarrow G$, que fornece a mudança de coordenadas $\psi_1\psi_2^{-1}$. De fato, por (5.7),

$$\psi_2^{-1}(x, a) = \sigma_2(x)a$$

e portanto

$$\psi_1\psi_2^{-1}(x, a) = \psi_1(\sigma_2(x)a) = \psi_1(\sigma_1(x)\theta(x)a) = (x, \theta(x)a),$$

isto é, a mudança de coordenadas é nada mais nada menos que multiplicação à esquerda por $\theta(x)$. Por essa razão a função θ é chamada de *função de transição* entre as trivializações ψ_1 e ψ_2 (nessa ordem).

A função de transição fornece a mudança de coordenadas entre duas trivializações, mas não as trivializações propriamente ditas. Apesar disso, é possível reconstruir o fibrado se forem dadas funções de transição compatíveis da seguinte forma:

Seja ψ_3 uma terceira trivialização com domínio U_3 que intercepta $U_1 \cap U_2$. Denote por θ_{ij} a função de transição entre ψ_i e ψ_j (nessa ordem). Então

- $\psi_1\psi_2^{-1}(x, a) = (x, \theta_{12}(x)a)$
- $\psi_2\psi_3^{-1}(x, a) = (x, \theta_{23}(x)a)$
- $\psi_3\psi_1^{-1}(x, a) = (x, \theta_{31}(x)a)$

Compondo as duas primeiras se obtém a terceira. A composta é

$$\psi_1\psi_2^{-1}\psi_2\psi_3^{-1} = \psi_1\psi_2^{-1}(x, \theta_{23}(x)a) = (x, \theta_{12}\theta_{23}(x)a),$$

que comparada com a terceira fornece

$$\theta_{31}(x) = \theta_{12}(x)\theta_{23}(x). \quad (5.8)$$

Assumindo essa relação é possível reconstruir o fibrado a partir das funções de transição.

Teorema 5.21 *Sejam M uma variedade e G um grupo de Lie. Suponha que existam aplicações $\theta : U \rightarrow G$ com U aberto de M de tal forma que seus domínios cubram M e tal que para cada três dessas aplicações cujos domínios se interceptam a condição (5.8) seja satisfeita. Então, existe um único (a menos de isomorfismo) fibrado principal P com grupo estrutural G e com trivializações com funções de transição dadas pelas aplicações a valores em G .*

5.3.2 Fibrados associados

Os ingredientes que entram na definição de um fibrado associado são um fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ e uma ação à esquerda do grupo estrutural G num espaço F .

O grupo G age à direita no produto $P \times F$ por $g(p, v) = (pg, g^{-1}v)$, $g \in G$ e $(p, v) \in P \times F$. Essa ação determina uma relação de equivalência em $P \times F$ em que $(p, v) \sim (q, w)$ se, e só se, existe $g \in G$ tal que $q = pg$ e $w = g^{-1}v$. A classe de equivalência do par $(p, v) \in P \times F$ é denotada por $p \cdot v$ ou por $[p, v]$.

O conjunto E das classes de equivalência de \sim é denominado de *fibrado associado* a P com *fibra tipo* F e base M . Esse fibrado associado é denotado por $E = P \times_G F$. As seguintes observações justificam a terminologia empregada.

1. Se $(p, v) \sim (q, w)$ então p e q estão na mesma fibra de P . Portanto, a aplicação $\pi_E : P \times_G F \rightarrow M$ definida por $\pi_E(p \cdot v) = \pi(p)$ é bem definida, o que torna $E = P \times_G F$ um fibrado sobre M .

As fibras de $E \rightarrow M$ são denotadas por $E_x = \pi^{-1}\{x\}$, $x \in M$, ou $E_\xi = \pi_E^{-1}\{\pi_E(\xi)\}$, $\xi = p \cdot v \in E$.

2. Dado $p \in P$ os pares (p, v) e (p, w) são equivalentes se, e só se, $v = w$. De fato, $(p, v) \sim (p, w)$ se existe $a \in G$ tal que $p = pa$ e $w = a^{-1}v$. Como a ação de G em P é livre, segue que $a = 1$ e, portanto, $w = v$. Em outras palavras, fixando $p \in P$ cada classe de equivalência $p \cdot v \in P \times_G F$ é determinado por um único $v \in F$.
3. Cada $p \in P$ determina uma bijeção

$$v \in F \longmapsto p \cdot v \in E_x \quad x = \pi(p). \quad (5.9)$$

De fato, pelo item anterior essa aplicação é injetora. Por outro lado, um elemento de E_x tem a forma $q \cdot w$ com $q \in P_p$. Então, $q = pa$, $a \in G$, o que implica que $q \cdot w = pa \cdot w = paa^{-1} \cdot aw = p \cdot aw$ tem a forma $p \cdot v$, mostrando que a aplicação (5.9) é sobrejetora.

Normalmente se usa a mesma letra p para indicar essa bijeção, o que justifica a notação $p \cdot v$ para a classe de (p, v) .

A bijeção do último item acima significa que os elementos de P parametrizam as fibras do fibrado associado $E \rightarrow M$, isto é, cada $p \in P$ parametriza a fibra E_x , $x = \pi(p)$ pela fibra tipo F . Dois elementos p e q na mesma fibra fornecem diferentes parametrizações, que mudam de acordo com a ação de G em F . De fato, se $q = pa$, $a \in G$, então $q \cdot v = pa \cdot v = p \cdot av$. Portanto, a bijeção definida por q se obtém daquela definida por p compondo com a ação de $a \in G$.

Os fibrados associados admitem trivializações locais herdadas das trivializações do fibrado principal. De fato, seja $\chi : U \rightarrow P$ uma seção local de P . Então, a aplicação $\psi_\chi : U \times F \rightarrow \pi_E^{-1}(U)$ definida por $(x, v) \mapsto \chi(x) \cdot v$ é uma bijeção, o que trivializa o fibrado sobre U . Se χ_1 é outra seção local então na intersecção dos domínios das seções vale $\chi_1(x) = \chi(x) a(x)$ com $a(x) \in G$. Portanto, $\chi_1(x) \cdot v = \chi(x) \cdot av$ e se ψ_{χ_1} é a trivialização correspondente a χ_1 então ψ_{χ_1} e ψ_χ estão relacionadas por

$$\psi_\chi^{-1} \circ \psi_{\chi_1}(x, v) = (x, av). \quad (5.10)$$

Essa aplicação leva fibra em fibra e a aplicação entre as fibras é proveniente da ação de G .

No contexto dos fibrados diferenciáveis não é difícil construir uma estrutura de variedade diferenciável num fibrado associado, a partir dessas trivializações locais:

Proposição 5.22 *Seja $\pi : P \rightarrow M$ um fibrado principal diferenciável e suponha que ação de G em F seja diferenciável. Então, $P \times_G F$ é uma variedade diferenciável tal que a projeção $\pi_E : P \times_G F \rightarrow M$ é uma submersão. Além do mais as fibras E_x são subvariedades fechadas e mergulhadas e as parametrizações $v \in F \mapsto p \cdot v \in E_x$, $x = \pi(p)$, são difeomorfismos.*

Demonstração: De fato, tomando seções locais $\chi : U \rightarrow P$ as trivializações descritas acima mudam de acordo com as aplicações diferenciáveis $(x, v) \mapsto (x, a(x)v)$. Essas trivializações fornecem, portanto, um atlas diferenciável para $P \times_G F$.

A projeção π_E é uma submersão, pois na identificação local do fibrado com $U \times F$ ela se identifica à projeção na primeira coordenada. Isso mostra que as fibras são subvariedades fechadas e mergulhadas. Por fim, tomando cartas locais de E como produtos do tipo $U \times F$ se vê que as parametrizações por elementos de P são difeomorfismos. \square

Exemplos: .

1. Dada uma variedade diferenciável M , com $\dim M = n$, o fibrado das bases BM foi construído acima, como referenciais do fibrado tangente TM . O grupo estrutural de BM é $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$. Reciprocamente, TM se obtém de BM identificando-o como o fibrado associado $BM \times_{\text{Gl}(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$, construído a partir da ação linear canônica de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n . De fato, existe uma bijeção, quase que tautológica, entre TM e $BM \times_{\text{Gl}(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$, que é definida, associando à classe de $(p, v) \in BM \times \mathbb{R}^n$ o vetor tangente $p(v) \in T_x M$, $x = \pi(p)$ (onde $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$, vem da definição de BM). Essa aplicação é bem definida pelo fato de que o fibrado associado foi construído a partir da ação canônica de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ em \mathbb{R}^n . De fato, se (p, v) e $(q, w) = (pa, a^{-1}v)$ pertencem à mesma classe de equivalência então $q(w) = pa(a^{-1}v) = pv$.
2. A construção acima de TM se generaliza aos fibrados vetoriais. Seja $P(M, G)$ um fibrado principal e $\rho : G \rightarrow \text{Gl}(V)$ uma representação de G no espaço vetorial V . Então, G atua à esquerda em V . O fibrado associado obtido a partir dessa ação é denotado por $E = P \times_\rho V$. Este é *fibrado vetorial* no sentido em que i) é composto de uma aplicação $\pi : E \rightarrow M$; ii) cada fibra tem estrutura de espaços vetorial (obtida através das bijeções $v \mapsto p \cdot v$, $p \in P$); iii) existem trivializações locais

$U \times V \rightarrow \pi^{-1}(U)$, que se transformam umas nas outras por aplicações que levam fibras em fibras e são lineares nas fibras, como segue da fórmula (5.10).

Se $\dim V < \infty$ e P é um fibrado diferenciável então $P \times_{\rho} V$ é uma variedade diferenciável. No entanto, a construção feita acima continua valendo para representações bem mais gerais que as representações de dimensão finita.

Qualquer fibrado vetorial (isto é, $E \rightarrow M$, satisfazendo as três condições acima) pode ser construído como um fibrado associado. Isso é feito definindo o fibrado das bases BE de $E \rightarrow M$, da mesma forma que foi feito acima para BM , pelos isomorfismos lineares $p : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$, $k = \dim E_x$. Então, $E \rightarrow M$ se obtém como fibrado associado de BE .

3. Se M é uma variedade diferenciável então os fibrados tensoriais de M são obtidos como fibrados associados de BM . Por exemplo, o fibrado co-tangente T^*M é o fibrado associado $BM \times_{\rho^*} (\mathbb{R}^n)^*$ obtido através da representação canônica dual ρ^* : se $g \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ e $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$ é um funcional linear então $\rho^*(g)(\alpha) = \alpha \circ g^{-1}$.

□

Dois casos particulares de fibrados associados merecem atenção especial. Esses casos serão apresentados nas proposições a seguir.

Proposição 5.23 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal e G/H um espaço homogêneo de G . O subgrupo H age à direita em P . Denote por P/H o conjunto das órbitas dessa ação. Então, P/H se identifica ao fibrado associado $P \times_G G/H$.*

Demonstração: Denote por $x_0 = 1H$ a origem de G/H . Um elemento de P/H é uma órbita à direita pH , $p \in P$. Defina a aplicação que a $pH \in p/H$ associa a classe $p \cdot x_0 \in P \times_G G/H$. Sobre esta aplicação valem as seguintes afirmações:

1. está bem definida pois se $q = ph \in pH$ então $q \cdot x_0 = ph \cdot x_0 = p \cdot hx_0 = p \cdot x_0$.
2. É injetora pois se $q \cdot x_0 = p \cdot x_0$ então $q = pg$ e $x_0 = g^{-1}x_0$. A última igualdade significa que $g^{-1} \in H$ e, portanto, $g \in H$. Da primeira igualdade segue que $qH = pH$.

3. É sobrejetora pois dado $q \cdot x \in P \times_G G/H$ então existe $g \in G$ tal que $g^{-1}x = x_0$. Isso implica que $p \cdot x_0 = q \cdot x$ se $p = qg^{-1}$, mostrando que $q \cdot x$ está na imagem da aplicação.

Em suma, $pH \mapsto p \cdot x_0$ é uma bijeção, identificando P/H com $P \times_G G/H$.
□

A identificação obtida na proposição anterior se escreve em coordenadas locais de forma bastante simples: se $U \times G \approx \pi^{-1}(U)$ é uma trivialização local de P então obtém-se uma ação à direita de H em $U \times G$, que por definição (veja (5.5)) é dada por $(z, g)h \mapsto (z, gh)$, $z \in U$, $g \in G$ e $h \in H$. O conjunto das órbitas em $\pi^{-1}(U)$ se identifica então a $U \times G/H$. Por outro lado, os elementos de $\pi_E^{-1}(U)$ podem ser escritos como $(z, 1) \cdot x$ com $z \in U$ e $x \in G/H$ (pois $(z, 1) \in U \times G$ se identifica a um elemento de $\pi^{-1}(U)$). No fibrado trivial $U \times G$ a bijeção entre P/H e $P \times_G G/H$ é dada por

$$(z, gH) \in (U \times G)/H \longmapsto (z, 1) \cdot gH \in (U \times G) \times_G G/H.$$

Através dessa descrição local da identificação $P/H \approx P \times_G G/H$, segue de imediato que ela é um difeomorfismo no caso de fibrados diferenciáveis.

Proposição 5.24 *Suponha que $P(M, G)$ seja um fibrado principal e $\phi : G \rightarrow H$ seja um homomorfismo de grupos (de Lie). O grupo G age à esquerda em H por $(g, h) \mapsto \phi(g)h$. Denote por $P \times_\phi H$ o fibrado associado obtido dessa ação. Então, $P \times_\phi H$ é um fibrado principal com grupo estrutural H .*

Demonstração: Defina a ação à direita de H em $P \times_\phi H$ por $(p \cdot h)h_1 = p \cdot (hh_1)$. Essa ação é livre pois se $p \cdot (hh_1) = p \cdot h$ então existe $g \in G$ tal que $p = pg$ e $hh_1 = \phi(g)^{-1}h$. A primeira igualdade implica que $g = 1$. Substituindo isso na segunda igualdade, segue que $hh_1 = h$, isto é, $h_1 = 1$. Além do mais, a ação é transitiva nas fibras pois $p : h \in H \mapsto p \cdot h$ é uma bijeção entre H e a fibra. Para concluir que essa ação à direita define $P \times_\phi H \rightarrow M$ só falta verificar as condições de trivialização local. Mas, isso segue das trivializações dos fibrados associados em geral. □

5.4 Espaços homogêneos e fibrados

Seja G um grupo. Se $H \subset G$ é um subgrupo então H age à direita em G . Essa ação é livre, as órbitas são as classes laterais gH e o espaço das órbitas

é G/H . No caso em que G é grupo de Lie e H é um subgrupo fechado então a partir da construção feita anteriormente da estrutura de variedade diferenciável em G/H , prova-se que a projeção canônica $\pi : G \rightarrow G/H$ define um fibrado principal diferenciável.

Proposição 5.25 *Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Então, $G \rightarrow G/H$ é um fibrado principal com grupo estrutural H .*

Demonstração: Falta apenas verificar a condição de trivialidade local. Para isso serão usadas as notações envolvidas no teorema 5.6. Foram construídas cartas locais em G/H como a restrição de π aos conjuntos da forma ge^V . Se V_g denota a imagem de uma carta dessas então os elementos de V_g são da forma lH com $l = ge^Y$, $Y \in V$. Então, a aplicação $lH \mapsto ge^Y$ é uma seção diferenciável de $G \rightarrow G/H$, concluindo a demonstração. \square

Sejam G um grupo e $H_1 \subset H_2$ subgrupos de G . Então, existe uma aplicação sobrejetora natural $G/H_1 \rightarrow G/H_2$, que associa à classe lateral gH_1 a classe lateral gH_2 , que contém gH_1 . Essa aplicação é de fato a projeção de um fibrado associado, como mostra a seguinte construção.

Proposição 5.26 *Sejam G um grupo de Lie e $H_1 \subset H_2$ subgrupos fechados de G . Então G/H_1 é um fibrado sobre G/H_2 com a projeção canônica $G/H_1 \rightarrow G/H_2$, dada por $gH_1 \mapsto gH_2$. Se H_1 é normal em H_2 então $G/H_1 \rightarrow G/H_2$ é um fibrado principal.*

Demonstração: Pela proposição 5.23 o fibrado associado $G \times_{H_2} H_2/H_1$ se identifica ao quociente da ação à direita de H_1 em G , isto é, se identifica a G/H_1 . Ainda pela proposição 5.23 a projeção $\pi : G/H_1 \rightarrow G/H_2$ leva a classe lateral à direita gH_1 em G/H_1 na projeção de g em G/H_2 , isto é, $\pi(gH_1) = gH_2$. Por fim, se H_1 é normal em H_2 então a ação de H_2 em H_2/H_1 provém do homomorfismo canônico $H_2 \rightarrow H_2/H_1$. Portanto, a última afirmação segue da proposição 5.24. \square

5.5 Exercícios

1. Sejam G um grupo de Lie conexo e H um subgrupo fechado. Seja também K um subgrupo compacto e suponha que $\dim K - \dim(K \cap H) = \dim G/H$. Mostre que K age transitivamente em G/H .

2. Dados um grupo de Lie G e dois subgrupos $H, L \subset G$ com H fechado, mostre que L tem uma órbita aberta em G/H e, se só se, existe $g \in G$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \text{Ad}(g)\mathfrak{l}$, onde $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ e \mathfrak{l} são as álgebras de Lie de G, H e L , respectivamente.
3. Prove que $\Delta_{\mathfrak{g}}$ é integrável, mostrando que a aplicação $\psi_x : G/H_x \rightarrow M$, definida por $\psi_x(gH_x) = gx$ é uma imersão, que define uma variedade integral de $\Delta_{\mathfrak{g}}$, que passa por x .
4. Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Mostre que se $f : G/H \rightarrow M$ é uma submersão então $f \circ \pi : G \rightarrow M$ também é submersão, onde $\pi : G \rightarrow G/H$ é a projeção canônica.
5. Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Suponha que H contenha um subgrupo L , que é fechado e normal em G . Mostre que existe um difeomorfismo $\phi : G/H \rightarrow (G/L)/L$ tal que para todo $g \in G$ e $x \in G/H$, vale $\phi(gx) = \pi(g)\phi(x)$, onde $\pi : G \rightarrow G/L$ é a projeção canônica.
6. Um “flag” de subespaços de \mathbb{R}^n é uma família de subespaços $f = (V_1 \subset \cdots \subset V_k)$ de \mathbb{R}^n . Dada uma sequência finita de inteiros $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_k\}$ com $0 < r_1 \leq \cdots \leq r_k \leq n$, denote por $\mathbb{F}^n(\mathbf{r})$ o conjunto de todos os flags $f = (V_1 \subset \cdots \subset V_k)$ com $\dim V_i = r_i$.
 Mostre que $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ age transitivamente em $\mathbb{F}^n(\mathbf{r})$, estabelecendo uma bijeção entre $\mathbb{F}^n(\mathbf{r})$ com o espaço homogêneo $\text{Gl}(n, \mathbb{R})/Q$, onde Q é algum grupo de isotropia. Determine Q e mostre que Q é fechado. Conclua que $\mathbb{F}^n(\mathbf{r})$ é uma variedade diferenciável.
 Mostre que os subgrupos $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ e $\text{SO}(n)$ agem transitivamente em $\mathbb{F}^n(\mathbf{r})$ e escreva $\mathbb{F}^n(\mathbf{r})$ como espaços homogêneos $\text{Sl}(n, \mathbb{R})/P$ e $\text{SO}(n)/M$. Conclua que $\mathbb{F}^n(\mathbf{r})$ é compacto. (Sugestão: para $\text{SO}(n)$ use o exercício 1.)
7. Faça o mesmo que o exercício anterior para o caso dos flags complexos, isto é, formados por subespaços de \mathbb{C}^n . Substitua $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ por $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$, $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ por $\text{Sl}(n, \mathbb{C})$ e $\text{SO}(n)$ por $\text{SU}(n)$.
8. Seja β uma base ordenada de \mathbb{C}^n . A subálgebra de Borel de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ definida por β é a subálgebra \mathfrak{b}_{β} cujos elementos são as transformações lineares, que escritas na base β são triangulares superiores. Denote

por $\mathbb{B} = \{\mathfrak{h}_\beta : \beta \text{ é base}\}$ o conjunto das subálgebras de Borel. Mostre que $\text{Sl}(n, \mathbb{C})$ age transitivamente em \mathbb{B} e verifique que, como espaço homogêneo, \mathbb{B} coincide com $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}^n(\mathbf{r})$ onde $\mathbf{r} = (1, 2, \dots, n-1)$.

9. Use ações transitivas de grupos para construir topologias e estruturas diferenciáveis nos seguintes conjuntos:
 - (a) Conjunto das bases de \mathbb{R}^n .
 - (b) Conjunto das bases ordenadas de \mathbb{R}^n .
 - (c) Conjunto das bases ortonormais de \mathbb{R}^n (em relação a um produto interno fixado).
 - (d) Conjunto dos produtos internos de \mathbb{R}^n .
 - (e) Conjunto das estruturas complexas em \mathbb{R}^{2n} (isto é, aplicações lineares $J : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tais que $J^2 = -\text{id}$).
 - (f) Conjunto das formas simpléticas em \mathbb{R}^{2n} (isto é, formas bilineares anti-simétricas e não degeneradas).
 - (g) Conjunto das formas quadráticas em \mathbb{R}^n de assinatura dada.
 - (h) Conjunto dos elementos conjugados a um elemento x de um grupo de Lie G (isto é, $\{gxg^{-1} : g \in G\}$).
10. Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Mostre que se G/H é simplesmente conexo então H é conexo.
11. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Duas subálgebras $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ são ditas G -conjugadas se existe $g \in G$ tal que $\text{Ad}(g)\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$. Construa uma estrutura diferenciável no conjunto das subálgebras G -conjugadas a uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ dada.
12. Dados um grupo de Lie G e $H \subset G$ um subgrupo fechado, suponha que G/H seja compacto. Denote por \mathfrak{h} a álgebra de Lie de H e mostre que o conjunto das subálgebras G -conjugadas a \mathfrak{h} (veja o exercício anterior) é compacto.
13. Este exercício apresenta um caso em que a decomposição do lema 5.1 é global. Seja $G = \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ e $K = \text{O}(n)$. Denote por \mathfrak{e} o espaço das matrizes simétricas $n \times n$. Mostre que a aplicação $\psi : \mathfrak{e} \times K \rightarrow G$ dada por $\psi(X, k) = e^X k$ é um difeomorfismo. Faça o mesmo com $G = \text{Sl}(n, \mathbb{R})$ e $K = \text{SO}(n)$.

14. Use a fórmula $g_*\widetilde{X} = \widetilde{(\text{Ad}(g)X)}$ para mostrar, diretamente a partir da definição de colchete de Lie, que a aplicação $X \mapsto \widetilde{X}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, isto é, $\widetilde{[X, Y]} = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$.
15. Descreva as órbitas das representações adjunta e co-adjunta do grupo de Heisenberg, isto é, o grupo das matrizes 3×3 da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Descreva as órbitas da representação adjunta do grupo $\text{Sl}(2, \mathbb{R})$.
17. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} e denote por \mathfrak{g}^* o dual de \mathfrak{g} . Considere a representação co-adjunta de G em \mathfrak{g}^* . Tome $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ e verifique que a álgebra de isotropia da órbita $G \cdot \alpha$ de α é dada por

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \alpha \circ \text{ad}(X) = 0\}.$$

Fixando $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ defina a forma bilinear anti-simétrica $\omega_\alpha(X, Y) = \alpha[X, Y]$, $X, Y \in \mathfrak{g}$. Mostre que se $\mathfrak{e} \subset \mathfrak{g}$ é um subespaço complementar a \mathfrak{g}_α , isto é, $\mathfrak{g} = \mathfrak{e} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$, então a restrição de ω_α a \mathfrak{e} é não degenerada (isto é, se $\omega_\alpha(X, Y) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{e}$ então $X = 0$). Conclua que as órbitas da representação co-adjunta têm dimensão par.

18. Sejam G um grupo de Lie e $\phi : G \rightarrow G$ um automorfismo de G . Mostre que o conjunto dos pontos fixos $H = \{x \in G : \phi(x) = x\}$ é um subgrupo de Lie de G .

Suponha, por outro lado, que ϕ é involutiva, isto é, $\phi^2 = \text{id}$ e considere a aplicação $xH \in G/H \mapsto x\phi(x^{-1}) \in G$. Mostre que essa aplicação é uma imersão injetora.

19. Seja $G \times M \rightarrow M$ uma ação analítica do grupo de Lie G (analítico) na variedade analítica conexa M . Denote por k o máximo das dimensões das órbitas de G . Mostre que o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $\dim(G \cdot x) = k$ é um conjunto aberto e denso de M .
20. Mostre que se $G \times M \rightarrow M$ é uma ação diferenciável do grupo de Lie G na variedade diferenciável M então a função $x \mapsto \dim(G \cdot x)$ é semi-contínua inferiormente, isto é, para todo $b \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{x \in M : \dim(G \cdot x) > b\}$ é aberto.

21. Dada uma ação diferenciável $G \times M \rightarrow M$ do grupo de Lie G na variedade diferenciável M , seja $G \cdot x$ uma órbita de G . Verifique que o fecho $\overline{G \cdot x}$ é um conjunto G -invariante e, portanto, uma união de G -órbitas. Mostre que, para todo $y \in \overline{G \cdot x}$, sua órbita $G \cdot y$ satisfaz $\dim(G \cdot y) \leq \dim(G \cdot x)$.
22. Seja $G \times M \rightarrow M$ uma ação diferenciável do grupo de Lie G na variedade diferenciável M . Defina em M a relação de equivalência dada pelas G -órbitas: $x \sim y$ se, e só se, $y = gx$ para algum $g \in G$. Assuma que a ação de G é livre e construa, no espaço das órbitas M/\sim , uma estrutura de variedade diferenciável, cuja topologia é a topologia quociente e tal que a projeção canônica $M \rightarrow M/\sim$ é uma submersão.
23. Dada uma ação diferenciável $G \times M \rightarrow M$ tome $x \in M$ e seja G_x o grupo de isotropia. Mostre que a aplicação $g \in G_x \mapsto (dg)_x$ é uma representação de G_x em $T_x M$. Encontre sua representação infinitesimal, em termos dos campos \tilde{X} (para isso use o exercício 3 do apêndice A).
24. Sejam G um grupo de Lie e $H_1 \subset H_2$ subgrupos fechados. Mostre que se G/H_2 e H_2/H_1 são compactos então G/H_1 é compacto. Faça o mesmo substituindo “compacto” por “conexo”.
25. Dados um grupo de Lie G e um subgrupo fechado $\Gamma \subset G$ suponha que $\rho : \Gamma \rightarrow H$ seja um homomorfismo diferenciável no grupo de Lie H . A partir do fibrado principal $G \rightarrow G/\Gamma$, construa, como na proposição 5.24, o fibrado principal $G \times_\rho H$ sobre G/Γ . Mostre que se ρ se estende a um homomorfismo diferenciável $G \rightarrow H$ então $G \times_\rho H$ é um fibrado trivial.