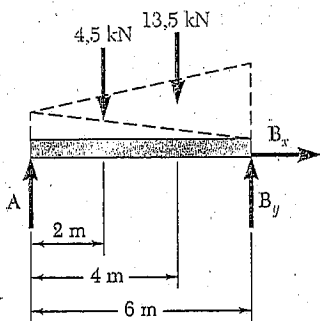
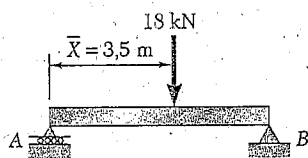
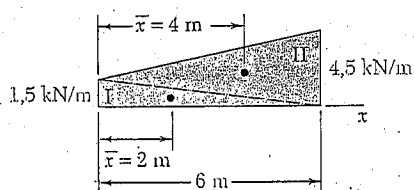
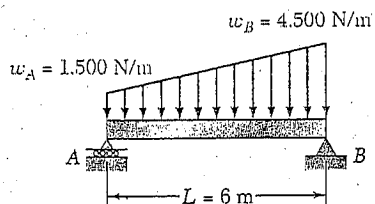


PROBLEMA RESOLVIDO 5.9

Uma viga sustentada a carga distribuída mostrada na figura. (a) Determine a carga concentrada equivalente. (b) Determine as reações de apoio.



SOLUÇÃO

a. Carga concentrada equivalente. A intensidade da resultante da carga é igual à área da superfície sob a curva de carga e a linha de ação da resultante passa pelo centróide dessa superfície. Dividimos a superfície sob a curva de carga em dois triângulos e construímos a tabela mostrada adiante. Para simplificar os cálculos e a tabulação, as cargas fornecidas por unidade de comprimento foram convertidas para kN/m.

Componente	A, kN	\bar{x} , m	$\bar{x}A$, kN · m
Triângulo I	4,5	2	9
Triângulo II	13,5	4	54
	$\Sigma A = 18,0$		$\Sigma \bar{x}A = 63$

$$\text{Logo, } \bar{X} \Sigma A = \Sigma \bar{x}A : \quad \bar{X} (18 \text{ kN}) = 63 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \bar{X} = 3,5 \text{ m}$$

A carga concentrada equivalente é

$$W = 18 \text{ kN} \downarrow \blacktriangleleft$$

e sua linha de ação está localizada a uma distância

$$\bar{X} = 3,5 \text{ m à direita de A} \blacktriangleleft$$

b. Reações. A reação em A é vertical, sendo representada por A; a reação em B é representada pelos seus componentes B_x e B_y . A carga fornecida pode ser considerada como a soma das duas cargas triangulares mostradas. A resultante de cada carga triangular é igual à área do triângulo e atua em seu centróide. Escrevemos as seguintes equações de equilíbrio para o corpo livre mostrado:

$$\overset{\pm}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 : \quad B_x = 0 \quad \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \Sigma M_A = 0 : \quad -(4,5 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (13,5 \text{ kN})(4 \text{ m}) + B_y (6 \text{ m}) = 0$$

$$B_y = 10,5 \text{ kN} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \Sigma M_B = 0 : \quad +(4,5 \text{ kN})(4 \text{ m}) + (13,5 \text{ kN})(2 \text{ m}) - A(6 \text{ m}) = 0$$

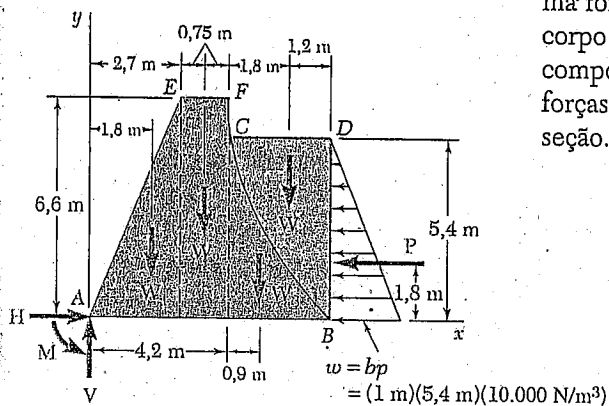
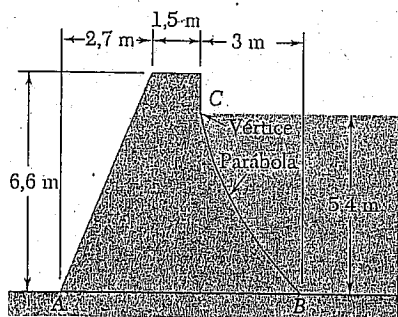
$$A = 7,5 \text{ kN} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$

Solução alternativa. Pode-se substituir a carga distribuída fornecida pela sua resultante, encontrada na parte a. As reações podem ser determinadas escrevendo-se as equações de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_A = 0$ e $\Sigma M_b = 0$. Novamente obtemos

$$B_x = 0 \quad B_y = 10,5 \text{ kN} \uparrow \quad A = 7,5 \text{ kN} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 5.10

A figura mostra a seção transversal de uma barragem de concreto. Pense em uma seção da barragem com 1 m de largura e determine (a) a resultante das forças de reação exercidas pelo solo sobre a base AB da barragem e (b) a resultante das forças de pressão exercidas pela água sobre a face BC da barragem. Os pesos específicos do concreto e da água são, respectivamente, 24.000 N/m^3 e 10.000 N/m^3 .



SOLUÇÃO

a. Reação do solo. Escolhemos como corpo livre a seção de 1 m de largura AEFCD da barragem e da água. As forças de reação exercidas pelo solo sobre a base AB são representadas por um sistema força-binário equivalente em A. Outras forças que atuam sobre o corpo livre são o peso da barragem, representado pelos pesos de seus componentes W_1 , W_2 e W_3 ; o peso da água W_4 ; e a resultante P das forças de pressão exercidas sobre a seção BD pela água à direita dessa seção. Temos

$$W_1 = \frac{1}{2}(2,7 \text{ m})(6,6 \text{ m})(1 \text{ m})(24.000 \text{ N/m}^3) = 213.840 \text{ N}$$

$$W_2 = (1,5 \text{ m})(6,6 \text{ m})(1 \text{ m})(24.000 \text{ N/m}^3) = 237.600 \text{ N}$$

$$W_3 = \frac{1}{3}(3 \text{ m})(5,4 \text{ m})(1 \text{ m})(24.000 \text{ N/m}^3) = 129.600 \text{ N}$$

$$W_4 = \frac{2}{3}(3 \text{ m})(5,4 \text{ m})(1 \text{ m})(10.000 \text{ N/m}^3) = 108.000 \text{ N}$$

$$P = \frac{1}{2}(5,4 \text{ m})(1 \text{ m})(5,4 \text{ m})(10.000 \text{ N/m}^3) = 145.800 \text{ N}$$

Equações de equilíbrio

$$\rightarrow \sum F_x = 0: H - 145.800 \text{ N} = 0 \quad H = 145.800 \text{ N} \rightarrow \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0: V - 213.840 \text{ N} - 237.600 \text{ N} - 129.600 \text{ N} - 108.000 \text{ N} = 0$$

$$V = 689.040 \text{ N} \uparrow \blacktriangleleft$$

$$+\curvearrowright \sum M_A = 0:$$

$$-(213.840 \text{ N})(1,8 \text{ m}) - (237.600 \text{ N})(3,45 \text{ m}) - (129.600 \text{ N})(5,1 \text{ m})$$

$$-(108.000 \text{ N})(6 \text{ m}) + (145.800 \text{ N})(1,8 \text{ m}) + M = 0$$

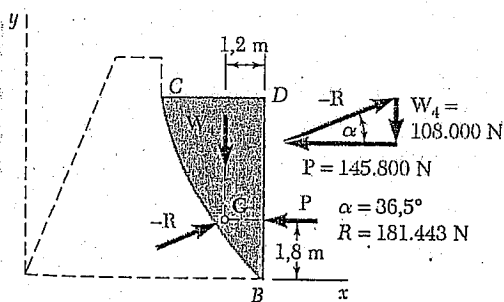
$$M = 2.251.152 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright \blacktriangleleft$$

Podemos substituir o sistema força-binário obtido por uma força única que atua a uma distância d à direita de A, sendo

$$d = \frac{2.251.152 \text{ N} \cdot \text{m}}{689.040 \text{ N}} = 3,27 \text{ m}$$

b. Resultante R das forças da água. A seção parabólica de água BCD é escolhida como corpo livre. As forças envolvidas são a resultante $-R$ das forças exercidas pela barragem sobre a água, o peso W_4 e a força P . Como essas forças devem ser concorrentes, $-R$ passa pelo ponto de interseção G de W_4 e P . Na figura está desenhado um triângulo de forças do qual são determinados a intensidade, a direção e o sentido de $-R$. A resultante R das forças exercidas pela água sobre a face BC tem igual intensidade e sentido oposto:

$$R = 181.443 \text{ N} \nearrow 36,5^\circ \blacktriangleleft$$



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os problemas desta seção envolvem dois tipos comuns e muito importantes de carregamento: cargas distribuídas sobre vigas e forças sobre superfícies submersas de largura constante. Conforme discutimos nas Seções 5.8 e 5.9 e exemplificamos nos Problemas Resolvidos 5.9 e 5.10, a determinação da força única equivalente para cada um desses carregamentos requer conhecimento sobre centróides.

1. Análise de vigas sujeitas a cargas distribuídas. Na Seção 5.8, mostramos que uma carga distribuída sobre uma viga pode ser substituída por uma força única equivalente. A intensidade dessa força é igual à área da superfície sob a curva de carga distribuída e sua linha de ação passa pelo centróide dessa superfície. Logo, você deve iniciar sua solução substituindo as diversas cargas distribuídas sobre uma dada viga pelas suas respectivas forças únicas equivalentes. As reações de apoio da viga podem ser determinadas por meio dos métodos do Cap. 4.

Sempre que possível, cargas distribuídas complexas devem ser divididas nas superfícies de formas usuais mostradas na Fig. 5.8A [Problema Resolvido 5.9]. Cada uma dessas superfícies pode então ser substituída por uma força única equivalente. Se necessário, pode-se ainda reduzir o sistema de forças equivalentes a uma força única equivalente. Ao estudar o Problema Resolvido 5.9, observe como usamos a analogia entre força e área de uma superfície e as técnicas para localizar o centróide de uma superfície composta a fim de analisar uma viga sujeita a uma carga distribuída.

2. Resolução de problemas que envolvam forças sobre superfícies submersas. Ao resolver problemas desse tipo, você deve se lembrar dos seguintes pontos e técnicas:

a. A pressão p a uma profundidade h abaixo de uma superfície livre de um líquido é igual a γh ou ρgh , sendo γ e ρ o peso específico e a massa específica do líquido, respectivamente. Logo, a carga por unidade de comprimento w que atua sobre uma superfície submersa de largura constante b é

$$w = bp = b\gamma h = b\rho gh$$

b. A linha de ação da força resultante \mathbf{R} que atua sobre uma superfície plana submersa é perpendicular a essa superfície.

c. Para uma superfície plana retangular de largura b , vertical ou inclinada, o carregamento sobre a superfície pode ser representado por uma carga distribuída linearmente, de forma trapezoidal (Fig. 5.18). Além disso, a intensidade de \mathbf{R} é dada por

$$R = \gamma h_E A$$

sendo h_E a distância vertical (profundidade) até o centro da superfície e A a área da superfície.

d. A curva de carga será triangular (em vez de trapezoidal) quando a aresta superior da superfície plana retangular coincidir com a superfície livre do líquido, pois a pressão manométrica do líquido na superfície livre é nula. Nesse caso, a linha de ação de \mathbf{R} é facilmente determinada e passa pelo centróide de uma carga distribuída *triangular*.

e. No caso geral, em vez de analisar um trapézio, sugerimos que você adote o método indicado na parte **b** do Problema Resolvido 5.9. Primeiro, divida a carga distribuída trapezoidal em dois triângulos e, em seguida, calcule a intensidade da resultante de cada carga triangular. (A intensidade é igual à área do triângulo multiplicada pela largura

ra da placa.) Observe que a linha de ação de cada força resultante passa pelo centróide do triângulo correspondente e que a soma dessas forças é equivalente a \mathbf{R} . Logo, em vez de usar \mathbf{R} , você pode usar as duas forças resultantes equivalentes, cujos pontos de aplicação são facilmente calculados. Obviamente, a equação dada para R no parágrafo *c* deve ser usada quando apenas a intensidade de \mathbf{R} é necessária.

f. Quando a superfície submersa de largura constante for curva, obtém-se a força resultante que atua sobre a superfície considerando-se o equilíbrio do volume de líquido limitado pela superfície curva e por planos horizontal e vertical (Fig. 5.19). Observe que a força \mathbf{R}_1 da Fig. 5.19 é igual ao peso de líquido que fica acima do plano AD . O método de solução para problemas que envolvem superfícies curvas está ilustrado na parte *b* do Problema Resolvido 5.10.

Em cursos subsequentes de mecânica (em particular, mecânica dos materiais e mecânica dos fluidos), você terá muitas oportunidades de empregar as idéias apresentadas nesta seção.

PROBLEMAS

5.61 e 5.62 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine (a) a intensidade e a localização da resultante da carga distribuída e (b) as reações de apoio da viga.

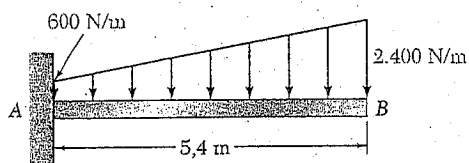


Fig. P5.61

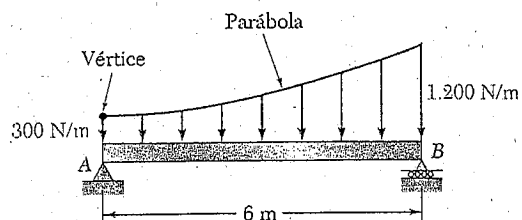


Fig. P5.62

5.63 a 5.68 Determine as reações da apoio da viga para o carregamento dado.

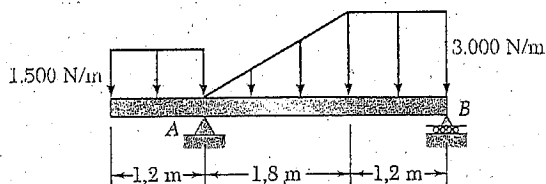


Fig. P5.63

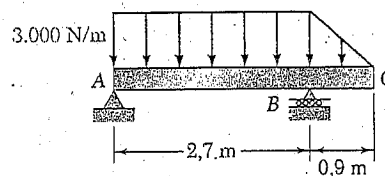


Fig. P5.64

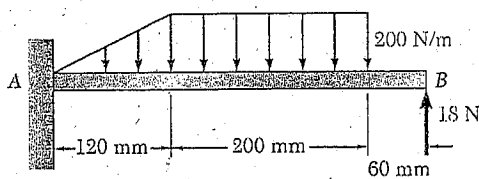


Fig. P5.65

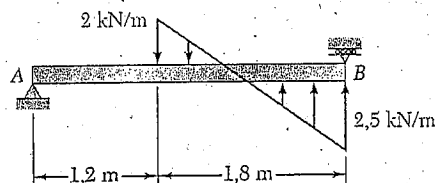


Fig. P5.66

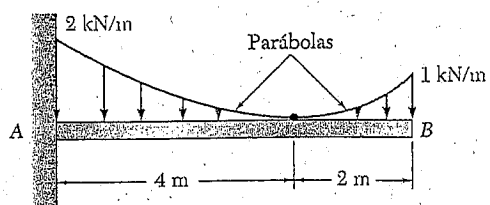


Fig. P5.67

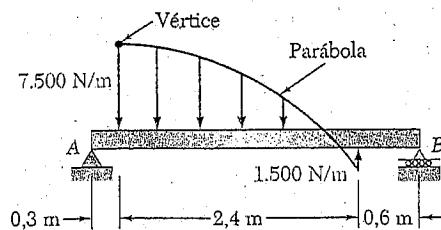


Fig. P5.68

5.69 Determine (a) a distância a tal que as reações verticais dos apoios A e B sejam iguais e (b) as reações de apoio correspondentes.

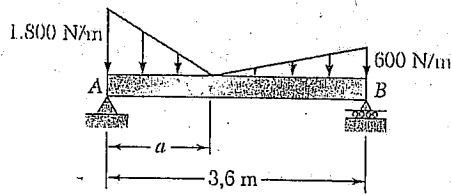


Fig. P5.69 e P5.70

5.70 Determine (a) a distância a tal que a reação vertical do apoio B seja mínima e (b) as reações de apoio correspondentes.

5.71 Determine as reações de apoio da viga para o carregamento dado quando $w_0 = 1,5 \text{ kN/m}$.

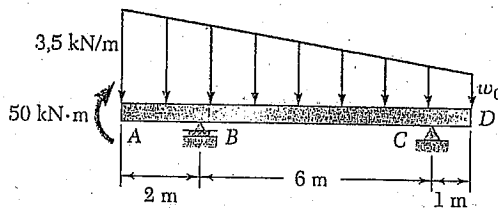


Fig. P5.71 e P5.72

5.72 Determine (a) a carga distribuída w_0 na extremidade D da viga $ABCD$ tal que a reação em B seja nula e (b) as reações correspondentes em C .

5.73 Uma viga de nivelamento AB sustenta três cargas concentradas e repousa sobre o solo e sobre o topo de uma grande rocha. O solo exerce uma carga distribuída para cima e a rocha exerce uma carga concentrada R_R , tal como mostra a figura. Sabendo que $P = 4 \text{ kN}$ e $w_B = w_A/2$, determine os valores de w_A e R_R correspondentes ao equilíbrio.

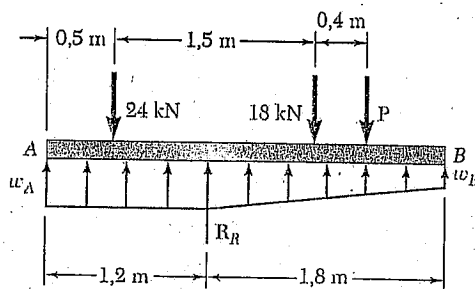


Fig. P5.73 e P5.74

5.74 Uma viga de nivelamento AB sustenta três cargas concentradas e repousa sobre o solo e sobre o topo de uma grande rocha. O solo exerce uma carga distribuída para cima e a rocha exerce uma carga concentrada R_R , tal como mostra a figura. Sabendo que $w_B = 0,4w_A$, determine (a) o maior valor de P para que a viga fique em equilíbrio, (b) o valor correspondente de w_A .

Nos próximos problemas, utilize $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ para a massa específica da água doce e $\rho_c = 2,40 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ para a massa específica do concreto. (Ver a nota de rodapé 1 para o modo de determinar o peso específico de um material, dada a sua massa específica.)

5.75 e 5.76 A seção transversal de uma barragem de concreto está mostrada. Para uma seção de barragem de largura unitária, determine (a) as forças de reação exercidas pelo solo sobre a base AB da barragem, (b) o ponto de aplicação da resultante das forças de reação da parte a e (c) a resultante das forças de pressão exercidas pela água sobre a face BC da barragem.

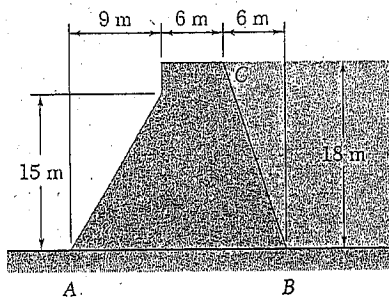


Fig. P5.75

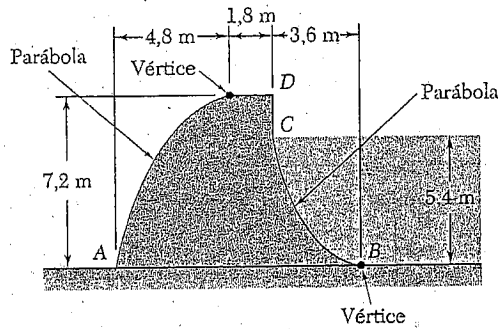


Fig. P5.76

5.77 A lateral AB de um tanque aberto mede $2,7 \times 3,6 \text{ m}$, está articulada no fundo em A e é mantida no lugar por meio de uma barra fina BC. A força máxima de tração que a barra pode suportar sem quebrar é de 180 kN, e as especificações de projeto exigem que a força na barra não exceda a 20% desse valor. Se o tanque for enchido lentamente com água, determine a máxima profundidade admissível d no tanque

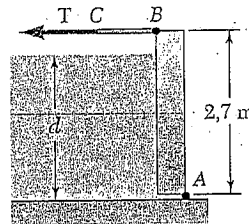


Fig. P5.77 e P5.78

5.78 A lateral AB de um tanque aberto mede $2,7 \times 3,6 \text{ m}$, está articulada no fundo em A e é mantida no lugar por meio de uma barra fina BC. O tanque é enchido lentamente com glicerina, cujo peso específico é de 13.000 N/m^3 . Determine a força T na barra e as reações na articulação após o enchimento do tanque a uma profundidade de 2,4 m.

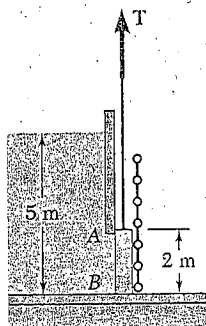


Fig. P5.79

5.79 A força de atrito entre uma comporta de fundo quadrada AB de $2 \times 2 \text{ m}$ e sua guia é igual a 10% da resultante das forças de pressão exercidas pela água sobre a face da comporta. Determine a força inicial necessária para se levantar a comporta sabendo que sua massa é de 500 kg.

5.80 A barragem de um lago é projetada para suportar a força adicional causada pelo lodo depositado no fundo do lago. Admitindo que o lodo é equivalente a um líquido de massa específica $\rho_s = 1,76 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ e considerando uma seção da barragem de 1 m de largura, determine o aumento percentual da força que atua sobre a face da barragem para um acúmulo de lodo de 1,5 m de profundidade.

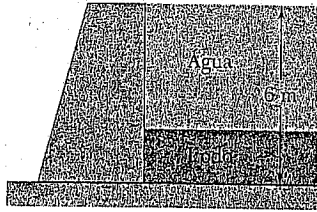


Fig. P5.80 e P5.81

5.81 A base da barragem de um lago é projetada para resistir a até 150% da força horizontal da água. Após a construção, verificou-se a deposição de lodo (que é equivalente a um líquido de massa específica $\rho_s = 1,76 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$) no fundo do lago a uma taxa de 20 mm/ano. Considerando uma seção da barragem de 1 m de largura, determine quantos anos se passarão até a barragem se tornar insegura.

5.82 A comporta quadrada AB é mantida na posição mostrada na figura por meio de articulações ao longo de sua aresta superior A e por um pino de cisalhamento em B . Para uma profundidade de água $d = 3,5 \text{ m}$, determine a força exercida sobre a comporta pelo pino de cisalhamento.

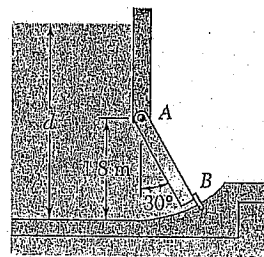


Fig. P5.82

5.83 É construída uma barragem provisória em um canal de água doce de 1,5 m de largura, pregando-se duas tábuas em estacas colocadas nas laterais do canal e apoiando-se uma terceira tábua AB sobre as estacas e sobre o leito do canal. Desprezando o atrito, determine as reações em A e B quando a corda BC está frouxa.

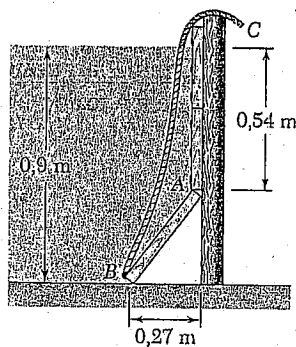


Fig. P5.83 e P5.84

5.84 Uma barragem provisória é construída em um canal de água doce de 1,5 m de largura, pregando-se duas tábuas em estacas colocadas nas laterais do canal e apoiando-se uma terceira tábua AB sobre as estacas e sobre o leito do canal. Desprezando o atrito, determine a intensidade, a direção e o sentido da mínima força de tração na corda BC necessária para se mover a tábua AB .

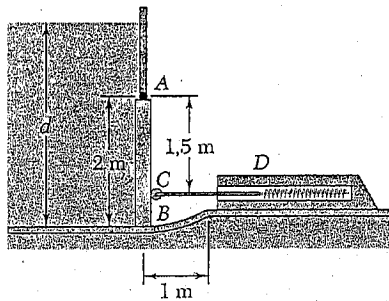


Fig. P5.85

5.85 Uma comporta de 2×3 m está articulada em A e é mantida no lugar pela barra CD . A extremidade D apóia-se em uma mola cuja constante é de 12 kN/m. A mola está livre (indeformada) quando a comporta está na vertical. Considerando que a força exercida pela barra CD sobre a comporta permanece horizontal, determine a mínima profundidade d de água para a qual o fundo B da comporta irá se deslocar até o final da porção cilíndrica do chão.

5.86 Resolva o Problema 5.85 se a massa da comporta for de 500 kg.

5.87 A comporta no final de um canal de água doce de $0,9$ m de largura é fabricada com três placas de aço retangulares de 1.080 N cada. A comporta é articulada em A e repousa sobre um apoio sem atrito em D . Sabendo que $d = 0,75$ m, determine as reações em A e D .

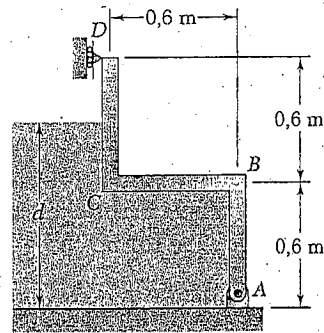


Fig. P5.87 e P5.88

5.88 A comporta no final de um canal de água doce de $0,9$ m de largura é fabricada com três placas de aço retangulares de 1.080 N cada. A comporta é articulada em A e repousa sobre um apoio sem atrito em D . Determine a profundidade d de água na qual a comporta irá se abrir.

5.89 Uma calha é suspensa do telhado de uma casa por meio de ganchos espaçados de $0,6$ m. Depois que o dreno da calha fica entupido por folhas, a calha se enche lentamente com a água da chuva. Na situação em que a calha fica totalmente cheia de água, determine (a) a resultante da força de pressão exercida pela água sobre a superfície curva da calha em uma seção de $0,6$ m de largura e (b) o sistema força-binário exercido sobre o gancho onde ele é fixado à calha.

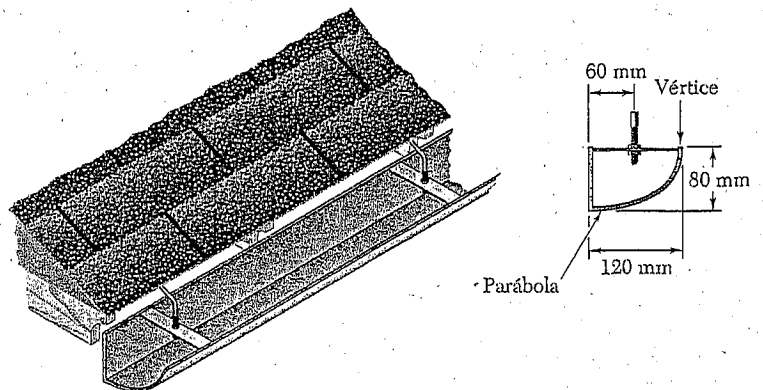


Fig. P5.89

5.10 CENTRO DE GRAVIDADE DE UM CORPO TRIDIMENSIONAL. CENTRÓIDE DE UM SÓLIDO

O centro de gravidade G de um corpo tridimensional é obtido dividindo-se o corpo em pequenos elementos e , em seguida, expressando-se que o peso W do corpo, atuando em G , é equivalente ao sistema de forças distribuídas ΔW que representa os pesos dos pequenos elementos. Escolhendo o eixo y na vertical, com sentido positivo para cima (Fig. 5.20)

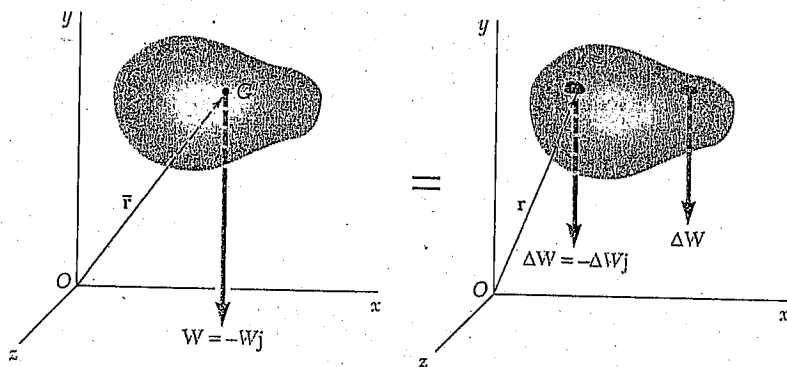


Fig. 5.20

e representando por $\bar{\mathbf{r}}$ o vetor posição de G , escrevemos que W é igual à soma dos pesos elementares ΔW e que seu momento em relação a O é igual à soma dos momentos em relação a O dos pesos elementares:

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F}: \quad & -W\mathbf{j} = \Sigma(-\Delta W\mathbf{j}) \\ \Sigma \mathbf{M}_O: \quad & \bar{\mathbf{r}} \times (-W\mathbf{j}) = \Sigma [\mathbf{r} \times (-\Delta W\mathbf{j})] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Reescrevendo a última equação desta maneira

$$\bar{\mathbf{r}}W \times (-\mathbf{j}) = (\Sigma \mathbf{r} \Delta W) \times (-\mathbf{j}) \quad (5.14)$$

observamos que o peso W do corpo será equivalente ao sistema dos pesos elementares ΔW se forem satisfeitas as seguintes condições:

$$W = \Sigma \Delta W \quad \bar{\mathbf{r}}W = \Sigma \mathbf{r} \Delta W$$

Aumentando o número de elementos e diminuindo, simultaneamente, o tamanho de cada elemento, obtemos no limite:

$$W = \int dW \quad \bar{\mathbf{r}}W = \int \mathbf{r} dW \quad (5.15)$$

Observamos que as relações obtidas são independentes da orientação do corpo. Por exemplo, se o corpo e os eixos coordenados forem girados de tal modo que o eixo z aponte para cima, o vetor unitário $-\mathbf{j}$ seria substituído por $-\mathbf{k}$ nas Eqs. (5.13) e (5.14), mas as relações (5.15) permanecem inalteradas. Decompondo os vetores $\bar{\mathbf{r}}$ e \mathbf{r} em seus componentes retangulares, observamos que a segunda das relações (5.15) é equivalente às três equações escalares

$$\bar{x}W = \int x dW \quad \bar{y}W = \int y dW \quad \bar{z}W = \int z dW \quad (5.16)$$

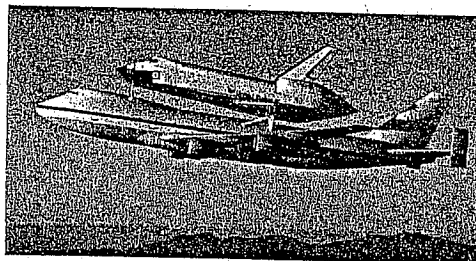


Foto 5.5 Para se preverem as características de voo do Boeing 747 modificado quando este é usado para transportar um Space Shuttle Orbiter, foi preciso determinar o centro de gravidade de cada nave.

Se o corpo é feito de um material homogêneo de peso específico γ , a intensidade dW do peso de um elemento infinitesimal pode ser expressa em função do volume dV do elemento, e a intensidade W do peso total pode ser expressa em termos do volume total V . Escrevemos

$$dW = \gamma dV \quad W = \gamma V$$

Substituindo dW e W na segunda das relações (5.15), escrevemos

$$\bar{\mathbf{r}}V = \int \mathbf{r} dV \quad (5.17)$$

ou, em forma escalar,

$$\bar{x}V = \int x dV \quad \bar{y}V = \int y dV \quad \bar{z}V = \int z dV \quad (5.18)$$

O ponto cujas coordenadas são \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} é também conhecido como *centróide C do volume V* do corpo. Se o corpo não for homogêneo, as Eqs. (5.18) não podem ser usadas para se determinar o centro da gravidade do corpo; entretanto, as Eqs. (5.18) ainda definem o centróide do sólido.

A integral $\int x dV$ é conhecida como *momento de primeira ordem do sólido em relação ao plano yz* . Analogamente, as integrais $\int y dV$ e $\int z dV$ definem os momentos de primeira ordem do sólido em relação ao plano zx e ao plano xy , respectivamente. Pode-se ver, a partir das Eqs. (5.18), que, se o centróide do sólido está localizado em um plano coordenado, o momento de primeira ordem com respeito a esse plano é nulo.

Diz-se que o sólido é simétrico com relação a um plano dado se para cada ponto P do sólido existe um ponto P' do mesmo sólido, tal que o segmento PP' é perpendicular ao dado plano e dividido em duas partes iguais por esse plano. O plano é chamado de *plano de simetria* para o dado sólido. Quando um sólido V tem um plano de simetria, o momento de primeira ordem de V com relação a esse plano é zero, e o centróide do sólido está localizado no plano de simetria. Quando o sólido apresenta dois planos de simetria, o centróide do sólido está localizado na linha de interseção dos dois planos. Finalmente, quando o sólido apresenta três planos de simetria que se interceptam em um ponto definido (isto é, não ao longo de uma reta comum), o ponto de interseção dos três planos coincide com o centróide do sólido. Essa propriedade nos possibilita determinar imediatamente a localização dos centróides de esferas, elipsóides, cubos, paralelepípedos retangulares etc.

Os centróides de sólidos não-simétricos ou de sólidos que apresentem apenas um ou dois planos de simetria devem ser determinados por integração (Seção 5.12). Os centróides de vários sólidos usuais estão mostrados na Fig. 5.21. Deve-se observar que, em geral, o centróide de um sólido de revolução *não coincide* com o centróide de sua seção transversal. Portanto, o centróide de um hemisfério é diferente do de uma área semicircular, e o centróide de um cone é diferente do de um triângulo.

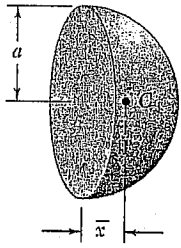
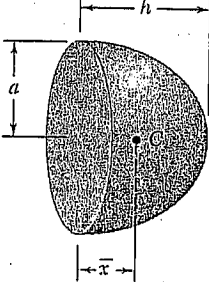
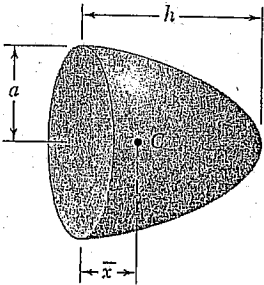
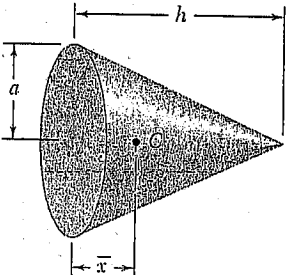
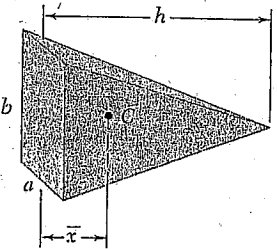
Formato		\bar{x}	Volume
Hemisfério		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Semi-elipsóide de revolução		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
Parabolóide de revolução		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$
Cone		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
Pirâmide		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}abh$

Fig. 5.21 Centróides de sólidos de formatos usuais.

5.11 CORPOS COMPOSTOS

Se um corpo pode ser dividido em várias das formas usuais mostradas na Fig. 5.21, pode-se determinar seu centro de gravidade G expressando-se que o momento em relação a O de seu peso total é igual à soma dos momentos em relação a O dos pesos das várias partes componentes. Procedendo como na Seção 5.10, obtemos as seguintes equações, definindo as coordenadas \bar{X} , \bar{Y} e \bar{Z} do centro de gravidade G :

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x}W \quad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y}W \quad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{z}W \quad (5.19)$$

Se o corpo é feito de um material homogêneo, seu centro de gravidade coincide com o centróide de seu volume, e obtemos

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x}V \quad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma \bar{y}V \quad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z}V \quad (5.20)$$

5.12 DETERMINAÇÃO DE CENTRÓIDES DE SÓLIDOS POR INTEGRAÇÃO

Pode-se determinar o centróide de um sólido limitado por superfícies analíticas avaliando-se as integrais dadas na Seção 5.10:

$$\bar{x}V = \int x dV \quad \bar{y}V = \int y dV \quad \bar{z}V = \int z dV \quad (5.21)$$

Se o elemento de volume dV é escolhido como sendo igual a um pequeno cubo de lados dx , dy e dz , a avaliação de cada uma das integrais requer uma *integração tripla*. Entretanto, é possível determinar as coordenadas do centróide da maioria dos sólidos por *integração dupla* se dV for escolhido como sendo igual ao volume de um elemento delgado (Fig. 5.22). As coordenadas do centróide do sólido são então obtidas reescrevendo-se as Eqs. (5.21) como

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} dV \quad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el} dV \quad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el} dV \quad (5.22)$$

e, em seguida, substituindo-se as expressões dadas na Fig. 5.22 pelo volume dV e as coordenadas \bar{x}_{el} , \bar{y}_{el} , \bar{z}_{el} . Aplicando-se a equação da superfície para expressar z em termos de x e y , a integração é reduzida a uma integração dupla em x e y .

Se o sólido sob consideração apresentar *dois planos de simetria*, seu centróide deve estar localizado sobre a linha de interseção dos dois planos. Escolhendo o eixo x ao longo dessa linha, temos

$$\bar{y} = \bar{z} = 0$$

e a única coordenada a ser determinada é \bar{x} . Isso pode ser feito com uma *integração simples* dividindo-se o volume dado em elementos delgados paralelos ao plano yz e expressando-se dV em termos de x e dx na equação

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} dV \quad (5.23)$$

Para um corpo de revolução, os elementos são circulares e seu volume é dado na Fig. 5.23.

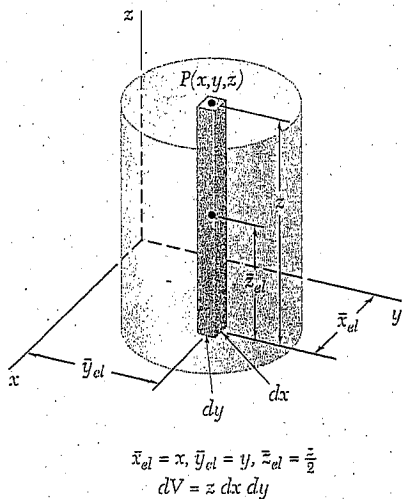


Fig. 5.22 Determinação do centróide de um sólido por integração dupla.

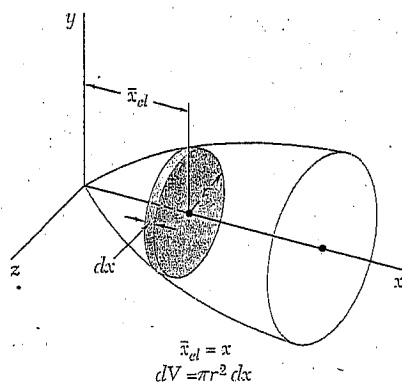


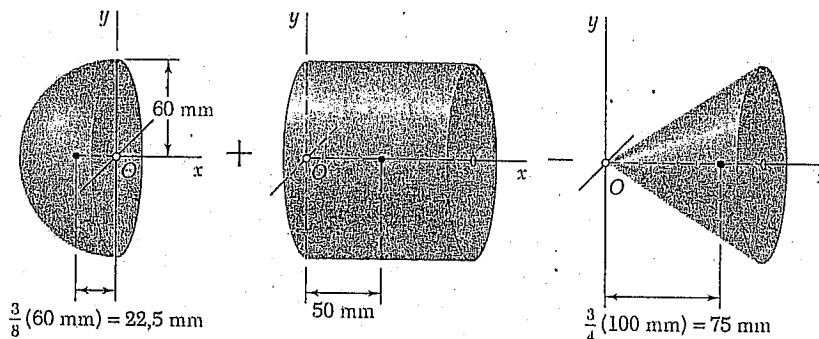
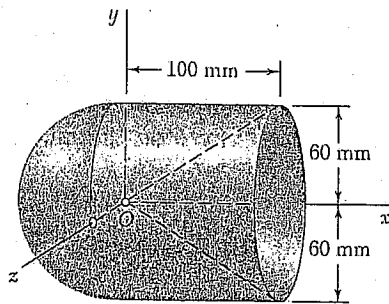
Fig. 5.23 Determinação do centróide de um corpo de revolução.

PROBLEMA RESOLVIDO 5.11

Determine a localização do centro de gravidade do corpo de revolução homogêneo mostrado na figura, que foi obtido adicionando-se um hemisfério e um cilindro e subtraindo-se um cone.

SOLUÇÃO

Por causa da simetria, o centro de gravidade situa-se sobre o eixo x . Como mostra a figura abaixo, pode-se obter o corpo adicionando-se um hemisfério a um cilindro e depois subtraindo-se um cone. O volume e a abscissa do centróide de cada um desses componentes são obtidos a partir da Fig. 5.21 e registrados na tabela adiante. O volume total do corpo e o momento de primeira ordem de seu volume com relação ao plano yz são então determinados.



Componente	Volume, mm ³	\bar{x} , mm	$\bar{x}V$, mm ⁴
Hemisfério	$\frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} (60)^3 = 0,4524 \times 10^6$	-22,5	$-10,18 \times 10^6$
Cilindro	$\pi(60)^2(100) = 1,1310 \times 10^6$	+50	$+56,55 \times 10^6$
Cone	$-\frac{\pi}{3} (60)^2(100) = -0,3770 \times 10^6$	+75	$-28,28 \times 10^6$
	$\Sigma V = 1,206 \times 10^6$		$\Sigma \bar{x}V = 18,09 \times 10^6$

Então:

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x}V: \bar{X}(1,206 \times 10^6 \text{ mm}^3) = 18,09 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

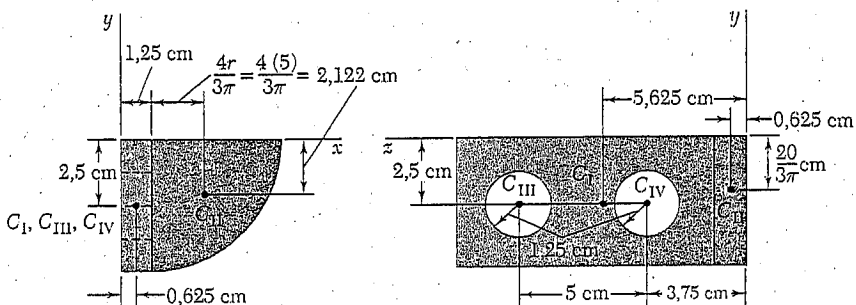
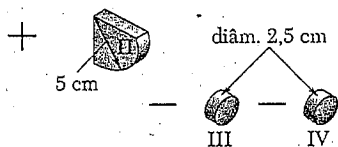
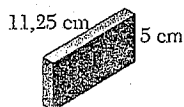
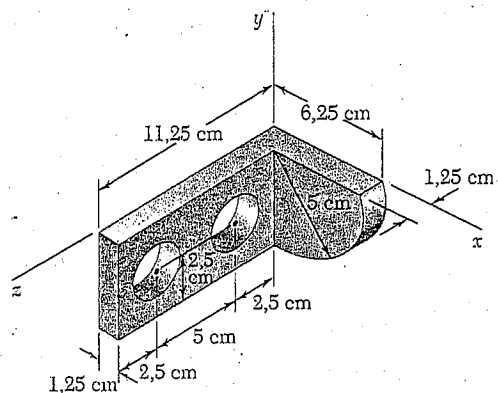
$$\bar{X} = 15 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 5.12

Determine o centro de gravidade do elemento de máquina de aço mostrado na figura. O diâmetro de cada furo é de 2,5 cm.

SOLUÇÃO

O elemento de máquina pode ser obtido adicionando-se um paralelepípedo retangular (I) a um quarto de cilindro (II), e em seguida subtraindo-se dois cilindros (III e IV) de 2,5 cm de diâmetro. O volume e as coordenadas do centro de gravidade de cada componente são determinados e anotados na tabela abaixo. Usando os dados da tabela, determinamos então o volume total e os momentos de cada volume com relação a cada um dos planos coordenados.



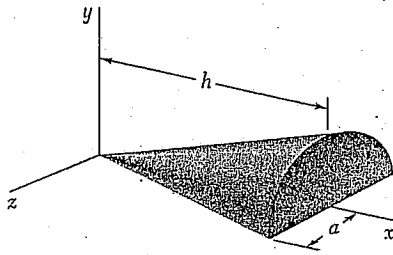
	V_i, cm^3	\bar{x}, cm	\bar{y}, cm	\bar{z}, cm	$\bar{x}V, \text{cm}^4$	$\bar{y}V, \text{cm}^4$	$\bar{z}V, \text{cm}^4$
I	$(11,25)(5)(1,25) = 70,31$	0,625	-2,5	5,625	43,94	-175,78	395,49
II	$\frac{1}{4} \pi (5)^2 (1,25) = 24,54$	3,372	-2,122	0,625	82,75	-52,07	15,34
III	$-\pi (1,25)^2 (1,25) = -6,14$	0,625	-2,5	8,75	-3,84	15,35	-53,73
IV	$-\pi (1,25)^2 (1,25) = -6,14$	0,625	-2,5	3,75	-3,84	15,35	-23,03
	$\Sigma V = 82,57$				$\Sigma \bar{x}V = 119,01$	$\Sigma \bar{y}V = -197,15$	$\Sigma \bar{z}V = 334,07$

Então:

$$\begin{aligned} \bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x}V: \quad \bar{X}(82,57 \text{ cm}^3) &= 119,01 \text{ cm}^4 & \bar{X} &= 1,44 \text{ cm} \leftarrow \\ \bar{Y}\Sigma V = \Sigma \bar{y}V: \quad \bar{Y}(82,57 \text{ cm}^3) &= -197,15 \text{ cm}^4 & \bar{Y} &= -2,39 \text{ cm} \leftarrow \\ \bar{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z}V: \quad \bar{Z}(82,57 \text{ cm}^3) &= 334,07 \text{ cm}^4 & \bar{Z} &= 4,05 \text{ cm} \leftarrow \end{aligned}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 5.13

Determine a localização do centróide da metade de cone circular reto mostrada na figura.



SOLUÇÃO

Como o plano xy é um plano de simetria, o centróide está situado nesse plano e $\bar{z} = 0$. Um elemento de espessura dx é escolhido como um elemento diferencial. O volume desse elemento é

$$dV = \frac{1}{2} \pi r^2 dx$$

As coordenadas \bar{x}_{el} e \bar{y}_{el} do centróide do elemento são

$$\bar{x}_{el} = x \quad \bar{y}_{el} = \frac{4r}{3\pi}$$

sendo \bar{y}_{el} obtido a partir da Fig. 5.8 (área semicircular).

Observamos que r é proporcional a x e escrevemos

$$\frac{r}{x} = \frac{a}{h} \quad r = \frac{a}{h} x$$

O volume do corpo é

$$V = \int dV = \int_0^h \frac{1}{2} \pi r^2 dx = \int_0^h \frac{1}{2} \pi \left(\frac{a}{h} x \right)^2 dx = \frac{\pi a^2 h}{6}$$

O momento do elemento diferencial em relação ao plano yz é $\bar{x}_{el} dV$; o momento total do corpo em relação a esse plano é

$$\int \bar{x}_{el} dV = \int_0^h x \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right) dx = \int_0^h x \left(\frac{1}{2} \pi \right) \left(\frac{a}{h} x \right)^2 dx = \frac{\pi a^2 h^2}{8}$$

Então,

$$\bar{x} V = \int \bar{x}_{el} dV \quad \bar{x} \frac{\pi a^2 h}{6} = \frac{\pi a^2 h^2}{8} \quad \bar{x} = \frac{3}{4} h \quad \blacktriangleleft$$

Do mesmo modo, o momento do elemento diferencial em relação ao plano xz é $\bar{y}_{el} dV$; o momento total é

$$\int \bar{y}_{el} dV = \int_0^h \frac{4r}{3\pi} \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right) dx = \frac{2}{3} \int_0^h \left(\frac{a}{h} x \right)^3 dx = \frac{a^3 h}{6}$$

Portanto,

$$\bar{y} V = \int \bar{y}_{el} dV \quad \bar{y} \frac{\pi a^2 h}{6} = \frac{a^3 h}{6} \quad \bar{y} = \frac{a}{\pi} \quad \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas para esta seção, será pedido que você determine os centros de gravidade de corpos tridimensionais ou os centróides de seus volumes. Todas as técnicas discutidas anteriormente para corpos bidimensionais – utilizando-se simetria, dividindo-se o corpo em formas usuais, escolhendo-se o elemento diferencial mais eficiente etc. – podem ser aplicadas também ao caso geral tridimensional.

1. Determinação dos centros de gravidade de corpos compostos. Em geral, devem ser usadas as Eqs. (5.19):

$$\bar{X}_{\Sigma W} = \Sigma \bar{x}W \quad \bar{Y}_{\Sigma W} = \Sigma \bar{y}W \quad \bar{Z}_{\Sigma W} = \Sigma \bar{z}W$$

Entretanto, para o caso de um *corpo homogêneo*, o centro de gravidade do corpo coincide com o *centróide de seu volume*. Por isso, para esse caso especial, também se pode achar o centro de gravidade do corpo aplicando-se as Eqs. (5.20):

$$\bar{X}_{\Sigma V} = \Sigma \bar{x}V \quad \bar{Y}_{\Sigma V} = \Sigma \bar{y}V \quad \bar{Z}_{\Sigma V} = \Sigma \bar{z}V$$

Você deve perceber que essas equações são simplesmente uma extensão das equações usadas para os problemas bidimensionais considerados anteriormente neste capítulo. Como ilustram as soluções dos Problemas Resolvidos 5.11 e 5.12, os métodos de solução para problemas bi- e tridimensionais são idênticos. Portanto, novamente incentivamos você a construir diagramas e tabelas apropriados quando estiver analisando corpos compostos. Além disso, quando você estiver estudando o Problema Resolvido 5.12, observe como as coordenadas x e y do centróide do quarto de cilindro foram obtidas por meio das equações para o centróide de um quarto de círculo.

Observamos que *dois casos especiais* de interesse ocorrem quando o corpo dado consiste em arames uniformes ou em placas uniformes feitos do mesmo material.

a. Para um corpo feito de *vários elementos de arame da mesma seção transversal uniforme*, a área A da seção transversal dos elementos de arame será fatorada para fora das Eqs. (5.20) quando V for substituído pelo produto AL , sendo L o comprimento de um dado elemento. As equações (5.20) serão então reduzidas, nesse caso, a

$$\bar{X}_{\Sigma L} = \Sigma \bar{x}L \quad \bar{Y}_{\Sigma L} = \Sigma \bar{y}L \quad \bar{Z}_{\Sigma L} = \Sigma \bar{z}L$$

b. Para um corpo feito de *várias placas da mesma espessura uniforme*, a espessura t das placas será fatorada para fora das Eqs. (5.20) quando V for substituído pelo produto tA , sendo A a área de uma dada placa. As Eqs. (5.20) serão então reduzidas, nesse caso, a

$$\bar{X}_{\Sigma A} = \Sigma \bar{x}A \quad \bar{Y}_{\Sigma A} = \Sigma \bar{y}A \quad \bar{Z}_{\Sigma A} = \Sigma \bar{z}A$$

2. Localização dos centróides de sólidos por integração direta. Como explicamos na Seção 5.11, a avaliação das integrais das Eqs. (5.21) pode ser simplificada escolhendo-se um elemento delgado (Fig. 5.22) ou uma fatia delgada (Fig. 5.23) para o elemento de volume dV . Portanto, a solução deve ser iniciada identificando-se, se possível, o dV que produz as integrais simples ou duplas que forem as mais fáceis de calcular. Para corpos de revolução, isso pode ser uma fatia delgada (como no Problema Resolvido 5.13) ou uma casca cilíndrica delgada. Entretanto, é importante lembrar que a relação que você estabelecer entre as variáveis (assim como a relação entre r e x no Problema Resolvido 5.13) vai afetar diretamente a complexidade das integrais que você vai ter que calcular. Por fim, lembramos novamente que \bar{x}_{el} , \bar{y}_{el} e \bar{z}_{el} nas Eqs. (5.22) são as coordenadas do centróide de dV .

PROBLEMAS

5.90 O corpo composto mostrado na figura é formado removendo-se um hemisfério de raio r de um cilindro de raio R e altura $2R$. Determine (a) a coordenada y do centróide quando $r = 3R/4$ e (b) a razão r/R para a qual $\bar{y} = -1,2R$.

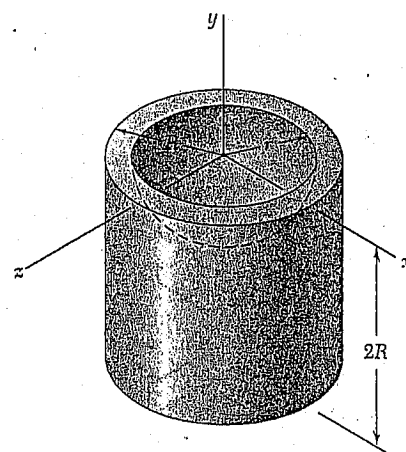


Fig. P5.90

5.91 Determine a coordenada y do centróide do corpo mostrado na figura.

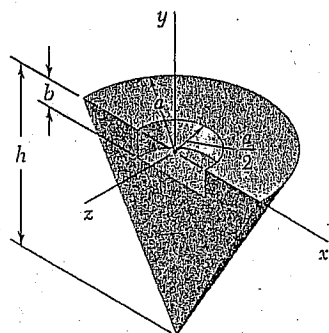


Fig. P5.91 e P5.92

5.92 Determine a coordenada z do centróide do corpo mostrado na figura (Dica: Use o resultado do Problema Resolvido 5.13.)

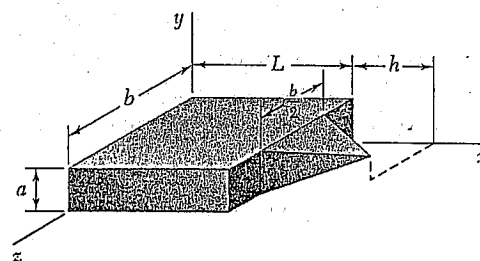


Fig. P5.93

5.93 Considere o corpo composto mostrado na figura. Determine (a) o valor de \bar{x} quando $h = L/2$ e (b) a razão h/L para a qual $\bar{x} = L$.

5.94 Para o elemento de máquina mostrado na figura, determine a coordenada x do centro de gravidade.

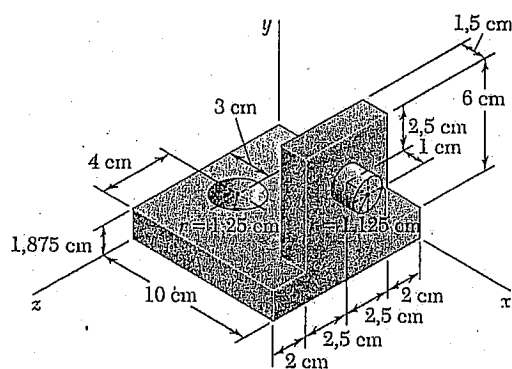


Fig. P5.94 e P5.95

5.95 Para o elemento de máquina mostrado na figura, determine a coordenada y do centro de gravidade.

5.96 Para o elemento de máquina mostrado na figura, determine a coordenada x do centro de gravidade.

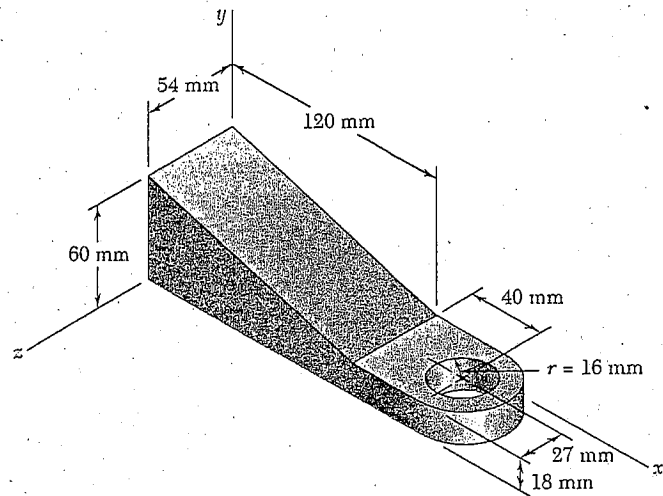


Fig. P5.96 e P5.97

5.97 Para o elemento de máquina mostrado na figura, determine a coordenada y do centro de gravidade.

5.98 Para o suporte de batente mostrado na figura, determine a coordenada x do centro de gravidade.

5.99 Para o suporte de batente mostrado na figura, determine a coordenada z do centro de gravidade.

5.100 Determine o centro de gravidade da chapa metálica conformada tal como mostra a figura.

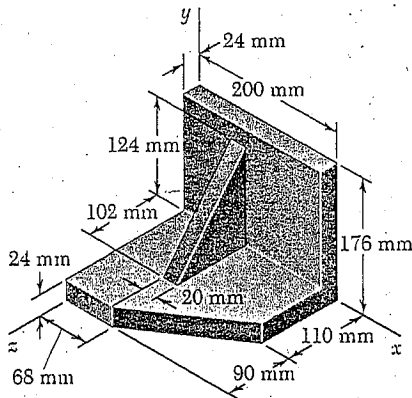


Fig. P5.98 e P5.99

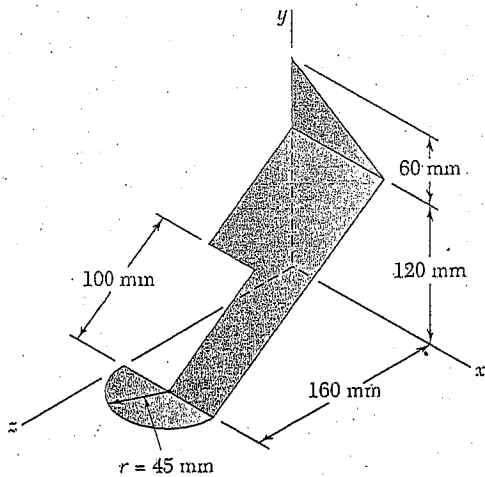


Fig. P5.100

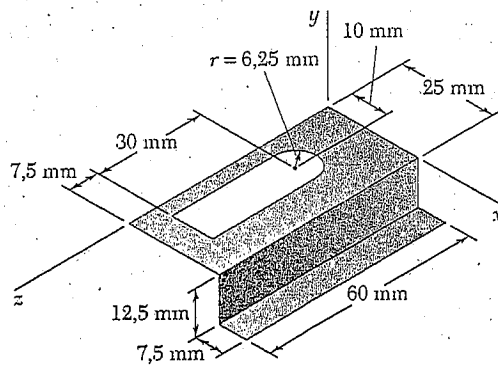


Fig. P5.101

5.101 Um suporte de montagem para componentes eletrônicos é conformado a partir de uma chapa de metal de espessura uniforme. Determine o centro de gravidade do suporte.

5.102 Determine o centro de gravidade da chapa metálica conformada tal como mostra a figura.

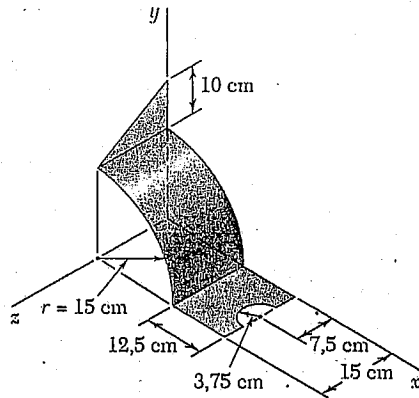


Fig. P5.102

*5.103 Uma caixa protetora para um dispositivo eletrônico é conformada a partir de uma chapa metálica de espessura uniforme. Determine o centro de gravidade da caixa.

5.104 Um duto cilíndrico de 200 mm de diâmetro e um duto retangular de 100 × 200 mm devem ser unidos tal como indica a figura. Sabendo que os dutos são fabricados a partir da mesma chapa de metal, que tem espessura uniforme, determine o centro de gravidade do conjunto.

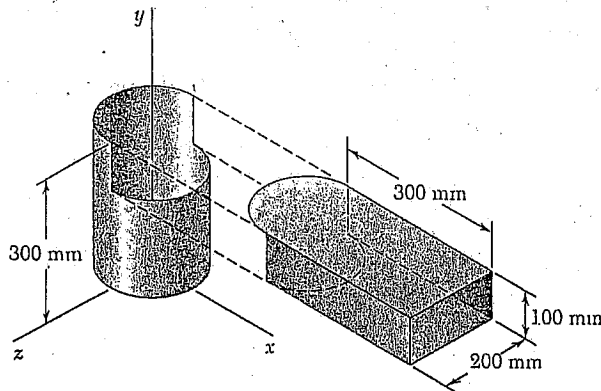


Fig. P5.104

5.105 Um cotovelo para o duto de um sistema de ventilação é feito de chapa metálica de espessura uniforme. Determine o centro de gravidade do cotovelo.

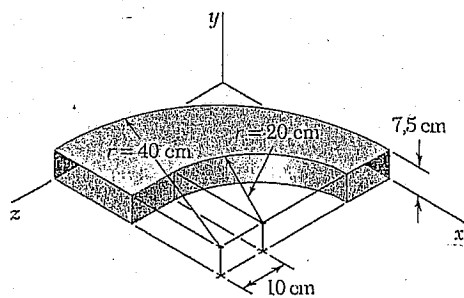


Fig. P5.105

5.106 Um toldo de janela é fabricado a partir de chapa metálica de espessura uniforme. Determine o centro de gravidade do toldo.

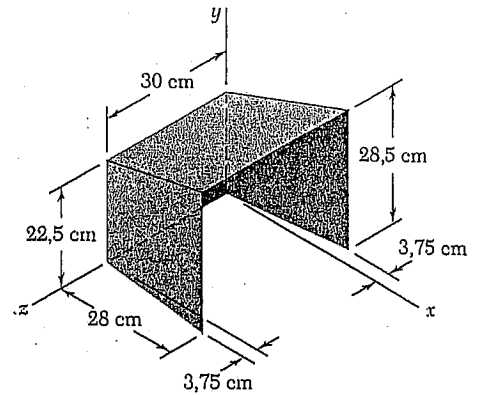


Fig. P5.103

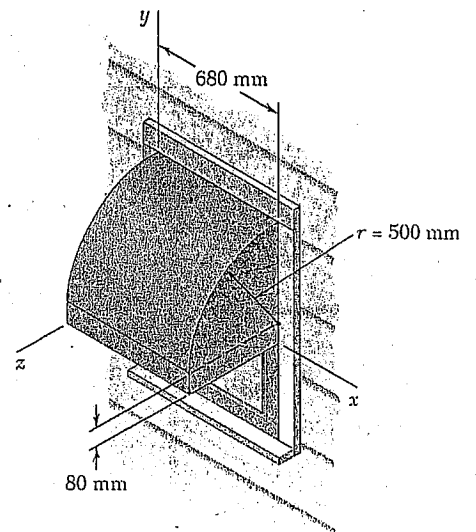


Fig. P5.106

5.107 A tampa dianteira de um relógio de parede é delgada, de plástico, e tem espessura uniforme. Determine o centro de gravidade da tampa.

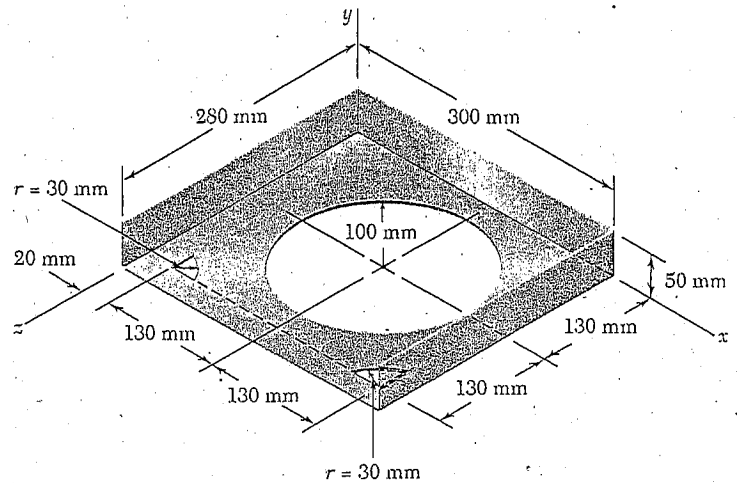


Fig. P5.107

5.108 e 5.109 Um arame de aço fino de seção reta uniforme é dobrado na forma mostrada na figura, sendo o arco BC um quarto de círculo de raio R. Determine seu centro de gravidade.

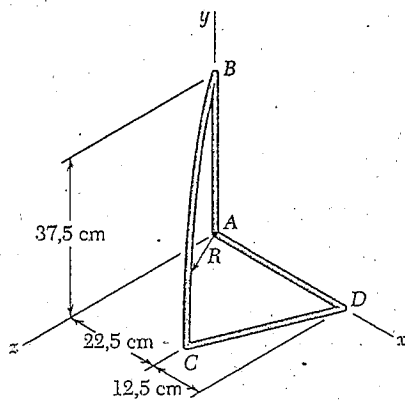


Fig. P5.108

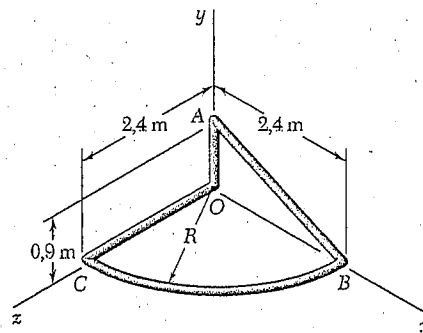


Fig. P5.109

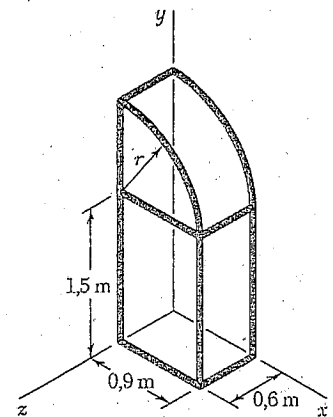


Fig. P5.110

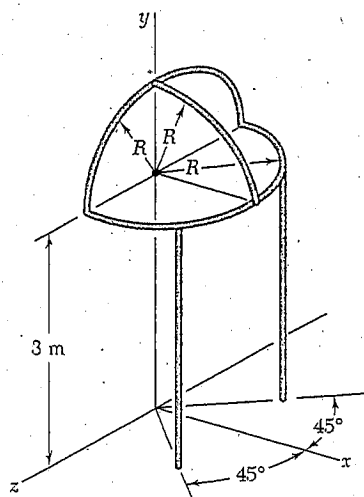


Fig. P5.111

5.110 A estrutura de uma estufa de plantas é construída de tubos uniformes de alumínio. Determine o centro de gravidade da parte da estrutura mostrada na figura.

5.111 O trabalho em metal decorativo colocado na entrada de uma loja é fabricado de pedaços de tubos uniformes de aço estrutural. Sabendo que $R = 1,2$ m, determine o centro de gravidade do trabalho em metal.

5.112 Uma sovela tem um punho de plástico e uma lâmina e haste de aço. Sabendo que o peso específico do plástico é $0,0108 \text{ N/cm}^3$ e o do aço é $0,0818 \text{ N/cm}^3$, determine o centro de gravidade dessa ferramenta.

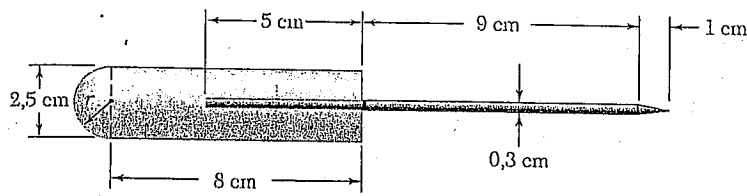


Fig. P5.112

5.113 Uma bucha de bronze é montada na parte interior de uma luva de aço. Sabendo que a massa específica do bronze é 8.800 kg/m^3 e a do aço é 7.860 kg/m^3 , determine o centro de gravidade do conjunto.

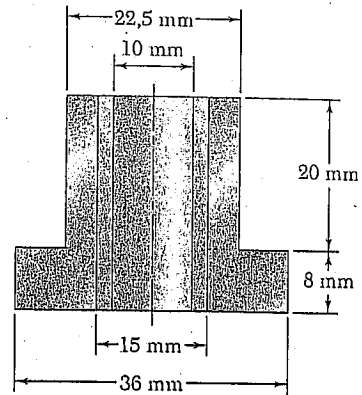


Fig. P5.113

5.114 Um marcador para um caminho de jardim consiste em uma pirâmide regular truncada, esculpida a partir de pedra de peso específico 26.670 N/m^3 . A pirâmide é montada em uma base de aço de espessura h . Sabendo que o peso específico do aço é 81.670 N/m^3 e que chapas de aço estão disponíveis em incrementos de $0,625 \text{ cm}$, especifique a espessura mínima h para a qual o centro de gravidade do marcador está aproximadamente 30 cm acima do topo da base.

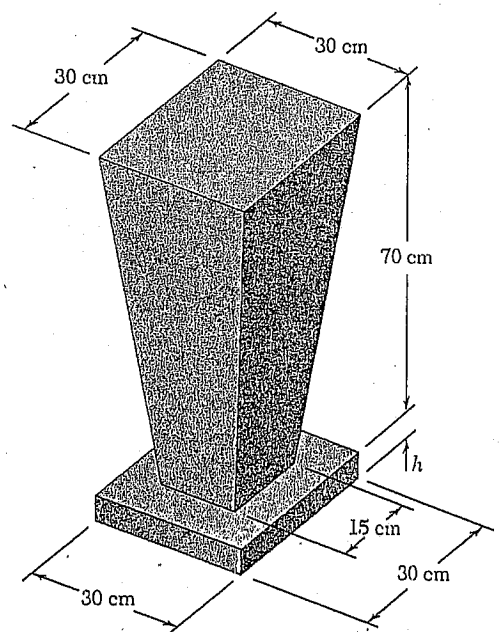


Fig. P5.114

*5.115 As extremidades do banco de parque mostrado na figura são feitas de concreto, enquanto o assento e o encosto são de tábuas de madeira. Cada peça de madeira é de $36 \times 120 \times 1.180 \text{ mm}$. Sabendo que a massa específica do concreto é 2.320 kg/m^3 e a da madeira é 470 kg/m^3 , determine as coordenadas x e y do centro de gravidade do banco.

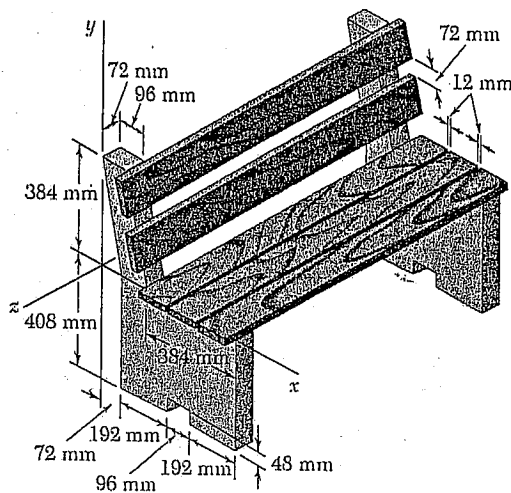


Fig. P5.115

5.116 a 5.118 Determine por integração direta os valores de \bar{x} para os dois sólidos obtidos passando-se um plano de corte vertical através da forma dada na Fig. 5.21. O plano de corte é paralelo à base da forma dada e divide essa forma em dois sólidos de altura igual.

5.116 Um hemisfério.

5.117 Um semi-elipsóide de revolução.

5.118 Um parabolóide de revolução.

5.119 e 5.120 Determine o centróide do sólido obtido pela rotação da área sombreada da figura em torno do eixo x .

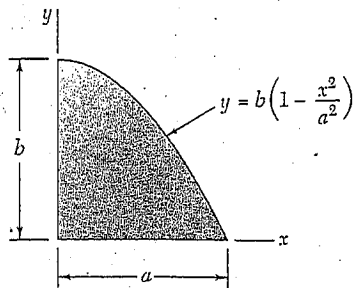


Fig. P5.119

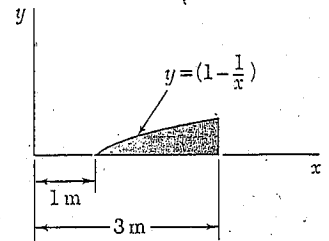


Fig. P5.120

5.121 Determine o centróide do sólido obtido pela rotação da área sombreada da figura em torno da linha $x = h$.

*5.122 Determine o centróide do sólido gerado pela revolução da parte da curva senoidal mostrada na figura em torno do eixo x .

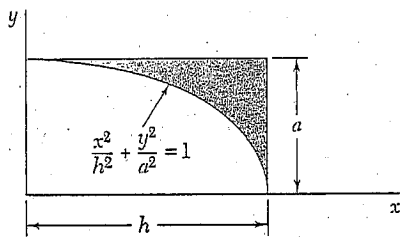


Fig. P5.121

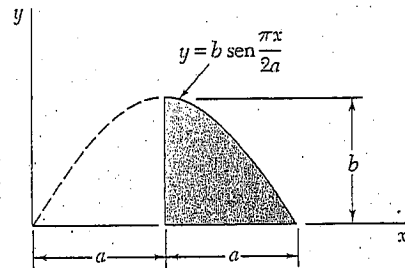


Fig. P5.122 e P5.123

*5.123 Determine o centróide do sólido gerado pela revolução da parte da curva senoidal mostrada na figura em torno do eixo y . (Dica: use uma casca cilíndrica delgada de raio r e espessura dr como o elemento de volume.)

*5.124 Mostre que, para uma pirâmide regular de altura h e n lados ($n = 3, 4, \dots$), o centróide do volume da pirâmide está localizado a uma distância $h/4$ acima da base.

5.125 Determine por integração direta a localização do centróide de metade de uma casca hemisférica delgada e uniforme de raio R .

5.126 Os lados e a base de uma poncheira têm espessura uniforme t . Se $t \ll R$ e $R = 350$ mm, determine a localização do centro de gravidade (a) da poncheira e (b) do ponche.

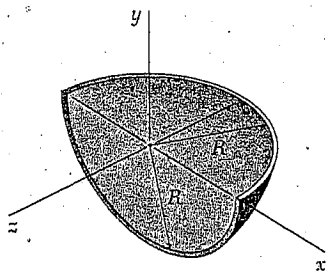


Fig. P5.125

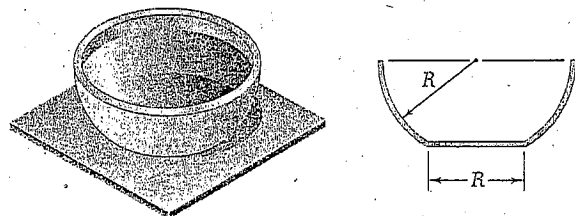


Fig. P5.126

5.127 Depois de nivelar um lote, um construtor coloca quatro estacas para indicar os cantos da base para uma casa. Para prover uma base nivelada firme, o construtor coloca um mínimo de 60 mm de brita abaixo da base. Determine o volume de brita necessário e a coordenada x do centróide do volume de brita. (Dica: o fundo da brita é um plano inclinado, que pode ser representado pela equação $y = a + bx + cz$.)

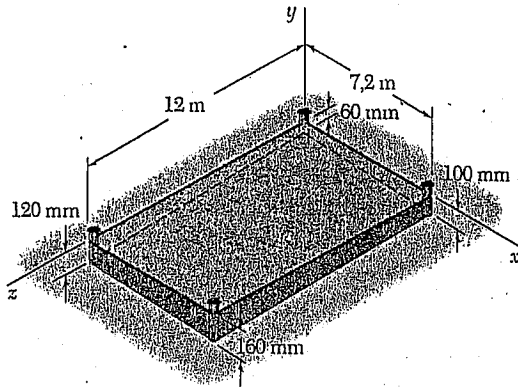


Fig. P5.127

5.128 Determine por integração direta a localização do centróide do sólido limitado pelo plano xz e pela parte mostrada da superfície $y = 16h(ax - x^2)(bz - z^2)/a^2 b^2$.

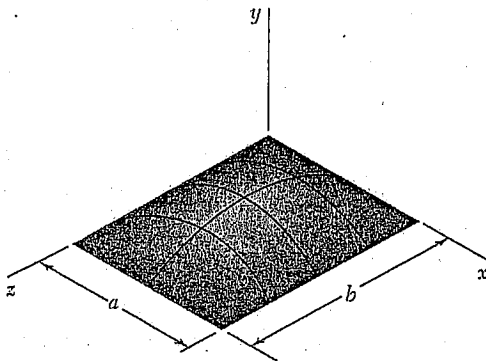


Fig. P5.128

5.129 Determine o centróide da seção mostrada na figura, que foi obtida pelo corte de um cilindro circular por um plano inclinado.

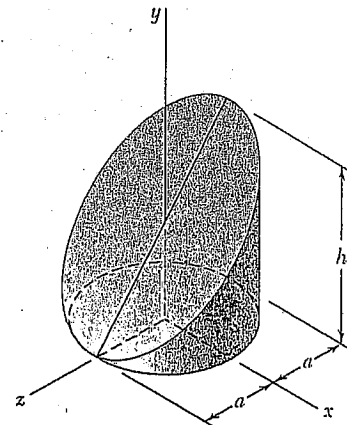


Fig. P5.129

Este capítulo foi dedicado principalmente à determinação do *centro de gravidade* de um corpo rígido, ou seja, à determinação do ponto G no qual uma única força W , chamada de *peso* do corpo, pode ser aplicada para representar o efeito da atração da Terra sobre o corpo.

Centro de gravidade de um corpo bidimensional

Na primeira parte do capítulo, consideramos *corpos bidimensionais*, tais como placas planas e arames contidos no plano xy . Somando os componentes de força na direção vertical z e os momentos em relação aos eixos horizontais x e y [Seção 5.2], deduzimos as relações

$$W = \int dW \quad \bar{x}W = \int x dW \quad \bar{y}W = \int y dW \quad (5.2)$$

que definem o peso do corpo e as coordenadas \bar{x} e \bar{y} do seu centro de gravidade.

Centróide de uma superfície ou curva

No caso de uma *placa plana homogênea de espessura uniforme* [Seção 5.3], o centro de gravidade G da placa coincide com o *centróide* C da *superfície de área* A da placa, cujas coordenadas são definidas pelas relações

$$\bar{x}A = \int x dA \quad \bar{y}A = \int y dA \quad (5.3)$$

Analogamente, a determinação do centro de gravidade de um *arame homogêneo de seção transversal uniforme* contido em um plano se reduz à determinação do *centróide* C da *curva* L representando o arame; temos

$$\bar{x}L = \int x dL \quad \bar{y}L = \int y dL \quad (5.4)$$

Momentos de primeira ordem

As integrais nas Eqs. (5.3) são chamadas de *momentos de primeira ordem* da superfície de área A em relação aos eixos y e x , e são representadas por Q_y e Q_x , respectivamente [Seção 5.4]. Temos

$$Q_y = \bar{x}A \quad Q_x = \bar{y}A \quad (5.6)$$

Os momentos de primeira ordem de uma curva podem ser definidos de maneira análoga.

Propriedades de simetria

A determinação do centróide C de uma superfície ou curva é simplificada quando a superfície ou curva apresenta certas *propriedades de simetria*. Se a superfície ou a curva for simétrica em relação a um eixo,

seu centróide C está nesse eixo; se for simétrica em relação a dois eixos, C está localizado na interseção dos dois eixos; se for simétrica em relação ao centro O , C coincide com O .

As áreas e os centróides de várias formas usuais estão tabelados na Fig. 5.8. Quando é possível dividir uma placa plana em várias dessas formas, podem-se determinar as coordenadas \bar{X} e \bar{Y} do seu centro de gravidade G a partir das coordenadas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ e $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots$ dos centros de gravidade G_1 e G_2, \dots das várias partes [Seção 5.5]. Igualando os momentos em relação aos eixos y e x , respectivamente (Fig. 5.24), temos

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x}W \quad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y}W \quad (5.7)$$

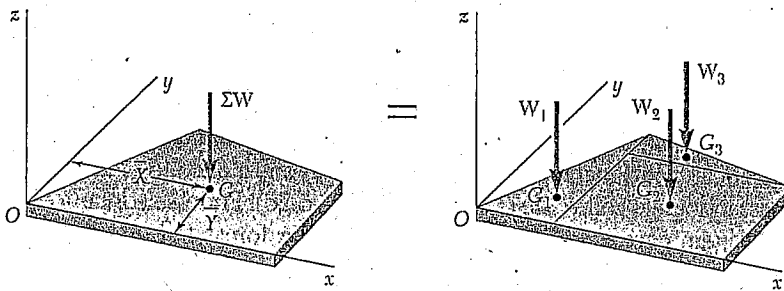


Fig. 5.24

Centro de gravidade de um corpo composto

Se a placa for homogênea e de espessura uniforme, seu centro de gravidade coincide com o centróide C da área da placa, e as Eqs. (5.7) se reduzem a

$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A \quad Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A \quad (5.8)$$

Essas equações fornecem os momentos de primeira ordem da área composta, ou podem ser resolvidas para as coordenadas \bar{X} e \bar{Y} do seu centróide [Problema Resolvido 5.1]. A determinação do centro de gravidade de um arame composto é efetuada de maneira semelhante [Problema Resolvido 5.2].

Determinação do centróide por integração

Quando uma superfície está limitada por curvas analíticas, podem-se determinar as coordenadas do seu centróide por *integração* [Seção 5.6]. Isso pode ser feito avaliando-se ou as integrais duplas nas Eqs. (5.3) ou uma *integral simples* que use um dos elementos de área delgados, retangulares ou em forma de torta mostrados na Fig. 5.12. Representando por \bar{x}_{el} e \bar{y}_{el} as coordenadas do centróide do elemento dA , temos

$$Q_y = \bar{x}A = \int \bar{x}_{el} dA \quad Q_x = \bar{y}A = \int \bar{y}_{el} dA \quad (5.9)$$

É vantajoso usar o mesmo elemento de área para calcular os dois momentos de primeira ordem Q_y e Q_x ; o mesmo elemento pode também ser usado para se determinar a área A [Problema Resolvido 5.4].

Teoremas de Pappus-Guldinus

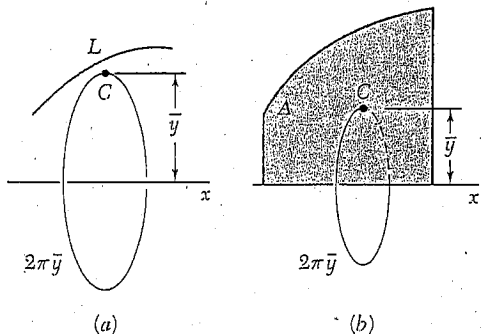


Fig. 5.25

Cargas distribuídas

Os teoremas de Pappus-Guldinus relacionam a determinação da área de uma superfície de revolução ou o volume de um sólido de revolução à determinação do centróide da curva ou superfície geratrizes [Seção 5.7]. A área A da superfície gerada pela rotação de uma curva de comprimento L em torno de um eixo fixo (Fig. 5.25a) é

$$A = 2\pi\bar{y}L \tag{5.10}$$

onde \bar{y} representa a distância do centróide C da curva até o eixo fixo. De modo semelhante, o volume V do sólido gerado pela rotação de uma superfície de área A em torno de um eixo fixo (Fig. 5.25b) é

$$V = 2\pi\bar{y}A \tag{5.11}$$

onde \bar{y} representa a distância do centróide C da superfície até o eixo fixo.

Pode-se também usar o conceito de centróide de uma superfície para resolver outros problemas além daqueles que envolvem o peso de placas planas. Por exemplo, para determinar as reações nos apoios de uma viga [Seção 5.8], podemos substituir uma carga distribuída w por uma carga concentrada W igual em intensidade à área A sob a curva de carregamento e passando pelo centróide C dessa área (Fig. 5.26). Pode-se adotar a mesma abordagem para se determinar a resultante das forças hidrostáticas exercidas em uma placa retangular submersa em um líquido [Seção 5.9].

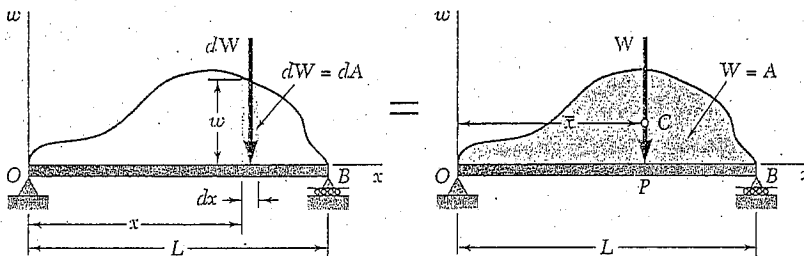


Fig. 5.26

Centro de gravidade de um corpo tridimensional

A última parte do capítulo foi dedicada à determinação do *centro de gravidade G de um corpo tridimensional*. As coordenadas \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} de G foram definidas pelas relações

$$\bar{x}W = \int x dW \quad \bar{y}W = \int y dW \quad \bar{z}W = \int z dW \tag{5.16}$$

Centróide de um sólido

No caso de um *corpo homogêneo*, o centro de gravidade G coincide com o *centróide C do volume V* do corpo; as coordenadas de C são definidas pelas relações

$$\bar{x}V = \int x dV \quad \bar{y}V = \int y dV \quad \bar{z}V = \int z dV \tag{5.18}$$

Se o sólido apresenta um *plano de simetria*, seu centróide C estará nesse plano; se apresenta dois planos de simetria, C será localizado na linha de interseção dos dois planos; se apresenta três planos de simetria que se interceptam em um único ponto, C coincidirá com esse ponto [Seção 5.10].

Os volumes e centróides de várias formas tridimensionais usuais estão tabulados na Fig. 5.21. Quando é possível dividir um corpo em várias dessas formas, podem-se determinar as coordenadas \bar{X} , \bar{Y} e \bar{Z} do seu centro de gravidade G a partir das coordenadas correspondentes dos centros de gravidade de suas várias partes [Seção 5.11]. Temos

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x}W \quad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y}W \quad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{z}W \quad (5.19)$$

Se o corpo é feito de um material homogêneo, seu centro de gravidade coincide com o centróide C do seu volume, e escrevemos [Problemas Resolvidos 5.11 e 5.12]

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x}V \quad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma \bar{y}V \quad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z}V \quad (5.20)$$

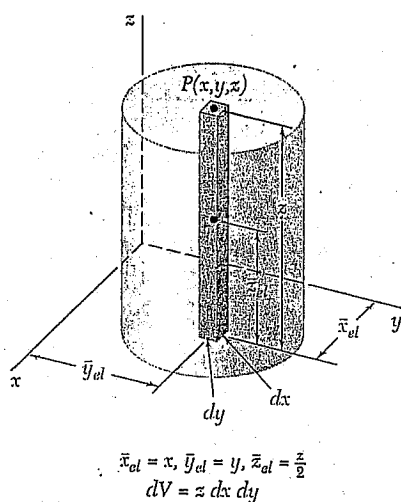


Fig. 5.27

Centro de gravidade de um corpo composto

Determinação do centróide por integração

Quando um volume é limitado por superfícies analíticas, as coordenadas do seu centróide podem ser determinadas por *integração* [Seção 5.12]. Para evitar o cálculo de integrais triplas nas Eqs. (5.18), podemos usar elementos de volume no formato de elementos delgados, como mostra a Fig. 5.27. Representando por \bar{x}_{el} , \bar{y}_{el} e \bar{z}_{el} as coordenadas do centróide do elemento dV , reescrevemos as Eqs. (5.18) como

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} \, dV \quad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el} \, dV \quad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el} \, dV \quad (5.22)$$

que envolvem somente integrais duplas. Se o sólido apresenta *dois planos de simetria*, seu centróide C está localizado na linha de interseção dos mesmos. Escolhendo o eixo x ao longo dessa linha e dividindo o sólido em fatias finas paralelas ao plano yz , podemos determinar C a partir da relação

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} \, dV \quad (5.23)$$

com uma *integração simples* [Problema Resolvido 5.13]. Para um corpo de revolução, essas fatias são circulares e seu volume é dado na Fig. 5.28.

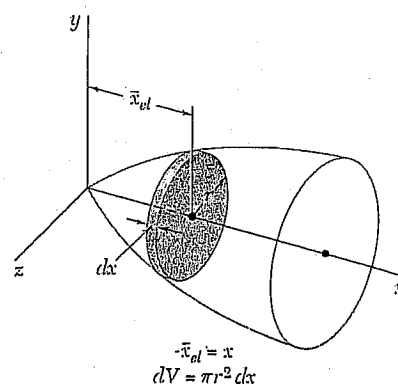


Fig. 5.28

PROBLEMAS PARA REVISÃO DO TEMA

5.130 Determine o centróide da área plana mostrada.

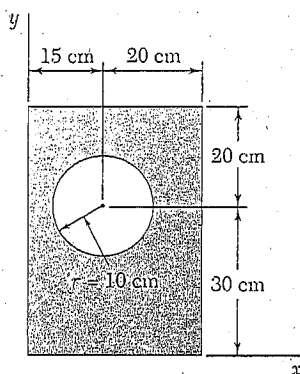


Fig. P5.130

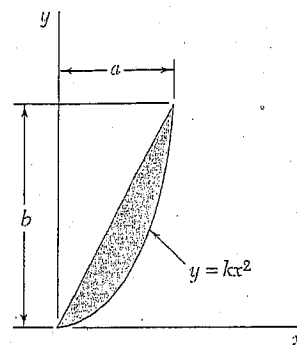


Fig. P5.131

5.131 Para a área mostrada, determine a razão a/b para a qual $\bar{x} = \bar{y}$.

5.132 Localize o centróide da área plana mostrada.

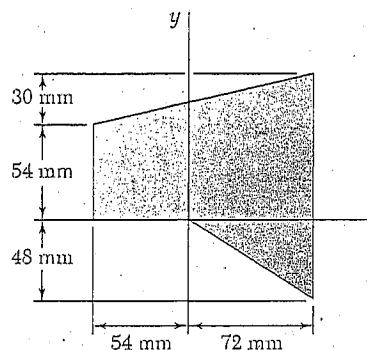


Fig. P5.132

5.133 Determine por integração direta o centróide da área mostrada. Expresse sua resposta em termos de a e h .

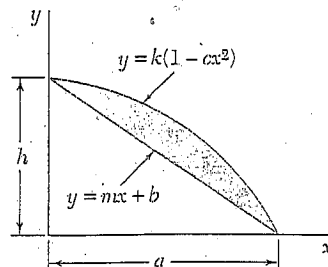


Fig. P5.133

5.134 O elemento $ABCDE$ é um componente de um móvel e é conformado a partir de uma única peça de tubulação de alumínio. Sabendo que o elemento é sustentado em C e que $l = 2$ m, determine a distância d de modo que a parte BCD do elemento seja horizontal.

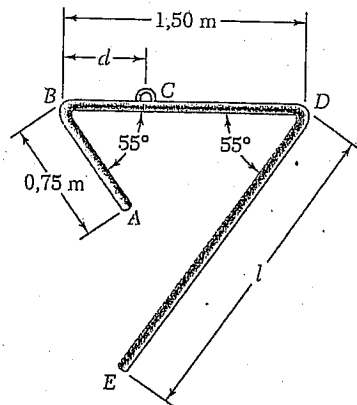


Fig. P5.134

5.135 Um furo cilíndrico é perfurado com broca através do centro de uma esfera de rolamento de aço, mostrada na figura em corte transversal. Representando o comprimento do furo por L , mostre que o volume de aço remanescente é igual ao volume de uma esfera de diâmetro L .

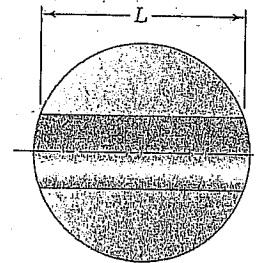


Fig. P5.135

5.136 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (a) a intensidade e a localização da resultante da carga distribuída, e (b) as reações nos apoios da viga.

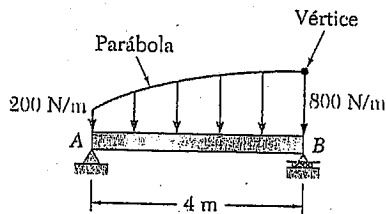


Fig. P5.136

5.137 Determine as reações nos apoios da viga para o carregamento mostrado na figura.

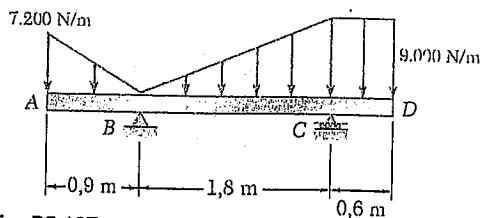


Fig. P5.137

5.138 Determine o centro de gravidade da lâmina de metal conformada mostrada na figura.

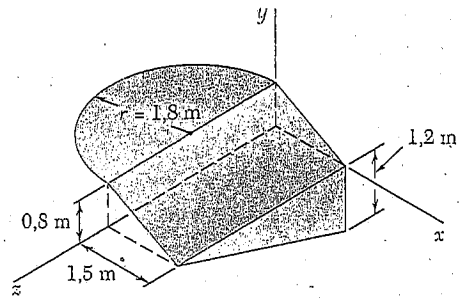


Fig. P5.138

5.139 O corpo composto mostrado na figura é conformado pela remoção de um semi-elipsóide de revolução de semi-eixo maior h e semi-eixo menor $a/2$ a partir de um hemisfério de raio a . Determine (a) a coordenada y do centróide quando $h = a/2$ e (b) a razão h/a para a qual $\bar{y} = -0,4a$.

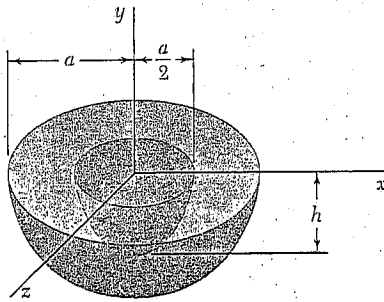


Fig. P5.139

5.140 Um arame de aço fino de seção transversal uniforme é dobrado na forma mostrada na figura. Determine seu centro de gravidade.

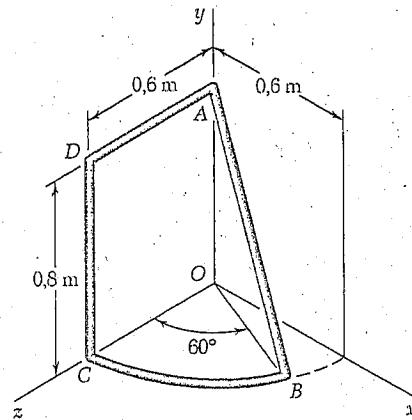


Fig. P5.140

5.141 Determine o centróide do sólido obtido pela rotação da superfície sombreada em torno do eixo x .

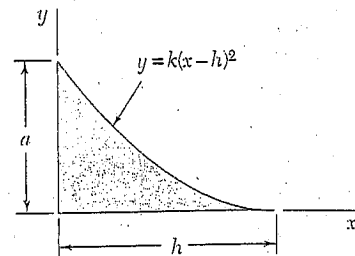


Fig. P5.141

PROBLEMAS PARA UTILIZAÇÃO DO COMPUTADOR

5.C1 Para o trapézio mostrado na figura, determine as coordenadas x e y do centróide, sabendo que $h_1 = a/n^2$ e $h_2 = a/n$. Plote em um gráfico os valores de \bar{x} e \bar{y} para $1 \leq n \leq 4$ e $a = 15$ cm.

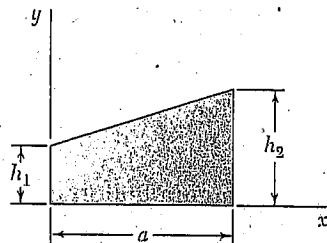


Fig. P5.C1

5.C2 Determine a distância h para a qual o centróide da área sombreada está tão alto quanto possível acima de BB' . Plote em um gráfico a razão h/b como função de k para $0,125 \leq k \leq 0,875$.

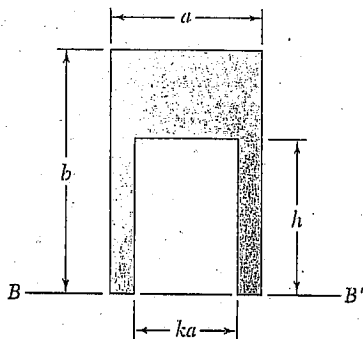


Fig. P5.C2

5.C3 Aproxime o arco geral mostrado na figura usando uma série de n retângulos, cada qual de largura Δa e da forma $bcc' b'$, e em seguida use um aplicativo computacional para calcular as coordenadas do centróide da área. Determine o centróide quando (a) $m = 2$, $a = 10$ cm, $h = 10$ cm; (b) $m = 2$, $a = 10$ cm, $h = 62,5$ cm; (c) $m = 5$, $a = 10$ cm, $h = 10$ cm; (d) $m = 5$, $a = 10$ cm, $h = 62,5$ cm. Em cada caso compare as respostas obtidas aos valores exatos obtidos para \bar{x} e \bar{y} calculados a partir das fórmulas dadas na Fig. 5.8A e determine o erro percentual.

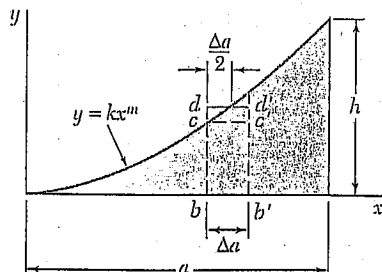


Fig. P5.C3

5.C4 Determine o volume e a área superficial do sólido obtido pela rotação da superfície mostrada na figura em torno do eixo y quando $a = 80$ mm e (a) $n = 1$, (b) $n = 2$ e (c) $n = 3$.

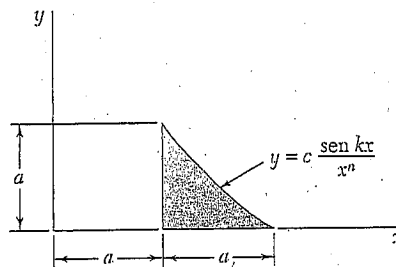


Fig. P5.C4

5.C5 A comporta AB de largura uniforme w é mantida na posição mostrada na figura por uma articulação ao longo de sua aresta superior A e por um único pino de cisalhamento localizado no centro de sua aresta inferior B . Determine a força no pino de cisalhamento B como função da profundidade da água d . Plote em um gráfico a força no pino B como função da profundidade da água para $0,54 \text{ m} \leq d \leq 1,5 \text{ m}$ quando (a) $w = 0,25 \text{ m}$, (b) $w = 0,50 \text{ m}$, (c) $w = 0,75 \text{ m}$ e (d) $w = 1 \text{ m}$. A massa específica da água é $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$.

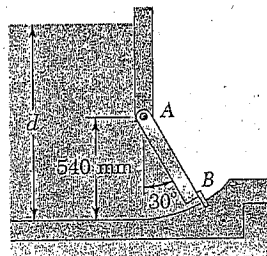


Fig. P5.C5

5.C6 Um tanque aberto deve ser lentamente enchido com água. Determine a resultante, a direção e o sentido da força devido à pressão exercida pela água sobre uma seção de $1,2 \text{ m}$ de largura do lado ABC do tanque como função da profundidade d . Usando um aplicativo computacional, plote em um gráfico a força devida à pressão como função de d para $0 \leq d \leq 3 \text{ m}$. O peso específico da água é 10.000 N/m^3 .

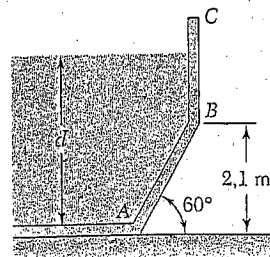


Fig. P5.C6

5.C7 A figura mostra a seção transversal de uma barragem de concreto. Para uma seção de barragem de 1 m de largura, plote em um gráfico a intensidade da resultante das forças de reação exercidas pelo solo na base AB da barragem e a resultante das forças devidas à pressão exercida pela água sobre a face BC da barragem como funções da profundidade d da água para $0 \leq d \leq 16$ m. As massas específicas do concreto e da água são $2,40 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ e 10^3 kg/m^3 , respectivamente.

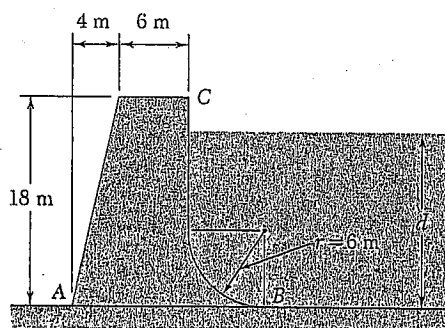


Fig. P5.C7

5.C8 Uma viga está sujeita ao carregamento mostrado na figura. Plote em um gráfico a intensidade das reações verticais nos apoios A e B como funções da distância a para $0 \leq a \leq 3$ m.

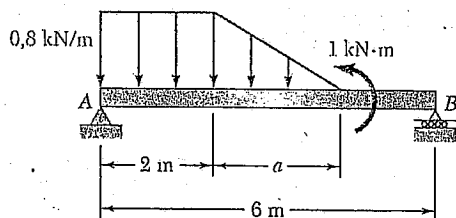


Fig. P5.C8

5.C9 A estrutura tridimensional mostrada na figura é fabricada a partir de cinco hastes finas de aço de igual diâmetro. Usando um aplicativo computacional, determine as coordenadas do centro de gravidade da estrutura. Determine as coordenadas do centro de gravidade quando (a) $h = 12$ m, $R = 4,5$ m, $\alpha = 90^\circ$; (b) $h = 55$ cm, $R = 75$ cm, $\alpha = 30^\circ$; (c) $h = 21$ m, $R = 19,5$ m, $\alpha = 135^\circ$.

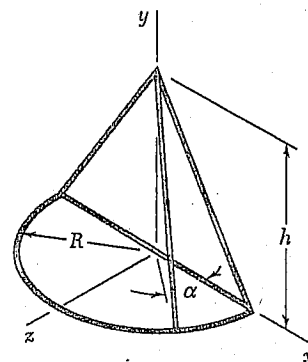


Fig. P5.C9

5.C10 Determine a coordenada y do centróide do corpo mostrado quando $h = nb$ e $h = n^2b$. Plote em um gráfico \bar{y} como função de n para ambos os casos usando $1 \leq n \leq 10$ e (a) $b = 10$ cm, (b) $b = 15$ cm e (c) $b = 20$ cm.

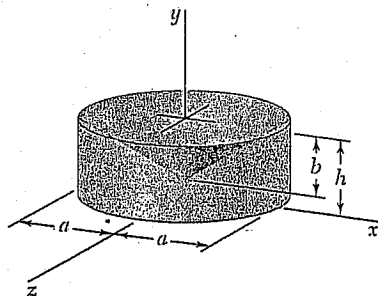
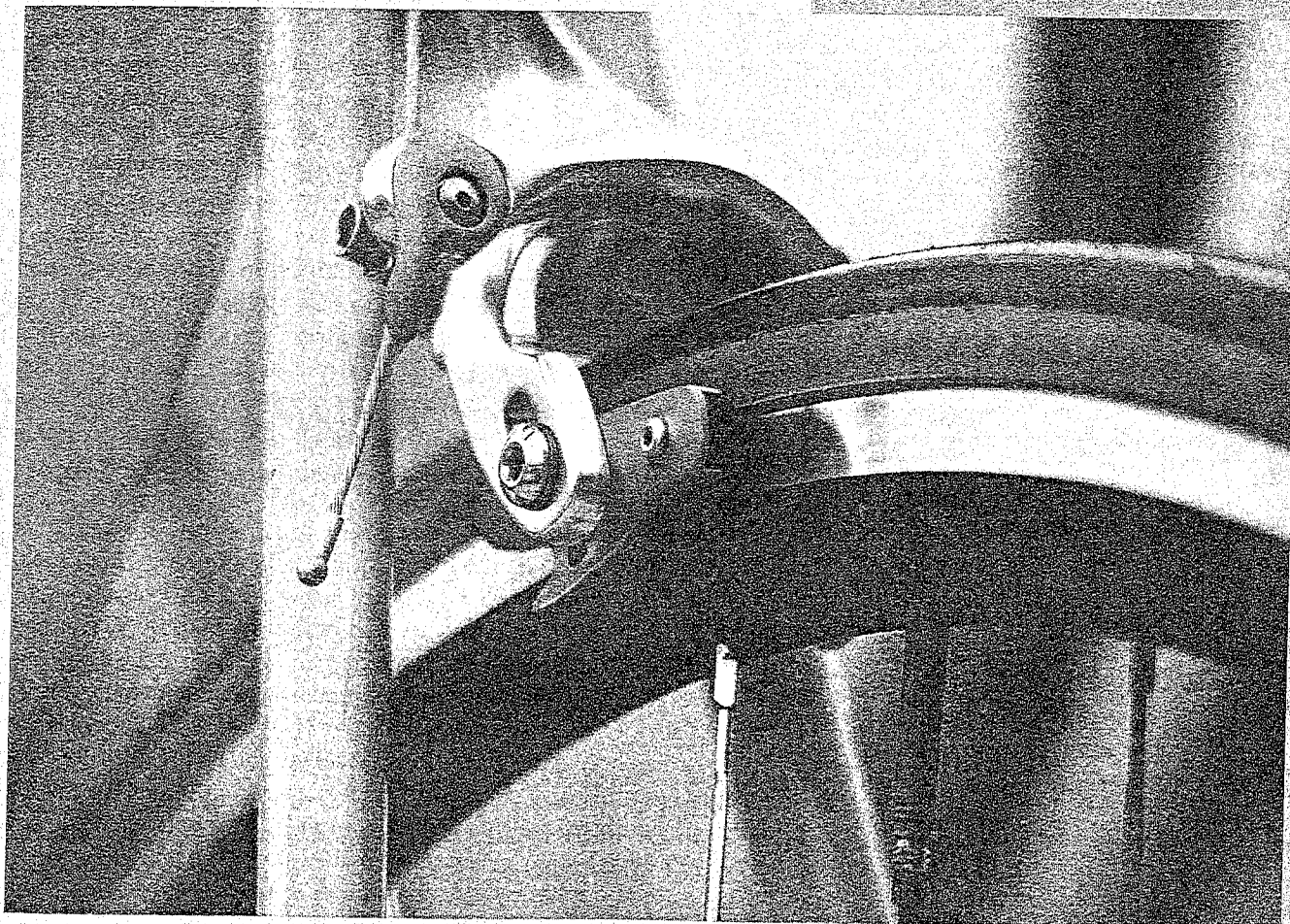


Fig. P5.C10

Atrito

8



A operação de frear a bicicleta mostrada na foto depende das forças normais e das forças de atrito exercidas pelas sapatas do freio sobre o aro da roda à medida que as sapatas são pressionadas contra o aro.

ATRITO

- 8.1 Introdução
- 8.2 As Leis de Atrito Seco. Coeficientes de Atrito
- 8.3 Ângulos de Atrito
- 8.4 Problemas que Envolvem Atrito Seco
- 8.5 Cunhas
- 8.6 Parafusos de Rosca Quadrada
- 8.7 Mancais de Deslizamento. Atrito em Eixo
- 8.8 Mancais de Escora. Atrito em Disco
- 8.9 Atrito em Roda. Resistência ao Rolamento
- 8.10 Atrito em Correia

8.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores, considerou-se que superfícies que estão em contato são *sem atrito* (lisas) ou *rugosas* (ásperas). Se forem sem atrito, a força exercida por uma superfície sobre a outra será normal às superfícies e as duas superfícies podem mover-se livremente uma em relação à outra. Se forem rugosas, admite-se que forças tangenciais podem se desenvolver a ponto de evitar o movimento de uma superfície em relação à outra.

Esse ponto de vista é simplificado. Na verdade, não existe uma superfície perfeitamente sem atrito. Quando duas superfícies estão em contato, forças tangenciais, chamadas *forças de atrito*, sempre irão aparecer ao tentarmos mover uma superfície em relação à outra. Por outro lado, essas forças de atrito são de intensidade limitada e não impedirão o movimento caso sejam aplicadas forças suficientemente grandes. Desse modo, a distinção entre superfícies sem atrito e superfícies rugosas é mera questão de gradação. Isso será visto mais claramente no presente capítulo, dedicado ao estudo do atrito e suas aplicações a situações corriqueiras de engenharia.

Existem dois tipos de atrito: o *atrito seco*, por vezes denominado *atrito de Coulomb*, e o *atrito fluido*. O atrito fluido aparece entre camadas de fluido que se movem a diferentes velocidades. O atrito fluido é de grande importância em problemas que envolvam o escoamento de fluidos através de tubos e orifícios ou que tratem de corpos imersos em fluidos em movimento. Esse tipo de atrito também é básico na análise do movimento de *mecanismos lubrificados*. Tais problemas são levados em consideração em textos sobre mecânica dos fluidos. O presente estudo é limitado ao atrito seco, ou seja, a problemas que envolvam corpos rígidos em contato com superfícies *sem lubrificação*.

Na primeira parte deste capítulo, será analisado o equilíbrio de diversos corpos e estruturas rígidas, admitindo-se atrito seco nas superfícies de contato. Em seguida, serão consideradas algumas situações específicas de engenharia em que o atrito seco desempenha papel importante: cunhas, parafusos de rosca quadrada, mancais de deslizamento, mancais de escora, resistência ao rolamento e atrito em correia.

8.2 AS LEIS DE ATRITO SECO. COEFICIENTES DE ATRITO

As leis de atrito seco são exemplificadas pelo seguinte experimento: um bloco de peso W é colocado sobre uma superfície plana horizontal (Fig. 8.1a). As forças que atuam sobre o bloco são seu peso W e a reação da superfície. Como o peso não tem componente horizontal, a reação da superfície também não apresenta componente horizontal; logo, a reação é *normal* à superfície e é representada por N na Fig. 8.1a. Suponha agora que uma força horizontal P seja aplicada sobre o bloco (Fig. 8.1b). Se P for de pouca intensidade, o bloco não se moverá; portanto, alguma outra força horizontal deverá existir para contrabalançar P . Essa outra força é a *força de atrito estático* F , que na verdade é resultante de um grande número de forças que atuam sobre toda a superfície de contato entre o bloco e o plano. A natureza dessas forças não é conhecida exatamente, mas, em geral, admite-se que elas são devidas a irregularidades das superfícies que estão em contato e, em certa medida, à atração molecular.

Se a força P aumentar, a força de atrito F também aumentará, permanecendo oposta a P até que sua intensidade atinja um certo *valor máximo* F_m (Fig. 8.1c). Se P aumentar ainda mais, a força de atrito não mais poderá contrabalançá-la e o bloco começará a deslizar.¹ Tão logo o bloco esteja em movimento, a intensidade de F cai de F_m para um valor menor F_k . Isto porque há menos interpenetração entre as irregularidades das superfícies que estão em contato quando estas se movem uma em relação à outra. Daí em diante, o bloco manterá um deslizamento a velocidade crescente, enquanto a força de atrito, representada por F_k e denominada *força de atrito cinético*, permanecerá aproximadamente constante.

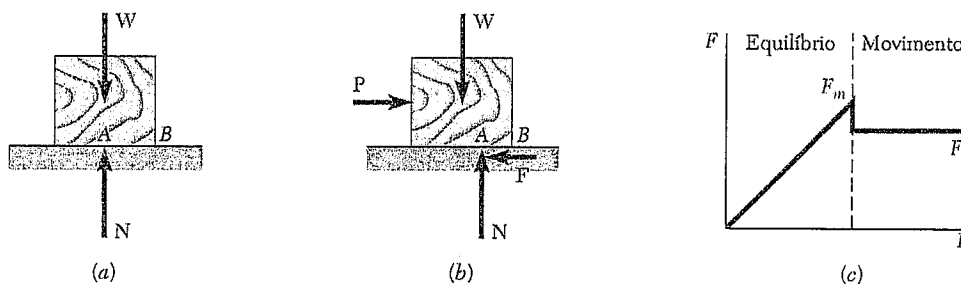


Fig. 8.1

Evidências experimentais mostram que o valor máximo F_m da força de atrito estático é proporcional ao componente normal N da reação da superfície. Temos

$$F_m = \mu_s N \quad (8.1)$$

sendo μ_s uma constante denominada *coeficiente de atrito estático*. De modo semelhante, a intensidade F_k da força de atrito cinético pode ser colocada na forma

$$F_k = \mu_k N \quad (8.2)$$

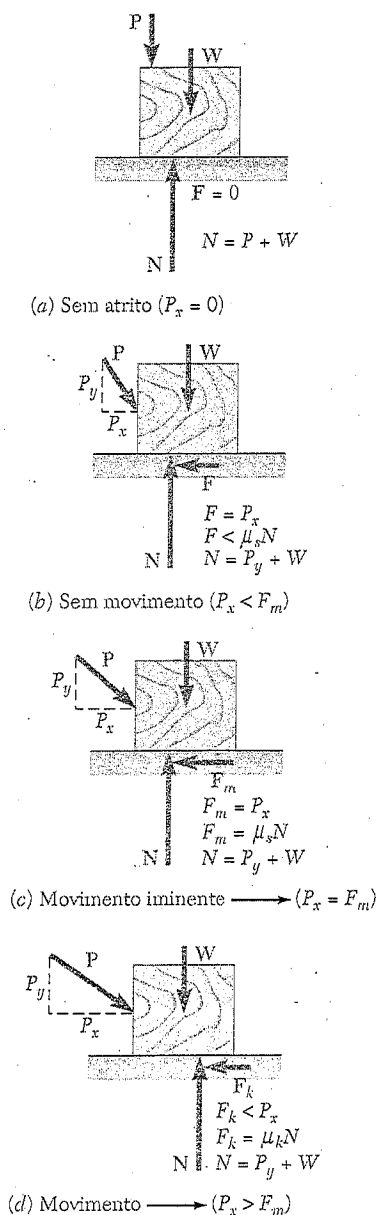
sendo μ_k uma constante denominada *coeficiente de atrito cinético*. Os coeficientes de atrito μ_s e μ_k não dependem da área das superfícies que estão em contato. Ambos os coeficientes, porém, dependem fortemente da *natureza* das superfícies que estão em contato. Como eles dependem também da condição exata das superfícies, seus valores raramente são conhecidos com uma precisão maior que 5%. Valores aproximados dos coeficientes de atrito estático para diversas superfícies secas estão dados na Tabela 8.1. Os valores correspondentes do coeficiente de atrito cinético seriam algo em torno de 25% menores. Como os coeficientes de atrito são grandezas adimensionais, os valores dados na Tabela 8.1 podem ser usados com qualquer sistema de unidades.

¹ Deve-se observar que, à medida que a intensidade F da força de atrito aumenta de zero até F_m , o ponto de aplicação A da resultante N das forças normais de contato desloca-se para a direita, de modo que os binários formados, respectivamente, por P e F e por W e N permaneçam contrabalançados. Caso N atinja B antes que F atinja seu valor máximo F_m , o bloco irá virar em torno de B antes que possa começar a deslizar (ver Problemas 8.15 e 8.16).

Tabela 8.1 Valores aproximados do coeficiente de atrito estático para superfícies secas

Metal sobre metal	0,15 a 0,60
Metal sobre madeira	0,20 a 0,60
Metal sobre pedra	0,30 a 0,70
Metal sobre couro	0,30 a 0,60
Madeira sobre madeira	0,25 a 0,50
Madeira sobre couro	0,25 a 0,50
Pedra sobre pedra	0,40 a 0,70
Terra sobre terra	0,20 a 1,00
Borracha sobre concreto	0,60 a 0,90

A partir da descrição fornecida anteriormente, quatro situações aparentemente podem ocorrer quando um corpo rígido está em contato com uma superfície horizontal:



1. As forças aplicadas sobre o corpo não tendem a movê-lo ao longo da superfície de contato; não há força de atrito (Fig. 8.2a).
2. As forças aplicadas tendem a mover o corpo ao longo da superfície de contato, mas não são grandes o suficiente para colocá-lo em movimento. Pode-se determinar a força de atrito F que se desenvolve resolvendo-se as equações de equilíbrio para o corpo. Como não há evidência de que F tenha atingido seu valor máximo, a equação $F_m = \mu_s N$ não pode ser usada para se determinar a força de atrito (Fig. 8.2b).
3. As forças aplicadas são tais que o corpo está prestes a deslizar. Dizemos que o movimento é iminente. A força de atrito F atingiu seu valor máximo F_m e, junto com a força normal N , contrabalança as forças aplicadas. Tanto as equações de equilíbrio quanto a equação $F_m = \mu_s N$ podem ser usadas. Observemos também que a força de atrito tem sentido contrário ao do movimento iminente (Fig. 8.2c).
4. O corpo está deslizando sob ação das forças aplicadas e as equações de equilíbrio não mais se aplicam. Entretanto, F é agora igual a F_k e a equação $F_k = \mu_k N$ pode ser usada. O sentido de F_k é contrário ao do movimento (Fig. 8.2d).

8.3 ÂNGULOS DE ATRITO

Convém às vezes substituir a força normal N e a força de atrito F pela sua resultante R . Consideremos novamente um bloco de peso W em repouso sobre uma superfície plana horizontal. Se nenhuma força horizontal é aplicada sobre o bloco, a resultante R reduz-se à força normal N (Fig. 8.3a). Porém, se a força aplicada P tiver um componente horizontal P_x que tenda a mover o bloco, a força R terá um componente horizontal F e, portanto, formará um ângulo ϕ com a normal à superfície

Fig. 8.2

(Fig. 8.3b). Se P_x aumentar até o movimento tornar-se iminente, o ângulo entre \mathbf{R} e a normal crescerá e atingirá um valor máximo (Fig. 8.3c). Esse valor é denominado *ângulo de atrito estático* e é representado por ϕ_s . Da geometria da Fig. 8.3c, observamos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \phi_s &= \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_s N}{N} \\ \operatorname{tg} \phi_s &= \mu_s \end{aligned} \quad (8.3)$$

Se o movimento de fato ocorrer, a intensidade da força de atrito cairá para F_k ; de modo similar, o ângulo ϕ entre \mathbf{R} e \mathbf{N} cairá para um valor menor ϕ_k , denominado *ângulo de atrito cinético* (Fig. 8.3d). Da geometria da Fig. 8.3d, escrevemos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \phi_k &= \frac{F_k}{N} = \frac{\mu_k N}{N} \\ \operatorname{tg} \phi_k &= \mu_k \end{aligned} \quad (8.4)$$

Outro exemplo mostrará como o uso do ângulo de atrito pode ser vantajoso na análise de certos tipos de problema. Considere um bloco em repouso sobre uma prancha sujeito apenas ao seu peso \mathbf{W} e à reação \mathbf{R} da prancha. A prancha pode assumir qualquer inclinação desejada. Se a prancha está na horizontal, a força \mathbf{R} exercida pela prancha sobre o bloco é perpendicular à prancha e contrabalança o peso \mathbf{W} (Fig. 8.4a). Se a prancha assumir um pequeno ângulo de inclinação θ , a força \mathbf{R} se desviará da perpendicular à prancha do ângulo θ e continuará a contrabalançar \mathbf{W} (Fig. 8.4b); a força terá então um componente normal \mathbf{N} de intensidade $N = W \cos \theta$ e um componente tangencial \mathbf{F} de intensidade $F = W \sin \theta$.

Se continuarmos a aumentar o ângulo de inclinação, o movimento logo se tornará iminente. Nesse momento, o ângulo entre \mathbf{R} e a normal terá atingido seu valor máximo ϕ_s (Fig. 8.4c). O valor do ângulo de inclinação correspondente ao movimento iminente é denominado *ângulo de repouso*. Fica claro que o ângulo de repouso equivale ao ângulo de atrito estático ϕ_s . Se o ângulo de inclinação θ aumentar ainda mais, o movimento terá início e o ângulo entre \mathbf{R} e a normal cairá para o valor menor ϕ_k (Fig. 8.4d). A reação \mathbf{R} não mais será vertical e as forças que atuam sobre o bloco estarão desequilibradas.

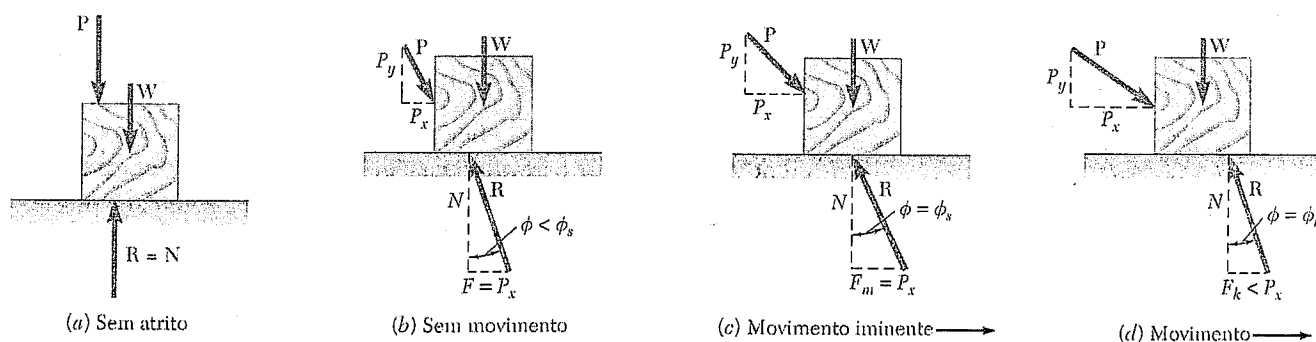


Fig. 8.3

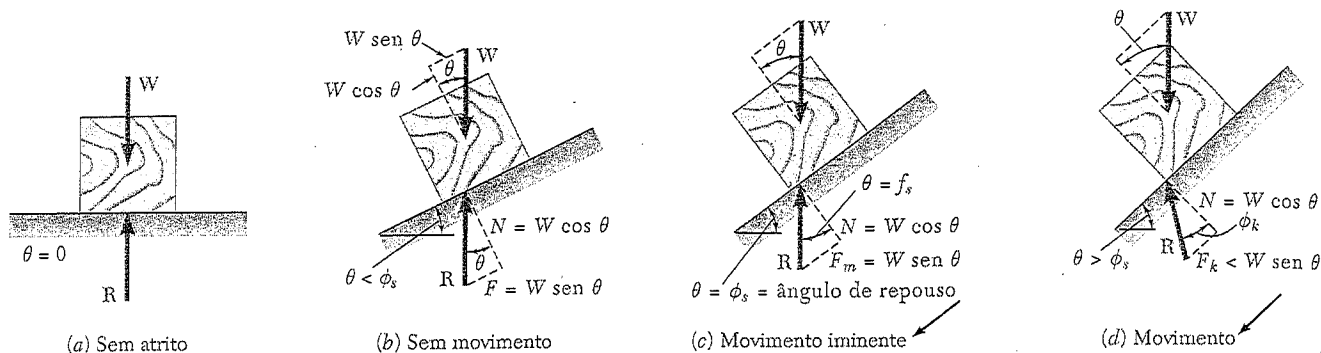


Fig. 8.4

8.4 PROBLEMAS QUE ENVOLVEM ATRITO SECO



Foto 8.1 O coeficiente de atrito estático entre um dos pacotes e a correia transportadora inclinada deve ser grande o suficiente para possibilitar que o pacote seja transportado sem deslizar.

Encontram-se problemas que envolvem atrito seco em muitas aplicações de engenharia. Alguns tratam de situações simples, tais como as do bloco deslizando sobre um plano, descrito nas seções anteriores. Outros envolvem situações mais complicadas como as do Problema Resolvido 8.3; muitos tratam da estabilidade de corpos rígidos em movimento acelerado e serão estudados em dinâmica. Além disso, diversas máquinas e mecanismos comuns podem ser analisados pela aplicação das leis do atrito seco. Incluem-se aqui cunhas, parafusos, mancais de deslizamento e de escora e transmissões por correia. Esses casos serão estudados nas próximas seções.

Os métodos a serem adotados na resolução de problemas que envolvam atrito seco são os mesmos já adotados nos capítulos anteriores. Se o problema envolve apenas um movimento de translação, sem possíveis rotações, o corpo em consideração geralmente pode ser tratado como uma partícula, e podem-se aplicar os métodos do Cap. 2. Se o problema envolve uma possível rotação, o corpo deve ser considerado rígido e devem-se adotar os métodos do Cap. 4. Se a estrutura considerada é constituída de diversas partes, deve-se utilizar o princípio de ação e reação, como foi feito no Cap. 6.

Se o corpo considerado sofrer ação de mais do que três forças (incluindo as reações das superfícies de contato), a reação de cada superfície será representada pelos seus componentes N e F e o problema será resolvido a partir das equações de equilíbrio. Se apenas três forças atuam sobre o corpo em consideração, pode ser mais conveniente representar cada reação por uma força única R e resolver o problema desenhando um triângulo de forças.

A maioria dos problemas que envolvem atrito seco recai em um dos seguintes três grupos: no primeiro grupo de problemas, todas as forças aplicadas são dadas e os coeficientes de atrito são conhecidos; devemos então determinar se o corpo considerado permanecerá em repouso ou deslizará. A força de atrito F necessária se para manter o equilíbrio é desconhecida (sua intensidade não é igual a $\mu_s N$) e deve-se determiná-la juntamente com a força normal N traçando-se um diagrama de corpo livre e resolvendo-se as equações de equilíbrio (Fig. 8.5a). O valor encontrado para a intensidade F da força de atrito é então comparado com o valor máximo $F_m = \mu_s N$. Se F for menor ou igual a F_m , o corpo

permanecerá em repouso. Se o valor encontrado para F for maior que F_m , o equilíbrio não poderá ser mantido e ocorrerá movimento; a intensidade real da força de atrito será então $F_k = \mu_k N$.

Nos problemas do *segundo grupo*, são dadas todas as forças aplicadas e sabe-se que o movimento é iminente; devemos então determinar o valor do coeficiente de atrito estático. Novamente, determinamos a força de atrito e a força normal traçando um diagrama de corpo livre e resolvendo as equações de equilíbrio (Fig. 8.5b). Como agora sabemos que o valor encontrado para F é igual ao valor máximo F_m , pode-se determinar o coeficiente de atrito escrevendo-se e resolvendo-se a equação $F_m = \mu_s N$.

Nos problemas do *terceiro grupo*, é dado o coeficiente de atrito estático e sabe-se que o movimento é iminente em uma dada direção; devemos então determinar a intensidade ou a direção de uma das forças aplicadas. A força de atrito deve ser mostrada no diagrama de corpo livre com um *sentido contrário ao do movimento iminente* e com uma intensidade $F_m = \mu_s N$ (Fig. 8.5c). Podem-se então escrever as equações de equilíbrio e determinar a força desejada.

Conforme se observou anteriormente, quando apenas três forças estiverem envolvidas pode ser mais conveniente representar a reação da superfície por uma força única R e resolver o problema traçando-se um triângulo de forças. Tal resolução é empregada no Problema Resolvido 8.2.

Quando dois corpos A e B estão em contato (Fig. 8.6a), as forças de atrito exercidas, respectivamente, por A sobre B e por B sobre A são iguais e opostas (terceira lei de Newton). Ao se traçar o diagrama de corpo livre de um dos corpos, é importante incluir a força de atrito apropriada com seu sentido correto. Deve-se então observar a seguinte regra: *o sentido da força de atrito que atua sobre A é contrário ao do movimento (ou movimento iminente) de A observado de B* (Fig. 8.6b).² O sentido da força de atrito que atua sobre B é determinado de modo similar (Fig. 8.6c). Observe-se que o movimento de A observado de B é um *movimento relativo*. Por exemplo, se o corpo A está parado e o corpo B se move, o corpo A terá um movimento relativo a B , isto é, com relação a B . Além disso, se ambos os corpos A e B movem-se para baixo mas B é mais rápido que A , o movimento do corpo A observado do corpo B é para cima.

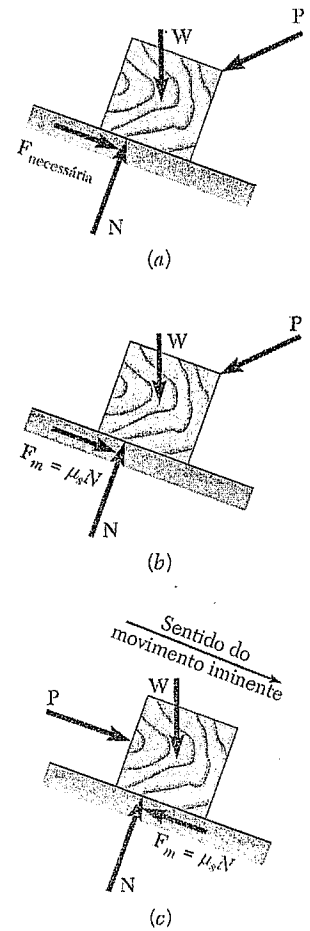


Fig. 8.5

² Portanto, é o mesmo sentido do movimento de B observado de A .

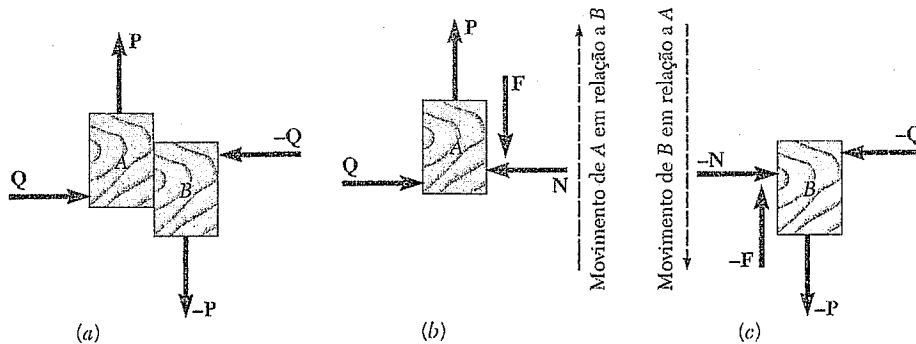
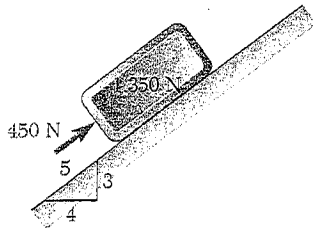


Fig. 8.6

PROBLEMA RESOLVIDO 8.1



Uma força de 450 N atua do modo mostrado na figura sobre um bloco de 1.350 N posicionado sobre um plano inclinado. Os coeficientes de atrito entre o bloco e o plano são $\mu_s = 0,25$ e $\mu_k = 0,20$. Determine se o bloco está em equilíbrio e encontre a força de atrito.

SOLUÇÃO

Força necessária para o equilíbrio. Determinemos primeiramente o valor da força de atrito *necessária para se manter o equilíbrio*. Admitindo que F seja direcionada para baixo e para a esquerda, traçamos o diagrama de corpo livre do bloco e escrevemos

$$+\nearrow \sum F_x = 0: \quad 450 \text{ N} - \frac{3}{5}(1.350 \text{ N}) - F = 0$$

$$F = -360 \text{ N} \quad \mathbf{F = 360 \text{ N} \nearrow}$$

$$+\nwarrow \sum F_y = 0: \quad N - \frac{4}{5}(1.350 \text{ N}) = 0$$

$$N = +1.080 \text{ N} \quad \mathbf{N = 1.080 \text{ N} \nwarrow}$$

A força F necessária para se manter o equilíbrio é de 360 N, direcionada para cima e para a direita; logo, a tendência do bloco é deslocar-se plano abaixo.

Força de atrito máxima. A intensidade da força de atrito máxima que pode se desenvolver é

$$F_m = \mu_s N \quad F_m = 0,25(1.080 \text{ N}) = 270 \text{ N}$$

Como o valor da força necessária para se manter o equilíbrio (360 N) é maior que o valor máximo que pode ser obtido (270 N), o equilíbrio não será mantido e o **bloco deslizará plano abaixo**.

Valor real da força de atrito. A intensidade da força de atrito real é obtida como se segue:

$$F_{\text{real}} = F_k = \mu_k N$$

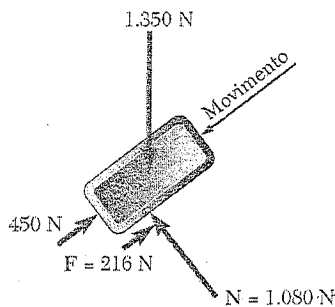
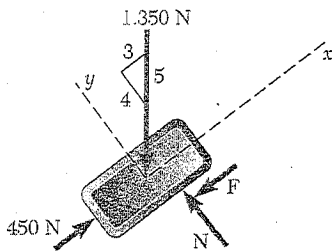
$$= 0,20(1.080 \text{ N}) = 216 \text{ N}$$

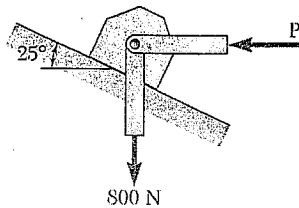
O sentido dessa força é contrário ao sentido do movimento; logo, a força é direcionada para cima e para a direita:

$$\mathbf{F_{\text{real}} = 216 \text{ N} \nearrow \blacktriangleleft}$$

Deve-se observar que as forças que atuam sobre o bloco não estão equilibradas; a resultante é

$$\frac{3}{5}(1.350 \text{ N}) - 450 \text{ N} - 216 \text{ N} = 144 \text{ N} \swarrow$$



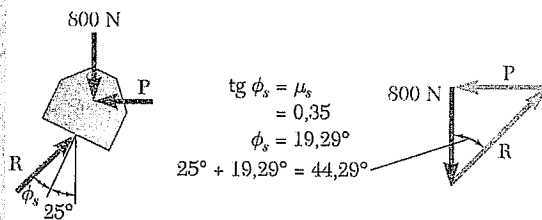


PROBLEMA RESOLVIDO 8.2

Um bloco de apoio sofre a ação de duas forças, tal como mostra a figura. Sabendo que os coeficientes de atrito entre o bloco e o plano inclinado são $\mu_s = 0,35$ e $\mu_k = 0,25$, determine (a) a força **P** para que o movimento do bloco para cima seja iminente, (b) a força de atrito quando o bloco estiver movendo-se para cima e (c) a menor força **P** necessária para se evitar que o bloco deslize para baixo.

SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Para cada parte do problema, traçamos um diagrama de corpo livre do bloco e um triângulo de forças formado pela força vertical de 800 N, a força horizontal **P** e a força **R** exercida pelo plano inclinado sobre o bloco. A direção de **R** deve ser determinada em cada caso, separadamente. Observemos que, sendo **P** perpendicular à força de 800 N, o triângulo de forças é retângulo, possibilitando uma fácil resolução para **P**. Na maioria dos problemas, porém, o triângulo de forças é escaleno, devendo-se aplicar a lei dos senos para se obter a solução.



a. Força **P** para movimento iminente do bloco plano acima

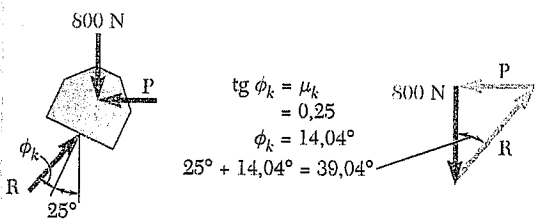
$$P = (800 \text{ N}) \operatorname{tg} 44,29^\circ \quad P = 780 \text{ N} \leftarrow$$

b. Força de atrito **F** quando o bloco move-se plano acima

$$R = (800 \text{ N}) / \cos 39,04^\circ = 1.029,9 \text{ N}$$

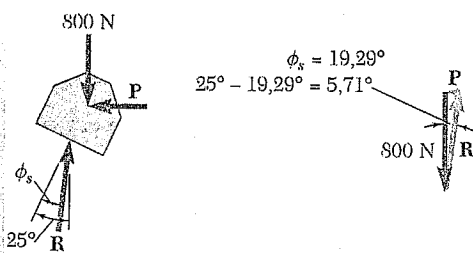
$$F = R \operatorname{sen} \phi_k = (1.029,9 \text{ N}) \operatorname{sen} 14,04^\circ$$

$$F = 250 \text{ N} \searrow$$

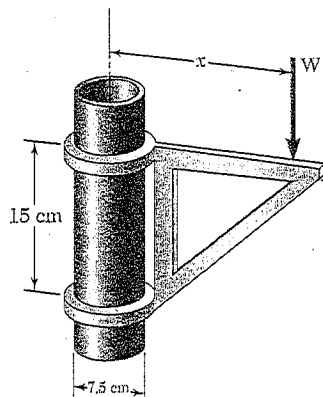


c. Força **P** para movimento iminente do bloco plano abaixo

$$P = (800 \text{ N}) \operatorname{tg} 5,71^\circ \quad F = 80,0 \text{ N} \leftarrow$$



PROBLEMA RESOLVIDO 8.3



O suporte móvel mostrado na figura pode ser posicionado a qualquer altura sobre o tubo de 7,5 cm de diâmetro. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o tubo e o suporte é 0,25, determine a distância mínima x para a qual a carga W pode ser sustentada. Desconsidere o peso do suporte.

SOLUÇÃO

Diagrama de corpo livre. Traçamos um diagrama de corpo livre do suporte. Quando W for aplicada à distância mínima x do eixo do tubo, o suporte estará prestes a deslizar e as forças de atrito em A e B terão atingido seus valores máximos:

$$F_A = \mu_s N_A = 0,25 N_A$$

$$F_B = \mu_s N_B = 0,25 N_B$$

Equações de equilíbrio

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: N_B - N_A = 0$$

$$N_B = N_A$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: F_A + F_B - W = 0$$

$$0,25 N_A + 0,25 N_B = W$$

E, uma vez que se concluiu que N_B é igual a N_A ,

$$0,50 N_A = W$$

$$N_A = 2W$$

$$+\curvearrowright \Sigma M_B = 0: N_A (15 \text{ cm}) - F_A (7,5 \text{ cm}) - W(x - 3,75 \text{ cm}) = 0$$

$$15 N_A - 7,5 (0,25 N_A) - Wx + 3,75 W = 0$$

$$15 (2W) - 1,875 (2W) - Wx + 3,75 W = 0$$

Dividindo-se por W e resolvendo-se para x ,

$$x = 30 \text{ cm} \quad \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, você estudou e aplicou as *leis de atrito seco*. Antes você havia se deparado apenas com (a) superfícies sem atrito (lisas) que podiam mover-se livremente umas em relação às outras e (b) superfícies rugosas (ásperas) que não admitiam movimento relativo entre si.

A. Na resolução de problemas que envolvam atrito seco, você deve ter em mente o seguinte.

1. A reação \mathbf{R} exercida por uma superfície sobre um corpo livre pode ser decomposta em um componente normal \mathbf{N} e um componente tangencial \mathbf{F} . O componente tangencial é denominado *força de atrito*. Quando um corpo está em contato com uma superfície fixa, o sentido da força de atrito \mathbf{F} é contrário ao do movimento real ou iminente do corpo.

a. Não ocorrerá movimento enquanto F não exceder o valor máximo $F_m = \mu_s N$, sendo μ_s o *coeficiente de atrito estático*.

b. Ocorrerá movimento se um valor de F maior que F_m for necessário para se manter o equilíbrio. Estabelecendo-se o movimento, o valor real de F cai para $F_k = \mu_k N$, sendo μ_k o *coeficiente de atrito cinético* [Problema Resolvido 8.1].

2. Quando apenas três forças estiverem envolvidas, pode ser preferível uma outra abordagem para a análise do atrito [Problema Resolvido 8.2]. A reação \mathbf{R} é definida pela sua intensidade R e pelo ângulo ϕ que ela forma com a normal à superfície. Não ocorrerá movimento enquanto ϕ não exceder ao valor máximo ϕ_s , sendo $\text{tg } \phi_s = \mu_s$. Ocorrerá movimento se um valor de ϕ maior que ϕ_s for necessário para se manter o equilíbrio, e o valor real de ϕ cairá para ϕ_k , sendo $\text{tg } \phi_k = \mu_k$.

3. Quando dois corpos estiverem em contato, o sentido do movimento relativo real ou iminente do ponto de contato deve ser determinado. Em cada um dos dois corpos, deve-se mostrar uma força de atrito \mathbf{F} de sentido contrário ao do movimento real ou iminente do corpo visto em relação ao outro corpo.

B. Métodos de resolução. A primeira etapa da sua resolução consiste em *traçar um diagrama de corpo livre* do corpo que está sob consideração, decompondo-se a força exercida em cada superfície em que existe atrito em um componente normal \mathbf{N} e uma força de atrito \mathbf{F} . Se vários corpos estiverem envolvidos, trace um diagrama de corpo livre para cada um deles, rotulando e direcionando as forças em cada superfície de contato, do modo que você aprendeu a fazer ao analisar estruturas no Cap. 6.

O problema que você tem de resolver pode enquadrar-se em uma das cinco categorias seguintes:

1. Todas as forças aplicadas e os coeficientes de atrito são conhecidos e você deve determinar se o equilíbrio está mantido. Observe que, nesta situação, a força de atrito é desconhecida e *não pode ser considerada igual a $\mu_s N$* .

a. Escreva as equações de equilíbrio para determinar \mathbf{N} e \mathbf{F} .

b. Calcule a força de atrito admissível máxima, $F_m = \mu_s N$. Se $F \leq F_m$, o equilíbrio está mantido. Se $F > F_m$, ocorre movimento e a intensidade da força de atrito é $F_k = \mu_k N$ [Problema Resolvido 8.1].

2. Todas as forças aplicadas são conhecidas e você deve encontrar o menor valor admissível de μ_s para o qual o equilíbrio é mantido. Você admitirá que o movimento é iminente e determinará o valor correspondente de μ_s .

a. Escreva as equações de equilíbrio e determine N e F .

b. Como o movimento é iminente, $F = F_m$. Substitua os valores encontrados para N e F na equação $F_m = \mu_s N$ e resolva para μ_s .

3. O movimento do corpo é iminente e μ_s é conhecido; você deve encontrar alguma grandeza desconhecida, tal como uma distância, um ângulo, a intensidade de uma força ou a direção de uma força.

a. Suponha um possível movimento iminente do corpo e, no diagrama de corpo livre, trace a força de atrito em sentido contrário ao do suposto movimento.

b. Como o movimento é iminente, $F = F_m = \mu_s N$. Considerando o valor conhecido de μ_s , você pode exprimir F em termos de N no diagrama de corpo livre e, assim, eliminar uma incógnita.

c. Escreva e resolva as equações de equilíbrio para a incógnita que você procura [Problema Resolvido 8.3].

4. O sistema consiste em vários corpos e mais de um estado de movimento iminente é possível; você deve determinar uma força, uma distância ou um coeficiente de atrito correspondente a um movimento iminente.

a. Conte o número de incógnitas (forças, ângulos etc.) e o número total de equações de equilíbrio independentes; a diferença é igual ao número de superfícies nas quais o movimento pode ser iminente.

b. Suponha movimento iminente para certas superfícies e, no diagrama de corpo livre, trace as forças de atritos em sentidos contrários ao do suposto movimento.

c. Naquelas superfícies em que se supõe movimento iminente, $F = F_m = \mu_s N$.

d. Escreva e resolva as equações de equilíbrio para todas as incógnitas.

e. Verifique sua hipótese calculando F e F_m para as superfícies em que não se supõe movimento iminente. Se $F < F_m$, sua suposição foi correta; caso contrário, se $F > F_m$, sua suposição foi incorreta, sendo então necessário fazer uma nova suposição sobre onde o movimento seria iminente e repetir o processo de resolução. Você deve sempre incluir uma declaração de sua suposição e a verificação correspondente.

5. O movimento iminente do corpo pode ser ou de deslizamento ou de viragem em torno de um dado ponto; você deve encontrar uma força, uma distância ou um coeficiente de atrito.

a. Suponha um possível movimento iminente de deslizamento e, no diagrama de corpo livre, trace a força (ou forças) de atrito em sentido contrário ao do suposto movimento.

b. Considere separadamente os casos de deslizamento iminente e viragem iminente.

i. Para deslizamento iminente, $F = F_m = \mu_s N$. Escreva as equações de equilíbrio e resolva para a incógnita requerida.

ii. Para viragem iminente, suponha que as reações externas se anulem em todos os apoios exceto as reações no ponto em torno do qual se considera a viragem iminente. Neste caso, observe que $F \neq F_m$ e que a incógnita requerida é determinada a partir das equações de equilíbrio.

Os problemas desta seção requerem análise cuidadosa, pois estão entre os mais difíceis que você encontrará no seu curso de estática. Você deve sempre traçar cuidadosamente os diagramas de corpo livre, dando atenção especial aos sentidos das forças de atrito. Quando for necessário supor o sentido da força de atrito, uma resposta positiva implicará que a suposição foi correta, ao passo que uma resposta negativa implicará que o sentido real da força de atrito é contrário ao suposto. Ainda, as resoluções de alguns problemas são simplificadas quando se usar a propriedade dos corpos sujeitos a três forças [Seção 4.7] ou a geometria do sistema (por exemplo, o Problema 8.23).

PROBLEMAS

8.1 Determine se o bloco mostrado na figura está em equilíbrio e encontre a intensidade e o sentido da força de atrito quando $\theta = 30^\circ$ e $P = 200 \text{ N}$.

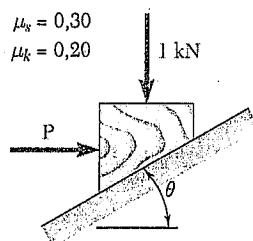


Fig. P8.1 e P8.2

8.2 Determine se o bloco mostrado na figura está em equilíbrio e encontre a intensidade e o sentido da força de atrito quando $\theta = 35^\circ$ e $P = 400 \text{ N}$.

8.3 Determine se o bloco de 90 N mostrado na figura está em equilíbrio e encontre a intensidade e o sentido da força de atrito quando $P = 36 \text{ N}$ e $\theta = 20^\circ$.

8.4 Determine se o bloco de 90 N mostrado na figura está em equilíbrio e encontre a intensidade e o sentido da força de atrito quando $P = 56,25 \text{ N}$ e $\theta = 15^\circ$.

8.5 Sabendo que $\theta = 25^\circ$, determine a faixa de valores de P em que o equilíbrio é mantido.

8.6 Sabendo que o coeficiente de atrito entre o bloco de 270 N e o plano inclinado é $\mu_s = 0,25$, determine (a) o valor de P para o qual o movimento do bloco para cima é iminente e (b) o valor correspondente de β .

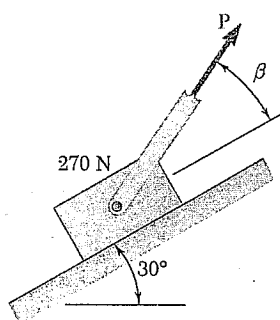


Fig. P8.6

8.7 Considerando apenas valores de θ menores que 90° , determine o menor valor de θ para o qual o movimento do bloco para a direita é iminente quando (a) $m = 30 \text{ kg}$ e (b) $m = 40 \text{ kg}$.

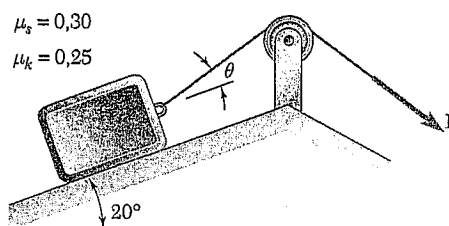


Fig. P8.3, P8.4 e P8.5

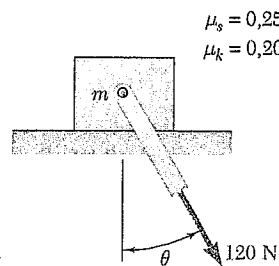


Fig. P8.7

8.8 Sabendo que o coeficiente de atrito entre o bloco de 135 N e o plano inclinado é $\mu_s = 0,25$, determine (a) o menor valor de P necessário para se manter o bloco em equilíbrio e (b) o valor correspondente de β .

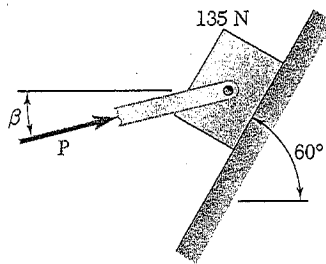


Fig. P8.8

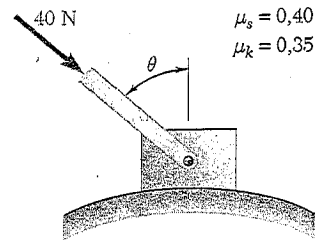


Fig. P8.9

8.9 Um bloco de 6 kg está em repouso, tal como mostra a figura. Determine a faixa de valores positivos de θ em que o bloco está em equilíbrio se (a) θ é menor que 90° e (b) θ está entre 90° e 180° .

8.10 Sabendo que $P = 112,5$ N, determine a faixa de valores de θ em que o equilíbrio do bloco de 81 N é mantido.

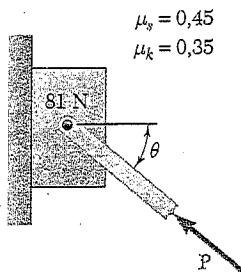


Fig. P8.10

8.11 e 8.12 Os coeficientes de atrito são $\mu_s = 0,40$ e $\mu_k = 0,30$ entre todas as superfícies de contato. Determine a força P para que o movimento do bloco de 270 N seja iminente quando o cabo AB (a) está ligado tal como mostra a figura e (b) é removido.

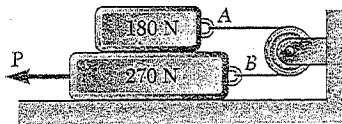


Fig. P8.11

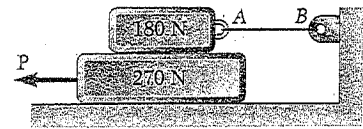


Fig. P8.12

8.13 O bloco A de 8 kg está ligado à articulação AC e repousa sobre o bloco B de 12 kg. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies de contato é 0,20 e desprezando a massa da articulação, determine o valor de θ para que o movimento do bloco B seja iminente.

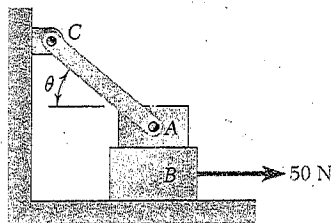


Fig. P8.13

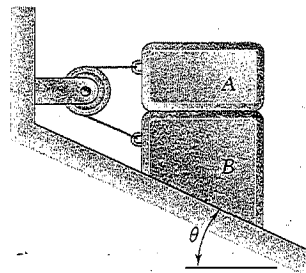


Fig. P8.14

8.14 O bloco A de 8 kg e o bloco B de 16 kg repousam sobre um plano inclinado, tal como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies de contato é 0,25, determine o valor de θ para que o movimento do bloco B seja iminente.

8.15 Um armário de 48 kg é montado sobre rodízios que podem ser travados para se evitar sua rodagem. O coeficiente de atrito estático entre o piso e cada rodízio é 0,30. Sabendo que $h = 640$ mm, determine a intensidade da força P necessária para o movimento iminente do armário para a direita (a) se todos os rodízios estiverem travados, (b) se os rodízios em B estiverem travados e os rodízios em A estiverem livres para rodar e (c) se os rodízios em A estiverem travados e os rodízios em B estiverem livres para rodar.

8.16 Um armário de 48 kg é montado sobre rodízios que podem ser travados para se evitar sua rodagem. O coeficiente de atrito estático entre o piso e cada rodízio é 0,30. Considerando que os rodízios em A e B estejam travados, determine (a) a força P necessária para o movimento iminente do armário para a direita e (b) a máxima altura admissível h para que o armário não tombe.

8.17 O cilindro mostrado na figura tem peso W e raio r , e o coeficiente de atrito estático μ_s é o mesmo em A e B . Determine a intensidade do maior binário M que pode ser aplicado ao cilindro para que ele não gire.

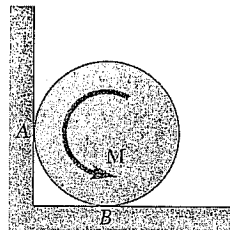


Fig. P8.17 e P8.18

8.18 O cilindro mostrado na figura tem peso W e raio r . Em termos de W e r , expresse a intensidade do maior binário M que pode ser aplicado ao cilindro para que ele não gire, considerando que o coeficiente de atrito estático seja (a) zero em A e 0,36 em B e (b) 0,30 em A e 0,36 em B .

8.19 O cilindro hidráulico mostrado na figura exerce uma força de 3.060 N para a direita no ponto B e para a esquerda no ponto E . Determine a intensidade do binário M necessária para girar o tambor no sentido horário a uma velocidade constante.

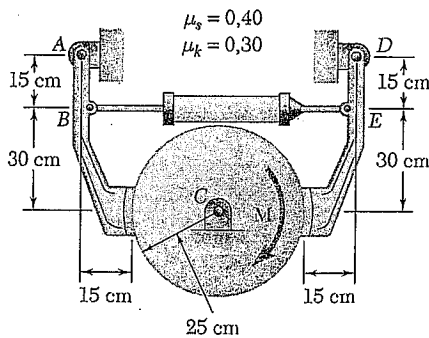


Fig. P8.19 e P8.20

8.20 Um binário M de intensidade $94,5 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado ao tambor, tal como mostra a figura. Determine a menor força que deve ser exercida pelo cilindro hidráulico nas uniões B e E para que o tambor não gire.

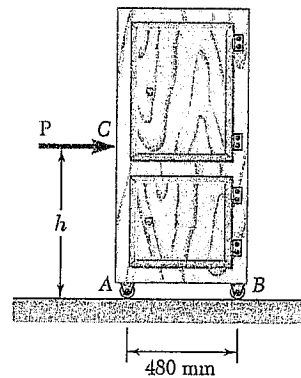


Fig. P8.15 e P8.16

8.30 Um tubo de 7,5 cm de diâmetro é apertado pela chave inglesa mostrada na figura. As partes AB e DE da chave são rigidamente ligadas entre si e a parte CF é conectada por um pino em D . Se a chave deve apertar o tubo e ser autotravante, determine os coeficientes de atrito mínimos necessários em A e C .

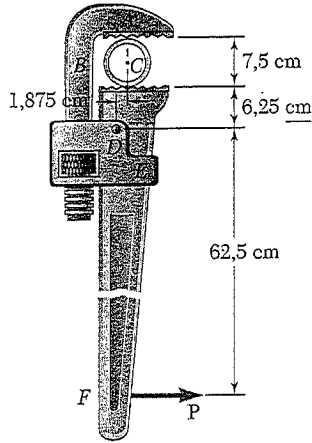


Fig. P8.30

8.31 Resolva o Problema 8.30 supondo que o tubo tem 3,75 cm de diâmetro.

8.32 A placa $ABCD$ de 25 kg é ligada em A e D aos colares que podem deslizar sobre a barra vertical. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre ambos os colares e a barra é 0,40, determine se a placa está em equilíbrio na posição mostrada quando a intensidade da força vertical aplicada em E é (a) $P = 0$ e (b) $P = 80$ N.

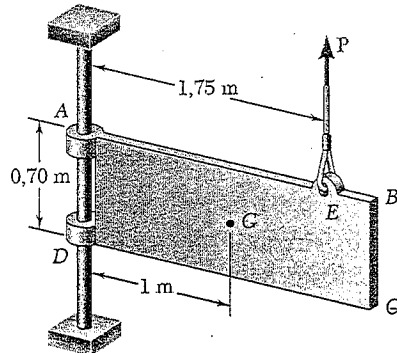


Fig. P8.32

8.33 No Problema 8.32, determine a faixa de valores da intensidade P da força vertical aplicada em E para a qual a placa irá mover-se para baixo.

8.34 e 8.35 Um colar B de peso W é ligado à mola AB e pode mover-se ao longo da barra mostrada na figura. A constante da mola é 1,5 kN/m e a mola está indeformada quando $\theta = 0$. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o colar e a barra é 0,40, determine a faixa de valores de W para a qual o equilíbrio é mantido quando (a) $\theta = 20^\circ$ e (b) $\theta = 30^\circ$.

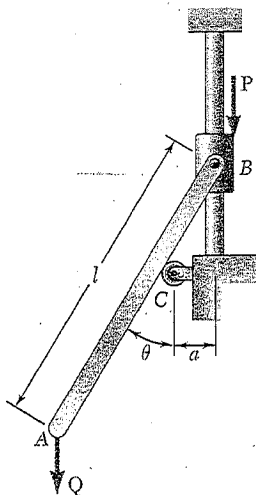


Fig. P8.36

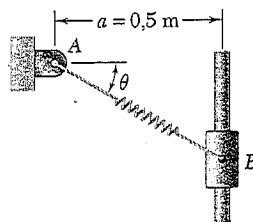


Fig. P8.34

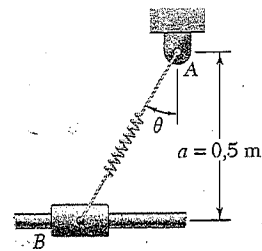


Fig. P8.35

8.36 A haste esbelta AB de comprimento $l = 75$ cm é ligada a um colar em B e repousa sobre um pequeno rolete localizado a uma distância horizontal $a = 10$ cm da barra vertical sobre a qual o colar desliza. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o colar e a barra vertical é 0,25 e desprezando o raio do rolete, determine a faixa de valores de P para a qual o equilíbrio é mantido quando $Q = 112,5$ N e $\theta = 30^\circ$.

8.37 O bloco A de 4,5 kg e o bloco B de 3 kg estão ligados por uma haste esbelta de massa desprezível. O coeficiente de atrito estático entre todas superfícies de contato é 0,40. Sabendo que a haste está na horizontal na posição mostrada na figura, determine a faixa de valores de P para a qual o equilíbrio é mantido.

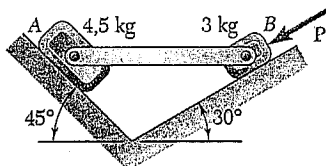


Fig. P8.37

8.38 A haste AB é ligada aos colares que podem deslizar sobre as barras inclinadas mostradas na figura. Uma força P é aplicada no ponto D localizado a uma distância a da extremidade A . Sabendo que o coeficiente de atrito estático μ_s entre cada colar e a barra correspondente é 0,30 e desprezando os pesos da barra e dos colares, determine o menor valor da razão a/L para que o equilíbrio seja mantido.

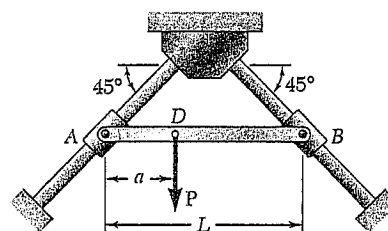


Fig. P8.38

8.39 A barra esbelta AB de 6 kg é articulada em A e repousa sobre o cilindro C de 18 kg. Sabendo que o diâmetro do cilindro é de 250 mm e que o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies de contato é 0,35, determine a maior intensidade da força P para que o equilíbrio seja mantido.

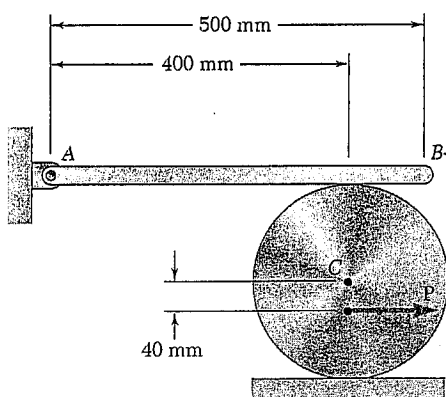


Fig. P8.39

8.40 Duas barras são ligadas por um colar em B . Um binário M_A de intensidade $16,2 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado à barra AB . Sabendo que $\mu_s = 0,30$ entre o colar e a barra AB , determine o maior binário M_C para que o equilíbrio seja mantido.

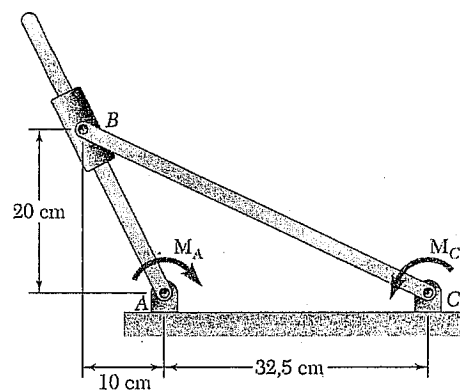


Fig. P8.40

8.41 No Problema 8.40, determine o menor valor do binário M_C para que o equilíbrio seja mantido.

8.42 Os blocos A, B e C com as massas indicadas na figura repousam sobre um plano inclinado. Representando por μ_s o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies de contato, determine o menor valor de μ_s para que o equilíbrio seja mantido.

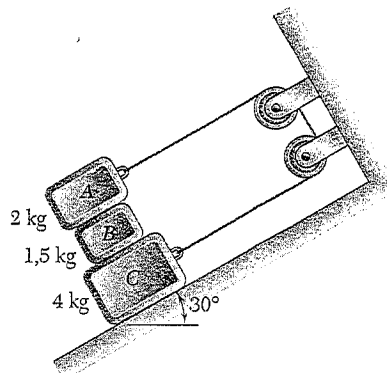


Fig. P8.42

8.43 Uma barra esbelta de aço de 22,5 cm de comprimento é colocada dentro de um tubo, tal como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a barra e o tubo é 0,20, determine o maior valor de θ para que a barra não caia dentro do tubo.

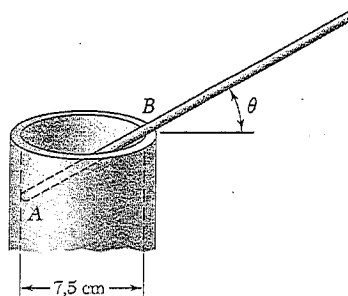


Fig. P8.43

8.44 No Problema 8.43, determine o menor valor de θ para que a barra não caia fora do tubo.

8.45 Duas hastes esbeltas de peso desprezível são conectadas por um pino em C e ligadas aos blocos A e B, cada qual com peso W. Sabendo que $\theta = 70^\circ$ e que o coeficiente de atrito estático entre os blocos e a superfície horizontal é 0,30, determine o maior valor de P para que o equilíbrio seja mantido.

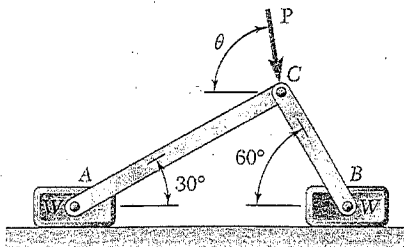


Fig. P8.45

Cunhas são máquinas simples usadas para erguer grandes blocos de pedra e outras cargas pesadas. Essas cargas podem ser erguidas aplicando-se à cunha uma força, em geral, consideravelmente menor que o peso da carga. Além disso, devido ao atrito entre as superfícies de contato, uma cunha de formato adequado permanecerá no lugar após ter sido empurrada para debaixo da carga. Desse modo, podem-se usar convenientemente cunhas para fazer pequenos ajustes na posição de peças pesadas de máquinas.

Considere o bloco *A* mostrado na Fig. 8.7a. O bloco repousa sobre uma parede vertical *B* e deve ser erguido ligeiramente empurrando-se uma cunha *C* entre o bloco *A* e uma segunda cunha *D*. Queremos encontrar o valor mínimo da força *P* que deve ser aplicada à cunha *C* para mover o bloco. Admite-se que o peso *W* do bloco seja conhecido, diretamente ou através de sua massa.

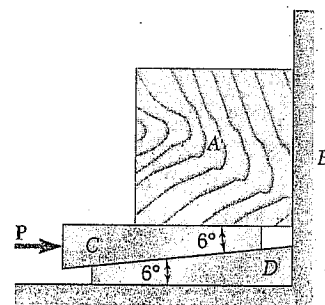
Os diagramas de corpo livre do bloco *A* e da cunha *C* foram traçados na Fig. 8.7b e c. As forças que atuam sobre o bloco incluem seu peso e as forças normal e de atrito nas superfícies de contato com a parede *B* e a cunha *C*. As intensidades das forças de atrito F_1 e F_2 são respectivamente iguais a $\mu_s N_1$ e $\mu_s N_2$, pois o movimento do bloco é iminente. É importante indicar as forças de atrito no sentido correto. Como o bloco irá mover-se para cima, o sentido da força F_1 exercida pela parede sobre o bloco deve ser para baixo. Por outro lado, como a cunha *C* irá mover-se para a direita, o movimento de *A* em relação a *C* é para a esquerda e o sentido da força F_2 exercida por *C* sobre *A* deve ser para a direita.

Considerando agora o corpo livre *C* na Fig. 8.7c, notamos que as forças que atuam sobre *C* incluem a força aplicada *P* e as forças normal e de atrito nas superfícies de contato com *A* e *D*. O peso da cunha é pequeno comparado com as outras forças envolvidas e pode ser desprezado. As forças exercidas por *A* sobre *C* são iguais e opostas às forças N_2 e F_2 exercidas por *C* sobre *A* e são representadas por $-N_2$ e $-F_2$, respectivamente; logo, o sentido da força de atrito $-F_2$ deve ser para a esquerda. Verificamos que o sentido da força F_3 exercida por *D* também é para a esquerda.

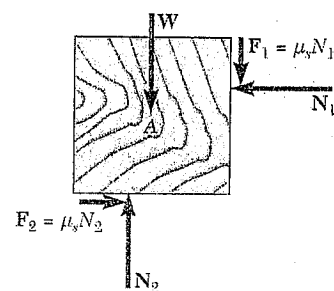
O número total de incógnitas envolvidas nos dois diagramas de corpo livre pode ser reduzido a quatro se as forças de atrito forem expressas em termos das forças normais. A consideração de que o bloco *A* e a cunha *C* estão em equilíbrio fornece quatro equações que podem ser resolvidas para se obter a intensidade de *P*. Deve-se notar que, no exemplo aqui considerado, será mais conveniente substituir cada par de forças de atrito e normal por sua resultante. Assim, cada corpo livre fica sujeito a apenas três forças e o problema pode ser resolvido pelo traçado dos triângulos de força correspondentes (ver o Problema Resolvido 8.4).

8.6 PARAFUSOS DE ROSCA QUADRADA

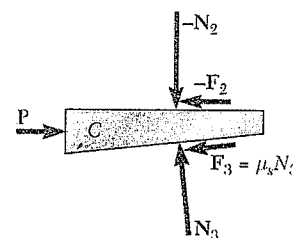
Parafusos de rosca quadrada são freqüentemente usados em macacos, prensas e outros mecanismos. Sua análise é semelhante à de um bloco que desliza sobre um plano inclinado.



(a)



(b)



(c)

Fig. 8.7



Foto 8.2 Podem-se usar cunhas para rachar troncos de árvore, pois as forças normais exercidas pelas cunhas sobre a madeira são muito maiores que as forças necessárias para se inserirem as cunhas.

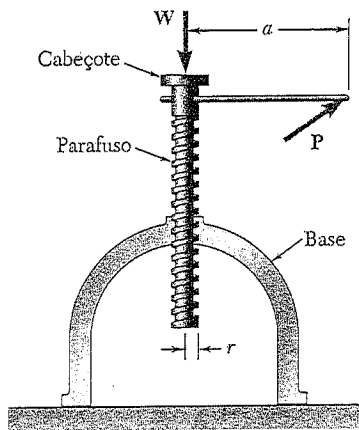
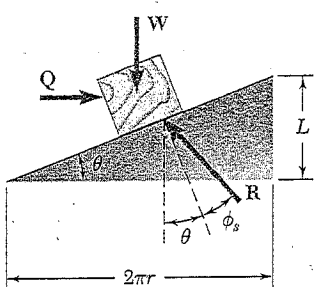


Fig. 8.8

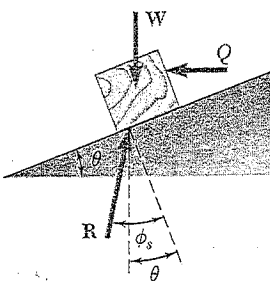
Considere o macaco mostrado na Fig. 8.8. O parafuso sustenta uma carga W e se apóia na base do macaco. O contato entre o parafuso e a base se dá ao longo de uma parte de seus filetes de rosca. Aplicando uma força P sobre a alavanca, o parafuso pode girar e erguer a carga W .

O filete de rosca na região da base foi desenvolvido e está mostrado como uma linha reta na Fig. 8.9a. A inclinação correta foi obtida traçando-se horizontalmente o produto $2\pi r$, sendo r o raio médio da rosca e, verticalmente, o *avanço* L do parafuso, ou seja, a distância que o parafuso avança em uma volta completa. O ângulo θ entre essa linha e a horizontal é o *ângulo de avanço*. Como a força de atrito entre duas superfícies que estão em contato não depende da área de contato, pode-se considerar uma área de contato entre as duas roscas bem menor que a real e o parafuso pode ser representado pelo bloco mostrado na Fig. 8.9a. Deve-se observar, porém, que o atrito entre o cabeçote e o parafuso é desconsiderado nesta análise do macaco.

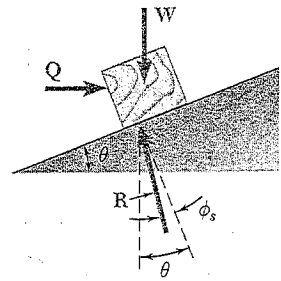
O diagrama de corpo livre do bloco deve incluir a carga W , a reação R do filete da base e uma força horizontal Q com o mesmo efeito da força P exercida sobre a alavanca. A força Q deve produzir o mesmo momento de P em relação ao eixo do parafuso e, portanto, sua intensidade deve ser $Q = Pa/r$. A força Q e, por conseguinte, a força P necessária para se erguer a carga W podem ser obtidas do diagrama de corpo livre mostrado na Fig. 8.9a. Considerando-se que o ângulo de atrito é igual a ϕ_s , pressupondo-se que carga será erguida através de uma sucessão de pequenos impulsos. Em mecanismos concebidos para rotação contínua de um parafuso, pode ser desejável distinguir entre a força necessária para o movimento iminente (usando ϕ_s) e a força necessária para se manter o movimento (usando-se ϕ_k).



(a) Movimento iminente para cima



(b) Movimento iminente para baixo com $\phi_s > \theta$



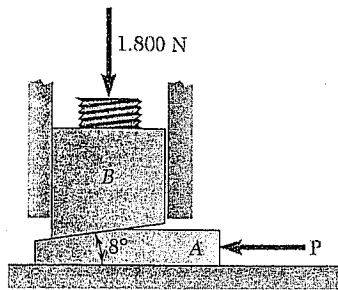
(c) Movimento iminente para baixo com $\phi_s < \theta$

Fig. 8.9 Análise de um parafuso através de um bloco e plano inclinado.

Se o ângulo de atrito ϕ_s for maior que o ângulo de avanço θ , diz-se que o parafuso é *autotravante*; o parafuso permanecerá no lugar sob ação da carga. Para baixar a carga, deveremos então aplicar a força mostrada na Fig. 8.9b. Se ϕ_s for menor que θ , o parafuso cederá sob ação da carga; será então necessário aplicar a força mostrada na Fig. 8.9c para se manter o equilíbrio.

Não se deve confundir o avanço de um parafuso como seu *passo*. O avanço foi definido como a distância axial percorrida pelo parafuso durante uma volta; o passo é a distância medida entre duas roscas consecutivas. Embora sejam iguais no caso de parafusos de *rosca simples*, o avanço e o passo diferem no caso de parafusos de *rosca múltipla*, ou seja, parafusos com vários filetes de rosca independentes. Verifica-se facilmente que o avanço é duas vezes maior que o passo para parafusos de rosca dupla, três vezes maior para parafusos de rosca tripla etc.

PROBLEMA RESOLVIDO 8.4



A posição do bloco de máquina B é ajustada pelo movimento de uma cunha A . Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies de contato é $0,35$, determine a força P para a qual o movimento do bloco B (a) é iminente para cima e (b) é iminente para baixo.

SOLUÇÃO

Para cada parte, traçam-se os diagramas de corpo livre do bloco B e da cunha A , juntamente com os triângulos de forças correspondentes. A lei dos senos é usada para se encontrarem as forças desejadas. Como $\mu_s = 0,35$, verificamos que o ângulo de atrito é

$$\phi_s = \text{tg}^{-1} 0,35 = 19,3^\circ$$

a. Força P para movimento iminente do bloco para cima

Corpo livre: Bloco B

$$\frac{R_1}{\text{sen } 109,3^\circ} = \frac{1.800 \text{ N}}{\text{sen } 43,4^\circ}$$

$$R_1 = 2.472,5 \text{ N}$$

Corpo livre: Cunha A

$$\frac{P}{\text{sen } 46,6^\circ} = \frac{2.472,5 \text{ N}}{\text{sen } 70,7^\circ}$$

$$P = 1.903,4 \text{ N} \quad P = 1.903,4 \text{ N} \leftarrow \blacktriangleleft$$

b. Força P para movimento iminente do bloco para baixo

Corpo livre: Bloco B

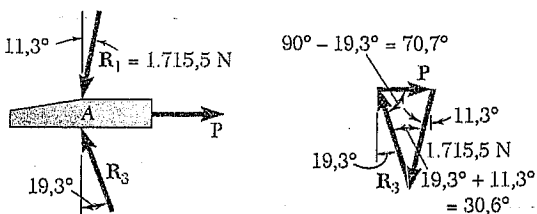
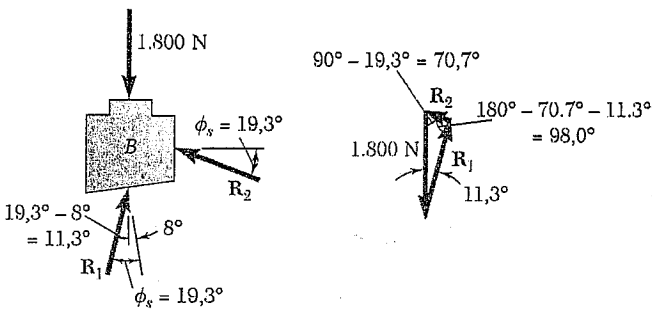
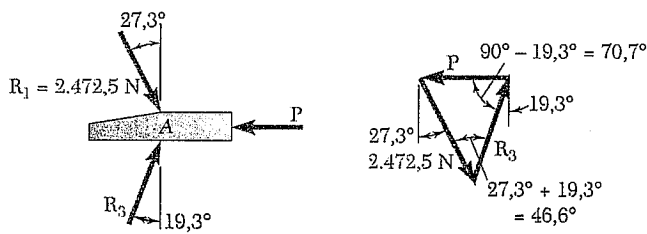
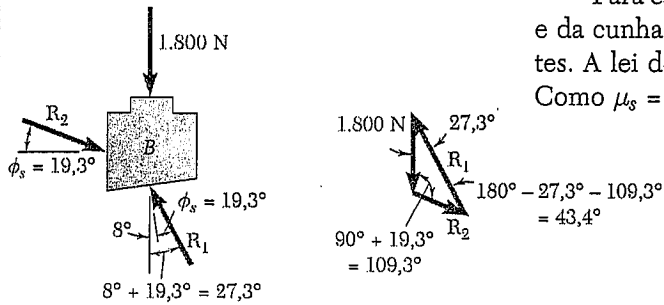
$$\frac{R_1}{\text{sen } 70,7^\circ} = \frac{1.800 \text{ N}}{\text{sen } 98,0^\circ}$$

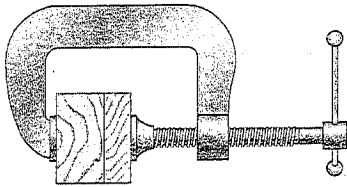
$$R_1 = 1.715,5 \text{ N}$$

Corpo livre: Cunha A

$$\frac{P}{\text{sen } 30,6^\circ} = \frac{1.715,5 \text{ N}}{\text{sen } 70,7^\circ}$$

$$P = 925,3 \text{ N} \quad P = 925,3 \text{ N} \rightarrow \blacktriangleright$$

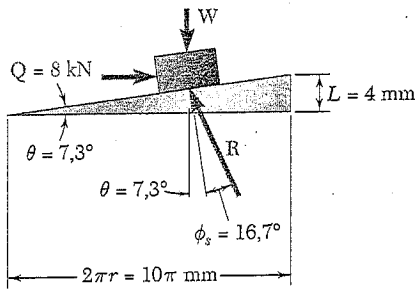




PROBLEMA RESOLVIDO 8.5

Um grampo é usado para manter juntas duas peças de madeira do modo mostrado na figura. O grampo tem um parafuso de rosca quadrada dupla de diâmetro médio igual a 10 mm e passo de 2 mm. O coeficiente de atrito entre as roscas é $\mu_s = 0,30$. Se um torque máximo de $40 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado no aperto do grampo, determine (a) a força exercida sobre as peças de madeira e (b) o torque necessário para se afrouxar o grampo.

SOLUÇÃO

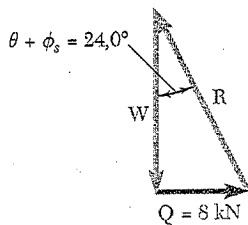


a. *Força exercida pelo grampo.* O raio médio do parafuso é $r = 5 \text{ mm}$. Como o parafuso é de rosca dupla, o avanço é igual a duas vezes o passo: $L = 2(2 \text{ mm}) = 4 \text{ mm}$. O ângulo de avanço e o ângulo de atrito são obtidos escrevendo-se

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{L}{2\pi r} = \frac{4 \text{ mm}}{10\pi \text{ mm}} = 0,1273 \quad \theta = 7,3^\circ$$

$$\operatorname{tg} \phi_s = \mu_s = 0,30 \quad \phi_s = 16,7^\circ$$

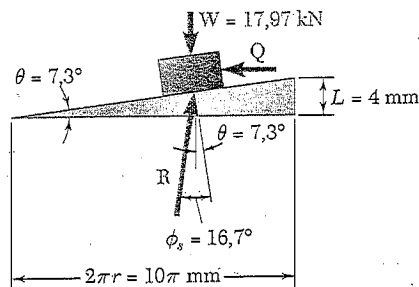
A força Q que deve ser aplicada ao bloco que representa o parafuso é obtida escrevendo-se que seu momento Qr em relação ao eixo do parafuso é igual ao torque aplicado.



$$Q(5 \text{ mm}) = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$Q = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}}{5 \text{ mm}} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 8.000 \text{ N} = 8 \text{ kN}$$

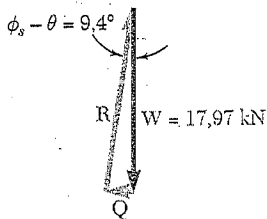
O diagrama de corpo livre e o triângulo de forças para o bloco podem agora ser traçados; a intensidade da força W exercida sobre as peças de madeira é obtida pela resolução do triângulo.



$$W = \frac{Q}{\operatorname{tg}(\theta + \phi_s)} = \frac{8 \text{ kN}}{\operatorname{tg} 24,0^\circ}$$

$$W = 17,97 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

b. *Torque necessário para se afrouxar o grampo.* A força Q necessária para se afrouxar o grampo e o torque correspondente são obtidos do diagrama de corpo livre e do triângulo de forças mostrados nas figuras.



$$Q = W \operatorname{tg}(\phi_s - \theta) = (17,97 \text{ kN}) \operatorname{tg} 9,4^\circ = 2,975 \text{ kN}$$

$$\text{Torque} = Qr = (2,975 \text{ kN})(5 \text{ mm})$$

$$= (2,975 \times 10^3 \text{ N})(5 \times 10^{-3} \text{ m}) = 14,87 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\text{Torque} = 14,87 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, você aprendeu a aplicar as leis de atrito à resolução de problemas que envolvem *cunhas* e *parafusos de rosca quadrada*.

1. Cunhas. Ao resolver um problema que envolva cunhas, tenha em mente o seguinte:

a. Trace primeiro um diagrama de corpo livre da cunha e de todos os outros corpos envolvidos. Observe cuidadosamente o sentido do movimento relativo entre todas as superfícies de contato e mostre cada força de atrito que atua com *sentido oposto* ao do movimento relativo.

b. Mostre a força máxima de atrito estático F_m em cada superfície no caso de a cunha ser inserida ou removida, pois o movimento será iminente em cada um desses casos.

c. A reação R e o ângulo de atrito, em vez das forças normal e de atrito, podem ser usados em muitas aplicações. Você pode então traçar um ou mais triângulos de força e determinar as grandezas incógnitas, seja graficamente seja por trigonometria [Problema Resolvido 8.4].

2. Parafusos de rosca quadrada. A análise de um parafuso de rosca quadrada é equivalente à análise de um bloco que desliza sobre um plano inclinado. Para traçar a inclinação adequada, você deve desenvolver o filete de rosca do parafuso e representá-lo por uma linha reta [Problema Resolvido 8.5]. Ao resolver um problema que envolva parafusos de rosca quadrada, tenha em mente o seguinte:

a. Não confunda o passo de um parafuso com o avanço de um parafuso. O *passo* de um parafuso é a distância entre duas roscas consecutivas e o *avanço* de um parafuso é a distância que o parafuso avança em uma volta completa. O avanço e o passo são iguais somente para parafusos de rosca simples. Em um parafuso de rosca dupla, o avanço é o dobro do passo.

b. O torque necessário para se apertar um parafuso é diferente do torque necessário para se afrouxá-lo. Além disso, os parafusos utilizados em macacos e grampos geralmente são *autotravantes*; ou seja, o parafuso permanecerá em equilíbrio enquanto não lhe for aplicado um torque, e um torque deve ser aplicado ao parafuso para afrouxá-lo [Problema Resolvido 8.5].

PROBLEMAS

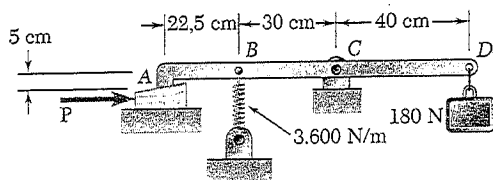


Fig. P8.46

8.46 Um peso de 180 N está pendurado em uma alavanca que repousa sobre uma cunha de 10° em A e é apoiada em uma articulação sem atrito em C. Sabendo que o coeficiente de atrito estático em ambas as superfícies da cunha é 0,25 e que para a posição mostrada na figura a deformação da mola é de 10 cm, determine (a) a intensidade da força P para que o movimento da cunha seja iminente e (b) os componentes da reação correspondente em C.

8.47 Resolva o Problema 8.46 considerando que a força P é direcionada para a esquerda.

8.48 e 8.49 Duas cunhas de 8° e massa desprezível são usadas para se mover e posicionar um bloco de 240 kg. Sabendo que o coeficiente de atrito estático em todas as superfícies de contato é 0,40, determine a intensidade da força P para que o movimento do bloco seja iminente.

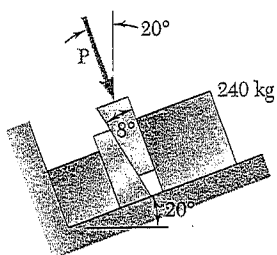


Fig. P8.48

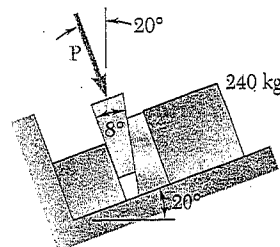


Fig. P8.49

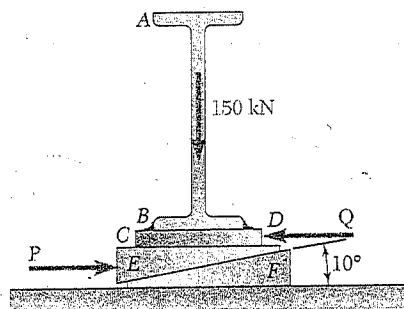


Fig. P8.50

8.50 e 8.51 A elevação da extremidade de uma viga de aço apoiada em um piso de concreto é ajustada através das cunhas de aço E e F. A placa de base CD foi soldada no flange inferior da viga e sabe-se que a reação na extremidade da viga é de 150 kN. O coeficiente de atrito estático é 0,30 entre as duas superfícies de aço e 0,60 entre o aço e o concreto. Se o movimento horizontal da viga é contido pela força Q , determine (a) a força P necessária para se erguer a viga e (b) a força Q correspondente.

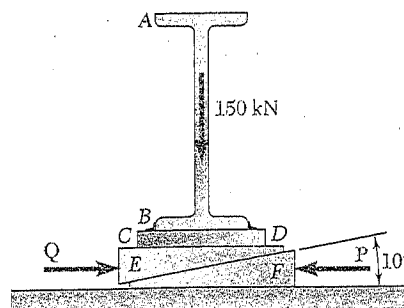


Fig. P8.51

8.52 O bloco A sustenta uma coluna tubular e repousa sobre a cunha B, tal como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático em todas as superfícies de contato é 0,25 e que $\theta = 45^\circ$, determine a menor força P necessária para se erguer o bloco A.

8.53 O bloco A sustenta uma coluna tubular e repousa sobre a cunha B, tal como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático em todas as superfícies de contato é 0,25 e que $\theta = 45^\circ$, determine a menor força P para que o equilíbrio seja mantido.

8.54 e 8.55 Uma cunha A de 16° e massa desprezível é colocada entre dois blocos B e C de 80 kg que repousam sobre superfícies inclinadas, tal como mostra a figura. O coeficiente de atrito estático entre a cunha e os blocos e entre o bloco C e o plano inclinado é 0,40. Determine a intensidade da força P para que o movimento da cunha seja iminente quando o coeficiente de atrito estático entre o bloco B e o plano inclinado for (a) 0,40 e (b) 0,60.

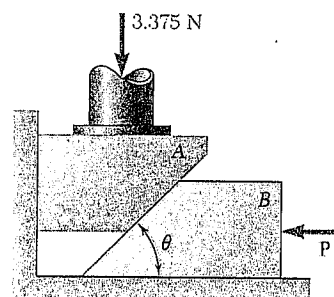


Fig. P8.52 e P8.53

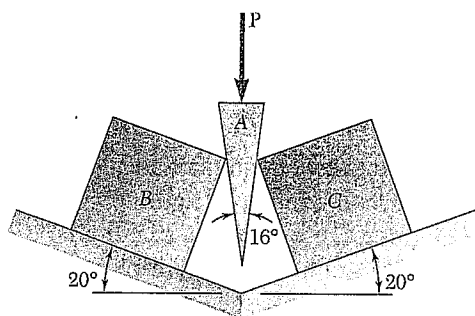


Fig. P8.54

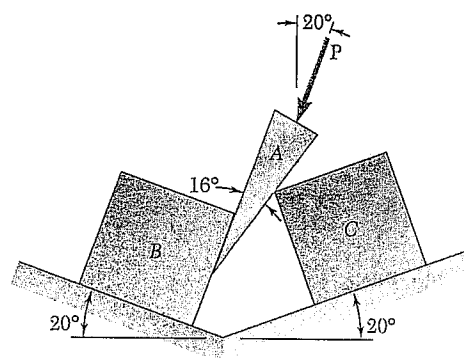


Fig. P8.55

8.56 Uma cunha de 10° deve ser forçada por baixo da extremidade B de uma barra AB de 54 N. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,45 entre a cunha e a barra e 0,25 entre a cunha e o piso, determine a menor força P necessária para se erguer a extremidade B da barra.

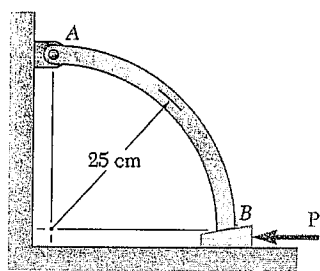


Fig. P8.56

8.57 Uma pequena chave de fenda é usada para separar as duas espiras de um chaveiro circular. O ângulo de cunha da ponta da chave de fenda é de 16° e o coeficiente de atrito estático entre as espiras e a ponta é 0,12. Sabendo que foi necessária uma força P com 3,6 N de intensidade para inserir a chave de fenda até a posição de equilíbrio mostrada na figura, determine a intensidade das forças exercidas pela chave de fenda sobre o chaveiro imediatamente após a remoção da força P .

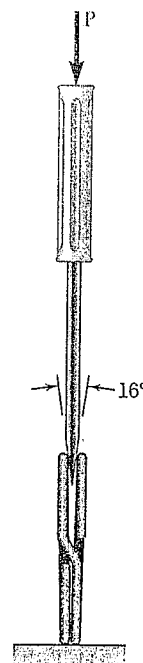


Fig. P8.57

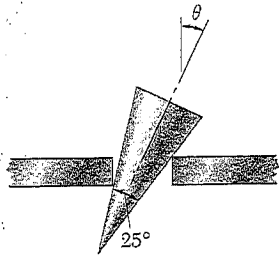


Fig. P8.58

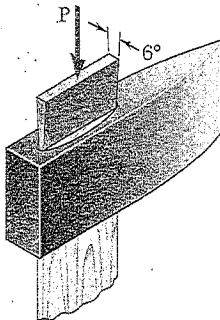


Fig. P8.59

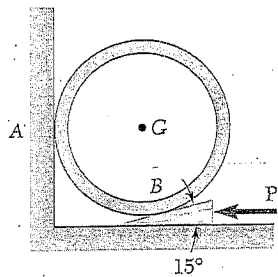


Fig. P8.60 e P8.61

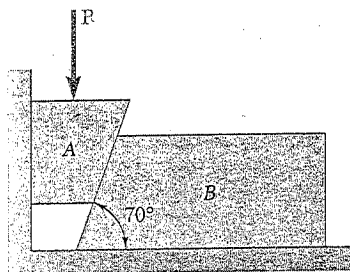


Fig. P8.64

8.58 Uma cunha cônica é colocada entre duas placas horizontais que, em seguida, são movidas vagarosamente uma em direção à outra. Indique o que acontecerá com a cunha (a) se $\mu_s = 0,20$; (b) se $\mu_s = 0,30$.

8.59 Uma cunha de aço de 6° é inserida na extremidade de um cabo de machado para engastar o cabo na cabeça do machado. O coeficiente de atrito estático entre a cunha e o cabo é $0,35$. Sabendo que foi necessária uma força P com 250 N de intensidade para se inserir a cunha até a posição de equilíbrio mostrada na figura, determine a intensidade das forças exercidas pela cunha sobre o cabo após a remoção da força P .

8.60 Uma cunha de 15° é forçada por baixo de um tubo de 450 N , tal como mostra a figura. O coeficiente de atrito estático de todas as superfícies é $0,20$. Determine (a) a superfície sobre a qual o tubo escorregará primeiro e (b) a força P para que o movimento da cunha seja iminente.

8.61 Uma cunha de 15° é forçada por baixo de um tubo de 450 N , tal como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático em ambas as superfícies da cunha é $0,20$, determine o maior coeficiente de atrito estático entre o tubo e a parede vertical para que o escorregamento seja iminente em A.

8.62 Sacos de semente de grama são armazenados sobre uma prancha de madeira, tal como mostra a figura. Para se mover a prancha, insere-se uma cunha de 9° por baixo da extremidade A. Sabendo que o peso das sementes de grama pode ser representado pela carga distribuída mostrada na figura e que o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies de contato é $0,45$, (a) determine a força P para que o movimento da cunha seja iminente e (b) indique se a prancha irá deslizar sobre o piso.

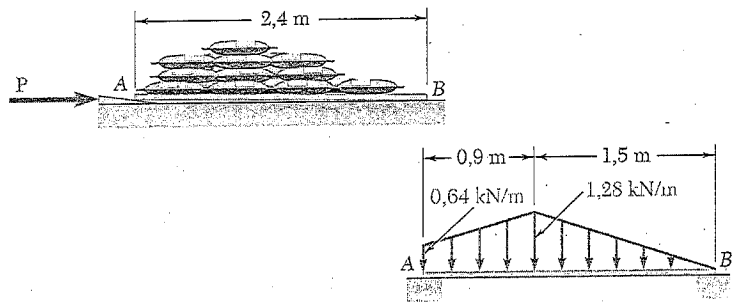


Fig. P8.62

8.63 Resolva o Problema 8.62 supondo que a cunha seja inserida por baixo da prancha em B em vez de A.

*8.64 O bloco A de 90 N repousa sobre o bloco B de 450 N , como mostra a figura. O coeficiente de atrito estático μ_s é o mesmo entre os blocos A e B e entre o bloco B e o piso, ao passo que o atrito entre o bloco A e a parede pode ser desprezado. Sabendo que $P = 135\text{ N}$, determine o valor de μ_s para que o movimento seja iminente.

*8.65 Resolva o Problema 8.64 considerando que μ_s é o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies de contato.

8.66 Deduza as seguintes fórmulas, relacionando a carga W e a força P exercida sobre a alavanca do macaco discutido na Seção 8.6. (a) $P = (Wr/a) \operatorname{tg}(\theta + \phi_s)$, para se erguer a carga; (b) $P = (Wr/a) \operatorname{tg}(\phi_s - \theta)$, para se descer a carga se o parafuso for autotravante; (c) $P = (Wr/a) \operatorname{tg}(\theta - \phi_s)$, para se manter a carga se o parafuso não for autotravante.

8.67 A engrenagem sem fim de rosca quadrada mostrada na figura tem um raio médio de 30 mm e um avanço de 7,5 mm. A engrenagem maior está sujeita a um torque horário constante de 720 N · m. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre as duas engrenagens é 0,12, determine o torque que deve ser aplicado ao eixo AB a fim de rodar a engrenagem maior no sentido anti-horário. Despreze o atrito nos mancais em A , B e C .

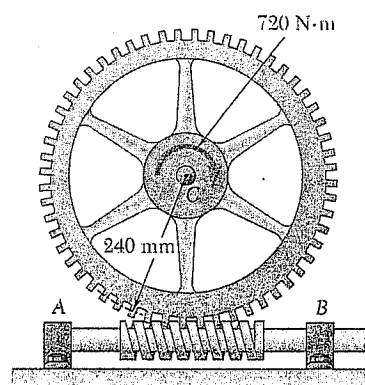


Fig. P8.67

8.68 No Problema 8.67, determine o torque que deve ser aplicado ao eixo AB a fim de se rodar a engrenagem no sentido horário.

8.69 Parafusos de alta resistência são usados na construção de muitas estruturas de aço. Para um parafuso de 24 mm de diâmetro nominal, a tração mínima necessária é de 210 kN. Considerando que o coeficiente de atrito seja 0,40, determine o torque necessário que deve ser aplicado ao parafuso e à porca. O diâmetro médio do filete de rosca é 22,6 mm e o avanço é 3 mm. Despreze o atrito entre a porca e a arruela e considere o parafuso como sendo de rosca quadrada.

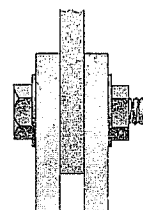


Fig. P8.69

8.70 As extremidades de duas barras fixas A e B são feitas cada qual na forma de um parafuso de rosca quadrada simples de raio médio 0,75 cm e passo 0,25 cm. A barra A tem uma rosca à direita e a barra B uma rosca à esquerda. O coeficiente de atrito estático entre as barras e a luva rosqueada é 0,12. Determine a intensidade do binário que deve ser aplicado à luva a fim de se juntarem as barras.



Fig. P8.70

8.71 No Problema 8.70, considerando que uma rosca à direita seja usada em *ambas* as barras A e B , determine a intensidade do binário que deve ser aplicado à luva a fim de girá-la.

8.72 A posição do macaco de automóvel mostrado na figura é controlada por um parafuso ABC com rosca simples em cada extremidade (rosca à direita em A , rosca à esquerda em C). Cada rosca tem um passo de 2 mm e um diâmetro médio de 7,5 mm. Se o coeficiente de atrito estático é 0,15, determine a intensidade do binário M que deve ser aplicado para se erguer o automóvel.

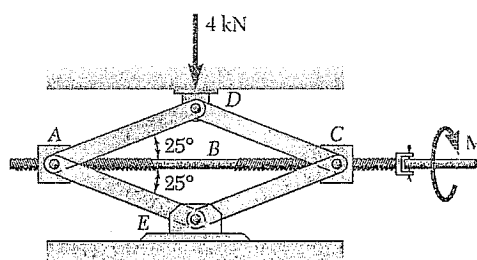


Fig. P8.72

8.73 Para o macaco do Problema 8.72, determine a intensidade do binário M que deve ser aplicado para baixar o automóvel.

8.74 No sacador de engrenagens mostrado na figura, o parafuso de rosca quadrada AB tem um raio médio de 22,5 mm e um avanço de 6 mm. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,10, determine o torque que se deve aplicar ao parafuso para se produzir uma força de 4,5 kN sobre a engrenagem. Despreze o atrito na extremidade A do parafuso.

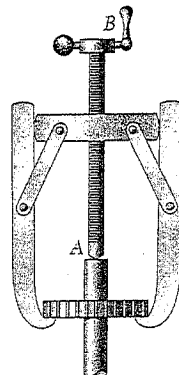


Fig. P8.74

*8.7 MANCAIS DE DESLIZAMENTO. ATRITO EM EIXO

Mancais de deslizamento são usados para fornecer apoio lateral a árvores e eixos rotativos. Os mancais de escora, que serão estudados na próxima seção, são usados para fornecer apoio axial a árvores e eixos. Se o mancal de deslizamento for completamente lubrificado, a resistência de atrito dependerá da velocidade de rotação, da folga entre o eixo e o mancal e da viscosidade do lubrificante. Conforme indicado na Seção 8.1, tais problemas são estudados em mecânica dos fluidos. Os métodos deste capítulo, porém, podem ser aplicados ao estudo de atrito em eixo quando o mancal não é lubrificado ou é lubrificado apenas em parte. Assim, é possível supor que o eixo e o mancal estejam em contato direto ao longo de uma linha reta única.

Considere duas rodas, cada uma de peso W , montadas rigidamente sobre um eixo apoiado simetricamente em dois mancais de deslizamento (Fig. 8.10a). Se as rodas giram, concluímos que é necessário aplicar um binário M a cada uma delas para mantê-las girando. O diagrama de corpo livre mostrado na Fig. 8.10c representa uma das rodas e o semi-eixo correspondente em projeção sobre um plano perpendicular ao eixo. As forças que atuam sobre o corpo livre incluem o peso W da roda, o binário M necessário para se manter seu movimento e a força R representativa da reação do mancal. Essa força é vertical, igual e oposta a W , mas não passa pelo centro O do eixo; R localiza-se à direita de O a uma distância tal que seu momento em relação a O contrabalança o momento M do binário. Logo, o contato entre eixo e mancal não se dá no ponto mais baixo A quando o eixo gira. Esse contato ocorre no ponto B (Fig. 8.10b), ou melhor, ao longo de uma linha reta que intercepta o plano da figura em B . Fisicamente, isso se explica pelo fato de que, quando as rodas são postas em movimento, o eixo "sobe" nos mancais até que ocorra escorregamento. Após deslizar ligeiramente de volta, o eixo se assenta mais ou menos na posição mostrada na figura. Essa posição é tal que o ângulo entre a reação R e a normal à superfície do mancal é igual ao ângulo de atrito cinético ϕ_k . Logo, a distância de O até a linha de ação de R é

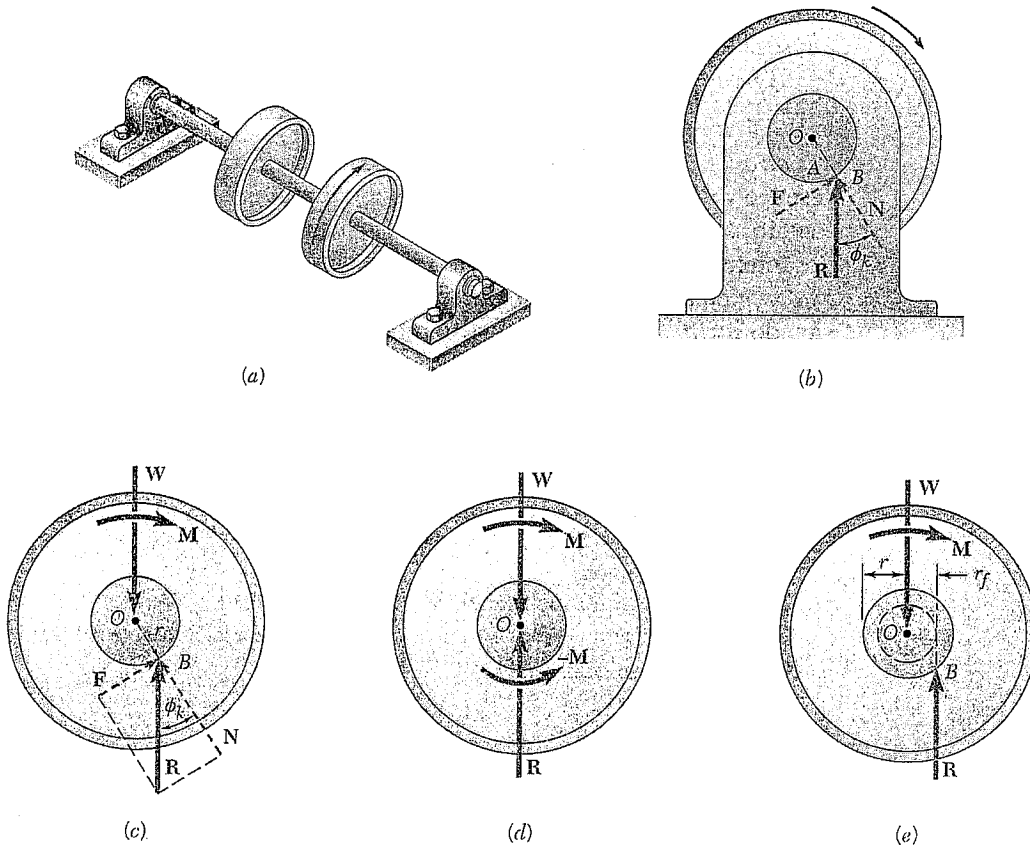


Fig. 8.10

$r \sin \phi_k$, sendo r o raio do eixo. Escrevendo $\sum M_O = 0$ para as forças que atuam sobre o corpo livre considerado, obtemos a intensidade do binário M necessário para se vencer a resistência de atrito de um dos mancais:

$$M = Rr \sin \phi_k \quad (8.5)$$

Observando que, para pequenos valores do ângulo de atrito, $\sin \phi_k$ pode ser substituído por $\text{tg } \phi_k$, ou seja, por μ_k , escrevemos a fórmula aproximada

$$M \approx Rr \mu_k \quad (8.6)$$

Na solução de certos problemas, pode ser mais conveniente deixar a linha de ação de R passar por O , como ela faz quando o eixo não gira. Um binário $-M$ com a mesma intensidade do binário M , mas com sentido oposto deve então ser adicionado à reação R (Fig. 8.10d). Esse binário representa a resistência de atrito do mancal.

No caso de se preferir uma solução gráfica, pode-se traçar a linha de ação de R prontamente (Fig. 8.10e) caso se note que ela deve ser tangente a um círculo centrado em O e de raio

$$r_f = r \sin \phi_k \approx r \mu_k \quad (8.7)$$

Esse círculo é chamado de *círculo de atrito* do eixo e do mancal e independe das condições de carregamento do eixo.

Dois tipos de mancais de escora são usados para fornecer apoio axial a árvores e eixos rotativos: (1) *mancais de extremidade* e (2) *mancais de anel* (Fig. 8.11). No caso de mancais de anel, as forças de atrito se desenvolvem entre as duas superfícies de formato anelar que estão em contato. No caso de mancais de extremidade, o atrito se dá em superfícies inteiramente circulares ou em superfícies de formato anelar quando a extremidade do eixo é oca. O atrito entre superfícies circulares, denominado *atrito em disco*, ocorre também em outros mecanismos, tais como *embreagens a disco*.

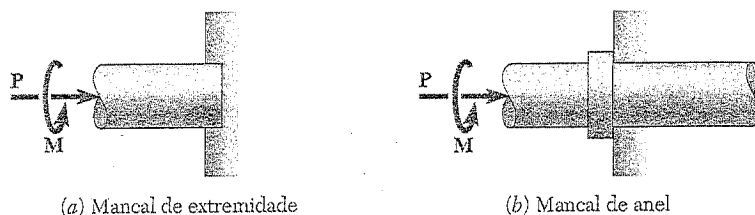


Fig. 8.11 Mancais de escora.

Para obtermos uma fórmula que seja válida no caso mais geral de atrito em disco, vamos considerar uma árvore oca rotativa. Um binário M mantém a árvore girando a velocidade constante enquanto uma força P a mantém em contato com um mancal fixo (Fig. 8.12). O contato

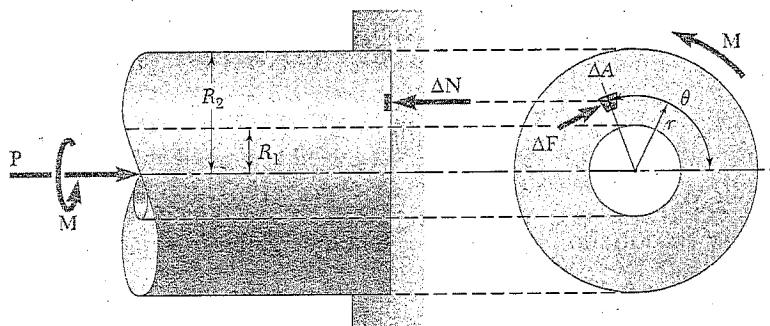


Fig. 8.12

entre a árvore e o mancal se dá em uma superfície de formato anelar de raio interno R_1 e raio externo R_2 . Considerando que a pressão entre as duas superfícies que estão em contato seja uniforme, concluímos que a intensidade da força normal ΔN exercida sobre um elemento de área ΔA é $\Delta N = P \Delta A / A$, sendo $A = \pi(R_2^2 - R_1^2)$, e que a intensidade da força de atrito ΔF que atua sobre ΔA é $\Delta F = \mu_k \Delta N$. Representando por r a distância entre o eixo de rotação e o elemento de área ΔA , expressamos a intensidade ΔM do momento de ΔF em relação ao eixo de rotação da seguinte maneira:

$$\Delta M = r \Delta F = \frac{r \mu_k P \Delta A}{\pi (R_2^2 - R_1^2)}$$

O equilíbrio da árvore exige que o momento M do binário aplicado seja igual em intensidade à soma dos momentos das forças de atrito ΔF . Substituindo ΔA pelo elemento infinitesimal $dA = r d\theta dr$ em coordenadas polares e integrando sobre a área de contato, obtemos então a seguinte expressão para a intensidade do binário M necessário para se vencer a resistência de atrito do mancal:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr d\theta \\ &= \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} (R_2^3 - R_1^3) d\theta \\ M &= \frac{2}{3} \mu_k P \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Quando o contato se dá em um círculo completo de raio R , a fórmula (8.8) reduz-se a

$$M = \frac{2}{3} \mu_k P R \quad (8.9)$$

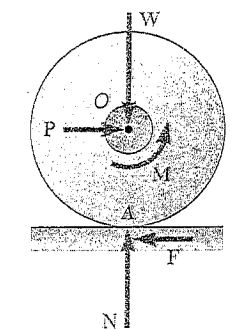
O valor de M é, então, o mesmo que seria obtido se ocorresse o contato entre a árvore e o mancal em um único ponto localizado a uma distância $2R/3$ do eixo da árvore.

O maior torque que pode ser transmitido por uma embreagem a disco sem causar escorregamento é dado por uma fórmula similar à (8.9), com μ_k sendo substituído pelo coeficiente de atrito estático μ_s .

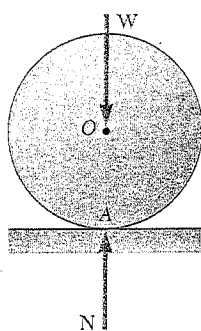
*8.9 ATRITO EM RODA. RESISTÊNCIA AO ROLAMENTO

A roda é uma das mais importantes invenções da nossa civilização. Seu uso torna possível movimentarem-se cargas pesadas com esforço relativamente pequeno. Uma vez que o ponto da roda em contato com o solo em qualquer instante dado não apresenta movimento em relação ao solo, a roda elimina as grandes forças de atrito que apareceriam caso a carga estivesse em contato direto com o solo. Todavia, existe alguma resistência ao movimento da roda. Essa resistência tem duas causas distintas. Ela se deve (1) a um efeito combinado de atrito em eixo e atrito no aro e (2) ao fato de que a roda e o solo deformam-se, de modo que o contato entre roda e solo ocorre em uma certa superfície em vez de um único ponto.

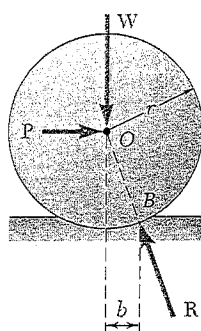
Para entender melhor a primeira causa da resistência ao movimento de uma roda, consideremos um vagão ferroviário apoiado em oito rodas montadas sobre eixos e mancais. Admite-se que o vagão mova-se para a direita a velocidade constante sobre trilhos retilíneos horizontais. O diagrama de corpo livre de uma das rodas está mostrado na Fig. 8.13a. As forças que atuam sobre o corpo livre incluem a carga W sustentada pela roda e a reação normal N do trilho. Como W é desenhada através do centro O do eixo, a resistência de atrito do mancal deve ser representada por um binário M anti-horário (ver a Seção 8.7). Para manter o



(a) Efeito do atrito no eixo



(b) Roda livre



(c) Atrito em rolamento

Fig. 8.13

corpo livre em equilíbrio, devemos adicionar duas forças P e F iguais e opostas, formando um binário horário de momento $-M$. A força F é a força de atrito exercida pelo trilho sobre a roda e P representa a força que deve ser aplicada à roda para mantê-la rodando a uma velocidade constante. Observe que as forças P e F não existiriam se não houvesse atrito entre a roda e o trilho. O binário M que representa o atrito no eixo seria então nulo; assim, a roda deslizaria sobre o trilho sem girar em seu mancal.

O binário M e as forças P e F também se reduzem a zero quando não há atrito de eixo. Por exemplo, uma roda que não é apoiada em mancais e roda livremente a uma velocidade constante em um solo horizontal (Fig. 8.13b) estará sujeita a apenas duas forças: seu peso próprio W e a reação normal N do solo. Independentemente do valor do coeficiente de atrito entre a roda e o solo, não haverá força de atrito sobre a roda. Uma roda que gire livremente sobre um solo horizontal deve então manter-se girando indefinidamente.

A experiência, porém, indica que a roda irá desacelerar e finalmente atingir o repouso. Isso se deve ao segundo tipo de resistência mencionado no início desta seção, conhecido como a *resistência ao rolamento*. Sob ação da carga W , tanto a roda como o solo deformam-se ligeiramente, fazendo com que o contato entre roda e solo se dê em uma certa superfície. Evidências experimentais mostram que a resultante das forças exercidas pelo solo sobre a roda nessa superfície é uma força R aplicada no ponto B , que não se localiza diretamente sob o centro O da roda, mas sim ligeiramente à sua frente (Fig. 8.13c). Para contrabalançar o momento de W em relação a B e manter a roda rodando a uma velocidade constante, é necessário aplicar uma força horizontal P no centro da roda. Escrevendo $\sum M_B = 0$, obtemos

$$Pr = Wb \tag{8.10}$$

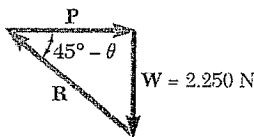
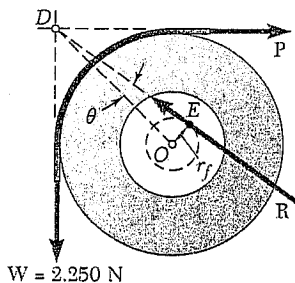
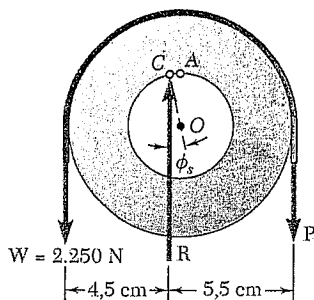
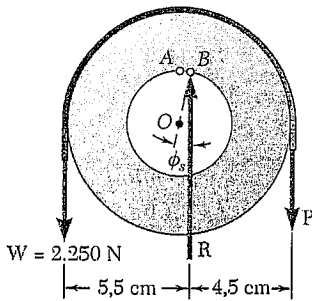
sendo r = raio da roda

b = distância horizontal entre O e B

A distância b é comumente denominada *coeficiente de resistência ao rolamento*. Deve-se notar que b não é um coeficiente adimensional, pois representa um comprimento; geralmente, b é expresso em milímetros. Valores do coeficiente de resistência ao rolamento variam de aproximadamente 0,25 mm para uma roda de aço sobre um trilho de aço a 125 mm para a mesma roda sobre solo macio.

PROBLEMA RESOLVIDO 8.6

Uma roldana de 10 cm de diâmetro pode girar em torno de um eixo fixo de 5 cm. O coeficiente de atrito estático entre a roldana e o eixo é 0,20. Determine (a) a menor força vertical **P** necessária para se começar a erguer uma carga de 2.250 N, (b) a menor força vertical **P** necessária para se manter a carga e (c) a menor força horizontal **P** necessária para se começar a erguer a mesma carga.



SOLUÇÃO

a. Força vertical **P necessária para se começar a erguer a carga.** Quando as forças em ambas as partes da corda são iguais, o contato entre a roldana e o eixo se dá em **A**. Quando **P** aumenta, a roldana roda ligeiramente em torno do eixo e o contato se dá em **B**. O diagrama de corpo livre da roldana quando o movimento é iminente está traçado na figura. A distância perpendicular do centro **O** da roldana e a linha de ação de **R** é

$$r_f = r \sin \phi_s \approx r \mu_s \quad r_f \approx (2,5 \text{ cm}) 0,20 = 0,5 \text{ cm}$$

Somando os momentos em relação a **B**, escrevemos

$$+\uparrow \sum M_B = 0: \quad (5,5 \text{ cm})(2.250 \text{ N}) - (4,5 \text{ cm})P = 0$$

$$P = 2.750 \text{ N} \quad \mathbf{P = 2.750 \text{ N} \downarrow}$$

b. Força vertical **P para se manter a carga.** À medida que a força **P** diminui, a roldana roda em torno do eixo e o contato se dá em **C**. Tomando a roldana como um corpo livre e somando os momentos em relação a **C**, escrevemos

$$+\uparrow \sum M_C = 0: \quad (4,5 \text{ cm})(2.250 \text{ N}) - (5,5 \text{ cm})P = 0$$

$$P = 1.841 \text{ N} \quad \mathbf{P = 1.841 \text{ N} \downarrow}$$

c. Força horizontal **P para se começar a erguer carga.** Como não são paralelas, as três forças **W**, **P** e **R** devem ser concorrentes. Logo, a direção de **R** é determinada a partir do fato de que sua linha de ação deve passar pelo ponto de interseção **D** de **W** e **P** e deve ser tangente ao círculo de atrito. Lembrando que o raio do círculo de atrito é $r_f = 0,5 \text{ cm}$, escrevemos

$$\sin \theta = \frac{OE}{OD} = \frac{0,5 \text{ cm}}{(5 \text{ cm})\sqrt{2}} = 0,0707 \quad \theta = 4,1^\circ$$

Do triângulo de forças, obtemos

$$P = W \cot (45^\circ - \theta) = (2.250 \text{ N}) \cot 40,9^\circ$$

$$= 2.597 \text{ N} \quad \mathbf{P = 2.597 \text{ N} \rightarrow}$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, você aprendeu várias outras aplicações de engenharia das leis de atrito.

1. Mancais de deslizamento e atrito em eixo. Em mancais de deslizamento, a reação não passa pelo centro da árvore ou eixo que está sendo apoiado. A distância entre o centro da árvore ou eixo e a linha de ação da reação (Fig. 8.10) é definida pela equação

$$r_f = r \operatorname{sen} \phi_k \approx r \mu_k$$

se o movimento está ocorrendo de fato, e pela equação

$$r_f = r \operatorname{sen} \phi_s \approx r \mu_s$$

se o movimento é iminente.

Assim que tiver determinado a linha de ação da reação, você poderá traçar um *diagrama de corpo livre* e usar as equações correspondentes de equilíbrio para completar sua resolução [Problema Resolvido 8.6]. Em alguns problemas, é útil observar que a linha de ação da reação deve ser tangente a um círculo de raio $r_f \approx r \mu_k$ ou $r_f \approx r \mu_s$, conhecido como *círculo de atrito* [Problema Resolvido 8.6, parte c]. É importante lembrar que a reação é sempre dirigida de modo a se opor à rotação real ou iminente da árvore ou eixo.

2. Mancais de escora e atrito em disco. Em um *mancal de escora*, a intensidade do binário necessário para se vencer a resistência de atrito é igual à soma dos momentos das *forças de atrito cinético* exercidas sobre os elementos na extremidade da árvore [Eqs. (8.8) e (8.9)].

Um exemplo de atrito em disco ocorre na *embreagem a disco*. Esse tipo de embreagem é analisado do mesmo modo que um mancal de escora, exceto pelo fato de que, na determinação do maior torque que pode ser transmitido, você deve calcular a soma dos momentos das *forças de atrito estático máximas* sobre o disco.

3. Atrito em roda e resistência ao rolamento. Você viu que a resistência ao rolamento de uma roda é causada por deformações tanto da roda como do solo. A linha de ação da reação \mathbf{R} do solo sobre a roda intercepta o solo a uma distância horizontal b do centro da roda. A distância b é conhecida como *coeficiente de resistência ao rolamento*, sendo expressa em milímetros.

4. Em problemas que envolvam tanto resistência ao rolamento como atrito em eixo, seu diagrama de corpo livre deve mostrar que a linha de ação da reação \mathbf{R} do solo sobre a roda é tangente ao círculo de atrito do eixo e intercepta o solo a uma distância horizontal do centro da roda igual ao coeficiente de resistência ao rolamento.

PROBLEMAS

8.75 Uma roldana de 120 mm de raio e 5 kg de massa é fixada a um eixo de 30 mm de raio que se ajusta com folga em um mancal fixo. Observe que a roldana estará prestes a girar quando uma massa de 0,5 kg for adicionada ao bloco A. Determine o coeficiente de atrito estático entre o eixo e o mancal.

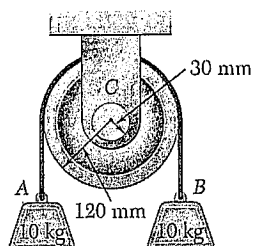


Fig. P8.75

8.76 e 8.77 A roldana dupla mostrada na figura é fixada a um eixo de 1,25 cm de raio que se ajusta com folga a um mancal fixo. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o eixo e o mancal lubrificado insuficientemente é 0,40, determine a intensidade da força P necessária para se começar a erguer a carga.

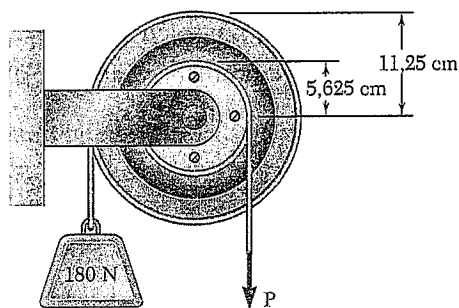


Fig. P8.76 e P8.78

8.78 e 8.79 A roldana dupla mostrada na figura é fixada a um eixo de 1,25 cm de raio que se ajusta com folga a um mancal fixo. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o eixo e o mancal lubrificado insuficientemente é 0,40, determine a intensidade da força P necessária para se manter o equilíbrio.

8.80 A alavanca de controle ABC ajusta-se com folga sobre um eixo de 18 mm de diâmetro no suporte B . Sabendo que $P = 130$ N para uma rotação horária iminente da alavanca, determine (a) o coeficiente de atrito estático entre o eixo e a alavanca e (b) a intensidade da força P para que a rotação anti-horária da alavanca seja iminente.

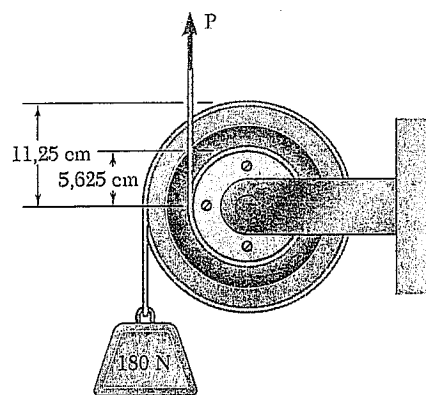


Fig. P8.77 e P8.79

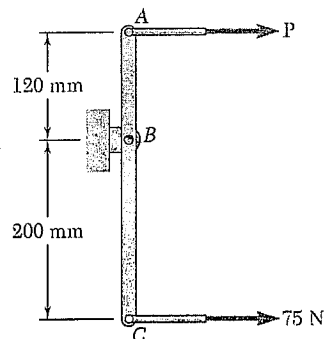


Fig. P8.80

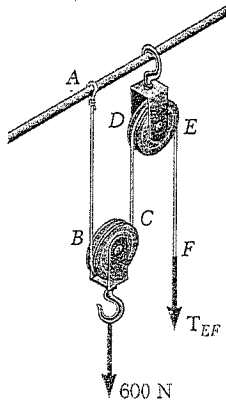


Fig. P8.81 e P8.82

8.81 A talha mostrada na figura é usada para erguer uma carga de 600 N. Cada uma das roldanas de 60 mm de diâmetro gira sobre um eixo de 10 mm de diâmetro. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético é 0,20, determine a tração em cada parte da corda quando a carga é erguida devagar.

8.82 A talha mostrada na figura é usada para erguer uma carga de 600 N. Cada uma das roldanas de 60 mm de diâmetro gira sobre um eixo de 10 mm de diâmetro. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético é 0,20, determine a tração em cada parte da corda quando a carga é baixada devagar.

8.83 O tipo de união mostrado na figura é usado frequentemente na construção de pontes de rodovias para possibilitar a expansão causada por variações de temperatura. Em cada um dos pinos A e B de 7,5 cm o coeficiente de atrito estático é 0,20. Sabendo que o componente vertical da força exercida por BC sobre a união é 225 kN, determine (a) a força horizontal que deve ser exercida sobre a viga BC para começar a mover a união e (b) o ângulo que a força resultante exercida pela viga BC sobre a união fará com a vertical.

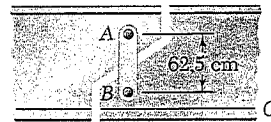


Fig. P8.83

8.84 e 8.85 Uma cancela composta de uma haste ABC de 24 kg e um contrapeso D de 66 kg é fixada a um eixo B de 24 mm de diâmetro que se ajusta com folga a um mancal fixo. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o eixo e o mancal é 0,20, determine a intensidade da força P para que a rotação anti-horária da cancela seja iminente.

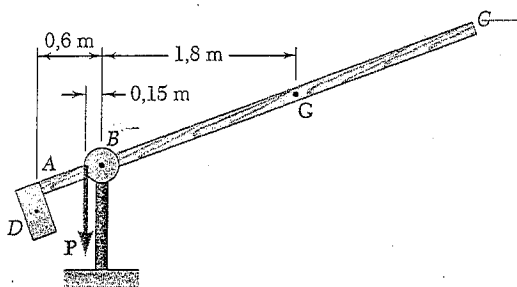


Fig. P8.84 e P8.86

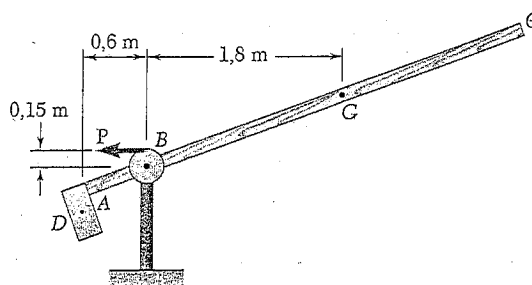


Fig. P8.85 e P8.87

8.86 e 8.87 Uma cancela composta de uma haste ABC de 24 kg e em contrapeso D de 66 kg é fixada a um eixo B de 24 mm de diâmetro que se ajusta com folga a um mancal fixo. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o eixo e o mancal é 0,20, determine a intensidade da força P para que a rotação horária da cancela seja iminente.

8.88 Um vagão ferroviário pesa 350 kN e é apoiado em oito rodas de 80 cm de diâmetro com eixos de 12,5 cm de diâmetro. Sabendo que os coeficientes de atrito são $\mu_s = 0,020$ e $\mu_k = 0,015$, determine a força

horizontal necessária (a) para movimento iminente do vagão e (b) para se manter o vagão movendo-se a velocidade constante. Despreze a resistência ao rolamento entre as rodas e os trilhos.

8.89 Um patinete é projetado para rolar a velocidade constante em um declive com 2% de inclinação. Considerando que o coeficiente de atrito cinético entre o eixo de 2,5 cm e o mancal é 0,10, determine o diâmetro necessário das rodas. Despreze a resistência ao rolamento entre as rodas e o solo.

8.90 Uma enceradeira elétrica de 25 kg é operada sobre uma superfície cujo coeficiente de atrito cinético é 0,25. Considerando que a força normal por unidade de área entre o disco e o assoalho é distribuída uniformemente, determine a intensidade Q das forças horizontais necessárias para se impedir o movimento da máquina.

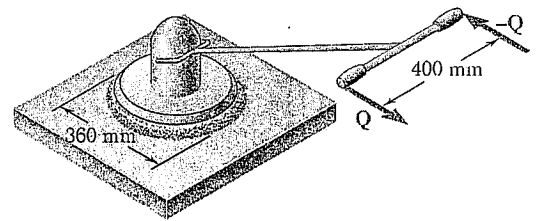


Fig. P8.90

8.91 O pivô para o acento de uma cadeira de escritório compõe-se de uma placa de aço A, que sustenta o acento, do eixo maciço de aço B, que é soldado em A e que gira livremente dentro do membro tubular C e do mancal de náilon D. Se uma pessoa com peso $W = 810$ N está sentada diretamente acima do pivô, determine a intensidade do binário M para que a rotação do acento seja iminente, sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o membro tubular e o mancal é 0,15.

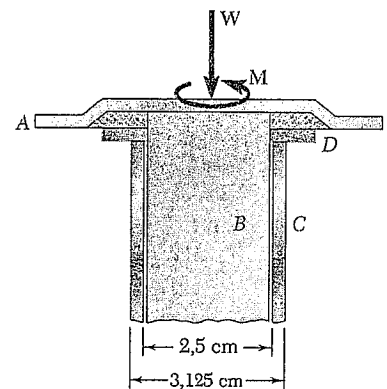


Fig. P8.91

*8.92 À medida que as superfícies de um eixo e um mancal desgastam-se, a resistência ao atrito de um mancal de escora diminui. Geralmente, considera-se que o desgaste é diretamente proporcional à distância percorrida por qualquer ponto dado do eixo e, portanto, à distância r do ponto ao eixo de rotação. Logo, supondo que a força normal por unidade de área é inversamente proporcional a r , mostre que a intensidade M do binário necessário para se vencer a resistência ao atrito de um mancal de extremidade gasto (com contato na superfície circular completa) é igual a 75% do valor dado pela fórmula (8.9) para um mancal novo.

*8.93 Supondo que os mancais se desgastam do modo indicado no Problema 8.92, mostre que a intensidade M do binário necessário para se vencer a resistência ao atrito de um mancal de anel gasto é

$$M = \frac{1}{2} \mu_k P (R_1 + R_2)$$

sendo P = intensidade da força axial total
 R_1, R_2 = raios interno e externo do anel

*8.94 Supondo que a pressão entre as superfícies de contato seja uniforme, mostre que a intensidade M do binário necessário para se vencer a resistência de atrito para o mancal cônico mostrado é

$$M = \frac{2}{3} \frac{\mu_k P}{\text{sen } \theta} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}$$

8.95 Resolva o Problema 8.90 considerando que a força normal por unidade de área entre o disco e o assoalho varia linearmente desde um máximo no centro até zero na circunferência do disco.

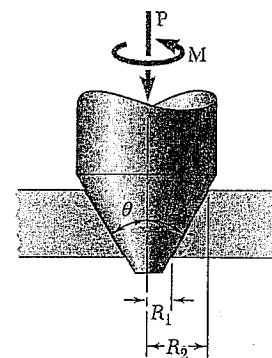


Fig. P8.94

8.96 Uma base de máquina de 10 kN é rolada ao longo de um piso de concreto usando uma série de tubos de aço com diâmetro externo de 12,5 cm. Sabendo que o coeficiente de resistência ao rolamento é 0,0625 cm entre os tubos e a base e 0,15625 cm entre os tubos e o piso de concreto, determine a intensidade da força **P** necessária para se mover devagar a base ao longo do piso.

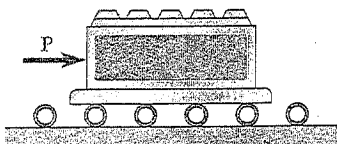


Fig. P8.96

8.97 Sabendo que um disco de 120 mm de diâmetro rola a uma velocidade constante em um declive com 2% de inclinação, determine o coeficiente de resistência ao rolamento entre o disco e o declive.

8.98 Determine a força horizontal necessária para se mover um automóvel de 1 Mg com pneus de 460 mm de diâmetro ao longo de uma estrada horizontal com velocidade constante. Despreze todas as formas de atrito, exceto a resistência ao rolamento, e considere que o coeficiente de resistência ao rolamento é 1 mm.

8.99 Resolva o Problema 8.88 incluindo o efeito de um coeficiente de resistência ao rolamento de 0,05 cm.

8.100 Resolva o Problema 8.89 incluindo o efeito de um coeficiente de resistência ao rolamento de 0,175 cm.

8.10 ATRITO EM CORREIA

Considere uma correia plana que passa sobre um tambor cilíndrico fixo (Fig. 8.14a). Propomos-nos a determinar a relação que existe entre os valores T_1 e T_2 da tração nas duas partes da correia quando a correia está prestes a deslizar para a direita.

Vamos destacar da correia um pequeno elemento PP' subtendendo um ângulo $\Delta\theta$. Representando por T a tração em P e por $T + \Delta T$ a tração em P' , traçamos o diagrama de corpo livre do elemento da correia (Fig. 8.14b). Além das duas forças de tração, as forças que atuam sobre o corpo livre são o componente normal ΔN da reação do tambor e a força de atrito ΔF . Como se supõe que o movimento é iminente, temos $\Delta F = \mu_s \Delta N$. Deve-se notar que, se $\Delta\theta$ tender a zero, as intensidades ΔN e ΔF e a diferença ΔT entre a tração em P e a tração em P' também tenderão a zero; entretanto, o valor T da tensão em P permanecerá inalterado. Esta observação ajuda a entender a notação que escolhemos.

Escolhendo os eixos de coordenadas mostrados na Fig. 8.14b, escrevemos as equações de equilíbrio para o elemento PP' :

$$\sum F_x = 0: (T + \Delta T) \cos \frac{\Delta\theta}{2} - T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s \Delta N = 0 \quad (8.11)$$

$$\sum F_y = 0: \Delta N - (T + \Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} - T \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 0 \quad (8.12)$$

Resolvendo a Eq. (8.12) para ΔN , substituindo na Eq. (8.11) e simplificando, obtemos

$$\Delta T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s (2T + \Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

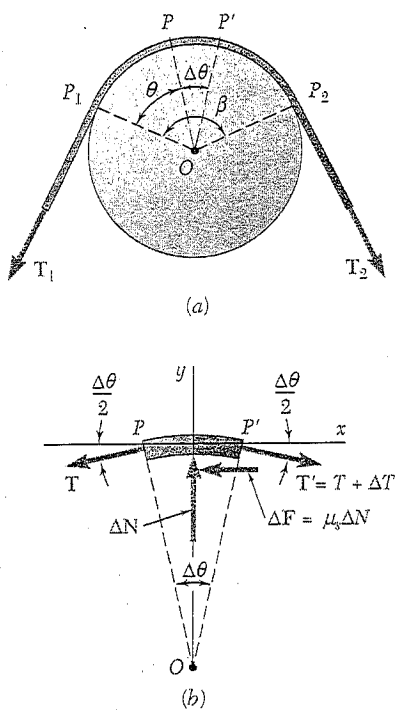


Fig. 8.14

Ambos os termos são agora divididos por $\Delta\theta$. Para o primeiro termo, simplesmente divide-se ΔT por $\Delta\theta$. A divisão do segundo termo é efetuada dividindo-se os termos entre parênteses por 2 e o seno por $\Delta\theta/2$. Escrevemos

$$\frac{\Delta T}{\Delta\theta} \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s \left(T + \frac{\Delta T}{2} \right) \frac{\text{sen}(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 0$$

Se agora fizermos $\Delta\theta$ tender a 0, o co-seno tende a 1 e $\Delta T/2$ tende a zero, como observamos antes. O quociente entre $\text{sen}(\Delta\theta/2)$ e $\Delta\theta/2$ tende a 1, de acordo com um lema demonstrado em livros de cálculo. Como o limite de $\Delta T/\Delta\theta$ é, por definição, igual à derivada $dT/d\theta$, escrevemos

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu_s T = 0 \quad \frac{dT}{T} = \mu_s d\theta$$

Ambos os membros da última equação (Fig. 8.14a) serão agora integrados desde P_1 até P_2 . Em P_1 , temos $\theta = 0$ e $T = T_1$; em P_2 , temos $\theta = \beta$ e $T = T_2$. Integrando entre esses limites, escrevemos

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^\beta \mu_s d\theta$$

$$\ln T_2 - \ln T_1 = \mu_s \beta$$

ou, observando que o primeiro membro é igual ao logaritmo natural do quociente entre T_2 e T_1 ,

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \quad (8.13)$$

Essa relação também pode ser escrita na forma

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \quad (8.14)$$

As fórmulas que acabamos de deduzir aplicam-se igualmente bem a problemas que envolvam correias planas que passam sobre tambores cilíndricos fixos e a problemas que envolvam cordas enroladas em torno de um pilar ou de um cabrestante. Essas fórmulas também podem ser usadas para se resolverem problemas que envolvam freios de cinta. Em tais problemas, é o tambor que está prestes a girar, enquanto a cinta permanece fixa. As fórmulas também podem ser aplicadas a problemas que envolvam transmissões por correia. Nesses problemas, tanto a polia como a correia giram; nosso interesse então é determinar se a correia irá escorregar, ou seja, se ela irá mover-se *em relação* à polia.

As fórmulas (8.13) e (8.14) devem ser usadas somente se a correia, corda ou freio estiver *prestes a escorregar*. A fórmula (8.14) será usada se T_1 ou T_2 for necessária; a fórmula (8.13) será preferível se μ_s ou o ângulo de contato β for necessário. Devemos observar que T_2 é sempre maior que T_1 ; logo, T_2 representa a tração naquela parte da correia ou



Foto 8.3 Enrolando a amarra em torno do poste de amarração, a força exercida pelo operário para controlar a corda é muito menor que a tração na parte tensionada da amarra.

corda que *pulla*, enquanto T_1 é a tração na parte que *resiste*. É preciso observar também que o ângulo de contato β deve ser expresso em *radianos*. O ângulo β pode ser maior que 2π ; por exemplo, se uma corda é enrolada n vezes em torno de um pilar, β é igual a $2\pi n$.

Se a correia, corda ou freio estiver de fato escorregando, deverão ser usadas fórmulas similares a (8.13) e (8.14), envolvendo, porém, o coeficiente de atrito cinético μ_k . Se a correia, corda ou freio não estiver escorregando e não estiver prestes a escorregar, nenhuma dessas fórmulas pode ser usada.

As correias usadas em transmissões freqüentemente são de formato em V. Na correia em V mostrada na Fig. 8.15a, o contato entre a cor-

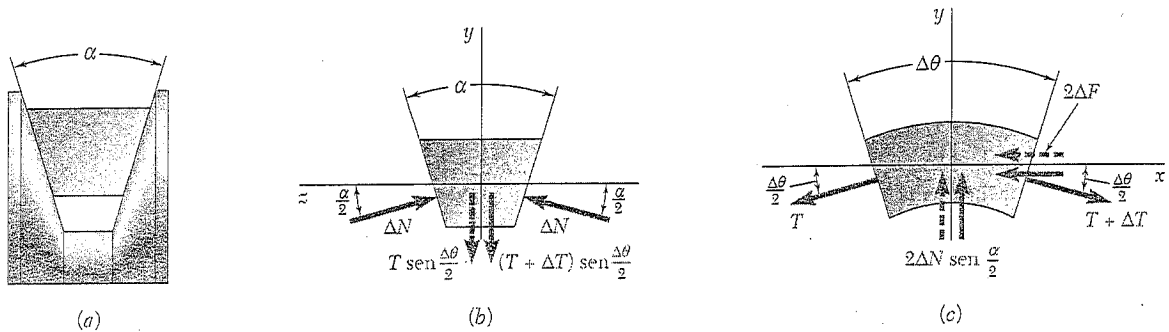


Fig. 8.15

reia e a polia se dá ao longo das laterais da ranhura. A relação que existe entre os valores T_1 e T_2 da tração nas duas partes da correia quando a correia está prestes a escorregar pode ser obtida novamente, traçando-se o diagrama de corpo livre de um elemento da correia (Fig. 8.15b e c). Equações semelhantes às Eqs. (8.11) e (8.12) são deduzidas, mas agora a intensidade da força de atrito total sobre o elemento é $2 \Delta F$, e a soma dos componentes y das forças normais é $2 \Delta N \text{ sen } (\alpha/2)$. Procedendo como antes, obtemos

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_s \beta}{\text{sen } (\alpha/2)} \tag{8.15}$$

ou

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta / \text{sen } (\alpha/2)} \tag{8.16}$$

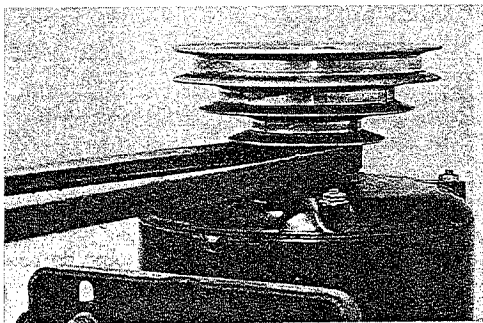
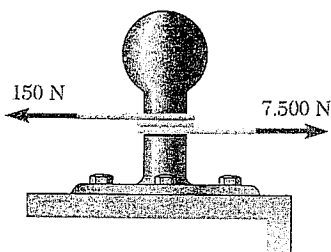


Foto 8.4 Grandes forças normais e forças de atrito sobre as laterais inclinadas da correia em V aumentam a potência que pode ser transmitida antes de ocorrer escorregamento.

PROBLEMA RESOLVIDO 8.7



Uma amarra lançada de um navio ao cais é enrolada com duas voltas completas em torno de um poste de amarração. A tração na amarra é de 7.500 N; exercendo uma força de 150 N na extremidade livre, um estivador pode manter a amarra prestes a escorregar. (a) Determine o coeficiente de atrito entre a amarra e o poste. (b) Determine a tração na amarra que poderia ser suportada pela força de 150 N caso a amarra fosse enrolada com três voltas completas em torno do poste.

SOLUÇÃO

a. Coeficiente de atrito. Como o escorregamento da corda é iminente, usamos a Eq. (8.13):

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta$$

Como a corda é enrolada com duas voltas completas em torno do poste, temos

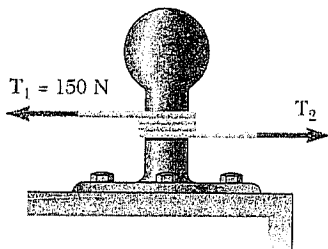
$$\begin{aligned} \beta &= 2(2\pi \text{ rad}) = 12,57 \text{ rad} \\ T_1 &= 150 \text{ N} \quad T_2 = 7.500 \text{ N} \end{aligned}$$

Logo,

$$\mu_s \beta = \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\mu_s \beta (12,57 \text{ rad}) = \ln \frac{7.500 \text{ N}}{150 \text{ N}} = \ln 50 = 3,91$$

$$\mu_s = 0,311 \qquad \mu_s = 0,31 \quad \blacktriangleleft$$



b. Corda enrolada com três voltas em torno do poste. Usando o valor de μ_s obtido na parte a, temos agora

$$\begin{aligned} \beta &= 3(2\pi \text{ rad}) = 18,85 \text{ rad} \\ T_1 &= 150 \text{ N} \quad \mu_s = 0,311 \end{aligned}$$

Substituindo esses valores na Eq. (8.14), obtemos

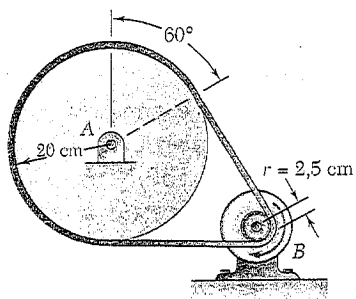
$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta}$$

$$\frac{T_2}{150 \text{ N}} = e^{(0,311)(18,85)} = e^{5,862} = 351,5$$

$$T_2 = 52.725 \text{ N}$$

$$T_2 = 52,7 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 8.8



Uma correia plana liga a polia A, que aciona uma máquina-ferramenta, à polia B, que é fixada ao eixo de um motor elétrico. Os coeficientes de atrito entre ambas as polias e a correia são $\mu_s = 0,25$ e $\mu_k = 0,20$. Sabendo que a máxima tração admissível na correia é 2.700 N, determine a maior torque que pode ser exercido pela correia sobre a polia A.

SOLUÇÃO

Como a resistência ao escorregamento depende do ângulo de contato β entre polia e correia, bem como do coeficiente de atrito estático μ_s , e como μ_s é o mesmo para ambas as polias, o escorregamento ocorrerá primeiro na polia B, cujo β é menor.

Polia B. Usando a Eq. (8.14) com $T_2 = 2.700$ N, $\mu_s = 0,25$ e $\beta = 120^\circ = 2\pi/3$ rad, escrevemos

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \quad \frac{2.700 \text{ N}}{T_1} = e^{0,25(2\pi/3)} = 1,688$$

$$T_1 = \frac{2.700 \text{ N}}{1,688} = 1.599,5$$

Polia A. Traçamos o diagrama de corpo livre da polia A. O binário M_A é aplicado à polia pela máquina-ferramenta à qual está fixada, sendo igual e oposto ao torque exercido pela correia. Escrevemos

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0: \quad M_A - (2.700 \text{ N})(20 \text{ cm}) + (1.599,5 \text{ N})(20 \text{ cm}) = 0$$

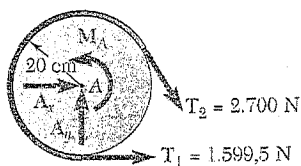
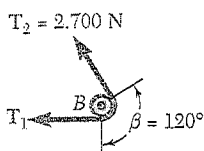
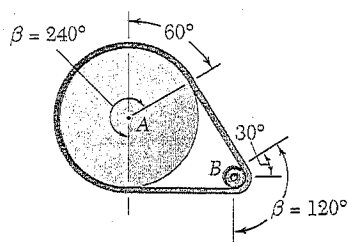
$$M_A = 22.010 \text{ N} \cdot \text{cm} \quad M_A = 220,1 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \blacktriangleleft$$

Observação. Podemos verificar que a correia não escorrega sobre a polia A calculando o valor de μ_s necessário para se impedir o escorregamento em A e concluindo que ele é menor que o valor real de μ_s . A partir da Eq. (8.13), temos

$$\mu_s \beta = \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{2.700 \text{ N}}{1.599,5 \text{ N}} = 0,524$$

e, como $\beta = 240^\circ = 4\pi/3$ rad,

$$\frac{4\pi}{3} \mu_s = 0,524 \quad \mu_s = 0,125 < 0,25$$



METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Na seção anterior, você aprendeu sobre o *atrito em correia*. Os problemas que você terá de resolver incluem correias passando sobre tambores fixos, freios de cinta em que o tambor gira enquanto a cinta permanece fixa e transmissões por correia.

1. Problemas que envolvam atrito em correia recaem em uma das seguintes categorias:

a. Problemas em que o escorregamento é iminente. Uma das fórmulas a seguir, envolvendo o *coeficiente de atrito estático* μ_s , pode então ser usada:

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \quad (8.13)$$

ou

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \quad (8.14)$$

b. Problemas em que o escorregamento está ocorrendo. As fórmulas a serem usadas podem ser obtidas das Eqs. (8.13) e (8.14), substituindo μ_s pelo *coeficiente de atrito cinético* μ_k .

2. Ao começar a resolver um problema que envolva atrito em correia, lembre-se do seguinte:

a. O ângulo β deve ser expresso em radianos. Em um problema de correia e tambor, esse é o ângulo subtendido pelo arco do tambor sobre o qual a correia está enrolada.

b. A maior tração é sempre representada por T_2 e a menor tração é representada por T_1 .

c. A maior tração ocorre na extremidade da correia que está no sentido do movimento, ou do movimento iminente, da correia em relação ao tambor. Você também pode determinar o sentido da maior tração lembrando-se de que a força de atrito sobre a correia e a maior tração são sempre opostas.

3. Em cada problema que você for chamado a resolver, três grandezas entre as quatro T_1 , T_2 , β e μ_s (ou μ_k) serão ou dadas ou encontradas prontamente e você então resolverá a equação apropriada para a quarta grandeza. Há dois tipos de problema com que você irá se deparar:

a. Encontrar μ_s entre a correia e o tambor sabendo que o escorregamento é iminente. A partir dos dados fornecidos, determine T_1 , T_2 e β ; substitua esses valores na Eq. (8.13) e resolva para μ_s [Problema Resolvido 8.7, parte a]. Siga o mesmo procedimento para encontrar o *menor valor* de μ_s para que o escorregamento não ocorra.

b. Encontrar a intensidade de uma força ou binário aplicado à correia ou tambor sabendo que o escorregamento é iminente. Os dados fornecidos devem incluir μ_s e β . Se incluírem também T_1 ou T_2 , use a Eq. (8.14) para determinar a outra tração. Se nem T_1 nem T_2 é conhecida, mas algum outro dado é fornecido, use o diagrama de corpo livre do sistema correia/tambor para escrever uma equação de equilíbrio que você deverá resolver simultaneamente com a Eq. (8.14) para T_1 e T_2 . Você então estará apto a encontrar a intensidade da força ou binário especificado do diagrama de corpo livre do sistema. Siga o mesmo procedimento para determinar o *maior valor* de uma força ou binário que pode ser aplicado à correia ou tambor para não ocorrer escorregamento [Problema Resolvido 8.8].

PROBLEMAS

8.101 Uma amarra é enrolada com duas voltas completas em torno de um poste de amarração. Exercendo uma força de 320 N na extremidade livre da amarra, um estivador consegue resistir a uma força de 20 kN na outra extremidade da amarra. Determine (a) o coeficiente de atrito estático entre a amarra e o poste e (b) o número de voltas com que a amarra deve ser enrolada em torno do poste para se resistir a uma força de 80 kN com a mesma força de 320 N.

8.102 Os blocos A e B estão ligados por uma corda que passa sobre o suporte C. O atrito entre os blocos e as superfícies inclinadas pode ser desprezado. Sabendo que o movimento do bloco B plano acima é iminente quando $W_B = 72$ N, determine (a) o coeficiente de atrito estático entre a corda e o suporte e (b) o maior valor de W_B para que o equilíbrio seja mantido. (Dica: veja o Problema 8.128.)

8.103 Os blocos A e B estão ligados por uma corda que passa sobre o suporte C. O atrito entre os blocos e as superfícies inclinadas pode ser desprezado. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a corda e o suporte é 0,50, determine a faixa de valores de W_B em que o equilíbrio é mantido. (Dica: veja o Problema 8.128.)

8.104 Um bloco de 120 kg é sustentado por uma corda enrolada $1\frac{1}{2}$ volta em torno de uma barra horizontal. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a corda e a barra é 0,15, determine a faixa de valores de P em que o equilíbrio é mantido.

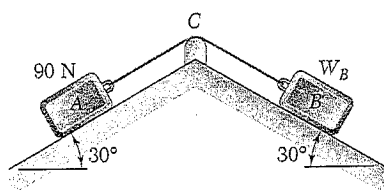


Fig. P8.102 e P8.103

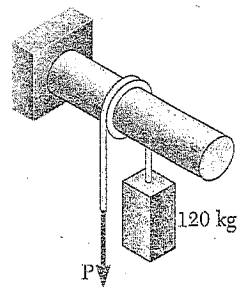


Fig. P8.104

8.105 O coeficiente de atrito estático entre o bloco B e a superfície horizontal e entre a corda e o suporte C é 0,40. Sabendo que $W_A = 135$ N, determine o menor peso do bloco B para que o equilíbrio seja mantido.

8.106 O coeficiente de atrito estático μ_s é o mesmo entre o bloco B e a superfície horizontal e entre a corda e o suporte C. Sabendo que $W_A = W_B$, determine o menor valor de μ_s para que o equilíbrio seja mantido.

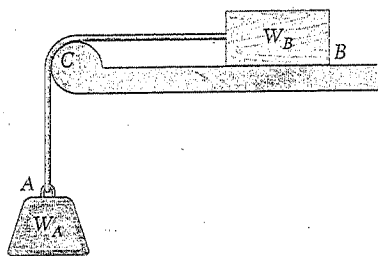


Fig. P8.105 e P8.106

8.107 Na base de motor pivotada mostrada na figura, o peso W do motor de 85 kg é usado para se manter tração na correia de transmissão. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a correia plana e os tambores A e B é 0,40 e desprezando o peso da plataforma CD , determine o maior torque que pode ser transmitido ao tambor B quando o tambor acionador A está girando em sentido horário.

8.108 Resolva o Problema 8.107 considerando que o tambor A está girando em sentido anti-horário.

8.109 Uma correia plana é usada para transmitir um torque da polia A para a polia B . O raio de cada polia é 7,5 cm e uma força de intensidade $P = 1.012,5$ N é aplicada ao eixo da polia A , como mostra a ilustração. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,35, determine (a) o maior torque que pode ser transmitido; (b) o valor máximo correspondente da tração na correia.

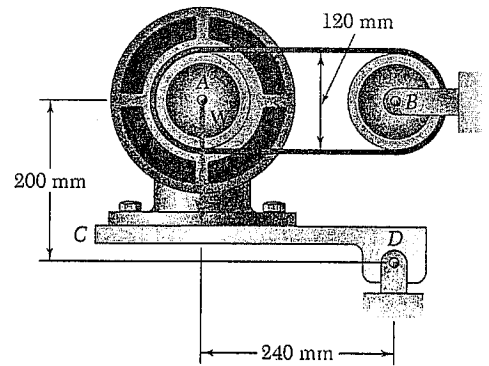


Fig. P8.107

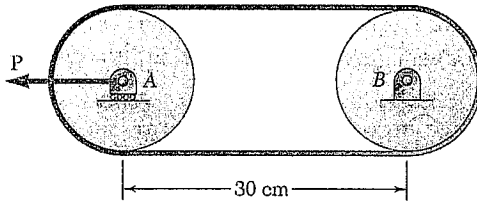


Fig. P8.109

8.110 Resolva o Problema 8.109 considerando que a correia é laçada em forma de oito em torno das polias.

8.111 Um binário M_B de intensidade $2,7$ N · m é aplicado ao tambor de acionamento B de uma lixadeira portátil movida a correia para manter a correia de lixação C a uma velocidade constante. A força total para baixo exercida sobre a peça de madeira E é 54 N e $\mu_k = 0,10$ entre a correia e a prensa de lixação D . Sabendo que $\mu_s = 0,35$ entre a correia e o tambor de acionamento e que os raios dos tambores A e B são de $2,5$ cm, determine (a) a tração mínima na parte inferior da correia para não ocorrer escorregamento entre a correia e o tambor de acionamento e (b) o valor do coeficiente de atrito cinético entre a correia e a peça.

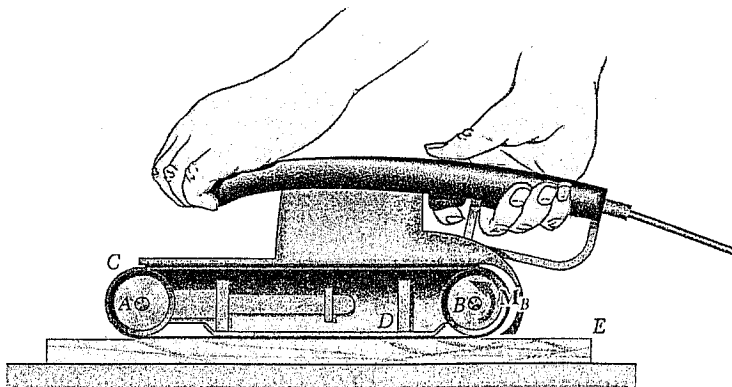


Fig. P8.111

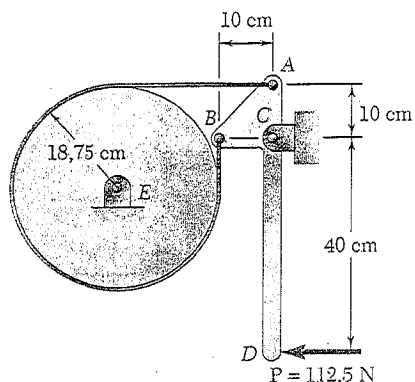


Fig. P8.112

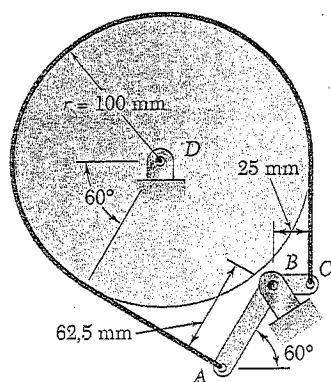


Fig. P8.113

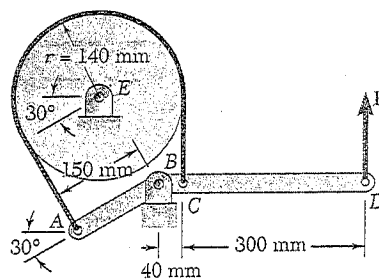


Fig. P8.114 e P8.115

8.112 Uma correia de cinta é usada para controlar a velocidade de um volante tal como mostra a figura. Determine a intensidade do binário que está sendo aplicado ao volante sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre a correia e o volante é 0,25 e que o volante está girando em sentido horário a uma velocidade constante. Mostre que o mesmo resultado é obtido se o volante girar em sentido anti-horário.

8.113 O freio de tambor mostrado na figura admite rotação do tambor em sentido horário, mas impede rotação em sentido anti-horário. Sabendo que a máxima tração admissível na correia é 7,2 kN, determine (a) a intensidade do maior binário anti-horário que pode ser aplicado ao tambor e (b) o menor valor do coeficiente de atrito estático entre a correia e o tambor para que o tambor não gire em sentido anti-horário.

8.114 Um freio de cinta diferencial é usado para controlar a velocidade de um tambor que gira a uma velocidade constante. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre a correia e o tambor é 0,30 e que um binário de intensidade $150 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado ao tambor, determine a intensidade correspondente da força P que é exercida na extremidade D da alavanca quando o tambor está girando em sentido (a) horário e (b) anti-horário.

8.115 Um freio de cinta diferencial é usado para controlar a velocidade de um tambor. Determine o valor mínimo do coeficiente de atrito estático para que o freio seja autotravante quando o tambor girar em sentido anti-horário.

8.116 O balde A e o bloco C estão ligados por uma corda que passa sobre o tambor B . Sabendo que o tambor B gira devagar em sentido anti-horário e que os coeficientes de atrito em todas as superfícies são $\mu_s = 0,35$ e $\mu_k = 0,25$, determine o menor peso combinado W do balde e seu conteúdo para que o bloco C (a) permaneça em repouso, (b) esteja prestes a mover-se plano acima e (c) continue a mover-se plano acima a uma velocidade constante.

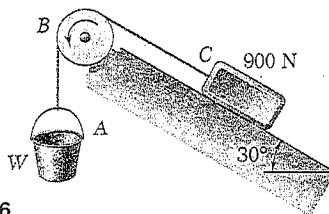


Fig. P8.116

8.117 Resolva o Problema 8.116 supondo que o tambor B esteja fixo e não possa girar.

8.118 e 8.120 Uma corda passa em torno de três roldanas de 30 mm de raio e sustenta dois blocos tal como mostra a figura. As roldanas *C* e *E* estão travadas para impedir sua rotação e os coeficientes de atrito entre a corda e as roldanas são $\mu_s = 0,20$ e $\mu_k = 0,15$. Determine a faixa de valores da massa do bloco *A* para a qual o equilíbrio é mantido (a) se a roldana *D* estiver travada e (b) se a roldana *D* estiver livre para girar.

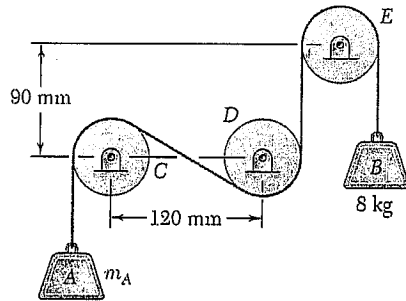


Fig. P8.118 e P8.119

8.119 e 8.121 Uma corda passa em torno de três roldanas de 30 mm de raio e sustenta dois blocos tal como mostra a figura. Duas das roldanas estão travadas para impedir sua rotação, enquanto a terceira roldana é girada devagar a uma velocidade constante. Sabendo que os coeficientes de atrito entre a corda e as roldanas são $\mu_s = 0,20$ e $\mu_k = 0,15$, determine a maior massa m_A que pode ser erguida (a) se a roldana *C* for girada e (b) se a roldana *E* for girada.

8.122 Uma fita de gravação passa sobre o tambor de acionamento *B* de 2,5 cm de raio e sob o tambor esticador *C*. Sabendo que os coeficientes de atrito entre a fita e os tambores são $\mu_s = 0,40$ e $\mu_k = 0,30$ e que o tambor *C* é livre para girar, determine o menor valor admissível de *P* para que a fita não escorregue sobre o tambor *B*.

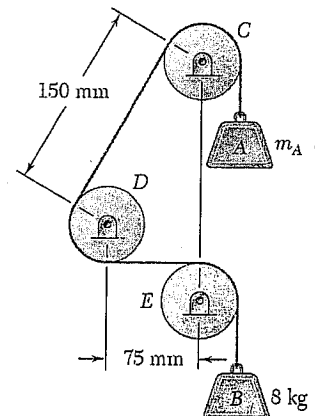


Fig. P8.120 e P8.121

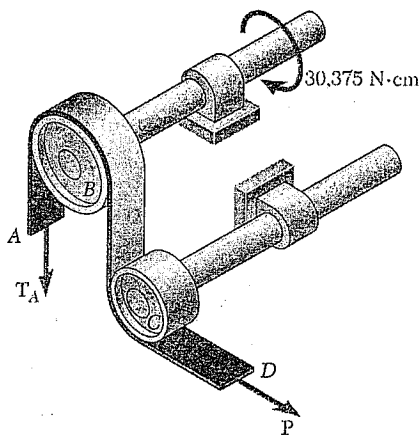


Fig. P8.122

8.123 Resolva o Problema 8.122 considerando que o tambor esticador *C* esteja fixo e não possa girar.

8.124 Para o freio de cinta mostrado na figura, a máxima tração admissível em cada correia é 5,6 kN. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a correia e o tambor de 160 mm de raio é 0,25, determine (a) o maior momento horário M_0 que pode ser aplicado ao tambor para não ocorrer escorregamento e (b) a força correspondente P exercida na extremidade da alavanca.

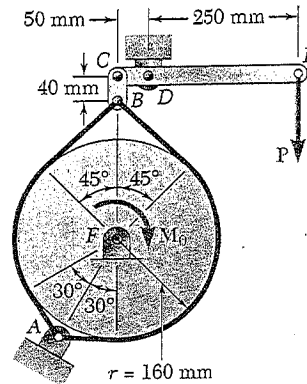


Fig. P8.124

8.125 Resolva o Problema 8.124 supondo que é aplicado um momento anti-horário ao tambor.

8.126 A chave de cinta mostrada na figura é usada para apertar o tubo com firmeza sem danificar sua superfície. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é o mesmo para todas as superfícies de contato, determine o menor valor de μ_s para que a chave seja autotravante quando $a = 25$ cm, $r = 3,75$ cm e $\theta = 65^\circ$.

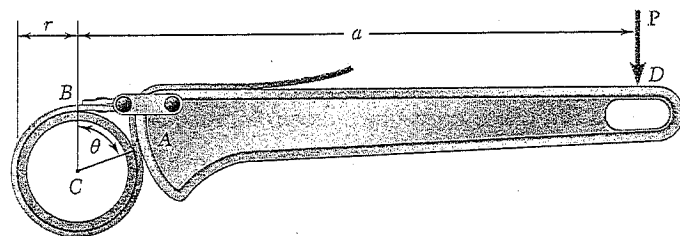


Fig. P8.126

8.127 Resolva o Problema 8.126 considerando que $\theta = 75^\circ$.

8.128 Demonstre que as Eqs. (8.13) e (8.14) são válidas para qualquer formato de superfície desde que o coeficiente de atrito seja o mesmo em todos os pontos de contato.

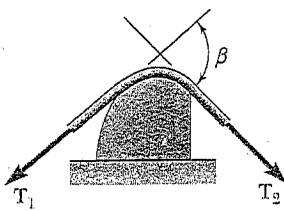


Fig. P8.128

8.129 Complete a dedução da Eq. (8.15) que relaciona as trações nas duas partes de uma correia em V.

8.130 Resolva o Problema 8.107 supondo que a correia plana e os tambores sejam substituídos por uma correia em V e por polias em V com $\alpha = 36^\circ$. (O ângulo α está mostrado na Fig. 8.15a.)

8.131 Resolva o Problema 8.109 supondo que a correia plana e os tambores sejam substituídos por uma correia em V e por polias em V com $\alpha = 36^\circ$. (O ângulo α está mostrado na Fig. 8.15a.)

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 8

Este capítulo foi dedicado ao estudo do *atrito seco*, ou seja, a problemas que envolvam corpos rígidos em contato ao longo de *superfícies sem lubrificação*.

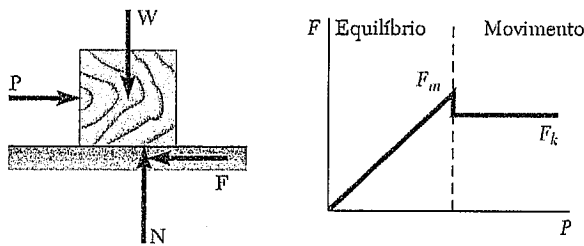


Fig. 8.16

Aplicando uma força horizontal P a um bloco em repouso sobre uma superfície horizontal [Seção 8.2], observamos que, de início, o bloco não se move. Isto mostra que uma *força de atrito* F deve ter se desenvolvido para contrabalançar P (Fig. 8.16). À medida que a intensidade de P aumenta, a intensidade de F também aumenta até atingir um valor máximo F_m . Se P aumentar ainda mais, o bloco começa a deslizar e a intensidade de F cai de F_m a um valor menor F_k . Evidências experimentais mostram que F_m e F_k são proporcionais ao componente normal N da reação da superfície. Temos

$$F_m = \mu_s N \quad F_k = \mu_k N \quad (8.1, 8.2)$$

em que μ_s e μ_k são denominados, respectivamente, *coeficiente de atrito estático* e *coeficiente de atrito cinético*. Esses coeficientes dependem da natureza e da condição das superfícies que estão em contato. Valores aproximados dos coeficientes de atrito estático foram dados na Tabela 8.1.

É conveniente às vezes substituir a força normal N e a força de atrito F pela sua resultante R (Fig. 8.17). À medida que a força de atrito aumenta e atinge seu valor máximo $F_m = \mu_s N$, o ângulo ϕ que R faz com a normal à superfície aumenta e atinge um valor máximo ϕ_s , denominado *ângulo de atrito estático*. Se o movimento ocorrer de fato, a intensidade de F cai para F_k ; de modo análogo, o ângulo ϕ cai para um valor menor ϕ_k , denominado *ângulo de atrito cinético*. Conforme mostramos na Seção 8.3, temos

$$\text{tg } \phi_s = \mu_s \quad \text{tg } \phi_k = \mu_k \quad (8.3, 8.4)$$

Atrito estático e cinético

Ângulos de atrito

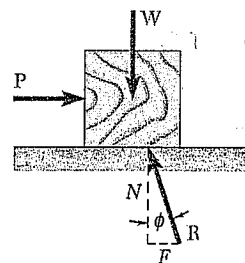


Fig. 8.17

Problemas que envolvem atrito

Ao resolver problemas de equilíbrio que envolvam atrito, devemos ter em mente que a intensidade F da força de atrito será dada por $F_m = \mu_s N$ somente se o corpo estiver prestes a deslizar [Seção 8.4]. Se o movimento não for iminente, F e N devem ser consideradas incógnitas independentes a serem determinadas das equações de equilíbrio (Fig. 8.18a). Devemos também verificar se o valor de F necessário para se manter equilíbrio não é maior que F_m ; se for, o corpo irá mover-se e a intensidade da força de atrito será $F_k = \mu_k N$ [Problema Resolvido 8.1]. Por outro lado, caso se saiba que o movimento é iminente, F atingiu seu valor máximo $F_m = \mu_s N$ (Fig. 8.18b) e essa expressão pode ser substituída por F nas equações de equilíbrio [Problema Resolvido 8.3]. Quando apenas três forças estão envolvidas em um diagrama de corpo livre, incluindo a reação \mathbf{R} da superfície em contato com o corpo, geralmente é mais conveniente resolver o problema traçando um triângulo de forças [Problema Resolvido 8.2].

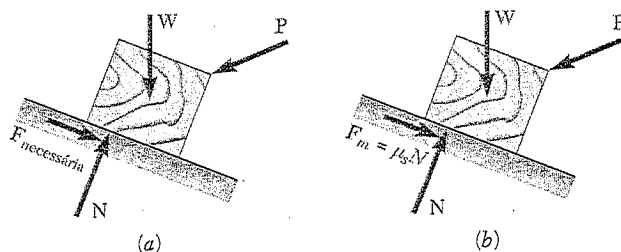


Fig. 8.18

Quando um problema envolve a análise das forças exercidas por dois corpos A e B um sobre o outro, é importante indicar as forças de atrito com seu sentido correto. Por exemplo, o sentido correto da força de atrito exercida por B sobre A é oposto ao sentido do movimento relativo (ou movimento relativo iminente) de A em relação a B [Fig. 8.6].

Cunhas e parafusos

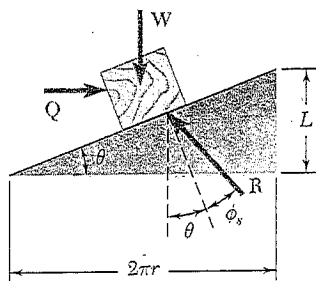


Fig. 8.19

Na segunda parte do capítulo, consideramos uma série de aplicações de engenharia específicas em que o atrito seco desempenha papel importante. No caso das *cunhas*, que são máquinas simples usadas para erguer cargas pesadas [Seção 8.5], eram traçados dois ou mais diagramas de corpo livre e tomava-se o cuidado de mostrar cada força de atrito com seu sentido correto [Problema Resolvido 8.4]. A análise de *parafusos de rosca quadrada*, freqüentemente usados em macacos, prensas e outros mecanismos, foi reduzida à análise de um bloco que desliza sobre um plano inclinado, desenvolvendo (planificando) o filete do parafuso e representando-o como uma linha reta [Seção 8.6]. Isto está feito novamente na Fig. 8.19, onde r representa o raio médio do filete, L é o avanço do parafuso, ou seja, a distância axial percorrida pelo parafuso durante uma volta, W é a carga e Qr é igual ao torque exercido sobre o parafuso. Observou-se que, no caso de parafusos com rosca múltipla, o avanço L não é igual a seu passo, que é a distância medida entre duas roscas consecutivas.

Outras aplicações de engenharia consideradas neste capítulo foram *mancais de deslizamento e atrito em eixo* [Seção 8.7], *mancais de escora e atrito em disco* [Seção 8.8], *atrito em roda e resistência ao rolamento* [Seção 8.9] e *atrito em correia* [Seção 8.10].

Ao resolver um problema que envolva uma *correia plana* que passa sobre um cilindro fixo, é importante determinar primeiro o sentido em que a correia escorrega ou está prestes a escorregar. Se o tambor estiver girando, o movimento real ou iminente da correia deve ser determinado *em relação* ao tambor rotativo. Por exemplo, se a correia mostrada na Fig. 8.20 estiver prestes a escorregar para a direita em relação ao

Atrito em correia

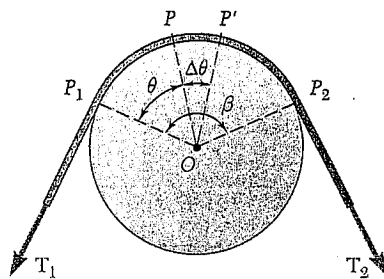


Fig. 8.20

tambor, as forças de atrito exercidas pelo tambor sobre a correia estarão direcionadas para a esquerda e a tração na parte direita da correia será maior que na parte esquerda. Representando a maior tração por T_2 , a menor tração por T_1 , o coeficiente de atrito estático por μ_s e o ângulo (em radianos) subtendido pela correia por β , deduzimos na Seção 8.10 as fórmulas

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \quad (8.13)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \quad (8.14)$$

que foram usadas nos Problemas Resolvidos 8.7 e 8.8. Se a correia de fato escorregar sobre o tambor, o coeficiente de atrito estático μ_s deve ser substituído pelo coeficiente de atrito cinético μ_k em ambas as fórmulas.

PROBLEMAS PARA REVISÃO DO TEMA

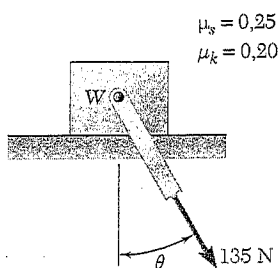


Fig. P8.132

8.132 Considerando somente valores de θ menores que 90° , determine o menor valor de θ necessário para se começar a mover o bloco para a direita quando (a) $W = 337,5 \text{ N}$ e (b) $W = 450 \text{ N}$.

8.133 A base de máquina mostrada tem uma massa de 75 kg e é dotada de patins em A e B. O coeficiente de atrito estático entre os patins e o piso é 0,30. Se uma força P de intensidade 500 N é aplicada no canto C, determine a faixa de valores de θ em que a base não se moverá.

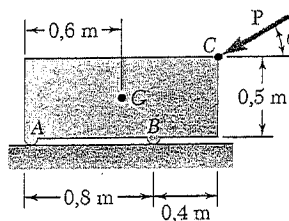


Fig. P8.133

8.134 Sabendo que é necessário um binário de intensidade $30 \text{ N} \cdot \text{m}$ para iniciar a rotação do eixo vertical, determine o coeficiente de atrito estático entre as superfícies anelares de contato.

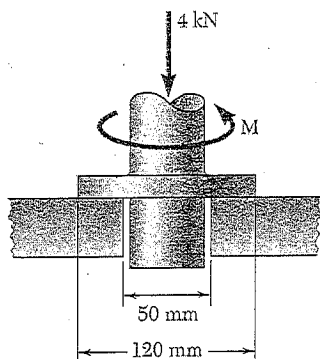


Fig. P8.134

8.135 O bloco A de 90 N e o bloco B de 135 N estão apoiados em um plano inclinado que é mantido na posição mostrada na figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,15 entre os dois blocos e zero entre o bloco B e o plano inclinado, determine o valor de θ para que o movimento seja iminente.

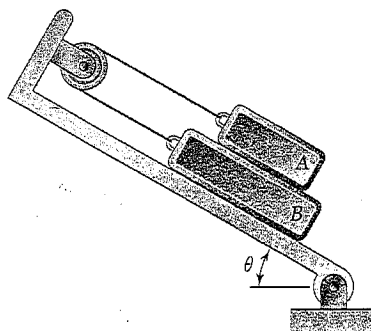


Fig. P8.135 e P8.136

8.136 O bloco A de 90 N e o bloco B de 135 N estão apoiados em um plano inclinado que é mantido na posição mostrada na figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,15 entre todas as superfícies de contato, determine o valor de θ para que o movimento seja iminente.

8.137 Dois cilindros estão ligados por uma corda que passa sobre duas barras fixas tal como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a corda e as barras é 0,40, determine a faixa de valores da massa m do cilindro D em que o equilíbrio é mantido.

8.138 Dois cilindros estão ligados por uma corda que passa sobre duas barras fixas tal como mostra a figura. Sabendo que o cilindro D tem movimento iminente para cima quando $m = 20$ kg, determine (a) o coeficiente de atrito estático entre a corda e as barras, (b) a tração correspondente na porção BC da corda.

8.139 Uma cunha de 10° é usada para rachar um pedaço de lenha. O coeficiente de atrito estático entre a cunha e a lenha é 0,35. Sabendo que foi necessária uma força P de intensidade de 2.700 N para se inserir a cunha, determine a intensidade das forças exercidas sobre a madeira pela cunha após sua inserção.

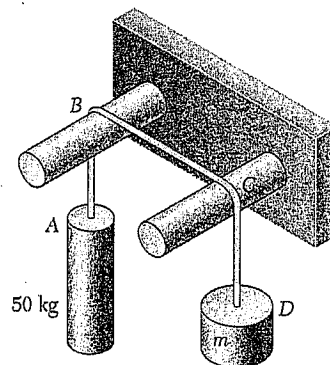


Fig. P8.137 e P8.138

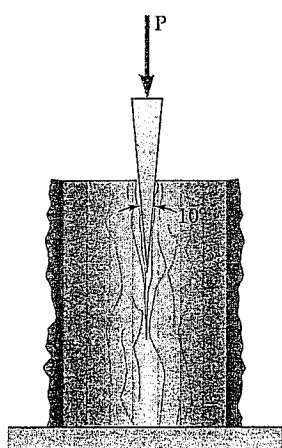


Fig. P8.139

8.140 Uma correia plana é usada para transmitir torque do tambor B para o tambor A . Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,40 e que a tração admissível da correia é 450 N, determine o maior torque que pode ser exercido sobre o tambor A .

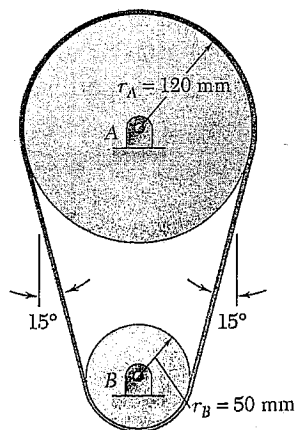


Fig. P8.140

8.141 Dois blocos A e B de 45 N estão ligados por uma haste esbelta de peso desprezível. O coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies de contato é 0,30 e a haste faz um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a vertical. (a) Mostre que o sistema está em equilíbrio quando $P = 0$. (b) Determine o maior valor de P para que o equilíbrio seja mantido.

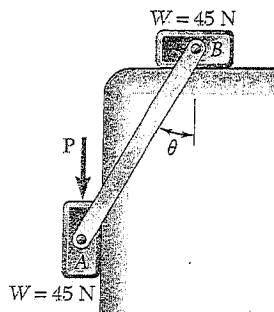


Fig. P8.141

8.142 Determine a faixa de valores de P em que o equilíbrio do bloco mostrado na figura é mantido.

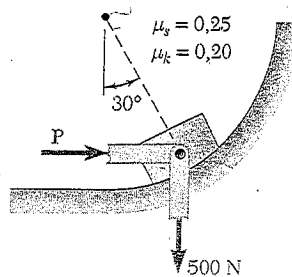


Fig. P8.142

8.143 Duas tábuas uniformes idênticas, cada qual pesando 180 N, estão encostadas temporariamente uma contra a outra tal como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies é 0,40, determine (a) a maior intensidade da força P para que o equilíbrio seja mantido e (b) a superfície em que o movimento é iminente.

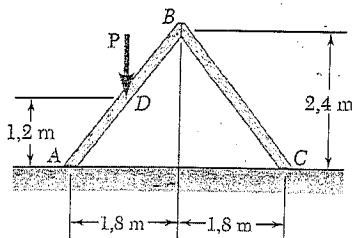


Fig. P8.143

PROBLEMAS PARA UTILIZAÇÃO DO COMPUTADOR

8.C1 Dois blocos estão ligados pelo cabo tal como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco A e a superfície horizontal varia entre 0 e 0,6, determine os valores de θ para que o movimento seja iminente e plote esses valores em função do coeficiente de atrito estático.

8.C2 A haste esbelta AB de comprimento $l = 37,5$ cm é ligada a um colar A e repousa sobre uma roda localizada a uma distância vertical $a = 6,25$ cm da barra horizontal sobre a qual o colar desliza. Desprezando o atrito em C, use um aplicativo computacional para determinar a faixa de valores da intensidade de Q para que o equilíbrio seja mantido. Plote os valores máximo e mínimo de Q como funções do coeficiente de atrito estático para $0,10 \leq \mu_s \leq 0,55$ quando $P = 67,5$ N e $\theta = 20^\circ$.

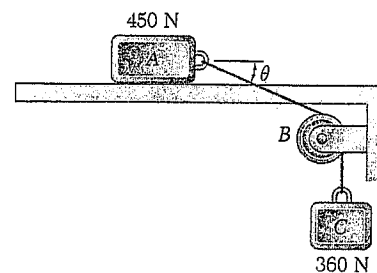


Fig. P8.C1

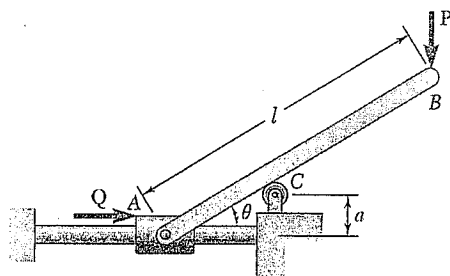


Fig. P8.C2

8.C3 Os blocos A e B estão apoiados em um plano inclinado e mantidos na posição mostrada na figura. Sabendo que a massa do bloco A é 10 kg e que o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies de contato é 0,15, use um aplicativo computacional para determinar o valor de θ para que o movimento seja iminente, considerando valores da massa do bloco B desde 0 até 50 kg com incrementos de 5 kg.

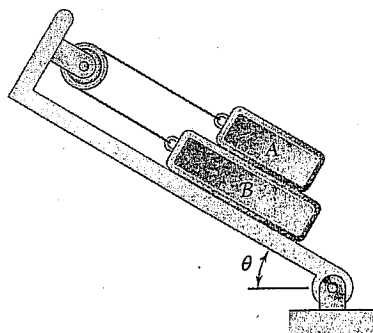


Fig. P8.C3

8.C4 A posição da haste AB de 90 N é controlada pelo bloco de 18 N mostrado na figura, que é deslocado devagar para a esquerda pela força P . Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre todas as superfícies de contato é $0,25$, use um aplicativo computacional para plotar a intensidade P da força em função de x para valores de x desde $112,5\text{ cm}$ até $12,5\text{ cm}$. Determine o máximo valor de P e o valor correspondente de x .

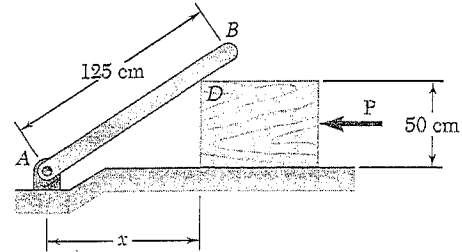


Fig. P8.C4

8.C5 Um cilindro C de $2,7\text{ N}$ repousa sobre o cilindro D , tal como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático μ_s é o mesmo em A e B , use um aplicativo computacional para determinar o maior valor do binário anti-horário M que pode ser aplicado ao cilindro D para que este não gire, considerando valores de μ_s desde 0 até $0,40$, com incrementos de $0,05$.

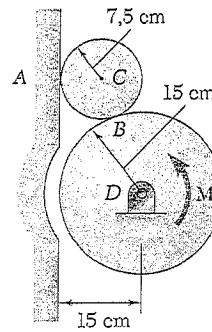


Fig. P8.C5

8.C6 Duas cunhas idênticas de massa desprezível são usadas para mover e posicionar um bloco de 200 kg . Sabendo que o coeficiente de atrito estático μ_s é o mesmo entre todas as superfícies de contato, plote a intensidade da força P referente ao movimento iminente do bloco em função de μ_s para $0,2 \leq \mu_s \leq 0,8$ quando (a) $\theta = 8^\circ$, (b) $\theta = 10^\circ$ e (c) $\theta = 12^\circ$.

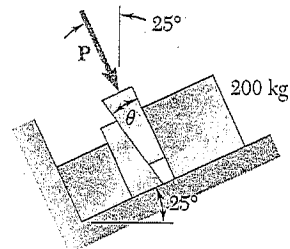


Fig. P8.C6

8.C7 O eixo da roldana mostrada na figura está fixo e não pode girar com relação ao bloco. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a corda ABCD e a roldana varia entre 0 e 0,55, determine (a) os valores correspondentes de θ para que o sistema se mantenha em equilíbrio e (b) as reações correspondentes em A e D e (c) plote os valores de θ em função do coeficiente de atrito.

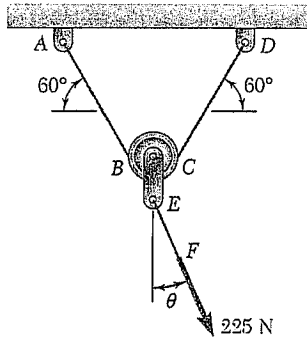


Fig. P8.C7

8.C8 Uma corda passa em torno de duas roldanas de 50 mm de raio e sustenta dois blocos, tal como mostra a figura. A roldana B pode girar somente em sentido horário e a roldana C pode girar somente em sentido anti-horário. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a corda e as roldanas é 0,25, plote os valores máximo e mínimo da massa do bloco D para que o equilíbrio seja mantido em função de θ no intervalo $15^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$.

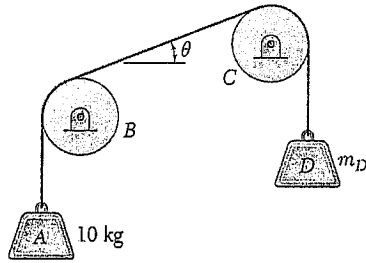


Fig. P8.C8

8.C9 Uma correia plana é usada para transmitir torque do tambor A para o tambor B. O raio de cada tambor é 10 cm e o sistema é dotado de uma polia esticadora C cuja função é aumentar o contato entre a correia e os tambores. A tensão admissível da correia é 225 N e o coeficiente de atrito estático entre a correia e os tambores é 0,30. Usando um aplicativo computacional, calcule e plote o maior torque que pode ser transmitido em função de θ no intervalo $0 \leq \theta \leq 30^\circ$.

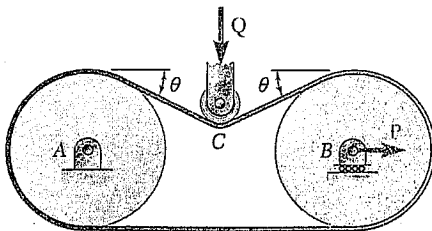
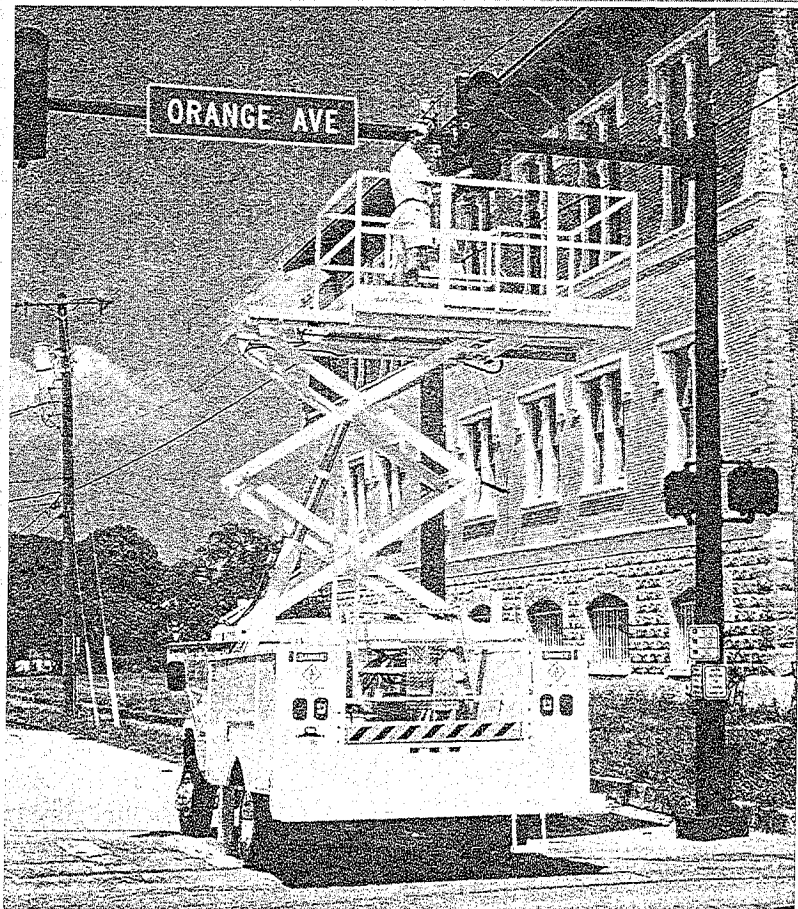


Fig. P8.C9

Método dos Trabalhos Virtuais

10



Usando os métodos analíticos discutidos neste capítulo, pode-se facilmente mostrar que a força exercida pelo cilindro hidráulico para levantar o elevador tipo tesoura mostrado independe da localização do trabalhador na plataforma.