27. Existe uma probabilidade igual a 95% de que a vida x de uma bateria (medida em meses) satisfaça a relação

$$\left|\frac{x-24}{4}\right| < 1{,}96$$

Qual o intervalo de variação de x?

28. Existe uma probabilidade igual a 90% de que as vendas x de uma empresa, no próximo ano, satisfaçam a relação $\left|\frac{x-15}{3}\right| < 1{,}65$, em que as vendas são dadas em milhares de unidades. Qual o intervalo de variação de x?

Parte 2

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL

Capítulo 3

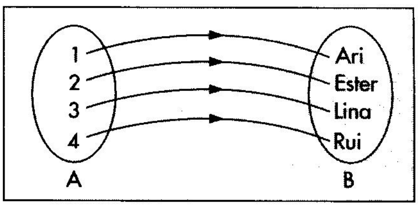
Funções

3.1 Introdução

Na Matemática, como em outras ciências, muitas vezes queremos estabelecer uma relação ou correspondência entre dois conjuntos.

Suponhamos, por exemplo, que temos dois conjuntos: um conjunto de números, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, e um conjunto de quatro pessoas, $B = \{\text{Ari, Rui, Lina, Ester}\}$. Uma relação de A em B pode ser aquela que ao número 1 associa o nome Ari, ao 2 associa Ester, ao 3 associa Lina e ao 4, Rui. Esquematicamente, usamos a seguinte representação chamada de diagrama de flechas (Figura 3.1).

Figura 3.1: Relação entre A e B.



Ou seja, aos números em ordem crescente associamos os nomes em ordem alfabética. Outra maneira de representar seria utilizando a notação de pares ordenados:

$$(1, \text{Ari}), \qquad (2, \text{Ester}), \qquad (3, \text{Lina}), \qquad (4, \text{Rui}).$$

Notemos que a correspondência estabelecida determina um conjunto de pares ordenados, que chamaremos:

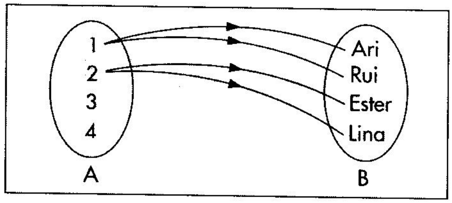
$$M = \{(1, \text{Ari}), (2, \text{Ester}), (3, \text{Lina}), (4, \text{Rui})\}.$$

É claro que esta não é a única relação que pode ser estabelecida entre os conjuntos A e B.

Vejamos outros exemplos. Façamos corresponder ao número 1 os indivíduos do sexo masculino e, ao número 2, os indivíduos do sexo feminino. Temos o diagrama da Figura 3.2, constituindo o conjunto:

$$N = \{(1, \text{Rui}), (1, \text{Ari}), (2, \text{Ester}), (2, \text{Lina})\}.$$

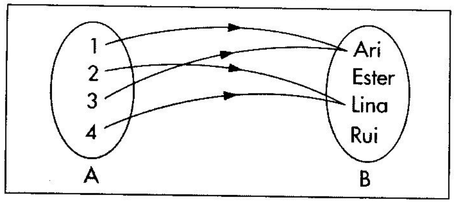
Figura 3.2: Relação entre A e B.



Uma terceira relação que podemos considerar é aquela que associa aos números ímpares o nome Ari e aos números pares o nome Lina. Teremos o diagrama da Figura 3.3, constituindo o conjunto:

$$P = \{(1, \text{Ari}), (2, \text{Lina}), (3, \text{Ari}), (4, \text{Lina})\}.$$

Figura 3.3: Relação entre A e B.



Notemos que os conjuntos M, N e P são formados por pares ordenados cujos primeiros elementos pertencem a A e cujos segundos elementos pertencem a B. Ou seja, todos são subconjuntos do produto cartesiano de A por B. Isto é:

$$M \subset A \times B, \quad N \subset A \times B \quad \text{e} \quad P \subset A \times B.$$

É possível determinar outras relações de A em B, mas todas serão subconjuntos de $A \times B$. Como $A \times B$ tem 16 elementos, e o número de subconjuntos de $A \times B$ é 2^{16}, podemos estabelecer, ao todo, 2^{16} relações de A em B. Assim, temos a seguinte definição formal:

S é uma relação de A em B se S for um subconjunto de $A \times B$.

Exemplo 3.1. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e seja a relação dada por:

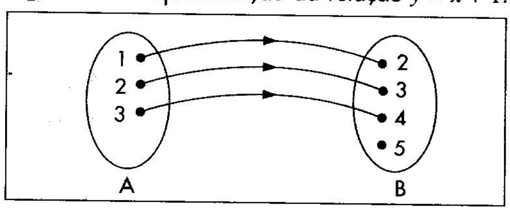
$$S = \{(x, y) \in A \times B \,|\, y = x + 1\}.$$

Teremos, então,

$$S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}.$$

Na Figura 3.4 temos a representação da relação por meio do diagrama de flechas.

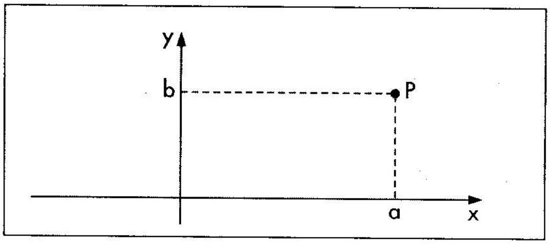
Figura 3.4: Representação da relação $y = x + 1$.



Quando os conjuntos A e B são numéricos, as relações são formadas por pares ordenados de números. Um par ordenado de números reais pode ser representado geometricamente por meio de dois eixos perpendiculares, sendo o horizontal chamado de eixo das abscissas, ou eixo x; e o vertical, de eixo das ordenadas ou eixo y.

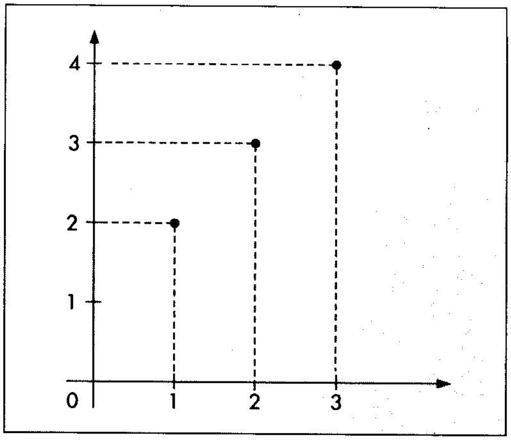
Um par ordenado (a, b) pode ser representado colocando-se a no eixo x, e b no eixo y, e traçando-se uma vertical por a e uma horizontal por b. O ponto P de intersecção dessas duas retas é a representação do par (a, b), conforme a Figura 3.5.

Figura 3.5: Representação geométrica do par ordenado (a, b).



Dessa forma, podemos representar geometricamente a relação S, conforme a Figura 3.6:

Figura 3.6: Representação da relação $y = x + 1$.



Exemplo 3.2. Considerando os conjuntos A e B do exemplo anterior, consideremos a relação

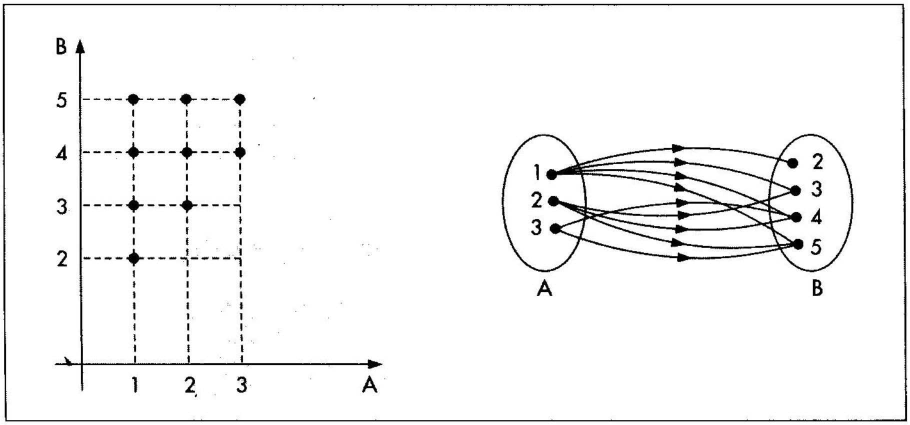
$$T = \{(x, y) \in A \times B \mid y > x\}.$$

Teremos:

$$T = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}.$$

O gráfico e o diagrama de flechas da relação estão ilustrados na Figura 3.7.

Figura 3.7: Gráfico e diagrama de flechas da relação $y > x$.



Exemplo 3.3. Considerando os mesmos conjuntos A e B do Exemplo 3.1, consideremos a relação

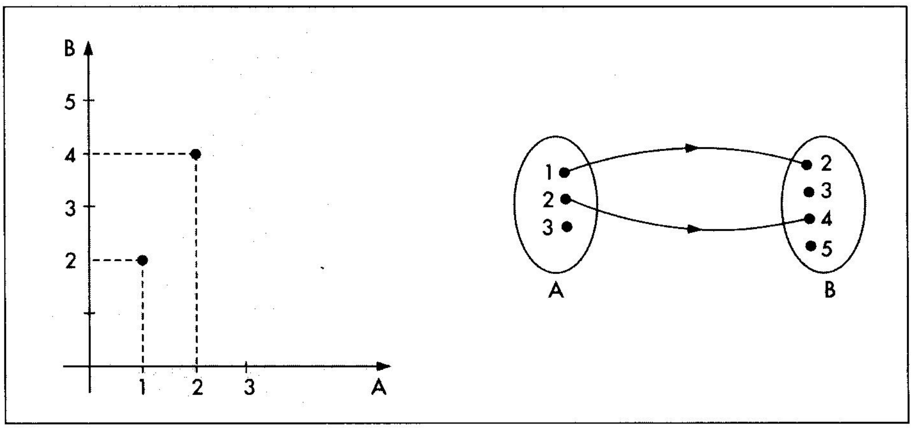
$$U = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}.$$

Teremos:

$$U = \{(1, 2), (2, 4)\}.$$

O gráfico e o diagrama de flechas encontram-se representados na Figura 3.8.

Figura 3.8: Gráfico e diagrama de flechas da relação $y = 2x$.



Definida uma relação S de A em B, podemos considerar dois novos conjuntos: o domínio da relação $D(S)$ e o conjunto imagem da relação $Im(S)$.

O domínio de S é o conjunto dos elementos $x \in A$ para os quais existe um $y \in B$ tal que $(x, y) \in S$. O conjunto imagem de S é o conjunto dos $y \in B$ para os quais existe um $x \in A$ tal que $(x, y) \in S$. Em outras palavras, o domínio é o conjunto dos elementos de A que possuem um correspondente em B dados pela relação.

É claro que $D(S)$ é um subconjunto de A, e $Im(S)$ é um subconjunto de B. Quando não houver possibilidade de confusão, o domínio e o conjunto imagem são indicados simplesmente por D e Im, respectivamente.

Exemplo 3.4. Os domínios e o conjunto imagem das relações dos exemplos anteriores são, respectivamente:

- Exemplo 3.1: $D(S) = \{1, 2, 3\}$ e $Im(S) = \{2, 3, 4\}$.
- Exemplo 3.2: $D(S) = \{1, 2, 3\}$ e $Im(S) = \{2, 3, 4, 5\}$.
- Exemplo 3.3: $D(S) = \{1, 2\}$ e $Im(S) = \{2, 4\}$.

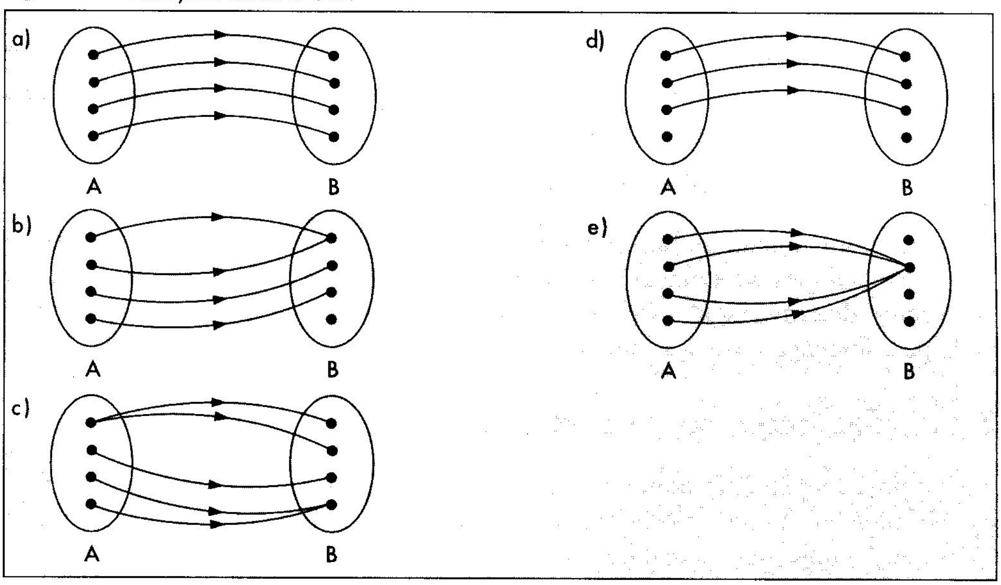
Exercícios

1. Sendo $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{3, 5, 8, 9\}$, escrever sob a forma de conjuntos as relações de A em B, com $x \in A$ e $y \in B$, dadas por:
   a) $x < y$
   b) $x \geqslant y$
   c) x é divisor de y
   d) $x = y$
   e) $y = x + 2$
2. Faça o gráfico e o diagrama de flechas de cada relação do exercício anterior.
3. Dê o domínio e o conjunto imagem de cada uma das relações do exercício 1.

3.2 O Conceito de Função

Consideremos os seguintes diagramas de flecha que representam relações de A em B (Figura 3.9):

Figura 3.9: Relações entre A e B.



Observemos que, entre essas relações, têm particular importância aquelas que obedecem à definição seguinte:

Uma relação f de A em B é uma função se e somente se:

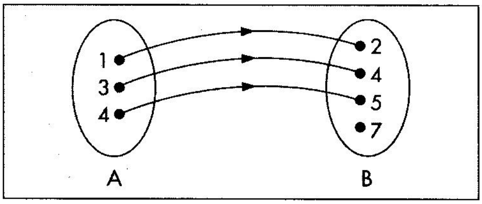
a) Todo elemento x pertencente a A tem um correspondente y pertencente a B definido pela relação, chamado imagem de x.
b) A cada x pertencente a A não podem corresponder dois ou mais elementos de B por meio de f.

Verificamos que as relações (a), (b), e (e) da Figura 3.9 são funções de A em B, ao passo que (c) não é função, pois a um dado x pertencente a A correspondem dois elementos de B; (d) também não é função, pois existe um elemento de A que não tem correspondente em B.

A imagem y também é habitualmente representada por $f(x)$ (lê-se f de x); x é chamada variável independente e y, de variável dependente.

Exemplo 3.5. Sejam $A = \{1, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 5, 7\}$ e a função que a cada $x \in A$ associa-se um $y \in B$ de modo que $y = x + 1$. Teremos o diagrama da Figura 3.10.

Figura 3.10: Diagrama da relação $y = x + 1$.



A imagem de 1 é 2, e representamos por $f(1) = 2$ (lê-se f de 1 é igual a 2).
A imagem de 3 é 4, e representamos por $f(3) = 4$ (lê-se f de 3 é igual a 4).
A imagem de 4 é 5, e representamos por $f(4) = 5$ (lê-se f de 4 é igual a 5).
A imagem dessa função pode ser representada por $y = x + 1$ ou ainda por $f(x) = x + 1$.

O domínio e o conjunto imagem são definidos da mesma forma que para uma relação qualquer. Portanto, nesse exemplo, temos:

$$D = \{1, 3, 4\} \quad \text{e} \quad Im = \{2, 4, 5\}.$$

Embora habitualmente se faça referência a uma função dando-se a sentença que a define, devemos lembrar que a função é um conjunto de pares ordenados. Assim, no Exemplo 3.5, é comum dizermos seja a função $f(x) = x + 1$, em vez de dizermos seja a função f definida pela sentença $y = x + 1$, em que $x \in A$ e $y \in B$.

3.3 Funções Reais de uma Variável Real

Se f é uma função com domínio em A e contra domínio em B, dizemos que f é uma função definida em A com valores em B. Se tanto A como B forem subconjunto dos reais, dizemos que f é uma função real de variável real

Exemplo 3.6. Seja a função dada pela sentença $f(x) = 2x$ sendo o domínio o conjunto $A = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ e $B = R$.

Assim:

$$f(1) = 2\ , f(2) = 4, f(3) = 6, ..., f(n) = 2n, ...$$

Portanto, o conjunto imagem é $Im = \{2, 4, 6, ...\ 2n, ...\}$, e sendo A e B subconjuntos de R, dizemos que f é uma função real de variável real. O gráfico é dado pela Figura 3.11, e podemos verificar que os pontos do gráfico estão alinhados.

Caso tivéssemos uma função definida pela mesma sentença $f(x) = 2x$, porém com domínio $A = R$, o gráfico seria formado por todos os pontos da reta da Figura 3.12.

Figura 3.11: Gráfico de $f(x) = 2x$ do Exemplo 3.6, em que $D = N^*$.

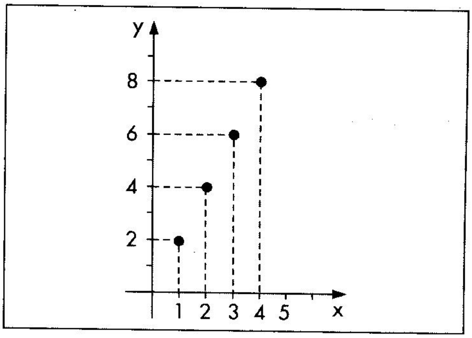
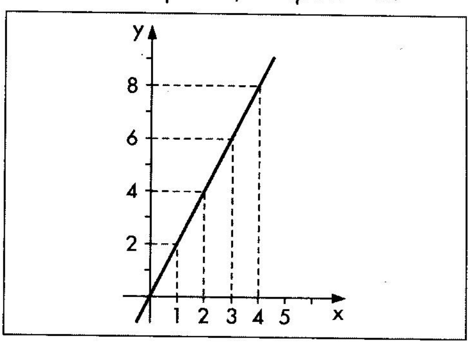


Figura 3.12: Gráfico de $f(x) = 2x$ do Exemplo 3.6, em que $D = R$.

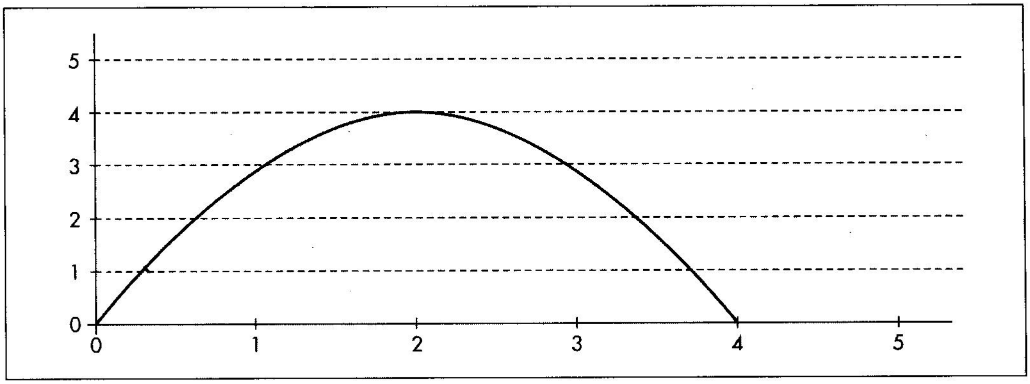


Exemplo 3.7. Existem diversos recursos computacionais, disponíveis hoje em dia, para a elaboração de gráficos de funções. Geralmente o recurso consiste em digitar os valores de x e os correspondentes valores de y, que o *software* gera o gráfico ponto a ponto.

Suponhamos, por exemplo, querer obter o gráfico da função $y = 4x - x^2$, no intervalo $[0, 4]$. Usando a planilha Excel, podemos gerar os valores de x a partir de 0 e com passo igual a 0,1 até atingirmos o valor 4 (isto é, atribuímos para x os valores: 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; ...; 4). Para cada valor de x obtemos, por meio da planilha, os correspondentes valores de y.

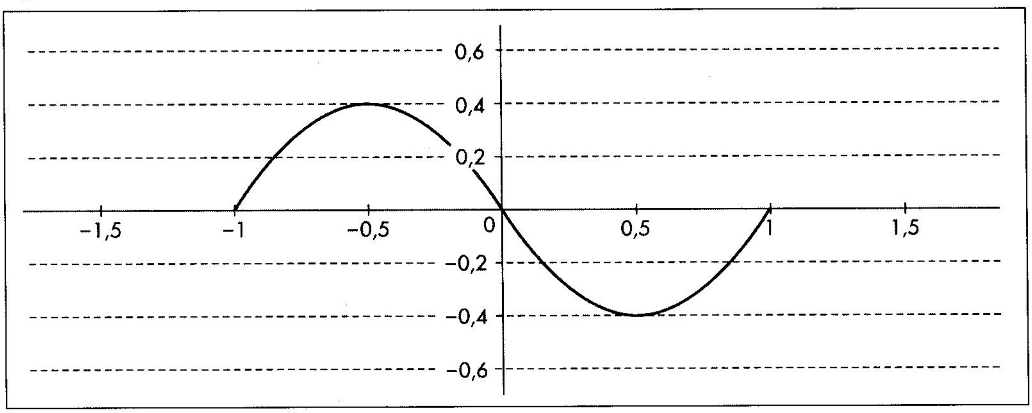
De posse das colunas com x e y, selecionamos, por meio do editor de gráficos, o gráfico de dispersão. Obtemos o gráfico da Figura 3.13:

Figura 3.13: Gráfico de $y = 4x - x^2$ usando o Excel.



Com procedimento análogo, podemos obter o gráfico da função $y = x^3 - x$, no intervalo $[-1, 1]$ (Figura 3.14).

Figura 3.14: Gráfico de $y = x^3 - x$ usando o Excel.



É importante observarmos que esse procedimento permite obter uma idéia do gráfico dentro de um intervalo de valores de x. Para termos uma idéia global do gráfico, em todo o domínio, precisamos estudar outros recursos que veremos mais para a frente.

Exemplo 3.8. Uma calculadora é vendida por \$ 200,00 a unidade. Sendo x a quantidade vendida, a receita de vendas será $200x$. Assim, podemos dizer que $R(x) = 200x$ é uma função que fornece para quantidade vendida (x) a receita correspondente. O domínio e o conjunto imagem são dados por:

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \text{ e } Im = \{0, 200, 400, 600, 800, \ldots\}.$$

Exercícios

4. Dada a função $f(x) = 7x - 3$, com $D = R$, obtenha:

a) $f(2)$
b) $f(6)$
c) $f(0)$
d) $f(-1)$
e) $f(\sqrt{2})$
f) $f\left(\frac{1}{2}\right)$
g) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$
h) $f(a + b)$

5. Dada a função $f(x) = 2x - 3$, obtenha:

a) $f(3)$
b) $f(-4)$
c) o valor de x tal que $f(x) = 49$
d) o valor de x tal que $f(x) = -10$

6. Dada a função $f(x) = x^2$, obtenha

a) $f(x_0)$
b) $f(x_0 + h)$
c) $f(x_0 + h) - f(x_0)$

7. Dada a função $f(x) = x^2 - 4x + 10$, obtenha os valores de x cuja imagem seja 7.

8. Dada a função $f(x) = mx + 3$, determine m sabendo-se que $f(1) = 6$.

9. Faça o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$, com domínio $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Qual o conjunto imagem?

10. Faça o gráfico da função $f(x) = x^2$, sendo $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Qual o conjunto imagem?

11. Qual o gráfico da função $f(x) = 3$, sendo $D = R$?

12. Esboce o gráfico da função f, de domínio $D = R$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

13. Uma livraria vende uma revista por \$ 5,00 a unidade. Seja x a quantidade vendida.

a) Obtenha a função receita $R(x)$.
b) Calcule $R(40)$.
c) Qual a quantidade que deve ser vendida para dar uma receita igual a \$ 700,00?

14. O custo de fabricação de x unidades de um produto é dado pela função $C(x) = 100 + 2x$.

a) Qual o custo de fabricação de 10 unidades?
b) Qual o custo de fabricação da décima unidade, já tendo sido fabricadas nove unidades?

15. Resolva o exercício 14 considerando a função custo $C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 24x^2 + 600x + 400$.

16. Chama-se custo médio de fabricação de um produto ao custo de produção dividido pela quantidade produzida. Indicando o custo médio correspondente a x unidades produzidas por $Cme(x)$, teremos: $Cme(x) = \frac{C(x)}{x}$.

O custo de fabricação de x unidades de um produto é $C(x) = 500 + 4x$.

a) Qual o custo médio de fabricação de 20 unidades?

b) Qual o custo médio de fabricação de 40 unidades?

c) Para que valor tende o custo médio à medida que x aumenta?

17. Em determinado país, o imposto de renda é igual a 10% da renda, para rendas até \$ 900,00. Para rendas acima de \$ 900,00, o imposto de renda é igual a \$ 90,00 (10% de \$ 900,00) mais 20% da parte da renda que excede \$ 900,00.

a) Qual o imposto de renda para uma renda de \$ 600,00?

b) Qual o imposto de renda para uma renda de \$ 1.200,00?

c) Chamando de x a renda e de y o imposto de renda, obtenha a expressão de y em função de x.

18. Em determinada cidade, a tarifa mensal de água é cobrada da seguinte forma: para um consumo de até 10m^3 mensais, a tarifa é um valor fixo de \$ 8,00. A parte consumida no mês entre 10m^3 e 20m^3 paga uma tarifa de \$ 1,00 por m^3, e o que exceder 20m^3 paga \$ 1,40 por m^3.

a) Calcule a tarifa de quem consome 2m^3 por mês.

b) Calcule a tarifa de quem consome 15m^3 por mês.

c) Calcule a tarifa de quem consome 37m^3 por mês.

d) Chamando de x o consumo mensal (em m^3) e de y a tarifa, obtenha a expressão de y em função de x .

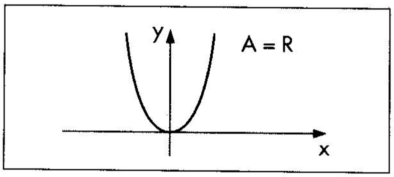
19. Um vendedor de assinaturas de uma revista ganha \$ 2.000,00 de salário fixo mensal, mais uma comissão de \$ 50,00 por assinatura. Sendo x o número de assinaturas vendidas por mês, expresse seu salário total S como função de x.

20. Um retângulo tem um perímetro igual a 40. Expresse a área do retângulo em função da medida x de um de seus lados.

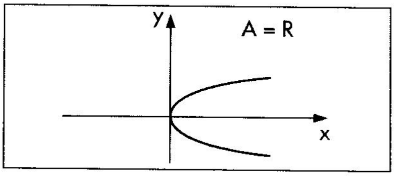
21. Um triângulo eqüilátero tem cada um de seus lados medindo x. Expresse a área do triângulo em função de x.

22. A seguir estão os gráficos de relações de A em R. Quais podem e quais não podem ser gráficos de funções?

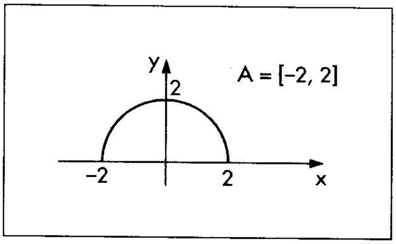
a)



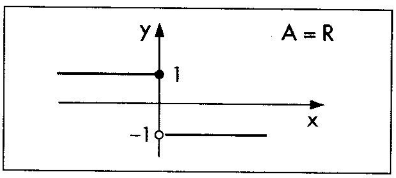
b)



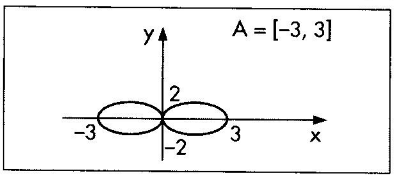
c)



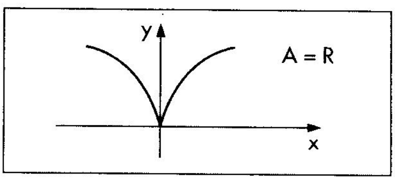
d)



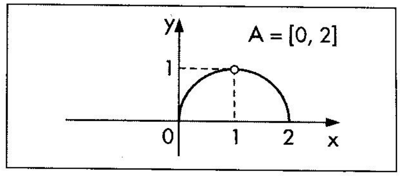
e)



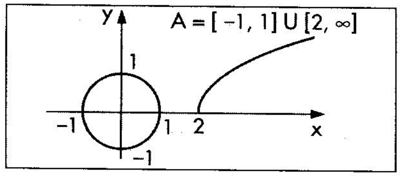
f)



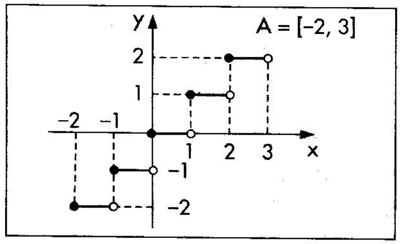
g)



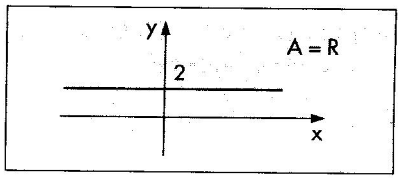
h)



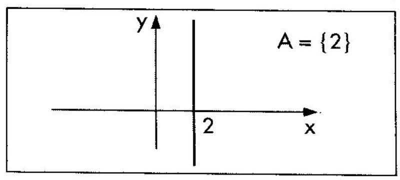
i)



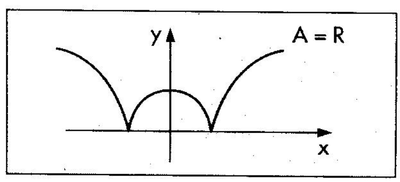
j)



k)



l)



3.4 Primeiras Normas Elementares para o Estudo de uma Função

Domínio

Quando temos uma função real de uma variável real, de A em B, sabemos que A é um subconjunto dos números reais. Nos exemplos dados anteriormente, a função era definida por uma sentença $y = f(x)$, e os conjuntos A e B eram especificados.

Nas situações em que não é mencionado o domínio, convenciona-se que ele seja formado por todos os valores reais de x para os quais exista imagem y.

Exemplo 3.9. Considere as funções:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$;

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$;

c) $f(x) = x^2 + 5x$.

Temos:

a) $D = R - \{3\}$, pois o valor $x = 3$ faz com que o denominador seja zero (não existe a fração);

b) $D = \{x \in R \mid x \geqslant 2\} = [2, \infty[$, pois para $x < 2$ o radicando é negativo e não existe a raiz quadrada;

c) $D = R$, pois nesse exemplo x pode ser qualquer valor real.

Observemos que em funções envolvendo situações práticas, o domínio é constituído de todos os valores reais de x para os quais tenha significado o cálculo da imagem. Assim, por exemplo, caso tenhamos uma função custo $C(x) = 400 + 3x$, os valores de x não podem ser negativos (não podemos ter quantidades negativas). Além disso, caso o produto seja indivisível (por exemplo, quando x é a quantidade de carros), o domínio é constituído apenas de números inteiros não negativos.

Interceptos

São os pontos de intersecção do gráfico de uma função com os eixos. Os pontos de intersecção com o eixo x têm coordenadas do tipo $(x, 0)$ e são chamados x–interceptos. Os pontos de intersecção com o eixo y têm coordenadas do tipo $(0, y)$ e são chamados de y–interceptos.

Exemplo 3.10. Vamos obter os pontos de intersecção do gráfico da função $y = (x^2 - 1)(x - 2)$ com os eixos x e y.

Temos:

- Intersecção com o eixo y.

Como o ponto procurado é da forma $(0, y)$, devemos fazer na função $x = 0$. Assim:

$$y = (0^2 - 1)(0 - 2) = 2.$$

Portanto o ponto procurado é $(0, 2)$.

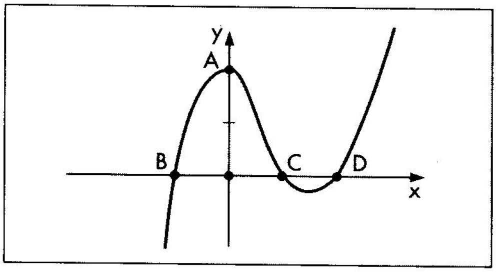
- Intersecção com o eixo x.

Como o ponto procurado é da forma $(x, 0)$, devemos fazer na função $y = 0$. Assim:

$$0 = (x^2 - 1)(x - 2) \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 2.$$

Portanto os pontos procurados são: (1, 0) , (–1, 0) e (2, 0).
O esboço do gráfico dessa função encontra-se na Figura 3.15.

Figura 3.15: Esboço do gráfico da função $y = (x^2 - 1)(x - 2)$.

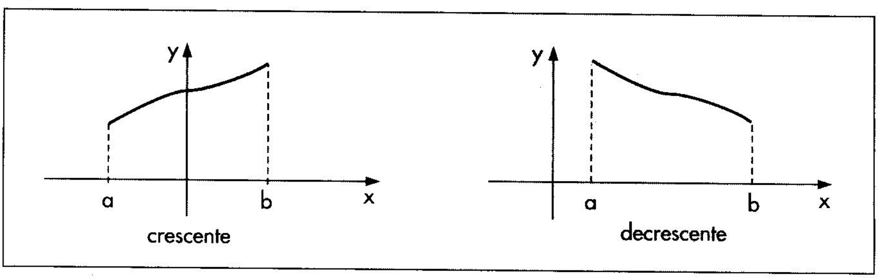


Funções Crescentes e Decrescentes

Dizemos que uma função f é crescente num intervalo $[a, b]$ se à medida que aumenta o valor de x, dentro do intervalo, as imagens correspondentes também aumentam. Em outras palavras, f é crescente num intervalo $[a, b]$ se para quaisquer valores x_1 e x_2 do intervalo, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

Analogamente, dizemos que uma função f é decrescente num intervalo $[a, b]$ se à medida que aumenta o valor de x, dentro do intervalo, as imagens correspondentes vão diminuindo. Em outras palavras, f é decrescente num intervalo $[a, b]$ se para quaisquer valores x_1 e x_2 do intervalo, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$. A Figura 3.16 ilustra essas duas situações.

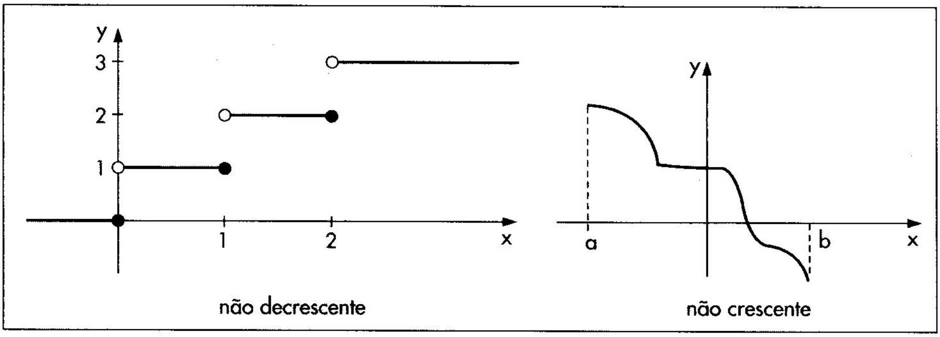
Figura 3.16: Funções crescente e decrescente.



Caso a função tenha a mesma imagem em todos os pontos de um intervalo $[a, b]$, dizemos que a função é constante naquele intervalo.

Uma função que seja crescente ou constante num intervalo é chamada não decrescente naquele intervalo; se uma função for constante ou decrescente num intervalo ela é chamada não crescente naquele intervalo. A Figura 3.17 ilustra funções não decrescentes e não crescentes.

Figura 3.17: Funções não decrescente e não crescente.



Pontos de Máximo e de Mínimo

Seja f uma função definida num domínio D. Dizemos que x_0 é um ponto de máximo relativo (ou simplesmente ponto de máximo) se existir um intervalo aberto A, com centro em x_0 tal que:

$$f(x) \leqslant f(x_0) \qquad \forall x \in A \cap D.$$

Em outras palavras, x_0 é um ponto de máximo relativo se as imagens de todos os valores de x pertencentes ao domínio, situados num intervalo centrado em x_0, forem menores ou iguais à imagem de x_0. A imagem $f(x_0)$ é chamada de valor máximo de f.

Analogamente dizemos que x_0 é um ponto de mínimo relativo (ou simplesmente ponto de mínimo) se existir um intervalo aberto A, com centro em x_0, tal que:

$$f(x) \geqslant f(x_0) \qquad \forall x \in A \cap D.$$

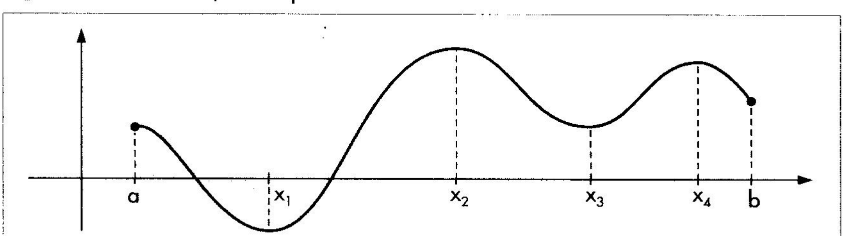
Em outras palavras, x_0 é um ponto de mínimo relativo se as imagens de todos os valores de x pertencentes ao domínio situados num intervalo centrado em x_0 forem maiores ou iguais à imagem de x_0. A imagem $f(x_0)$ é chamada de valor mínimo de f.

Assim, por exemplo, na função definida no intervalo $[a, b]$ e representada no gráfico da Figura 3.18, teremos:

Pontos de máximo: a, x_2, x_4.

Pontos de mínimo: x_1, x_3, b.

Figura 3.18: Ilustração de pontos de máximo e de mínimo.



Por outro lado, dizemos que x_0 é um ponto de máximo absoluto se

$$f(x) \leqslant f(x_0)\ \forall x \in D,$$

e x_0 é um ponto de mínimo absoluto se

$$f(x) \geqslant f(x_0)\ \forall x \in D.$$

Portanto, a diferença entre um ponto de máximo relativo e máximo absoluto é que o primeiro é um conceito vinculado às vizinhanças do ponto considerado, ao passo que o segundo é ligado a todo o domínio da função. A mesma diferença ocorre entre ponto de mínimo relativo e mínimo absoluto.

Na função representada na Figura 3.18, x_2 é ponto de máximo absoluto, e x_1 é ponto de mínimo absoluto.

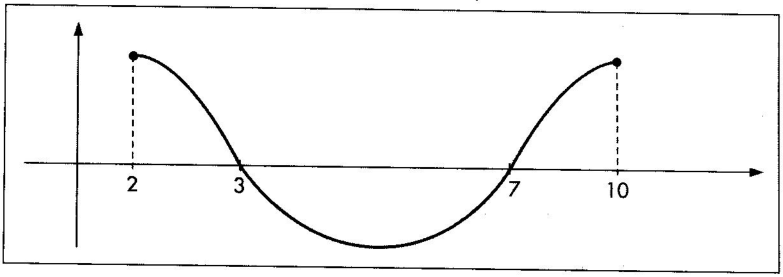
Estudo do Sinal de uma Função

Estudar o sinal de uma função significa obter os valores de x para os quais $y > 0$ ou $y < 0$ ou $y = 0$.

Desse modo, por exemplo, na função definida no intervalo [2, 10] e representada na Figura 3.19, teremos:

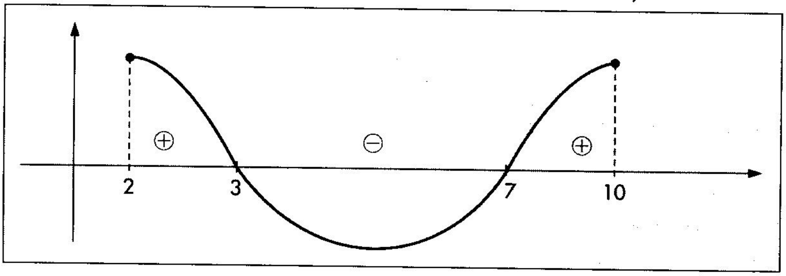
- $y > 0$ para $2 \leqslant x < 3$ ou para $7 < x \leqslant 10$;
- $y < 0$ para $3 < x < 7$;
- $y = 0$ para $x = 3$ ou $x = 7$.

Figura 3.19: Ilustração do sinal de uma função.



Simbolicamente representamos da forma indicada na Figura 3.20:

Figura 3.20: Representação simbólica do sinal de uma função.



Exercícios

23. Obtenha o domínio das seguintes funções:

a) $y = 2x + 7$

b) $y = \dfrac{1}{x-2}$

c) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x-3}$

d) $y = \sqrt{x}$

e) $y = \sqrt{x-2}$

f) $y = \sqrt{2-x}$

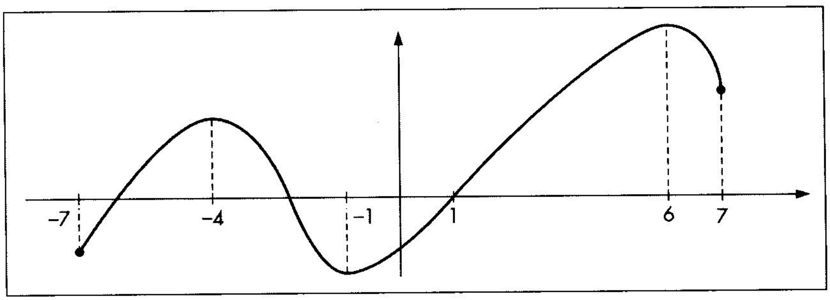
g) $y = \dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$

h) $y = \sqrt{2x-6} + \dfrac{3}{x}$

i) $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x-1}$

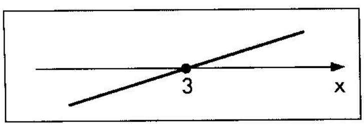
j) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-2}$

24. Obtenha os intervalos nos quais a função dada é crescente e nos quais é decrescente, indicando pontos de máximo e de mínimo para a figura a seguir:

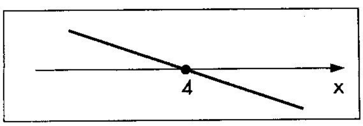


25. Estude o sinal das seguintes funções:

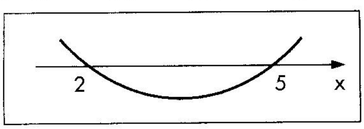
a)



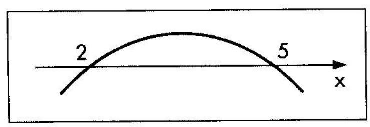
b)



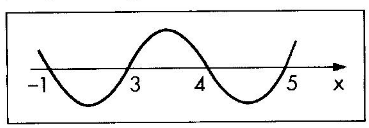
c)



d)



e)



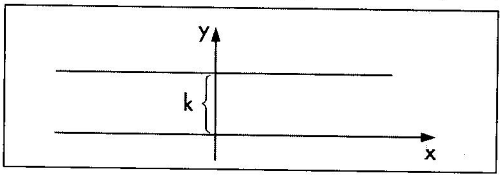
3.5 Principais Funções Elementares e suas Aplicações

Neste item procuraremos dar uma idéia geral das principais funções utilizadas nas áreas de administração, economia e finanças. Após o estudo de cada uma dessas funções, veremos algumas de suas aplicações.

3.5.1 Função Constante

É toda função do tipo $y = k$, em que k é uma constante real. Verifica-se que o gráfico dessa função é uma reta horizontal, passando pelo ponto de ordenada k (Figura 3.21).

Figura 3.21: Gráfico da função constante $y = k$.



3.5.2 Função do 1º Grau

Esse tipo de função apresenta um grande número de aplicações.

Uma função é chamada de função do 1º grau (ou função afim) se sua sentença for dada por $y = m \cdot x + n$, sendo m e n constantes reais com $m \neq 0$.

Verifica-se que o gráfico de uma função do 1º grau é uma reta. Assim, o gráfico pode ser obtido por meio de dois pontos distintos (pois dois pontos distintos determinam uma reta).

Exemplo 3.11. Vamos esboçar o gráfico da função $y = 2x + 1$.

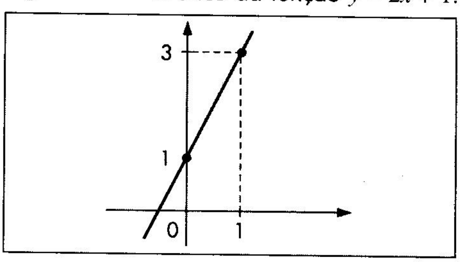
Atribuindo a x os valores 0 e 1, por exemplo, teremos:

$x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ assim temos o ponto $(0, 1)$;

$x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ assim temos o ponto $(1, 3)$.

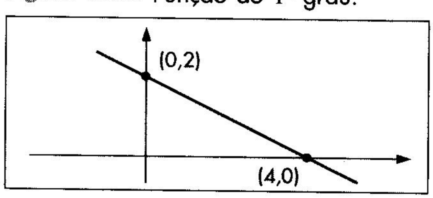
Dessa forma, a reta procurada passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(1, 3)$ e seu gráfico é o da Figura 3.22.

Figura 3.22: Gráfico da função $y = 2x + 1$.



Exemplo 3.12. Obtenhamos a função cujo gráfico é dado na Figura 3.23.

Figura 3.23: Função do 1º grau.



Seja $y = m \cdot x + n$ a função procurada. Então:

o ponto (0, 2) pertence ao gráfico, logo: $2 = m \cdot 0 + n \Rightarrow n = 2$;

o ponto (4,0) pertence ao gráfico, logo: $0 = m \cdot 4 + n \Rightarrow 4m + n = 0$;

tendo em conta que $n = 2$, obtemos: $4m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1/2$;

desta forma, a função procurada é $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

Observações

1) A constante n é chamada de coeficiente linear e representa, no gráfico, a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo y (Figura 3.24).

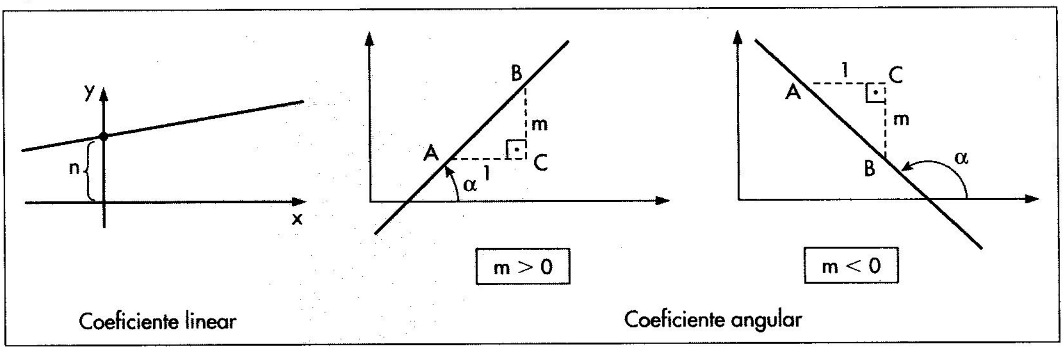
A justificativa para essa afirmação é feita lembrando que, no ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo y, a abscissa x vale zero; assim, o ponto de intersecção é da forma $(0, y)$, e, como ele pertence também ao gráfico da função, podemos substituir x por 0 na função $y = m \cdot x + n$. Teremos então:

$$y = m \cdot 0 + n \Rightarrow y = n.$$

Portanto o ponto de intersecção do gráfico com o eixo y tem ordenada n.

2) A constante m é chamada de coeficiente angular e representa a variação de y correspondente a um aumento do valor de x igual a 1, aumento esse considerado a partir de qualquer ponto da reta; quando $m > 0$, o gráfico corresponde a uma função crescente, e, quando $m < 0$, o gráfico corresponde a uma função decrescente (Figura 3.24).

Figura 3.24: Coeficiente linear e angular de uma reta.



A demonstração desta propriedade é a seguinte.

Seja x_1 a abscissa de um ponto qualquer da reta e seja $x_2 = x_1 + 1$. Sejam y_1 e y_2 as ordenadas dos pontos da reta correspondentes àquelas abscissas. Teremos

$$y_1 = m \cdot x_1 + n \tag{3.1}$$

e

$$y_2 = m \cdot x_2 + n. \tag{3.2}$$

Subtraindo membro a membro as relações (3.2) e (3.1), e tendo em conta que $x_2 = x_1 + 1$, obteremos

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \Rightarrow y_2 - y_1 = m.$$

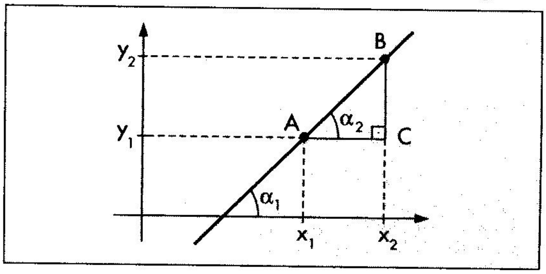
Assim, m corresponde à variação de y correspondente a uma variação de x igual a 1. Notemos ainda que, se $m > 0$, teremos $y_2 > y_1$ e conseqüentemente a função será crescente. Por outro lado, se $m < 0$ então $y_2 < y_1$ e conseqüentemente a função será decrescente. É fácil verificar no triângulo ABC da Figura 3.24 que $m = tg\alpha$, em que α é o ângulo de inclinação da reta em relação ao eixo x.

3) Conhecendo-se dois pontos de uma reta $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, o coeficiente angular m é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3.3}$$

A demonstração de (3.3) é feita considerando-se o triângulo ABC da Figura 3.25.

Figura 3.25: Interpretação do coeficiente angular.



Temos:

$$tg\alpha_2 = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Como $\alpha_2 = \alpha_1$, então $tg\alpha_2 = tg\alpha_1$ e $m = tg\alpha_1$, segue que $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

A demonstração é análoga se na Figura 3.25 considerarmos uma reta de uma função decrescente.

4) Conhecendo um ponto $P(x_0, y_0)$ de uma reta e seu coeficiente angular m, a função correspondente é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0). \tag{3.4}$$

De fato, seja $Q(x, y)$ um ponto genérico da reta, distinto de P (Figura 3.26).