UDESC Joinville
Universidade do Estado de Santa Catarina
Centro de Ciências Tecnológicas - CCT
Departamento de Matemática
Professora: Elisandra Figueiredo

Operações - leis de composição interna

Definição 1 *Sendo E um conjunto não vazio, toda aplicação $f : E \times E \to E$ recebe o nome de operação sobre E (ou em E) ou lei de composição interna sobre E (ou em E).*

Notação: Uma operação f sobre E associa a cada par (x, y) de $E \times E$ em elemento de E que será denotado por $x * y$. Assim, $x * y$ é uma forma de indicar $f(x, y)$. Diremos também que E é um conjunto munido da operação $*$. O elemento $x * y$ é chamado composto de x e y pela operação $*$.

Outras notações usuais para indicar uma operação sobre E :

- *Notação aditiva:* neste caso o símbolo da operação é $+$, a operação é chamada *adição*, o composto $x + y$ é chamado *soma* e os termos x e y são as parcelas.
- *Notação multiplicativa:* neste caso o símbolo da operação é $\cdot$ ou a simples justaposição dos elementos, a operação é chamada *multiplicação*, o composto $x \cdot y$ ou xy é chamado *produto* e os termos x e y são os fatores.
- Outros símbolos utilizados para operação genéricas são: $\triangle$, $\top$, $\perp$, $\times$, $\otimes$, $\oplus$ etc.

Exemplo 1 *São exemplos de leis de composição interna.*

(a) A aplicação $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x, y) = x + y$, ou seja, f associa a cada par (x, y) de números naturais a sua soma $x + y$. A aplicação f é conhecida como **operação de adição** *sobre $\mathbb{N}$. A operação de adição pode ser estendida para $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.*

(b) A aplicação $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x, y) = x \cdot y$, ou seja, f associa a cada par (x, y) de números naturais o seu produto $x \cdot y$. A aplicação f é conhecida como **operação de multiplicação** *sobre $\mathbb{N}$. A operação de multiplicação pode ser estendida para $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.*

(c) A aplicação $h : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, em que $\mathcal{P}(E)$ indica o conjunto das partes de E, tal que $h(X, Y) = X \cap Y$, ou seja, h associa a cada par de conjuntos (X, Y) a sua interseção $X \cap Y$. Essa aplicação é conhecida como operação de interseção sobre E.

(d) A aplicação $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tal que $f(x, y) = x^y$, é operação de **potenciação** *sobre $\mathbb{N}^*$. Observe que esta operação não pode ser estendida para $\mathbb{Z}^*$.*

(e) A aplicação $f : \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ tal que $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$, é operação de **divisão** *sobre $\mathbb{Q}^*$. Observe que esta operação pode ser estendida para $\mathbb{R}^*$ e $\mathbb{C}^*$. Lembrando que*

$$\frac{a + bi}{x + yi} = \frac{a + bi}{x + yi} \cdot \frac{x - yi}{x - yi} = \frac{ax + by + (bx - ay)i}{x^2 + y^2}.$$

(f) A aplicação $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tal que* $f(x, y) = x - y$, *é operação de* **subtração** *sobre* $\mathbb{Z}$. *Observe que esta operação pode ser estendida para* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$.

(g) A aplicação $f : E \times E \to E$, *em que* $E = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *representa o conjunto das matrizes do tipo* $m \times n$ *com elementos reais, tal que* $f(x, y) = x + y$ *é a operação de* **adição** *sobre* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(h) A aplicação $f : E \times E \to E$, *em que* $E = M_n(\mathbb{R})$ *representa o conjunto das matrizes quadradas de ordem* n *com elementos reais, tal que* $f(x, y) = x \cdot y$ *é a operação de* **multiplicação** *sobre* $M_n(\mathbb{R})$.

(i) A aplicação $\varphi : E \times E \to E$, *em que* $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *representa o conjunto das funções de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$, *tal que* $\varphi(f, g) = f \circ g$ *é a operação de* **composição** *sobre* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Propriedades das operações

Seja $*$ uma lei de composição interna em E. Esta lei pode apresentar as seguintes propriedades:

1. **Propriedade associativa**

   Definição 2 *Dizemos que* $*$ *satisfaz a propriedade associativa se*

   $$x * (y * z) = (x * y) * z,$$

   quaisquer que sejam $x, \ y, \ z \in E$.

   Exemplo 2 *Determine quais das leis de composição interna do Exemplo 1 são associativas.*

2. **Propriedade comutativa**

Definição 3 *Dizemos que $*$ satisfaz a propriedade comutativa se*

$$x * y = y * x,$$

quaisquer que sejam $x,\ y \in E$.

Exemplo 3 *Determine quais das leis de composição interna do Exemplo 1 são comutativas.*

3. **Elemento neutro**

Definição 4 *Se existe $e \in E$ tal que $e * x = x$, para todo $x \in E$, dizemos que e é um elemento neutro à esquerda para $*$.*

Se existe $e \in E$ tal que $x * e = x$, para todo $x \in E$, dizemos que e é um elemento neutro à direita para $*$.

Se e é elemento neutro à esquerda e à direita para a operação $*$, dizemos simplesmente que e é elemento neutro para essa operação.

Exemplo 4 *Das leis de composição interna do Exemplo 1, temos:*

- *o elemento neutro das adições em $\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ é:*

- *o elemento neutro das multiplicações em $\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ é:*

- *o elemento neutro da adição em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é:*

- *o elemento neutro da multiplicação em $M_n(\mathbb{R})$ é:*

- *o elemento neutro da composição em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ é:*

- *o elemento neutro da interseção de conjuntos das partes de E é:*

- *sobre o elemento neutro da potenciação em* $\mathbb{N}^*$:

- *sobre o elemento neutro da divisão em* $\mathbb{R}^*$:

- *sobre o elemento neutro da subtração em* $\mathbb{Z}$:

Proposição 1 *Se a operação* $*$ *sobre* E *tem um elemento neutro* e*, então ele é único.*

4. **Elementos simetrizáveis**

Definição 5 *Seja* $*$ *uma operação sobre* E *que tem elemento neutro* e*. Dizemos que* $x \in E$ *é um elemento simetrizável para esta operação se existir* $x' \in E$ *tal que*

$$x' * x = e = x * x'.$$

O elemento x' é chamado simétrico de x para operação $*$.

Quando a operação é uma adição, o simétrico de x também é chamado oposto de x e indicado por $-x$.

Quando a operação é uma multiplicação, o simétrico de x também é chamado inverso de x e indicado por x^{-1}.

Notação: Se $*$ é uma operação sobre E com elemento neutro e, então indica-se por $U_*(E)$ o conjunto dos elementos simetrizáveis de E para a operação $*$.

Exemplo 5 *Das leis de composição interna do Exemplo 1 que possuem elemento neutro, temos:*

- $U_+(\mathbb{N}) =$
- $U_+(\mathbb{Z}) =$
- $U_.(\mathbb{Z}) =$
- $U_.(\mathbb{R}) =$

- $U_{+}(M_n(\mathbb{R})) =$
- $U_{.}(M_n(\mathbb{R})) =$
- $U_{\circ}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) =$

Observe que $U_*(E) \neq \emptyset$, pois necessariamente $e \in U_*(E)$.

Proposição 2 *Seja $*$ uma aplicação sobre E que é associativa e tem elemento neutro e.*

(i) *Se um elemento $x \in E$ é simetrizável, então o simétrico de x é único.*

(ii) *Se $x \in E$ é simetrizável, então seu simétrico também é e $(x')' = x$.*

(iii) *Se $x,\ u \in E$ são simetrizáveis, então $x * y$ é simetrizável e $(x * y)' = y' * x'$.*

5. Elementos regulares

Definição 6 *Seja $*$ uma operação sobre E.*

- *Dizemos que um elemento $a \in E$ é regular (ou simplificável) à esquerda em relação à operação $*$ se, para quaisquer $x,\ y \in E$ tais que $a * x = a * y$, vale $x = y$.*
- *Dizemos que um elemento $a \in E$ é regular (ou simplificável) à direita em relação a operação $*$ se, para quaisquer $x,\ y \in E$ tais que $x * a = y * a$, vale $x = y$.*
- *Se $a \in E$ é um elemento regular à esquerda e à direita para a operação $*$, dizemos simplesmente que a é regular para esta operação.*

Notação: Se $*$ é uma operação sobre E, indica-se por $R_*(E)$ o conjunto dos elementos regulares de E para a operação $*$.

Exemplo 6 *Das leis de composição interna do Exemplo 1, temos:*

- $R_+(\mathbb{N}) =$
- $R_+(\mathbb{Z}) =$
- $R_.(\mathbb{Z}) =$
- $R_.(\mathbb{R}) =$
- $R_+(M_n(\mathbb{R})) =$
- $R_.(M_n(\mathbb{R})) =$
- $R_\circ(\mathbb{R}^\mathbb{R}) =$

Observe que se E possui elemento neutro e, então $e \in R_*(E)$ e, portanto, $R_*(E) \neq \emptyset$.

Proposição 3 *Se a operação $*$ sobre E é associativa, tem elemento neutro e e um elemento $a \in E$ é simetrizável, então a é regular.*

6. **Propriedade distributiva**

Definição 7 *Sejam $*$ e $\triangle$ duas operações sobre E.*

- *Dizemos que $\triangle$ é distributiva à esquerda relativamente a $*$ se:*

$$x\triangle(y * z) = (x\triangle y) * (x\triangle z),$$

quaisquer que sejam $x,\ y,\ z \in E$.

- *Dizemos que $\triangle$ é distributiva à direita relativamente a $*$ se:*

$$(y * z)\triangle x = (y\triangle x) * (z\triangle x),$$

quaisquer que sejam $x,\ y,\ z \in E$.

- *Quando $\triangle$ é distributiva à esquerda e à direita de $*$, dizemos simplesmente que $\triangle$ é distributiva em relação a $*$.*

Exemplo 7 *(a) A multiplicação de $\mathbb{Z}$ é distributiva em relação à adição em $\mathbb{Z}$:*

(b) A multiplicação de $M_n(\mathbb{R})$ é distributiva em relação à adição em $M_n(\mathbb{R})$:

(c) Em $\mathbb{N}^*$, a potenciação é distributiva à direita em relação à multiplicação:

Parte fechada para uma operação

Definição 8 *Sejam $*$ uma operação sobre E e A um subconjunto não vazio de E. Dizemos que A é parte fechada de E para operação $*$ se,*

$$x,\ y \in A \quad \Rightarrow \quad x * y \in A,$$

para quaisquer $x,\ y \in A$.

Exemplo 8 *(a) Os números racionais são uma parte fechada para a operação de adição sobre $\mathbb{R}$:*

(b) *Os reais positivos são uma parte fechada para a multiplicação sobre* $\mathbb{R}$:

(c) *As funções bijetoras de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *formam um subconjunto fechado para a composição de funções de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

(d) *O conjunto* $D_2(\mathbb{R})$ *das matrizes diagonais de ordem 2 é uma parte fechada de* $M_2(\mathbb{R})$ *para a adição e a multiplicação em* $M_2(\mathbb{R})$:

(e) *O conjunto* $GL_2(\mathbb{R})$ *das matrizes inversíveis não é fechado para a adição em* $M_2(\mathbb{R})$:

Tábua de uma operação

Construção: Seja $E = \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$ $(n \geq 1)$ um conjunto com n elementos. Uma operação sobre E é uma aplicação $f : E \times E \to E$ que associa a cada par (a_i, a_j) o elemento $f(a_i, a_j) = a_i * a_j = a_{ij}$.

Podemos representar o elemento a_{ij}, correspondente ao par (a_i, a_j), numa tabela de dupla entrada, construída como segue:

(1°) Marcamos na linha fundamental e na coluna fundamental os elementos do conjunto E. Chamamos de i-ésima linha aquela que começa com a_i e j-ésima coluna a que é encabeçada por a_j.

	a_1	a_2	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1								
a_2								
$\vdots$								
a_i								
$\vdots$								
a_j								
$\vdots$								
a_n								

(2°) Dado um elemento a_i na coluna fundamental e um elemento a_j na linha fundamental, na interseção da linha i com a coluna j marcamos o composto $a_{ij} = a_i * a_j$.

	a_1	a_2	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1i}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
a_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2i}	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_i	a_{i1}	a_{i2}	$\cdots$	a_{ii}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_j	a_{j1}	a_{j2}	$\cdots$	a_{ji}	$\cdots$	a_{jj}	$\cdots$	a_{jn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{ni}	$\cdots$	a_{nj}	$\cdots$	a_{nn}

Exemplo 9 *Construa a tábua de multiplicação sobre* $E = \{-i, -1, 0, 1, i\}$.

Exemplo 10 *Construa a tábua da operação* $x * y = mmc(x, y)$ *sobre* $E = \{1, 3, 9, 27\}$.

Exemplo 11 *Seja $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Construa a tábua da operação $x * y =$ resto da divisão em $\mathbb{Z}$ de $x + y$ por 5.*

Exemplo 12 *Construa a tábua da operação de composição de funções em $E = \{f_1, f_2, f_3\}$, em que:*

- $f_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
- $f_2 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$
- $f_3 = \{(a, c), (b, a), (c, b)\}$

A seguir determine: f_3^2, $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ *e* $f_2^{-1} \circ f_3$.

Como determinar as propriedades de uma operação usando a tábua

Vejamos como podemos checar as propriedades de uma operação $*$ sobre $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ quando $*$ é dada por meio de uma tábua.

(a) **Comutativa:** sabemos que uma operação $*$ é comutativa se $a_i * a_j = a_j * a_i$, para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Se chamarmos de diagonal principal da tábua de uma operação o conjunto formado pelos compostos $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$, observamos que os elementos a_{ij} e a_{ji} ocupam posições simétricas relativamente à diagonal principal. Assim, uma operação $*$ é comutativa se a sua tábua for simétrica em relação à diagonal principal.

	a_1	a_2	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	a_{11}							
a_2		a_{22}						
$\vdots$			$\cdots$					
a_i				a_{ii}		a_{ij}		
$\vdots$					$\cdots$			
a_j				a_{ji}		a_{jj}		
$\vdots$							$\cdots$	
a_n								a_{nn}

(b) **Elemento neutro -** sabemos que um elemento e é neutro para a operação $*$ quando:

(i) $e * a_i = a_i, \quad \forall a_i \in E$;

(ii) $a_i * e = a_i, \quad \forall a_i \in E$.

Da condição (i) decorre que a linha de e é igual à linha fundamental e da condição (ii) decorre que a coluna de e é igual à coluna fundamental.

	a_1	a_2	$\cdots$	e	$\cdots$	a_n
a_1				a_1		
a_2				a_2		
$\vdots$				$\vdots$		
e	a_1	a_2		e		a_n
$\vdots$				$\vdots$		
a_n				a_n		

Logo, a operação $*$ tem neutro se existir um elemento cuja linha e coluna são respectivamente iguais à linha e coluna fundamentais.

(c) **Elementos simetrizáveis -** sabemos que um elemento $a_i \in E$ é simetrizável para a operação $*$, que tem elemento neutro e, quando existe $a_j \in E$ tal que:

(i) $a_i * a_j = e$;

(ii) $a_j * a_i = e$.

Da condição (i) decorre que a linha de a_i na tábua deve apresentar ao menos um composto igual a e. Da condição (ii) decorre que a coluna de a_i na tábua deve apresentar ao menos um composto igual a e. Como $a_{ij} = e = a_{ji}$, decorre que o neutro deve aparecer em posições simétricas relativamente à diagonal principal.

	a_1	a_2	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1								
a_2								
$\vdots$								
a_i						e		
$\vdots$								
a_j				e				
$\vdots$								
a_n								

(d) **Elementos regulares -** sabemos que um elemento $a \in E$ é regular em relação à operação $*$ quando:

(i) $a * a_i \neq a * a_j$, sempre que $a_i \neq a_j$;

(ii) $a_i * a \neq a_j * a$, sempre que $a_i \neq a_j$.

Isso significa que a é regular quando, composto com elementos distintos de E, tanto à esquerda deles como à direita, produz resultados diferentes. Assim, um elemento a é regular quando na linha e na coluna de a não há elementos iguais.

Exemplo 13 *Considere a operação cuja tábua é dada abaixo:*

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e
b	b	c	b	c	a
c	c	d	c	a	b
d	d	e	a	b	c

Quais são os elementos regulares?

Exemplo 14 *Construa a tábua das operações de interseção e união sobre $E = \{A, B, C, D\}$, em que A, B, C, D são conjuntos tais que $A \subset B \subset C \subset D$. A seguir determine o elemento neutro, os elementos simetrizáveis e os elementos regulares destas operações.*

Adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_m$

Vamos definir as operações de adição e multiplicação num conjunto $\mathbb{Z}_m$ $(m \in \mathbb{Z},\ \ m > 1)$ de classes de restos e veremos algumas propriedades destas operações.

Observação 1 *Se $\overline{a} = \overline{a_1} \in \mathbb{Z}_m$ e $\overline{b} = \overline{b_1} \in \mathbb{Z}_m$, então $a \equiv a_1 (mod\ m)$ e $b \equiv b_1 (mod\ m)$, portanto $a+b \equiv a_1+b_1 (mod\ m)$ e $a \cdot b \equiv a_1 \cdot b_1 (mod\ m)$ e, consequentemente, $\overline{a+b} = \overline{a_1+b_1}$ e $\overline{a \cdot b} = \overline{a_1 \cdot b_1}$. Logo, podemos definir:*

Definição 9 *Dadas duas classes $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_m$ chama-se soma $\overline{a} + \overline{b}$ a classe $\overline{a+b}$ (que é única, independente do representante tomado para $\overline{a}$ ou para $\overline{b}$).*

Definição 10 *Dadas duas classes $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_m$ chama-se produto $\overline{a} \cdot \overline{b}$ a classe $\overline{a \cdot b}$ (que é única, independente do representante tomado para $\overline{a}$ ou para $\overline{b}$).*

Assim, acabamos de definir duas operações sobre $\mathbb{Z}_m$:

- uma adição tal que $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$;
- uma multiplicação tal que $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$;

Propriedades da adição

(i) *Associativa:*

(ii) *Comutativa:*

(iii) *Elemento neutro:*

(iv) *Elementos simétricos:*

Propriedades da multiplicação

(i) *Associativa:*

(ii) *Comutativa:*

(iii) *Elemento neutro:*

(iv) *Elementos simétricos:* Prove que $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ é simetrizável para a multiplicação se, e somente se, $\text{mdc}(a, m) = 1$.