vamente, (a) 40 m e 2,8 s, e (b) 32 m e 1,8 s? As respostas podem ser frear, prosseguir, ambas (se as duas estratégias funcionam) ou nenhuma (se nenhuma das estratégias funciona).

••39 Dois trens se movem no mesmo trilho quando os condutores subitamente notam que eles estão indo um de encontro ao outro. A Fig. 2-27 mostra as velocidades v dos trens em função do tempo t enquanto estão sendo freados. A escala vertical do gráfico é definida por $v_s = 40{,}0$ m. O processo de desaceleração começa quando a distância entre os trens é 200 m. Qual é a distância entre os trens depois que eles param?

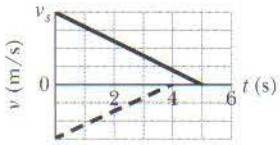


FIG. 2-27 Problema 39.

••40 Na Fig. 2-28, um carro vermelho e um carro verde, iguais exceto pela cor, movem-se um em direção ao outro em pistas vizinhas e paralelas a um eixo x. Em $t = 0$, o carro vermelho está em $x_{vermelho} = 0$ e o carro verde está em $x_{verde} = 220$ m. Se o carro vermelho tem uma velocidade constante de 20 km/h, os carros se cruzam em $x = 44{,}5$ m; se tem uma velocidade constante de 40 km/h, eles se cruzam em $x = 76{,}6$ m. Quais são (a) a velocidade inicial e (b) a aceleração do carro verde?

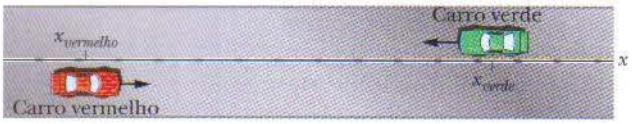


FIG. 2-28 Problemas 40 e 41.

••41 A Fig. 2-28 mostra um carro vermelho e um carro verde que se movem um em direção ao outro. A Fig. 2-29 é um gráfico do movimento dos dois carros que mostra suas posições $x_{0verde} = 270$ m e $x_{0vermelho} = 35{,}0$ m no instante $t = 0$. O carro verde tem uma velocidade constante de 20,0 m/s e o carro vermelho parte do repouso. Qual é o módulo da aceleração do carro vermelho?

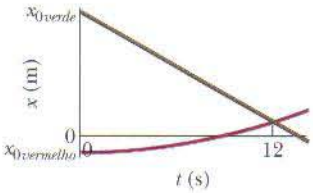


FIG. 2-29 Problema 41.

•••42 Quando um trem de passageiros de alta velocidade que se move a 161 km/h faz uma curva, o maquinista leva um susto ao ver que uma locomotiva entrou indevidamente nos trilhos através de um desvio e se encontra a uma distância $D = 676$ m à frente (Fig. 2-30). A locomotiva está se movendo a 29,0 km/h. O maquinista do trem de alta velocidade imediatamente aciona os freios. (a) Qual é o valor mínimo do módulo da desaceleração (suposta constante) para que a colisão não ocorra? (b) Suponha que o maquinista está em $x = 0$ quando, em $t = 0$, avista a locomotiva. Desenhe as curvas de $x(t)$ para a locomotiva e para o trem de alta velocidade para os casos em que a colisão é evitada por pouco e a colisão ocorre por pouco.

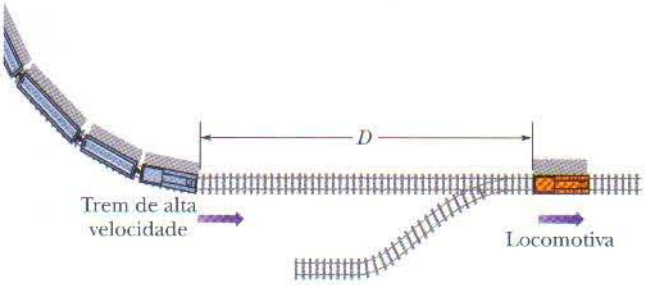


FIG. 2-30 Problema 42.

•••43 Você está discutindo no telefone celular enquanto segue um carro de polícia não identificado, a 25 m de distância; os dois carros estão a 110 km/h. A discussão distrai sua atenção do carro de polícia por 2,0 s (tempo suficiente para você olhar para o telefone e exclamar: "Eu me recuso a fazer isso!"). No início destes 2,0 s o policial começa a frear subitamente a 5,0 m/s². (a) Qual é a distância entre os dois carros quando você volta a prestar atenção no trânsito? Suponha que você leva outros 0,40 s para perceber o perigo e começar a frear. (b) Se você também freia a 5,0 m/s², qual é sua velocidade quando você bate no carro de polícia?

seção 2-9 Aceleração em Queda Livre

•44 Gotas de chuva caem 1700 m de uma nuvem até o chão. (a) Se elas não estivessem sujeitas à resistência do ar, qual seria sua velocidade ao atingir o solo? (b) Seria seguro caminhar na chuva?

•45 Em um prédio em construção, uma chave de grifo chega ao solo com uma velocidade de 24 m/s. (a) De que altura um operário a deixou cair? (b) Quanto tempo durou a queda? (c) Esboce os gráficos de y, v e a em função de t para a chave de grifo.

•46 Um desordeiro joga uma pedra verticalmente para baixo com uma velocidade inicial de 12,0 m/s, a partir do telhado de um edifício, 30,0 m acima do solo. (a) Quanto tempo leva a pedra para atingir o solo? (b) Qual é a velocidade da pedra no momento do choque?

•47 (a) Com que velocidade deve ser lançada uma bola verticalmente a partir do solo para que atinja uma altura máxima de 50 m? (b) Por quanto tempo permanece no ar? (c) Esboce os gráficos de y, v e a em função de t para a bola. Nos dois primeiros gráficos, indique o instante no qual ela atinge a altura de 50 m.

•48 Um tatu assustado pula verticalmente para cima, subindo 0,544 m nos primeiros 0,200 s. (a) Qual é a velocidade do animal ao deixar o solo? (b) Qual é a velocidade na altura de 0,544 m? (c) Qual é a altura do salto?

•49 Um balão de ar quente está subindo a uma taxa de 12 m/s e está a 80 m acima do solo quando um tripulante deixa cair um pacote. (a) Quanto tempo o pacote leva para atingir o solo? (b) Com que velocidade atinge o solo?

••50 Um parafuso se desprende de uma ponte em construção e cai 90 m até chegar ao solo. (a) Em quanto tempo o parafuso percorre os últimos 20% da queda? Qual é a velocidade (b) quando começa os últimos 20% da queda e (c) quando atinge o solo?

••51 Uma chave cai verticalmente de uma ponte que está 45 m acima da água. A chave atinge um barco de brinquedo que está se movendo com velocidade constante e se encontrava a 12 m do ponto de impacto quando a chave foi solta. Qual é a velocidade do barco?

••52 No instante $t = 0$, uma pessoa deixa cair a maçã 1 de uma ponte; pouco depois, a pessoa joga a maçã 2 verticalmente para baixo do mesmo local. A Fig. 2-31 mostra a posição vertical y das duas maçãs em função do tempo durante a queda até a estrada que passa por baixo da ponte. Qual a velocidade aproximada com a qual a maçã 2 foi jogada para baixo?

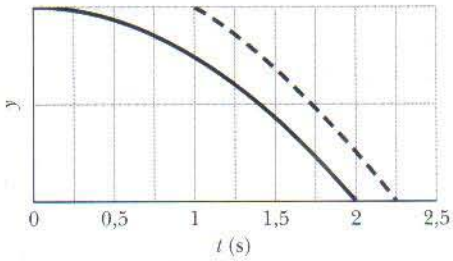


FIG. 2-31 Problema 52.

••53 Quando um balão científico desgarrado está subindo a 19,6 m/s, um dos instrumentos se desprende e cai em queda livre. A Fig. 2-32 mostra a velocidade vertical do instrumento em função do tempo, desde alguns instantes antes de se desprender até o momento em que atinge o solo. (a) Qual é a altura máxima que o instrumento atinge em relação ao ponto em que se desprendeu? (b) A que altura acima do solo o instrumento se desprendeu?

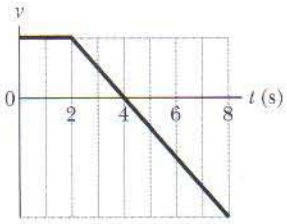


FIG. 2-32 Problema 53.

••54 A Fig. 2-33 mostra a velocidade v em função da altura y para uma bola lançada verticalmente para cima ao longo de um eixo y. A distância d é de 0,40 m. A velocidade na altura y_A é v_A. A velocidade na altura y_B é $v_A/3$. Determine a velocidade v_A.

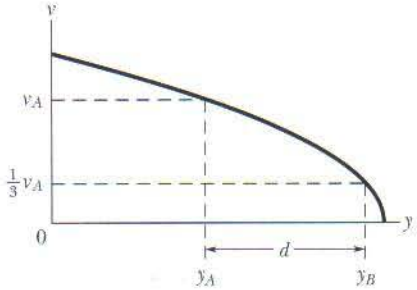


FIG. 2-33 Problema 54.

••55 Uma bola de argila úmida cai 15,0 m até o chão e permanece em contato com o solo por 20,0 ms antes de parar completamente. (a) Qual é o módulo da aceleração média da bola durante o tempo de contato com o solo? (Trate a bola como uma partícula.) (b) A aceleração média é para cima ou para baixo?

••56 Deixa-se cair uma pedra em um rio, a partir de uma ponte situada 43,9 m acima da água. Outra pedra é atirada verticalmente para baixo 1,0 s após a primeira ter sido deixada cair. As pedras atingem a água ao mesmo tempo. (a) Qual foi a velocidade inicial da segunda pedra? (b) Plote a velocidade em função do tempo para as duas pedras, supondo que $t = 0$ é o instante em que se deixou cair a primeira pedra.

••57 Para testar a qualidade de uma bola de tênis, você a deixa cair no chão a partir de uma altura de 4,00 m. Depois de quicar, ela atinge uma altura de 2,00 m. Se a bola permanece em contato com o piso por 12,0 ms, (a) qual é o módulo da aceleração média durante esse contato e (b) a aceleração média é para cima ou para baixo?

••58 Uma pedra é lançada verticalmente para cima, a partir do solo, no instante $t = 0$. Em $t = 1,5$ s ela ultrapassa o alto de uma torre; 1,0 s depois, atinge a altura máxima. Qual é a altura da torre?

••59 A água pinga de um chuveiro em um piso situado 200 cm abaixo. As gotas caem a intervalos de tempo regulares (iguais), com a primeira gota atingindo o piso quando a quarta gota começa a cair. Quando a primeira gota atinge o piso, a que distância do chuveiro se encontram (a) a segunda e (b) a terceira gotas?

••60 Um objeto cai de uma altura h a partir do repouso. Se ele percorre uma distância de $0,50h$ no último 1,00 s, determine (a) o tempo e (b) a altura da queda. (c) Explique a solução fisicamente inaceitável da equação do segundo grau em t usada para resolver o problema.

••61 Um gato sonolento observa um vaso de flores que passa por uma janela aberta, primeiro subindo e depois descendo. O vaso permanece à vista por um tempo total de 0,50 s, e a altura da janela é 2,00 m. Que distância acima do topo da janela o vaso atinge?

•••62 Uma bola é lançada verticalmente para cima a partir da superfície de outro planeta. O gráfico de y em função de t para a bola é mostrado na Fig. 2-34, onde y é a altura da bola acima do ponto de lançamento e $t = 0$ no instante em que a bola é lançada. A escala vertical do gráfico é definida por $y_s = 30,0$ m. Quais são os módulos (a) da aceleração em queda livre no planeta e (b) da velocidade inicial da bola?

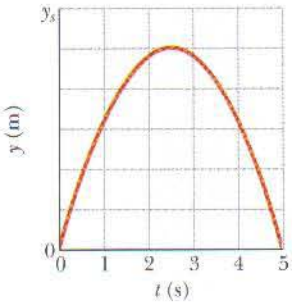


FIG. 2-34 Problema 62.

•••63 Uma bola de aço cai do telhado de um edifício e passa por uma janela, levando 0,125 s para passar do alto à base da janela, uma distância correspondente a 1,20 m. A bola quica em uma calçada e torna a passar pela janela, de baixo para cima, em 0,125 s. Suponha que o movimento para cima corresponde exatamente ao inverso da queda. O tempo que a bola gasta abaixo da base da janela é de 2,00 s. Qual é a altura do edifício?

•••64 Ao pegar um rebote, um jogador de basquete pula 76,0 cm verticalmente. Qual o tempo total (de subida e descida) que o jogador passa (a) nos 15 cm mais altos e (b) nos 15 cm mais baixos do salto? Esses resultados explicam por que os jogadores de basquete parecem flutuar no ar quando saltam?

seção 2-10 Integração de Gráficos em Análise de Movimento

•65 No Exemplo 2-9, qual é a velocidade (a) da cabeça e (b) do tronco, quando a cabeça possui a aceleração máxima?

•66 Uma salamandra do gênero *Hydromantes* captura a presa lançando a língua como um projétil: a parte traseira da língua se projeta bruscamente para a frente, desenrolando o resto da língua até que a parte dianteira atinge a presa, capturando-a. A Fig. 2-35 mostra o módulo a da aceleração em função do tempo t durante a fase de aceleração do lançamento em uma situação típica. As acelerações indicadas são $a_1 = 400$ m/s² e $a_2 = 100$ m/s². Qual é a velocidade da língua no final da fase de aceleração?

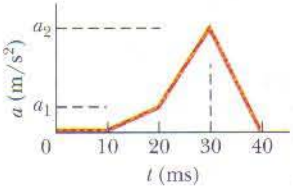


FIG. 2-35 Problema 66.

••67 Que distância percorre em 16 s um corredor cujo gráfico velocidade-tempo é mostrado na Fig. 2-30? A escala vertical do gráfico é definida por $v_s = 8{,}0$ m.

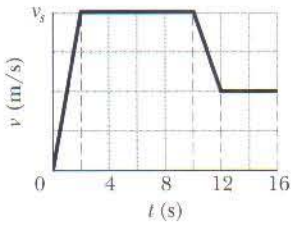


FIG. 2-36 Problema 67.

••68 Em um soco direto, no caratê, o punho começa em repouso na cintura e é movido rapidamente para a frente até o braço ficar completamente estendido. A velocidade $v(t)$ do punho está representada na Fig. 2-37 para o caso de um lutador experiente. Qual é a distância percorrida pelo punho desde o início do golpe até (a) o instante $t = 50$ ms e (b) o instante em que a velocidade do punho é máxima?

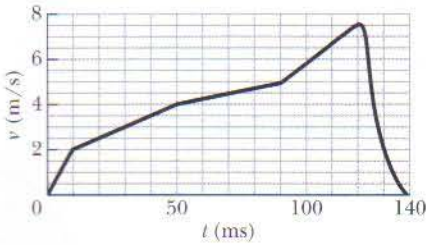


FIG. 2-37 Problema 68.

••69 Quando uma bola de futebol é chutada na direção de um jogador e o jogador a desvia de cabeça, a aceleração da cabeça durante a colisão pode ser relativamente grande. A Fig. 2-38 mostra a aceleração $a(t)$ da cabeça de um jogador de futebol sem e com capacete, a partir do repouso. No instante $t = 7{,}0$ ms, qual é a diferença entre as velocidades da cabeça sem e com capacete?

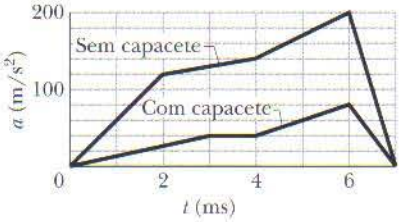


FIG. 2-38 Problema 69.

•••70 Duas partículas se movem ao longo do eixo x. A posição da partícula 1 é dada por $x = 6{,}00t^2 + 3{,}00t + 2{,}00$, onde x está em metros e t em segundos; a aceleração da partícula 2 é dada por $a = -8{,}00t$, onde a está em metros por segundo ao quadrado e t em segundos. No instante $t = 0$ a velocidade é de 20 m/s. Em que instante as duas partículas têm a mesma velocidade?

Problemas Adicionais

71 No instante em que um sinal de trânsito fica verde um automóvel começa a se mover com uma aceleração constante a de 2,2 m/s^2. No mesmo instante um caminhão, que se move com uma velocidade constante de 9,5 m/s, ultrapassa o automóvel. (a) A que distância do sinal o automóvel alcança o caminhão? (b) Qual é a velocidade do automóvel nesse instante?

72 A Fig. 2-39 mostra parte de uma rua na qual se pretende controlar o tráfego para permitir que um *grupo* de veículos atravesse vários cruzamentos sem parar. Suponha que os primeiros carros do grupo tenham acabado de chegar ao cruzamento 2, onde o sinal abriu quando estavam a uma distância d do cruzamento 2. Eles continuam a se mover a uma certa velocidade v_p (a velocidade máxima permitida) até chegarem ao cruzamento 3. As distâncias entre os cruzamentos são D_{23} e D_{12}. (a) Quanto tempo depois que o sinal do cruzamento 2 foi aberto o sinal do cruzamento 3 deve abrir para que o sinal do cruzamento 3 abra quando os primeiros carros do grupo estão a uma distância d do cruzamento 3?

Suponha que o grupo tenha encontrado o sinal fechado no cruzamento 1. Quando o sinal do cruzamento 1 abre, os carros da frente precisam de um certo tempo, t, para arrancar e um tempo adicional para atingir a velocidade de cruzeiro v_p com uma certa aceleração a. (b) Quanto tempo depois que foi aberto o sinal do cruzamento 1 o sinal do cruzamento 2 deve abrir para que o sinal do cruzamento 2 abra quando os primeiros carros do grupo estão a uma distância d do cruzamento 2?

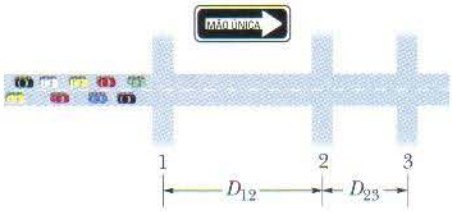


FIG. 2-39 Problema 72.

73 Em um videogame, um ponto é programado para se deslocar na tela de acordo com a função $x = 9{,}00t - 0{,}750t^3$, onde x é a distância em centímetros em relação à extremidade esquerda da tela e t é o tempo em segundos. Quando o ponto chega a uma das extremidades da tela, $x = 0$ ou $x = 15{,}0$ cm, o valor de t é zerado e o ponto começa novamente a se mover de acordo com a função $x(t)$. (a) Em que instante após o início do movimento o ponto se encontra momentaneamente em repouso? (b) Para que valor de x isso acontece? (c) Qual é a aceleração do ponto (incluindo o sinal) no instante em que isso acontece? (d) O ponto está se movendo para a direita ou para a esquerda pouco antes de atingir o repouso? (e) O ponto está se movendo para a direita ou para a esquerda pouco depois de atingir o repouso? (f) Em que instante $t > 0$ o ponto atinge a extremidade da tela pela primeira vez?

74 Deixa-se cair uma bola de chumbo em um lago de um trampolim situado 5,20 m acima da superfície da água. A bola atinge a água com uma certa velocidade e conserva esta velocidade até chegar ao fundo do lago, o que ocorre 4,80 s após começar a cair. (a) Qual é a profundidade do lago? Quais são o (b) módulo e (c) o sentido (para cima ou para baixo) da velocidade média da bola durante a queda? Suponha que toda a água do lago seja drenada. A bola é agora lançada do trampolim com uma certa velocidade inicial e novamente chega ao fundo em 4,80 s. Quais são (d) o módulo e (e) o sentido da velocidade inicial da bola?

75 O cabo que sustenta um elevador de obra vazio arrebenta quando o elevador está em repouso no alto de um edifício de 120 m de altura. (a) Com que velocidade o elevador chega ao solo? (b) De quanto é o tempo de queda? (c) Qual é a velocidade do elevador ao passar pelo ponto médio da queda? (d) Por quanto tempo o elevador estava caindo ao passar pelo ponto médio?

76 Deixa-se cair dois diamantes da mesma altura, com 1,0 s de intervalo. Quanto tempo após o primeiro diamante começar a cair a distância entre eles é 10 m?

77 Se um arremessador de beisebol lança uma bola rápida com uma velocidade horizontal de 160 km/h, quanto tempo a bola leva para atingir a base principal, situada a 18,4 m de distância?

78 Um próton está se movendo ao longo do eixo x de acordo com a equação $x = 50t + 10t^2$, onde x está em metros e t em segundos. Calcule (a) a velocidade média do próton durante os primeiros 3,0 s do movimento, (b) a velocidade instantânea do próton em $t = 3{,}0$ s e (c) a aceleração instantânea do próton em $t = 3{,}0$ s. (d) Trace o gráfico de x em função de t e mostre como a resposta do item (a) pode ser obtida a partir do gráfico. (e) Obtenha a resposta do item (b) a partir do gráfico. (f) Trace o gráfico de v em função de t e mostre no gráfico a resposta do item (c).

79 Uma motocicleta está se movendo a 30 m/s quando o motociclista aciona os freios, imprimindo à motocicleta uma desaceleração constante. Durante o intervalo de 3,0 s imediatamente após o início da frenagem a velocidade diminui para 15 m/s. Que distância percorre a motocicleta desde o início da frenagem até parar?

80 Um piloto voa horizontalmente a 1300 km/h a uma altura $h = 35$ m acima do solo inicialmente plano. No instante $t = 0$, o piloto começa a sobrevoar um terreno inclinado para cima de um ângulo $\theta = 4{,}3°$ (Fig. 2-40). Se o piloto não mudar a trajetória do avião, em que instante t o avião se chocará com o solo?

FIG. 2-40 Problema 80.

81 Um jogador de shuffleboard usa um taco para imprimir a um disco uma aceleração constante, a partir do repouso, que faz o disco atingir uma velocidade de 6,0 m/s após percorrer uma distância de 1,8 m. Em seguida, o disco perde contato com o taco e perde velocidade com uma desaceleração constante de 2,5 m/s^2 até parar. (a) Quando tempo o disco passa em movimento? (b) Qual é a distância percorrida pelo disco?

82 A aceleração da cabeça de uma cobra cascavel ao dar um bote pode chegar a 50 m/s^2. Se um carro tivesse a mesma aceleração, quanto tempo levaria para atingir a velocidade de 100 km/h a partir do repouso?

83 Um jato comercial deve atingir uma velocidade de 360 km/h para decolar. Qual é a menor aceleração constante necessária para que o avião decole de uma pista com 1,80 km de extensão?

84 Um motorista aumenta a velocidade do carro de 25 km/h para 55 km/h em 0,50 min, mantendo uma aceleração constante. Um ciclista aumenta a velocidade da bicicleta de 0 para 30 km/h em 0,50 min, mantendo uma aceleração constante. Quais são os módulos da (a) aceleração do carro e da (b) aceleração da bicicleta?

85 O tempo necessário para frear um carro pode ser dividido em duas partes: o tempo de reação para o motorista começar a frear e o tempo necessário para que a velocidade chegue a zero depois que o freio é acionado. A distância total percorrida por um carro é de 56,7 m, quando a velocidade inicial é de 80,5 km/h, e de 24,4 m quando a velocidade inicial é de 48,3 km/m. Supondo que a aceleração permanece constante depois que o freio é acionado, determine (a) o tempo de reação do motorista e (b) o módulo da aceleração.

86 Um trem vermelho a 72 km/h e um trem verde a 144 km/h estão na mesma linha, retilínea e plana, movendo-se um em direção ao outro. Quando a distância entre eles é de 950 m os dois maquinistas percebem o perigo e acionam os freios, fazendo com que os dois trens sofram uma desaceleração de 1,0 m/s^2. Os trens conseguem frear a tempo de evitar uma colisão? Caso a resposta seja negativa, determine as velocidades dos trens no momento da colisão; caso seja positiva, determine a distância final entre os trens.

87 No instante $t = 0$, um alpinista deixa cair um grampo, sem velocidade inicial, do alto de um paredão. Após um curto intervalo de tempo seu companheiro de escalada, que está 10 m acima, lança um outro grampo para baixo. A Fig. 2-41 mostra as posições y dos grampos durante a queda em função do tempo t. Com que velocidade o segundo grampo foi lançado?

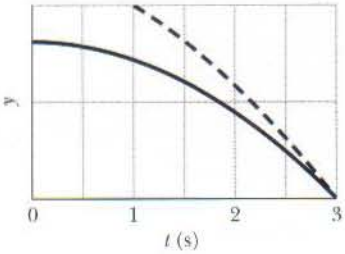


FIG. 2-41 Problema 87.

88 Uma pedra é lançada verticalmente para cima a partir da borda do terraço de um edifício. A pedra atinge a altura máxima 1,60 s após ter sido lançada. Em seguida, após quase se chocar com o edifício, a pedra chega ao solo 6,00 s após ter sido lançada. Em unidades do SI: (a) com que velocidade a pedra foi lançada? (b) Qual a altura máxima atingida pela pedra em relação ao terraço? (c) Qual a altura do edifício?

89 A aceleração de uma partícula ao longo de um eixo x é $a = 5{,}0t$, com t em segundos e a em metros por segundo ao quadrado. Em $t = 2{,}0$ s a velocidade da partícula é +17 m/s. Qual é a velocidade da partícula em $t = 4{,}0$ s?

90 Um trem partiu do repouso com aceleração constante. Em um certo instante estava se movendo a 30 m/s; 160 m adiante, estava se movendo a 50 m/s. Calcule (a) a aceleração, (b) o tempo necessário para percorrer os 160 m mencionados, (c) o tempo necessário para atingir a velocidade de 30 m/s e (d) a distância percorrida desde o repouso até o instante em que o trem atingiu a velocidade de 30 m/s. (e) Trace os gráficos de x em função de t e de v em função de t, de $t = 0$ até o instante em que o trem atingiu a velocidade de 50 m/s.

91 Um carro de corrida é capaz de acelerar de 0 a 60 km/h em 5,4 s. (a) Qual é a aceleração média, em m/s^2, durante este intervalo? (b) Qual é a distância percorrida pelo carro em 5,4 s, supondo que a aceleração seja constante? (c) Quando tempo o carro leva para percorrer uma distância de 0,25 km, a partir de repouso, mantendo uma aceleração constante igual ao valor do item (a)?

92 Trenós a jato, montados em trilhos retilíneos e planos, são usados para investigar os efeitos de grandes acelerações sobre seres humanos. Um desses trenós pode atingir uma velocidade de 1600 km/h em 1,8 s a partir do repouso. Determine (a) a aceleração (suposta constante) em unidades de g e (b) a distância percorrida.

93 A Fig. 2-42 mostra um dispositivo simples que pode ser usado para medir o seu tempo de reação: uma tira de papelão marcada com uma escala e dois pontos. Um amigo segura a tira na *vertical*, com o polegar e o indicador no ponto da direita da Fig. 2-42. Você posiciona o polegar e o indicador no outro ponto (o ponto da esquerda da Fig. 2-42), sem encostar na tira. Seu

amigo solta a tira e você tenta segurá-la assim que percebe que ela começou a cair. A marca na posição em que você segura a tira corresponde ao seu tempo de reação. (a) A que distância do ponto inferior você deve colocar a marca de 50,0 ms? Por que valor você deve multiplicar essa distância para determinar a marca de (b) 100 ms, (c) 150 ms, (d) 200 ms e (e) 250 ms? (Por exemplo: a marca de 100 ms deve estar no dobro da distância correspondente à marca de 50 ms? Nesse caso, a resposta seria 2. Você é capaz de identificar algum padrão nas respostas?)

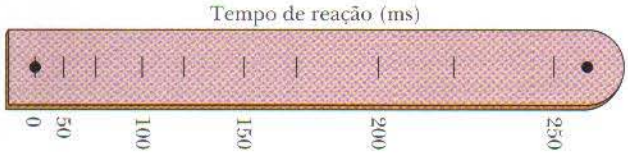


FIG. 2-42 Problema 93.

94 A Fig. 2-43 mostra a aceleração a em função do tempo t para uma partícula que se move ao longo de um eixo x. A escala vertical do gráfico é definida por a_s = 12,0 m/s². No instante t = –2,0 s a velocidade da partícula é 7,0 m/s. Qual é a velocidade da partícula no instante t = 6,0 s?

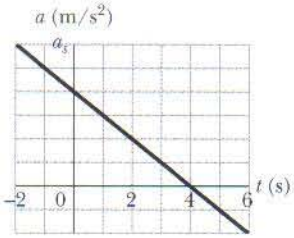


FIG. 2-43 Problema 94.

95 Um vagonete de minério é puxado para o alto de uma encosta a 20 km/h e então puxado ladeira abaixo a 35 km/h até a altura inicial. (O tempo gasto para inverter o movimento no alto da encosta é tão pequeno que pode ser desprezado.) Qual é a velocidade média do carrinho no percurso de ida e volta, ou seja, desde a altura inicial até voltar à mesma altura?

96 A duração de um piscar de olhos é da ordem de 100 ms. Que distância um avião de combate MiG-25 "Foxbat" percorre durante um piscar de olhos do piloto se a velocidade média do avião é 3400 km/h?

97 Quando a velocidade máxima permitida na New York Thruway foi aumentada de 55 milhas por hora para 65 milhas por hora, quanto tempo foi economizado por um motorista que dirigiu 700 km entre a entrada de Buffalo e a saída da cidade de Nova York na velocidade máxima permitida?

98 Um motociclista que está se movendo ao longo de um eixo x na direção leste tem uma aceleração dada por $a = (6{,}1 - 1{,}2t)$ m/s² para $0 \le t \le 6{,}0$ s. Em $t = 0$, a velocidade e a posição do ciclista são 2,7 m/s e 7,3 m. (a) Qual é a velocidade máxima atingida pelo ciclista? (b) Qual é a distância percorrida pelo ciclista entre $t = 0$ e $t = 6{,}0$ s?

99 Um certo malabarista normalmente arremessa bolas verticalmente até uma altura H. A que altura as bolas devem ser arremessadas para passarem o dobro do tempo no ar?

100 Um carro que se move com aceleração constante percorreu em 6,00 s a distância de 60,0 m que separa dois pontos. Sua velocidade ao passar pelo segundo ponto era de 15,0 m/s. (a) Qual era a velocidade no primeiro ponto? (b) Qual era o módulo da aceleração? (c) A distância do primeiro ponto o carro se encontrava em repouso? (d) Trace os gráficos de x em função de t e v em função de t para o carro, desde o repouso ($t = 0$) até o segundo ponto.

101 Deixa-se cair uma pedra de um penhasco com 100 m de altura. Quanto tempo a pedra leva para cair (a) os primeiros 50 m e (b) os 50 m seguintes?

102 A distância entre duas estações de metrô é de 1100 m. Se um trem acelera a +1,2 m/s² a partir do repouso durante a primeira metade da distância e depois desacelera a –1,2 m/s² na segunda metade, quais são (a) o tempo de percurso entre as estações e (b) a velocidade máxima do trem? (c) Trace os gráficos de x, v, e a em função de t para o percurso entre as duas estações.

103 Um certo velocista é capaz de atingir uma velocidade máxima de 11,0 m/s. Se o atleta parte do repouso com aceleração constante, atinge a velocidade máxima após percorrer uma distância de 12,0 m. Em seguida, mantém esta velocidade máxima durante o resto de uma corrida de 100 m. (a) Qual é o tempo do atleta em uma prova de 100 m rasos? (b) Para melhorar o tempo, o corredor tenta diminuir a distância necessária para atingir a velocidade máxima. Qual deve ser essa distância para que ele consiga reduzir o tempo para 10,0 s?

104 Uma partícula parte da origem em $t = 0$ e se move no sentido positivo do eixo x. O gráfico da velocidade da partícula em função do tempo é mostrado na Fig. 2-44; a escala vertical do gráfico é definida por v_s = 4,0 m/s. (a) Qual é a coordenada da partícula em t = 5,0 s? (b) Qual é a velocidade da partícula em t = 5,0 s? (c) Qual é a aceleração da partícula em t = 5,0 s? (d) Qual é a velocidade média da partícula entre t = 1,0 s e t = 5,0 s? (e) Qual é a aceleração média da partícula entre t = 1,0 s e t = 5,0 s?

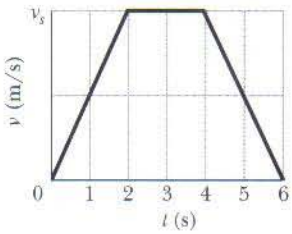


FIG. 2-44 Problema 104.

105 Uma pedra é lançada verticalmente para cima. Durante a subida ela passa por um ponto A com velocidade v e por um ponto B, 3,00 m acima de A, com velocidade $v/2$. Calcule (a) a velocidade v e (b) a altura máxima alcançada pela pedra acima do ponto B.

106 Deixa-se cair uma pedra, sem velocidade inicial, do alto de um edifício de 60 m. A que distância do solo está a pedra 1,2 s antes de chegar ao solo?

107 Um trenó a vela está se movendo para leste com velocidade constante quando uma rajada de vento produz uma aceleração constante para leste durante 3,0 s. O gráfico de x em função de t aparece na Fig. 2-45, onde $t = 0$ é tomado como sendo o instante em que o vento começou a soprar, e o sentido positivo do eixo x aponta para leste. (a) Qual é a aceleração do trenó durante o intervalo de 3,0 s? (b) Qual é a velocidade do trenó no final do

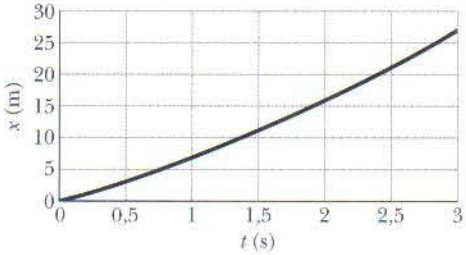


FIG. 2-45 Problema 107.

intervalo de 3,0 s? (c) Se a aceleração permanece constante por mais 3,0 s, qual é a distância percorrida pelo trenó neste segundo intervalo de 3,0 s?

108 Uma bola é lançada verticalmente para baixo do alto de um edifício com 36,6 m de altura. A bola passa pela extremidade superior de uma janela que está 12,2 m acima do solo 2,00 s após o lançamento. Qual é a velocidade da bola ao passar pela extremidade superior da janela?

109 A velocidade de uma bala de fuzil é de 640 m/s quando a bala sai do cano da arma, que tem 1,20 m de comprimento. Supondo que a aceleração da bala é constante, determine o tempo que a bala permanece no cano da arma após ser disparada.

110 Um pára-quedista salta de um avião e percorre 50 m em queda livre. Em seguida, abre o pára-quedas e sofre uma desaceleração constante de 2,0 m/s^2, chegando ao solo com uma velocidade de 3,0 m/s. (a) Quanto tempo o pára-quedista passa no ar? (b) Qual era a altitude do avião no momento do salto?

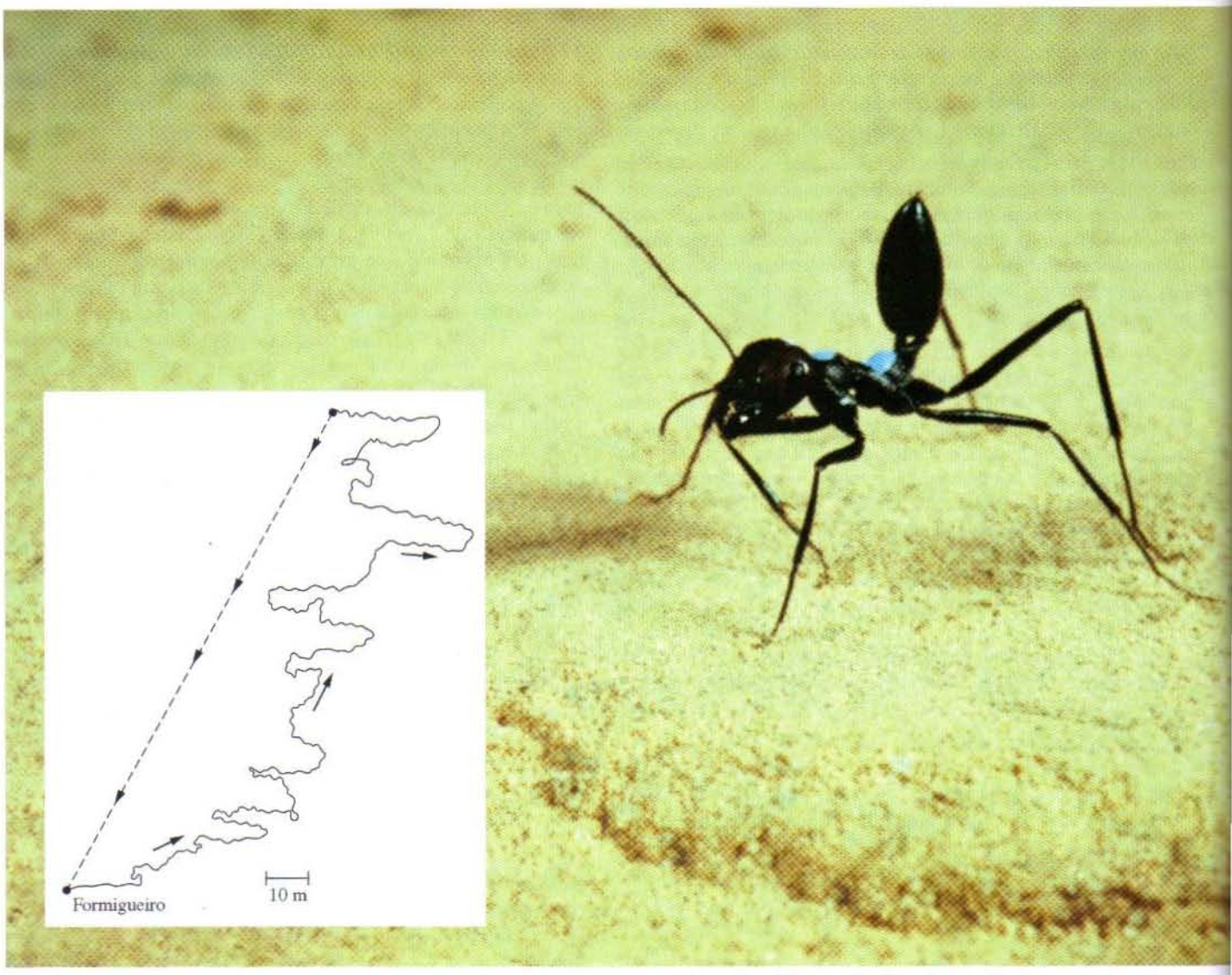
111 O Laboratório de Pesquisa de Gravidade Nula, no Centro de Pesquisas Glenn, da NASA, dispõe de uma torre de queda livre com 145 m de altura. Trata-se de uma torre vertical evacuada na qual, entre outras possibilidades, pode-se deixar cair uma esfera com 1 m de diâmetro contendo um conjunto de instrumentos. (a) Durante quanto tempo a esfera passa em queda livre? (b) Qual é a velocidade da esfera imediatamente antes de atingir um dispositivo de captura na base da torre? (c) Ao ser capturada, a esfera sofre uma desaceleração média de $25g$ quando sua velocidade é reduzida a zero. Qual é a distância percorrida pela esfera durante a desaceleração?

112 Uma bola é lançada verticalmente *para baixo* de uma altura h com uma velocidade inicial v_0. (a) Qual é a velocidade da bola no momento em que atinge o solo? (b) Quanto tempo a bola leva para chegar ao solo? Quais seriam as respostas (c) do item a e (d) do item b se a bola fosse lançada *para cima* da mesma altura e com a mesma velocidade inicial? Antes de calcular a resposta, verifique se as respostas dos itens (c) e (d) devem ser maiores, menores ou iguais às dos itens (a) e (b).

113 Um carro que é freado quando está se movendo a 200 km/h em uma auto-estrada percorre 170 m antes de parar. Supondo que a aceleração seja constante, determine o módulo da aceleração (a) em unidades do SI e (b) em unidades de g. (c) Qual é o tempo T_p que o carro leva para parar depois que os freios são acionados? O *tempo de reação* T_r é o tempo que o motorista leva para perceber uma emergência e começar a frear. Se $T_r = 400$ ms, (d) quanto vale T_p em unidades de T_r? (e) Do tempo que o carro leva para parar, a maior parte se deve à reação do motorista ou ao processo de frenagem? Óculos escuros atrasam os sinais visuais enviados dos olhos para o córtex visual no cérebro, aumentando o valor de T_r. (f) No caso extremo em que T_r aumenta de 100 ms, que distância adicional percorre o carro durante o tempo de reação?

114 O esporte em que uma bola se move mais depressa é o jai alai, no qual as velocidades medidas chegam a 303 km/h. Se um jogador profissional de jai alai se defronta com uma bola a essa velocidade e pisca involuntariamente, deixa de ver a cena por cerca de 100 ms. Que distância a bola percorre durante esse piscar de olhos?

3 Vetores



Cortesia de Rudiger Wehner, Zoologisches Institut der Universitat Zurich

A formiga do deserto Cataglyphis fortis *vive nas planícies do deserto do Saara. Quando uma dessas formigas sai à procura de alimento percorre um caminho aleatório, como mostra a figura. A formiga pode viajar mais de 500 m em uma superfície arenosa, sem qualquer ponto de referência. Mesmo assim, na hora de voltar ao formigueiro ela ruma diretamente para casa.*

Como uma formiga consegue encontrar o caminho de casa se não há pontos de referência no deserto?

A resposta está neste capítulo.

3-1 O QUE É FÍSICA?

A física lida com um grande número de grandezas que possuem amplitude e orientação, e para isso precisa de uma linguagem matemática especial, a linguagem dos vetores, para descrever essas grandezas. Essa linguagem também é usada na engenharia, em outras ciências e até mesmo nas conversas do dia-a-dia. Se você já explicou a alguém como chegar a um endereço usando expressões como "Siga por esta rua por cinco quarteirões e depois dobre à esquerda", usou a linguagem dos vetores. Na verdade, qualquer tipo de navegação se baseia em vetores, mas a física e a engenharia também usam vetores para descrever fenômenos que envolvem rotações e forças magnéticas, como veremos em capítulos posteriores. Neste capítulo, vamos discutir a linguagem básica dos vetores.

3-2 | Vetores e Escalares

Uma partícula que se move em linha reta pode se deslocar em apenas uma direção. Podemos considerar o deslocamento como positivo em uma dessas direções e negativo na outra. No caso de uma partícula que se move em três dimensões, porém, um número positivo ou negativo não é suficiente para indicar a orientação; precisamos usar um *vetor*.

Um **vetor** possui um módulo e uma orientação; os vetores seguem certas regras de combinação, que serão discutidas neste capítulo. Uma **grandeza vetorial** é uma grandeza que possui um módulo e uma orientação e pode, portanto, ser representada por um vetor. O deslocamento, a velocidade e a aceleração são exemplos de grandezas físicas vetoriais. Como neste livro serão apresentadas muitas outras grandezas vetoriais, o conhecimento das regras de combinação de vetores será de grande utilidade para o leitor.

Nem toda grandeza física envolve uma orientação. A temperatura, a pressão, a energia, a massa e o tempo, por exemplo, não "apontam" em nenhuma direção. Chamamos essas grandezas de **escalares**, e lidamos com elas pelas regras da álgebra comum. Um único valor, com um sinal (como no caso de uma temperatura de –2°C), pode ser usado para especificar um escalar.

A grandeza vetorial mais simples é o deslocamento, ou mudança de posição. Um vetor que representa um deslocamento é chamado, como seria de se esperar, de **vetor deslocamento**. (Outros exemplos de vetores são os vetores velocidade e o vetor aceleração.) Se uma partícula muda de posição movendo-se de A para B na Fig. 3-1*a*, dizemos que sofre um deslocamento de A para B, que representamos por uma seta apontando de A para B. A seta especifica o vetor graficamente. Para distinguir símbolos vetoriais de outros tipos de setas neste livro usamos um triângulo vazado na ponta das setas que representam vetores.

Na Fig. 3-1*a*, as setas de A para B, de A' para B' e de A'' para B'' têm o mesmo módulo e a mesma orientação; assim, especificam vetores deslocamento iguais e representam a mesma *variação de posição* da partícula. Um vetor pode ser deslocado sem que o seu valor mude *se* o comprimento, a direção e o sentido permanecerem os mesmos.

O vetor deslocamento nada nos diz sobre a trajetória percorrida por uma partícula. Na Fig. 3-1*b*, por exemplo, as três trajetórias que unem os pontos A e B correspondem ao mesmo vetor deslocamento, o da Fig. 3-1*a*. Um vetor deslocamento representa apenas o resultado final do movimento, não o movimento propriamente dito.

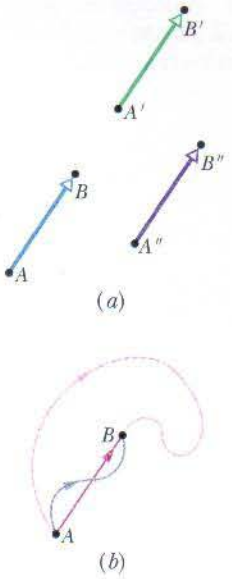


FIG. 3-1 (*a*) As três setas têm o mesmo módulo e orientação e, portanto, representam o mesmo deslocamento. (*b*) As três trajetórias que unem os dois pontos correspondem ao mesmo vetor deslocamento.

3-3 | Soma Geométrica de Vetores

Suponha que, como no diagrama vetorial da Fig. 3-2*a*, uma partícula se desloque de A a B e depois de B a C. Podemos representar o deslocamento total (independentemente da trajetória seguida) através de dois vetores deslocamento sucessivos, AB e

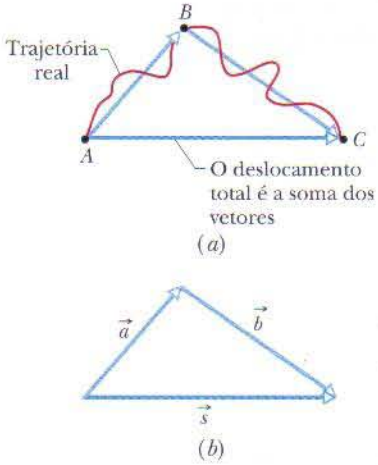


FIG. 3-2 (*a*) AC é o vetor soma dos vetores AB e BC. (*b*) Os mesmos vetores com outros nomes.

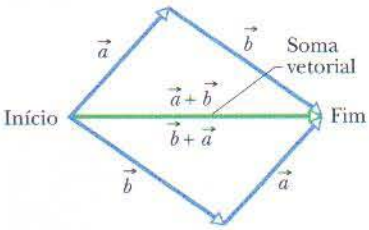


FIG. 3-3 A ordem em que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são somados não afeta o resultado; veja a Eq. 3-2.

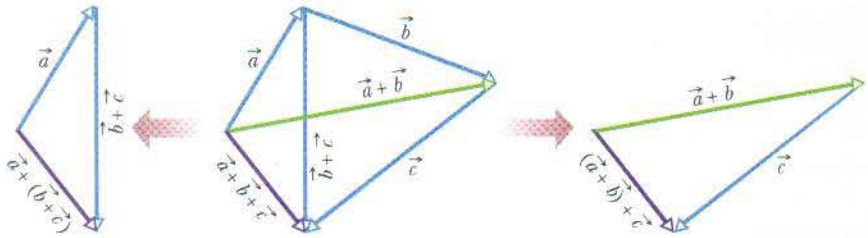


FIG. 3-4 Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ podem ser agrupados em qualquer ordem para serem somados; veja a Eq. 3-3.

BC. O deslocamento *total* é um único deslocamento de *A* para *C*. Chamamos *AC* de **vetor soma** (ou **vetor resultante**) dos vetores *AB* e *BC*. Esta soma não é uma soma algébrica comum.

Na Fig. 3-2*b* redesenhamos os vetores da Fig. 3-2*a* e os rotulamos da forma que será usada daqui em diante, com uma seta sobre um símbolo em itálico, como $\vec{a}$. Para indicar apenas o módulo do vetor (uma grandeza positiva e sem direção) usamos o símbolo do vetor em itálico sem a seta, como *a*, *b* e *s*. (Você pode usar simplesmente um símbolo manuscrito.) Uma seta sobre um símbolo indica que a grandeza representada pelo símbolo possui as propriedades de um vetor: módulo e orientação.

Podemos representar a relação entre os três vetores da Fig. 3-2*b* através da *equação vetorial*

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{3-1}$$

segundo a qual o vetor $\vec{s}$ é o vetor soma dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O símbolo + na Eq. 3-1 e a palavra "soma" têm um significado diferente no caso dos vetores porque, ao contrário do que acontece na álgebra comum, eles envolvem tanto o módulo como a direção e o sentido da grandeza.

A Fig. 3-2 sugere um método para somar geometricamente dois vetores bidimensionais $\vec{a}$ e $\vec{b}$. (1) Desenhe o vetor $\vec{a}$ em uma escala conveniente e no ângulo apropriado. (2) Desenhe o vetor $\vec{b}$ na mesma escala, com a origem na extremidade do vetor $\vec{a}$, também no ângulo apropriado. (3) O vetor soma $\vec{s}$ é o vetor que vai da origem de $\vec{a}$ à extremidade de $\vec{b}$.

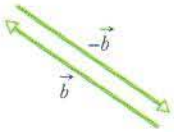


FIG. 3-5 Os vetores $\vec{b}$ e $-\vec{b}$ têm o mesmo módulo e sentidos opostos.

A soma de vetores, definida dessa forma, tem duas propriedades importantes. Em primeiro lugar, a ordem em que os vetores são somados é irrelevante. Somar $\vec{a}$ a $\vec{b}$ é o mesmo que somar $\vec{b}$ a $\vec{a}$ (Fig. 3-3), ou seja,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad \text{(lei comutativa).} \tag{3-2}$$

Em segundo lugar, quando existem mais de dois vetores podemos agrupá-los em qualquer ordem para somá-los. Assim, se queremos somar os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, podemos primeiro somar $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e depois somar o resultado a $\vec{c}$. Podemos também somar primeiro $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e depois somar o resultado a $\vec{a}$; o resultado é o mesmo, como mostra a Fig. 3-4. Assim,

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \qquad \text{(lei associativa).} \tag{3-3}$$

O vetor $-\vec{b}$ é um vetor com o mesmo módulo e direção de $\vec{b}$ e o sentido oposto (veja a Fig. 3-5). A soma dos dois vetores na Fig. 3-5 é

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = 0$$

Assim, somar $-\vec{b}$ é o mesmo que subtrair $\vec{b}$. Usamos esta propriedade para definir a diferença entre dois vetores. Se $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, temos:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \qquad \text{(subtração de vetores);} \tag{3-4}$$

ou seja, calculamos o vetor diferença $\vec{d}$ somando o vetor $-\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$. A Fig. 3-6 mostra como isso é feito geometricamente.

Como na álgebra comum, podemos passar um termo que inclui um símbolo de vetor de um lado de uma equação vetorial para o outro, mas devemos mudar o sinal. Assim, por exemplo, para explicitar $\vec{a}$ na Eq. 3-4 escrevemos a equação na forma

$$\vec{d}+\vec{b}=\vec{a} \text{ ou } \vec{a}=\vec{d}+\vec{b}$$

Embora tenhamos usado nestes exemplos vetores deslocamento, as regras para somar e subtrair vetores se aplicam a vetores de qualquer tipo, sejam eles usados para representar velocidade, aceleração ou qualquer outra grandeza vetorial. Entretanto, apenas vetores do mesmo tipo podem ser somados. Assim, por exemplo, podemos somar dois deslocamentos ou duas velocidades, mas não faz sentido somar um deslocamento e uma velocidade. Na aritmética dos escalares isso seria como tentar somar 21 s e 12 m.

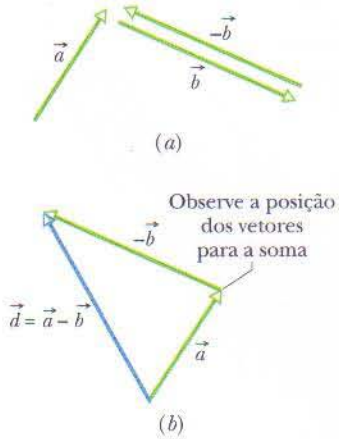


FIG. 3-6 (*a*) Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $-\vec{b}$. (*b*) Para subtrair o vetor $\vec{b}$ do vetor $\vec{a}$, basta somar o vetor $-\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$.

TESTE 1 Os módulos dos deslocamentos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são 3 m e 4 m, respectivamente, e $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Considerando as várias orientações possíveis de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, qual é (a) o maior e (b) o menor valor possível do módulo de $\vec{c}$?

Exemplo 3-1

Em uma prova de orientação você recebe a tarefa de se afastar o máximo possível de um acampamento através de três deslocamentos retilíneos. Você pode usar os seguintes deslocamentos, em qualquer ordem: (a) $\vec{a}$, 2,0 km para leste; (b) $\vec{b}$, 2,0 km 30° ao norte do leste; (c) $\vec{c}$, 1,0 km para oeste. Você pode também substituir $\vec{b}$ por $-\vec{b}$ e $\vec{c}$ por $-\vec{c}$. Qual é a maior distância que você pode atingir após o terceiro deslocamento?

Raciocínio: Usando uma escala conveniente, desenhamos os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $-\vec{b}$ e $-\vec{c}$, como na Fig. 3-7*a*. Em seguida, deslocamos mentalmente os vetores sobre a página, sem mudar a sua orientação, ligando três vetores de cada vez, em um arranjo no qual a origem do segundo vetor está ligada à extremidade do primeiro e a origem do terceiro está ligada à extremidade do segundo, para encontrar o vetor soma, $\vec{d}$. A origem do primeiro vetor representa o acampamento. A extremidade do terceiro vetor representa o ponto de destino. O vetor soma $\vec{d}$ vai da origem do primeiro vetor à extremidade do terceiro. O módulo d do vetor soma é a distância entre o ponto de destino e o acampamento.

Examinando todos os casos possíveis, descobrimos que a distância é máxima para o arranjo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $-\vec{c}$. A ordem em que esses vetores são somados não importa, já que a soma vetorial é a mesma para qualquer ordem. A ordem mostrada na Fig. 3-7*b* é para a soma vetorial

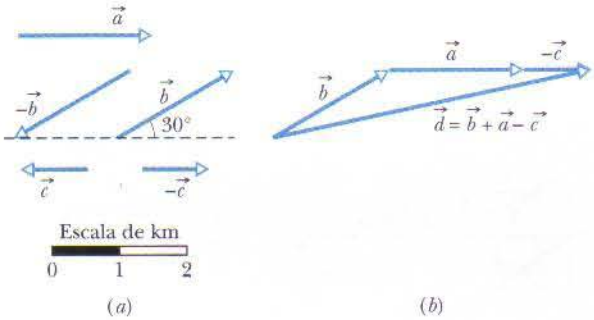


FIG. 3-7 (*a*) Vetores deslocamento; três deles devem ser usados. (*b*) A distância do acampamento é a maior possível se os deslocamentos escolhidos são $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $-\vec{c}$, em qualquer ordem.

$$\vec{d}=\vec{b}+\vec{a}+(-\vec{c})$$

Usando a escala da Fig. 3-7*a* medimos o comprimento d do vetor resultante, encontrando

$$d=4{,}8 \text{ m.} \qquad \text{(Resposta)}$$

3-4 | Componentes de Vetores

Somar vetores geometricamente pode ser uma tarefa tediosa. Uma técnica mais elegante e mais simples envolve o uso da álgebra, mas requer que os vetores sejam representados em um sistema de coordenadas retangulares. Os eixos x e y são normalmente desenhados no plano do papel, como na Fig. 3-8*a*. O eixo z é perpendicular ao papel; vamos ignorá-lo, por enquanto, e tratar apenas de vetores bidimensionais.

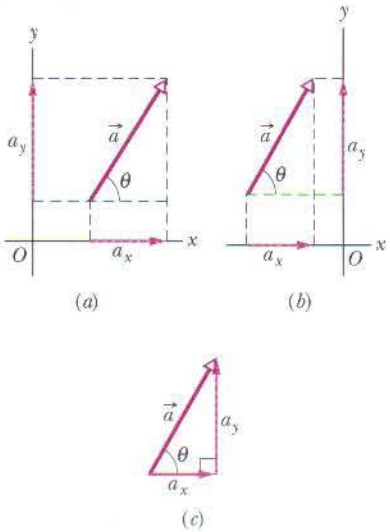


FIG. 3-8 (*a*) As componentes a_x e a_y do vetor $\vec{a}$. (*b*) As componentes não mudam quando o vetor é deslocado, desde que o módulo e a orientação sejam mantidos. (*c*) As componentes correspondem aos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o módulo do vetor.

Uma **componente** de um vetor é a projeção do vetor em um eixo. Na Fig. 3-8*a*, por exemplo, a_x é a componente do vetor $\vec{a}$ em relação ao eixo x e a_y é a componente em relação ao eixo y. Para encontrar a projeção de um vetor em relação a um eixo traçamos retas perpendiculares ao eixo a partir da origem e da extremidade do vetor, como mostra a figura. A projeção de um vetor em relação a um eixo x é chamada de *componente x* do vetor; analogamente, a projeção em relação ao y recebe o nome de *componente y*. O processo de obter as componentes de um vetor é chamado de **decomposição do vetor**.

Uma componente de um vetor tem o mesmo sentido (em relação a um eixo) que o vetor. Na Fig. 3-8, a_x e a_y são positivas porque $\vec{a}$ aponta no sentido positivo dos dois eixos. (Observe as setas das componentes, que mostram seus sentidos.) Se tivéssemos invertido o sentido do vetor $\vec{a}$, as componentes seriam negativas e as setas apontariam no sentido negativo dos eixos x e y. A decomposição do vetor $\vec{b}$ da Fig. 3-9 leva a uma componente b_x positiva e a uma componente b_y negativa.

No caso mais geral, um vetor tem três componentes; para o vetor da Fig. 3-8*a*, porém, a componente z é nula. Como mostram as Figs. 3-8*a* e *b*, quando deslocamos um vetor sem mudar sua orientação as componentes não mudam.

Podemos determinar geometricamente as componentes de $\vec{a}$ na Fig. 3-8*a* a partir do triângulo retângulo mostrado na figura:

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a\,\text{sen}\,\theta, \tag{3-5}$$

onde θ é o ângulo que o vetor $\vec{a}$ faz com o semi-eixo x positivo e a é o módulo de $\vec{a}$. A Fig. 3-8*c* mostra que $\vec{a}$ e suas componentes x e y formam um triângulo retângulo. A figura mostra também como é possível reconstruir um vetor a partir das componentes: basta posicionar a origem de uma das componentes na extremidade da outra e completar o triângulo retângulo ligando a origem de segunda componente à extremidade da primeira.

Uma vez que um vetor tenha sido decomposto em relação a um conjunto de eixos, as componentes podem ser usadas no lugar do vetor. Assim, por exemplo, o vetor $\vec{a}$ da Fig. 3-8*a* é dado (completamente determinado) por a e θ, mas também pode ser dado pelas componentes a_x e a_y. Os dois pares de valores contêm a mesma informação. Se conhecemos um vetor na *notação de componentes* (a_x e a_y) e queremos especificá-lo na *notação módulo-ângulo* (a e θ), podemos usar as equações

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \tag{3-6}$$

para efetuar a transformação.

No caso mais geral de três dimensões, precisamos do módulo e de dois ângulos (a, θ e ϕ, digamos) ou de três componentes (a_x, a_y e a_z) para especificar um vetor.

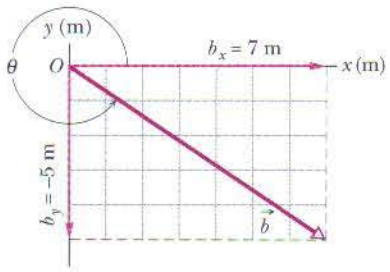
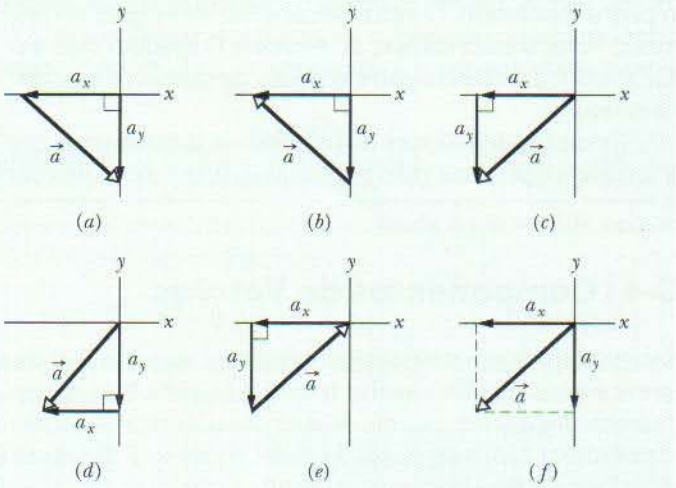


FIG. 3-9 A componente de $\vec{b}$ em relação ao eixo x é positiva e a componente em relação ao eixo y é negativa.

TESTE 2

Quais dos métodos indicados na figura são corretos para se determinar o vetor $\vec{a}$ a partir das componentes x e y?



Exemplo 3-2

Um pequeno avião decola de um aeroporto em um dia nublado e é avistado mais tarde a 215 km de distância, em um curso que faz um ângulo de 22° a leste do norte. A que distância a leste e ao norte do aeroporto está o avião no momento em que é avistado?

IDÉIA-CHAVE Conhecemos o módulo (215 km) e o ângulo (22° a leste do norte) de um vetor e precisamos determinar as componentes do vetor.

Cálculos: Desenhamos um sistema de coordenadas xy com o sentido positivo de x para leste e o de y para o norte (Fig. 3-10). Por conveniência, a origem é colocada no aeroporto. O deslocamento $\vec{d}$ do avião aponta da origem para o ponto onde o avião foi avistado.

Para determinar as componentes de $\vec{d}$, usamos a Eq. 3-5 com $\theta = 68°$ $(= 90° - 22°)$:

$$d_x = d\cos\theta = (215\text{ km})(\cos 68°)$$
$$= 81\text{ km} \qquad \text{(Resposta)}$$

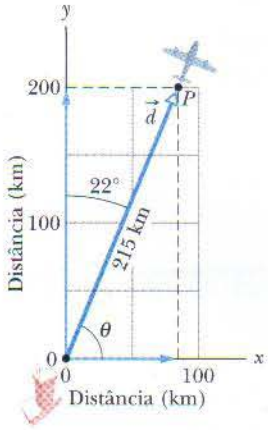


FIG. 3-10 Um avião decola de um aeroporto na origem e é avistado mais tarde no ponto P.

$$d_y = d\,\text{sen}\,\theta = (215\text{ km})(\text{sen } 68°)$$
$$= 199\text{ km} \approx 2{,}0 \times 10^2\text{ km.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, o avião foi avistado 81 km a leste e $2{,}0 \times 10^2$ km ao norte do aeroporto.

Exemplo 3-3

Durante duas décadas, equipes especializadas de espeleólogos procuraram uma ligação entre o sistema de cavernas de Flint Ridge e a Mammoth Cave, no estado americano de Kentucky. Quando a ligação finalmente foi descoberta, o sistema combinado foi declarado a caverna mais longa do mundo (mais de 200 km de extensão). A equipe que encontrou a ligação teve que rastejar, escalar e se contorcer em inúmeras passagens, deslocando-se 2,6 km para oeste, 3,9 km para o sul e 25 m para cima. Qual foi o deslocamento do início ao fim?

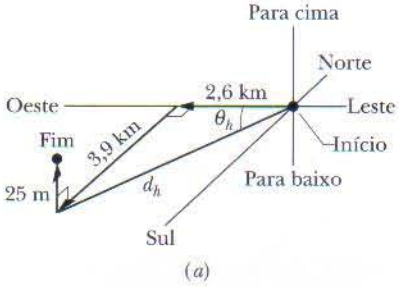
IDÉIA-CHAVE Temos as componentes de um vetor tridimensional e precisamos determinar o módulo do vetor e dois ângulos para especificar a sua orientação.

Componentes Horizontais: Para começar, desenhamos as componentes como na Fig. 3-11a. As componentes horizontais (2,6 km para oeste e 3,9 km para o sul) são os catetos de um triângulo retângulo. O deslocamento horizontal da equipe é a hipotenusa do triângulo, e o módulo d_h é dado pelo teorema de Pitágoras:

$$d_h = \sqrt{(2{,}6\text{ km})^2 + (3{,}9\text{ km})^2} = 4{,}69\text{ km.}$$

Também de acordo com o triângulo da Fig. 3-11a, o ângulo θ_h deste deslocamento horizontal ao sul do oeste é dado por

$$\tan\theta_h = \frac{3{,}9\text{ km}}{2{,}6\text{ km}}$$



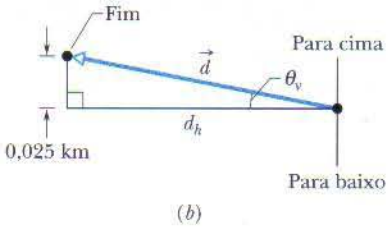


FIG. 3-11 (a) Componentes do deslocamento total da equipe de espeleólogos e o deslocamento horizontal d_h. (b) Vista lateral, mostrando d_h e o vetor deslocamento total da equipe, $\vec{d}$.

e portanto $$\theta_h = \tan^{-1}\frac{3{,}9\text{ km}}{2{,}6\text{ km}} = 56°, \qquad \text{(Resposta)}$$

que é um dos dois ângulos de que necessitamos para especificar a orientação do deslocamento.

Deslocamento Total: Para levar em conta a componente vertical (25 m = 0,025 km), desenhamos uma vista lateral dos vetores da Fig. 3-11a, olhado para noroeste. O resultado é a Fig. 3-11b, onde a componente vertical e o deslocamento horizontal d_h são os catetos de outro triângulo retângulo. O deslocamento total da equipe é a hipotenusa desse retângulo, com um módulo d dado por

$$d = \sqrt{(4{,}69\ \text{km})^2 + (0{,}025\ \text{km})^2} = 4{,}69\ \text{km}$$

$$\approx 4{,}7\ \text{km}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O ângulo desse deslocamento para cima em relação ao deslocamento horizontal é dado por

$$\theta_v = \tan^{-1}\frac{0{,}025\ \text{km}}{4{,}69\ \text{km}} = 0{,}3°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, o vetor deslocamento da equipe teve um módulo de 4,7 km, um ângulo de 56° ao sul do oeste e um ângulo de 0,3° para cima. O deslocamento para cima, naturalmente, foi insignificante em comparação com o deslocamento horizontal. Entretanto, esse fato não tornou mais fácil o trabalho da equipe, que teve que subir e descer várias vezes durante o percurso. O caminho seguido pela equipe foi, na verdade, muito diferente do indicado pelo vetor deslocamento.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: ***Ângulos – Graus e Radianos*** Ângulos medidos em relação ao semi-eixo x positivo são positivos se forem medidos no sentido anti-horário e negativos se medidos no sentido horário. Assim, por exemplo, 210° e –150° representam o mesmo ângulo.

Os ângulos podem ser medidos em graus ou radianos (rad). Para relacionar as duas medidas, lembre-se de que uma circunferência é descrita por um ângulo de 360°, ou 2π rad. Para converter, por exemplo, 40° para radianos, escrevemos

$$40° \frac{2\pi\ \text{rad}}{360°} = 0{,}70\ \text{rad}.$$

Tática 2: ***Funções Trigonométricas*** Você precisa conhecer as definições das funções trigonométricas mais comuns (seno, co-seno e tangente), porque elas são muito usadas na ciência e na engenharia. Elas são dadas na Fig. 3-12 para um triângulo retângulo genérico.

Você também deve saber como essas funções trigonométricas variam com o ângulo, como mostra a Fig. 3-13, para poder julgar se o resultado mostrado por uma calculadora é razoável. Em certas circunstâncias, o simples conhecimento dos sinais das funções nos vários quadrantes pode ser bastante útil.

Tática 3: ***Funções Trigonométricas Inversas*** Quando as funções trigonométricas inversas sen^{-1}, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$ são fornecidas por uma calculadora você deve ser capaz de dizer se os resultados são razoáveis ou não, pois em geral existe uma outra solução possível que a calculadora não fornece. Os intervalos em que as calculadoras operam ao determinar os valores das funções trigonométricas inversas estão indicados na Fig. 3-13. Assim, por exemplo, $\text{sen}^{-1}(0{,}5)$ pode ser igual a 30° (que é o valor mostrado pela calculadora, já que 30° está no intervalo de operação) ou a 150°. Para observar os dois valores, trace uma reta horizontal passando pelo valor 0,5 na Fig. 3-13*a*, e verifique os pontos em que a reta intercepta a curva da função seno.

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta}$$

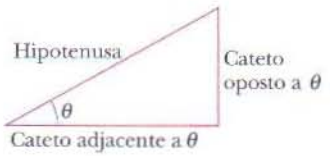


FIG. 3-12 Triângulo usado para definir as funções trigonométricas. Veja também o Apêndice E.

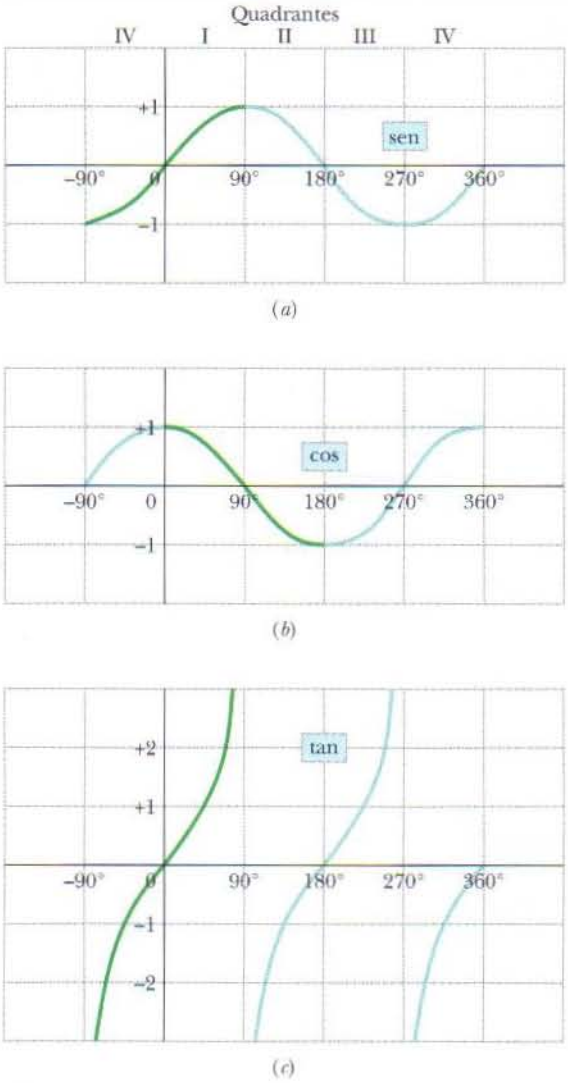


FIG. 3-13 Gráficos das três funções trigonométricas. As partes mais escuras das curvas correspondem aos valores fornecidos pelas calculadoras para as funções trigonométricas inversas.

Como é possível saber a resposta correta? Ela é a que parece mais razoável para uma dada situação. Considere, por exemplo, o cálculo de θ_h no Exemplo 3-3, no qual $\tan\theta_h = 3{,}9/2{,}6 = 1{,}5$. Uma calculadora fornece para $\tan^{-1}(1{,}5)$ o valor de 56°, mas $\theta_h = 236°$ (= 180° + 56°) também tem uma tangente igual a 1,5. Qual das duas soluções é a correta? Examinando a situação física (Fig. 3-11*a*), vemos que 56° é um valor razoável, e que o mesmo não acontece com 236°.

Tática 4: Medida dos Ângulos de um Vetor As expressões de cos θ e sen θ na Eq. 3-5 e de tan θ na Eq. 3-6 são válidas apenas se o ângulo for medido em relação ao semi-eixo x positivo. Se o ângulo for medido em relação a outro eixo, talvez seja preciso trocar as funções trigonométricas da Eq. 3-5 ou inverter a razão da Eq. 3-6. Um método mais seguro é converter o ângulo dado em um ângulo medido em relação ao semi-eixo x positivo.

3-5 | Vetores Unitários

Vetor unitário é um vetor que tem módulo igual a 1 e aponta em uma certa direção. Um vetor unitário não possui dimensão nem unidade; sua única função é especificar uma orientação. Neste livro, os vetores unitários que indicam os sentidos positivos dos eixos x, y e z são representados como $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$, respectivamente, sendo o símbolo ^ usado em lugar de uma seta (Fig. 3-14) para mostrar que se trata de vetores unitários. Um sistema de eixos como o da Fig. 3-14 é chamado de **sistema de coordenadas dextrogiro**. O sistema permanece dextrogiro quando os três eixos sofrem a mesma rotação, qualquer que ela seja. Os sistemas de coordenadas usados neste livro são todos deste tipo.

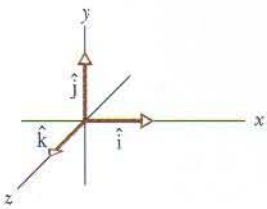


FIG. 3-14 Os vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ definem os sentidos positivos de um sistema de coordenadas dextrogiro.

Os vetores unitários são muito úteis para especificar outros vetores; assim, por exemplo, podemos expressar os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ das Figs. 3-8 e 3-9 como

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \tag{3-7}$$

e

$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}. \tag{3-8}$$

Essas duas equações estão ilustradas na Fig. 3-15. As grandezas $a_x\hat{i}$ e $a_y\hat{j}$ são vetores conhecidos como **componentes vetoriais** de $\vec{a}$. As grandezas a_x e a_y são escalares conhecidos como **componentes escalares** (ou, simplesmente, **componentes**) de $\vec{a}$.

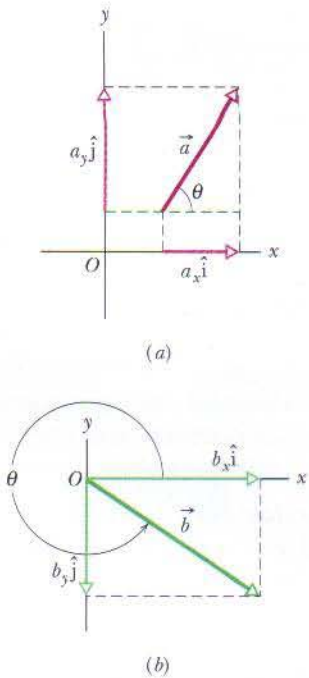


FIG. 3-15 (*a*) Componentes vetoriais do vetor $\vec{a}$. (*b*) Componentes vetoriais do vetor $\vec{b}$.

Como exemplo, vamos escrever o deslocamento $\vec{d}$ da equipe de espeleólogos do Exemplo 3-3 em termos de vetores unitários. Para começar, superpomos o sistema de coordenadas da Fig. 3-14 ao da Fig. 3-11*a*. Dessa forma, as orientações de $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ são para leste, para cima e para o sul, respectivamente. Assim, o deslocamento $\vec{d}$ do início ao fim é expresso em termos dos vetores unitários como

$$\vec{d} = -(2{,}6\text{ km})\hat{i} + (0{,}025\text{ km})\hat{j} + (3{,}9\text{ km})\hat{k}. \tag{3-9}$$

onde $-(2{,}6\text{ km})\hat{i}$ é a componente vetorial $d_x\hat{i}$ do vetor em relação ao eixo x e $-(2{,}6\text{ km})$ é a componente x do vetor, d_x.

3-6 | Soma de Vetores através de Suas Componentes

Usando um desenho, podemos adicionar vetores geometricamente. Em uma sofisticada calculadora podemos somá-los diretamente na tela. Uma terceira forma de somar vetores é combinar suas componentes eixo por eixo, que é a forma que discutiremos em seguida.

Para começar, considere a equação

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{3-10}$$

segundo a qual o vetor $\vec{r}$ é igual ao vetor $(\vec{a} + \vec{b})$. Isso significa que cada componente de $\vec{r}$ deve ser igual à componente correspondente de $(\vec{a} + \vec{b})$:

$$r_x = a_x + b_x \tag{3-11}$$

$$r_y = a_y + b_y \tag{3-12}$$

$$r_z = a_z + b_z. \tag{3-13}$$

Em outras palavras, dois vetores são iguais se suas componentes correspondentes forem iguais. As Eqs. 3-10 a 3-13 nos dizem que, para somar dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, devemos (1) obter as componentes escalares dos vetores; (2) combinar essas componentes escalares, eixo por eixo, para obter as componentes do vetor soma, $\vec{r}$; (3) combinar as componentes de $\vec{r}$ para obter o vetor $\vec{r}$. Isto pode ser feito de duas maneiras:

podemos expressar $\vec{r}$ em termos dos vetores unitários (como na Eq. 3-9) ou através da notação módulo-ângulo (como na resposta do Exemplo 3-3).

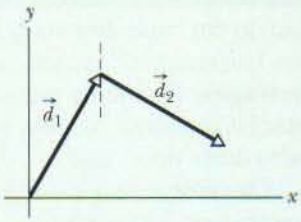
Este procedimento para somar vetores através de suas componentes também se aplica à subtração. Lembre-se de que uma subtração como $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ pode ser escrita como uma adição da forma $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Para subtrair, somamos as componentes de $\vec{a}$ e $-\vec{b}$ para obter

$$d_x = a_x - b_x,\ d_y = a_y - b_y,\ \text{e}\ d_z = a_z - b_z,$$

onde

$$\vec{d} = d_x\hat{\text{i}} + d_y\hat{\text{j}} + d_z\hat{\text{k}}.$$

TESTE 3 (a) Quais são os sinais das componentes x de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ na figura ao lado? (b) Quais são os sinais das componentes y de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$? Quais são os sinais das componentes x e y de $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$?



Exemplo 3-4

A Fig. 3-16*a* mostra os seguintes vetores:

$$\vec{a} = (4{,}2\ \text{m})\hat{\text{i}} - (1{,}5\ \text{m})\hat{\text{j}},$$
$$\vec{b} = (-1{,}6\ \text{m})\hat{\text{i}} + (2{,}9\ \text{m})\hat{\text{j}},$$
e
$$\vec{c} = (-3{,}7\ \text{m})\hat{\text{j}}.$$

Qual é o vetor soma $\vec{r}$, que também aparece na Fig. 3-16*a*?

IDÉIA-CHAVE Podemos somar os três vetores somando suas componentes, eixo por eixo, e usando as componentes resultantes para obter o vetor soma $\vec{r}$.

Cálculos: No caso do eixo x, somamos as componentes x de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ para obter a componente x do vetor soma $\vec{r}$:

$$r_x = a_x + b_x + c_x$$
$$= 4{,}2\ \text{m} - 1{,}6\ \text{m} + 0 = 2{,}6\ \text{m}.$$

Analogamente, no caso do eixo y,

$$r_y = a_y + b_y + c_y$$
$$= -1{,}5\ \text{m} + 2{,}9\ \text{m} - 3{,}7\ \text{m} = -2{,}3\ \text{m}.$$

Podemos então combinar essas componentes de $\vec{r}$ para escrever o vetor em termos dos vetores unitários:

$$\vec{r} = (2{,}6\ \text{m})\hat{\text{i}} - (2{,}3\ \text{m})\hat{\text{j}}, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde $(2{,}6\ \text{m})\hat{\text{i}}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao longo do eixo x, e $-(2{,}3\ \text{m})\hat{\text{j}}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao eixo y. A Fig. 3-16*b* mostra uma forma de obter o vetor $\vec{r}$ a partir dessas componentes. (Você pode imaginar outra forma?)

Também podemos resolver o problema determinando o módulo e o ângulo de $\vec{r}$. De acordo com a Eq. 3-6, o módulo é dado por

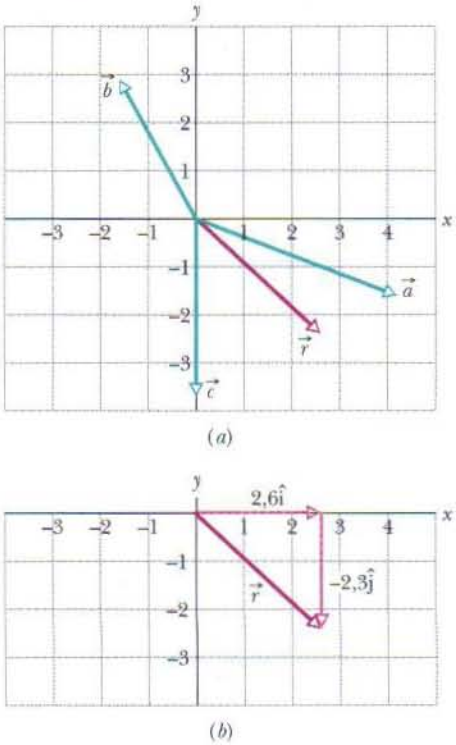


FIG. 3-16 O vetor $\vec{r}$ é a soma vetorial dos outros três vetores.

$$r = \sqrt{(2{,}6\ \text{m})^2 + (-2{,}3\ \text{m})^2} \approx 3{,}5\ \text{m} \qquad \text{(Resposta)}$$

e o ângulo (medido em relação ao semi-eixo x positivo) é dado por

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}3\ \text{m}}{2{,}6\ \text{m}}\right) = -41° \qquad \text{(Resposta)}$$

onde o sinal negativo significa que o ângulo deve ser medido no sentido horário.

Exemplo 3-5

De acordo com as pesquisas, a formiga do deserto mostrada na fotografia de abertura deste capítulo mantém um registro dos seus movimentos em um sistema mental de coordenadas. Quando decide voltar ao formigueiro soma seus deslocamentos em relação aos eixos do sistema para calcular um vetor que aponta diretamente para o ponto de partida. Como exemplo desse cálculo, considere uma formiga que executa cinco movimentos de 6,0 cm cada um em um sistema de coordenadas xy, nas orientações mostradas na Fig. 3-17a, partindo do formigueiro. No final do quinto movimento, quais são o módulo e o ângulo do vetor deslocamento total $\vec{d}_{tot}$ e quais são os valores correspondentes do vetor de retorno $\vec{d}_{volta}$ que liga a posição final da formiga à posição do formigueiro?

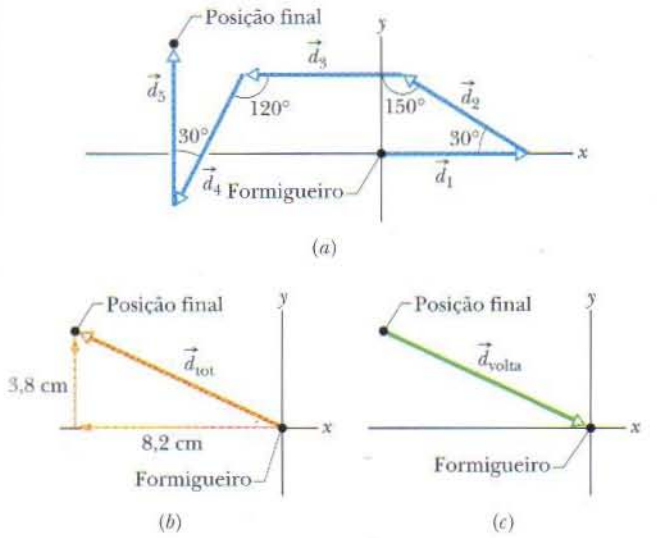


FIG. 3-17 (a) Movimentos de uma formiga do deserto. (b) Componentes x e y de $\vec{d}_{tot}$. (c) O vetor $\vec{d}_{volta}$ indica o caminho de volta para o formigueiro.

IDÉIAS-CHAVE (1) Para encontrar o deslocamento resultante $\vec{d}_{tot}$, precisamos somar os cinco vetores deslocamento:

$$\vec{d}_{tot} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 + \vec{d}_4 + \vec{d}_5.$$

(2) Calculamos esta soma apenas para a componente x,

$$d_{tot,x} = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} + d_{4x} + d_{5x}, \qquad (3\text{-}14)$$

e apenas para a componente y,

$$d_{tot,y} = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} + d_{4y} + d_{5y}. \qquad (3\text{-}15)$$

(3) Obtemos o vetor $\vec{d}_{tot}$ a partir de suas componentes x e y.

Cálculos: Para resolver a Eq. 3-14, aplicamos a parte correspondente a x da Eq. 3-5 a cada movimento:

$$d_{1x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 0° = +6{,}0\text{ cm}$$
$$d_{2x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 150° = -5{,}2\text{ cm}$$
$$d_{3x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 180° = -6{,}0\text{ cm}$$
$$d_{4x} = (6{,}0\text{ cm})\cos(-120°) = -3{,}0\text{ cm}$$
$$d_{5x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 90° = 0.$$

A Eq. 3-14 nos dá

$$\begin{aligned} d_{tot,x} &= +6{,}0\text{ cm} + (-5{,}2\text{ cm}) + (-6{,}0\text{ cm}) \\ &\quad + (-3{,}0\text{ cm}) + 0 \\ &= -8{,}2\text{ cm}. \end{aligned}$$

Analogamente, calculamos as componentes y dos cinco movimentos usando a parte correspondente a y da Eq. 3-5. Os resultados aparecem na Tabela 3-1. Substituindo esses resultados na Eq. 3-15, obtemos:

$$d_{tot,y} = +3{,}8\text{ cm}.$$

O vetor $\vec{d}_{tot}$ e suas componentes x e y aparecem na Fig. 3-17b. Para encontrar o módulo e o ângulo de $\vec{d}_{tot}$ a partir das componentes, usamos a Eq. 3-6. O módulo é dado por

$$\begin{aligned} d_{tot} &= \sqrt{d_{tot,x}^2 + d_{tot,y}^2} \\ &= \sqrt{(-8{,}2\text{ cm})^2 + (3{,}8\text{ cm})^2} = 9{,}0\text{ cm}. \end{aligned}$$

Para encontrar o ângulo (medido a partir do semi-eixo x positivo), calculamos o arco tangente:

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{d_{tot,y}}{d_{tot,x}}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{3{,}8\text{ cm}}{-8{,}2\text{ cm}}\right) = -24{,}86°. \end{aligned}$$

TABELA 3-1

Mov.	d_x (cm)	d_y (cm)
1	+6,0	0
2	−5,2	+3,0
3	−6,0	0
4	−3,0	−5,2
5	0	+6,0
total	−8,2	+3,8

Atenção: Como foi dito na Tática para a Solução de Problemas 3, uma calculadora nem sempre fornece o resultado correto para o arco tangente. A resposta −24,86° parece indicar que vetor $\vec{d}_{tot}$ está no quarto quadrante de nosso sistema de coordenadas xy. Entretanto, quando compomos o vetor a partir das componentes (Fig. 3-17b) vemos que $\vec{d}_{tot}$ está no segundo quadrante. Assim, precisamos "corrigir" a resposta da calculadora somando 180°:

$$\theta = -24{,}86° + 180° = 155{,}14° \approx 155°.$$

Assim, o deslocamento $\vec{d}_{tot}$ da formiga, na notação módulo-ângulo, é dado por

$$d_{tot} = 9{,}0\text{ cm a } 155°. \qquad \text{(Resposta)}$$

O vetor $\vec{d}_{volta}$, que aponta da formiga para o formigueiro, tem o mesmo módulo que $\vec{d}_{tot}$ e o sentido oposto

(Fig. 3-17*c*). Já temos o ângulo ($-24{,}86° \approx -25°$) para o sentido oposto a $\vec{d}_{tot}$. Assim, $\vec{d}_{volta}$ é dado por

$$d_{volta} = 9{,}0 \text{ cm a } -25°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Uma formiga do deserto que se afasta mais de 500 m do formigueiro realiza, na verdade, milhares de deslocamentos. Ainda assim, de alguma forma ela é capaz de calcular $\vec{d}_{volta}$ (sem estudar este capítulo).

Exemplo 3-6 Aumente sua capacidade

Aqui está um problema de soma vetorial que *não pode* ser resolvido diretamente em uma calculadora. Uma amiga se afasta de você em linha reta (vetor $\vec{A}$), muda de direção, caminha novamente em linha reta (vetor $\vec{B}$) e pára. Que distância você deve caminhar em linha reta (vetor $\vec{C}$) para chegar até ela?

Os três vetores (que aparecem na Fig. 3-18) estão relacionados pela equação

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}. \qquad (3\text{-}16)$$

O vetor $\vec{A}$ tem um módulo de 22,0 m e faz um ângulo de $-47{,}0°$ (sentido horário) com o semi-eixo x positivo. O vetor $\vec{B}$ tem um módulo de 17,0 m e faz um ângulo ϕ (no sentido anti-horário) com o semi-eixo x positivo. Qual é o módulo de $\vec{C}$?

IDÉIA-CHAVE Não podemos responder à pergunta somando vetorialmente $\vec{A}$ e $\vec{B}$ em uma calculadora, mesmo que ela seja capaz de executar uma instrução como

[módulo de $\vec{A} \angle$ ângulo de $\vec{A}$] + [módulo de $\vec{B} \angle$ ângulo de $\vec{B}$]

porque não conhecemos o valor do ângulo ϕ de $\vec{B}$. Entretanto, *podemos* expressar a Eq. 3-16 em termos das componentes em relação ao eixo x e ao eixo y.

Cálculos: Escrevendo a Eq. 3-16 em termos das componentes em relação ao eixo x, temos:

$$C_x = A_x + B_x.$$

Expressando as componentes x de acordo com a parte referente a x da Eq. 3-5 e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$C \cos 0° = 22{,}0 \cos(-47{,}0°) + 17{,}0 \cos \phi. \qquad (3\text{-}17)$$

Esta equação não é suficiente para resolver o problema, já que não podemos calcular o valor de C sem conhecer ϕ.

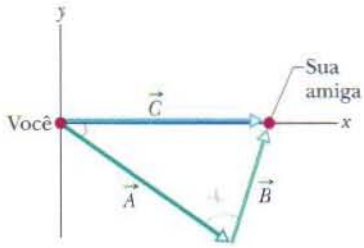


FIG. 3-18 O vetor $\vec{C}$ é igual a $\vec{A} + \vec{B}$.

Vamos escrever a Eq. 3-16 em termos das componentes em relação ao eixo y:

$$C_y = A_y + B_y.$$

Expressando as componentes y de acordo com a parte referente a y da Eq. 3-5 e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$C \text{ sen } 0° = 22{,}0 \text{ sen}(-47{,}0°) + 17{,}0 \text{ sen } \phi,$$

o que nos dá

$$0 = 22{,}0 \text{ sen}(-47{,}0°) + 17{,}0 \text{ sen } \phi.$$

Explicitando ϕ, obtemos

$$\phi = \text{sen}^{-1} - \frac{22{,}0 \text{ sen}(-47{,}0°)}{17{,}0} = 71{,}17°$$

Substituindo este valor na Eq. 3-17, temos:

$$C = 20{,}5 \text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Observe a técnica usada para resolver o problema: Quando chegamos a um beco sem saída ao trabalhar com as componentes x, usamos as componentes y para determinar o valor de ϕ. Em seguida, voltamos a trabalhar com as componentes x para calcular o valor de C.

3-7 | Vetores e as Leis da Física

Até agora, em toda figura em que aparece um sistema de coordenadas os eixos x e y são paralelos às bordas do papel. Assim, quando um vetor $\vec{a}$ é desenhado suas componentes a_x e a_y também são paralelas às bordas do papel (como na Fig. 3-19*a*). A única razão para usar esta orientação dos eixos é que ela parece "apropriada"; não existe uma razão mais profunda. Podemos perfeitamente girar os eixos (mas não o vetor $\vec{a}$) de um ângulo ϕ, como na Fig. 3-19*b*, caso em que as componentes terão novos valores, a'_x e a'_y. Como existe uma infinidade de valores possíveis de ϕ, existe um número infinito de pares possíveis de componentes de $\vec{a}$.

Qual é, então, o par de componentes "correto"? A resposta é que são todos igualmente válidos, já que cada par (com seu sistema de eixos) nos dá apenas uma forma diferente de descrever o mesmo vetor $\vec{a}$; todos produzem o mesmo módulo e a mesma orientação para o vetor. Na Fig. 3-19, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2} \tag{3-18}$$

e

$$\theta = \theta' + \phi. \tag{3-19}$$

A verdade é que temos uma grande liberdade para escolher um sistema de coordenadas, já que as relações entre vetores não dependem da localização da origem nem da orientação dos eixos. Isso também se aplica às relações da física; elas são todas independentes da escolha do sistema de coordenadas. Acrescente a isso a simplicidade e a riqueza da linguagem dos vetores, e é fácil compreender por que as leis da física são quase sempre apresentadas nessa linguagem: uma equação, como a Eq. 3-10, pode representar três (ou até mais) relações, como as Eqs. 3-11, 3-12 e 3-13.

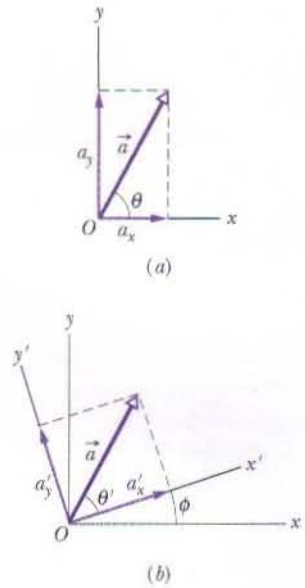


FIG. 3-19 (*a*) O vetor $\vec{a}$ e suas componentes. (*b*) O mesmo vetor, com os eixos do sistema de coordenadas girados de um ângulo ϕ.

3-8 | Multiplicação de Vetores*

Existem três formas de multiplicar vetores, mas nenhuma é exatamente igual à multiplicação algébrica. Ao ler esta seção, tenha em mente que uma calculadora o ajudará a multiplicar vetores apenas se você compreender as regras básicas desse tipo de multiplicação.

Multiplicação de um Vetor por um Escalar

Quando multiplicamos um vetor $\vec{a}$ por um escalar s obtemos outro vetor cujo módulo é o produto do módulo de $\vec{a}$ pelo valor absoluto de s, cuja direção é a mesma de $\vec{a}$ e cujo sentido é o mesmo de $\vec{a}$, se s for positivo, e o sentido oposto, se s for negativo. Para dividir $\vec{a}$ por s, multiplicamos $\vec{a}$ por $1/s$.

Multiplicação de um Vetor por um Vetor

Existem duas formas de multiplicar um vetor por um vetor: uma forma (conhecida como *produto escalar*) resulta em um escalar; a outra (conhecida como *produto vetorial*) resulta em um vetor. (Os estudantes costumam confundir as duas formas.)

O Produto Escalar

O **produto escalar** dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ da Fig. 3-20*a* é escrito como $\vec{a}\cdot\vec{b}$ e definido pela equação

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi, \tag{3-20}$$

onde a é o módulo de $\vec{a}$, b é o módulo de $\vec{b}$ e ϕ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (ou, mais apropriadamente, entre as orientações de $\vec{a}$ e $\vec{b}$). Na realidade, existem dois ângulos possíveis: ϕ e $360° - \phi$. Qualquer dos dois pode ser usado na Eq. 3-20, já que seus co-senos são iguais.

Note que o lado direito da Eq. 3-20 contém apenas escalares (incluindo o valor de cos ϕ). Assim, o produto $\vec{a}\cdot\vec{b}$ no lado esquerdo representa uma grandeza *escalar*, e é lido como "a escalar b".

O produto escalar pode ser considerado como o produto de duas grandezas: (1) o módulo de um dos vetores e (2) a componente escalar do outro em relação ao pri-

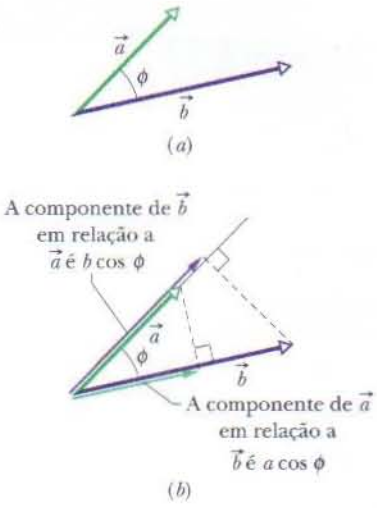


FIG. 3-20 (*a*) Dois vetores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, formando um ângulo ϕ. (*b*) Cada vetor tem uma componente na direção do outro vetor.

*Como os assuntos discutidos nesta seção serão aplicados apenas em capítulos posteriores (Capítulo 7, no caso do produto escalar, e Capítulo 11, no caso do produto vetorial), talvez o professor prefira deixar o estudo desta seção para mais tarde.

meiro vetor. Assim, por exemplo, na Fig. 3-19*b*, $\vec{a}$ tem uma componente escalar $a \cos \phi$ em relação a $\vec{b}$; note que essa componente pode ser determinada traçando uma perpendicular a $\vec{b}$ que passe pela extremidade de $\vec{a}$. Analogamente, $\vec{b}$ possui uma componente escalar $b \cos \phi$ em relação a $\vec{a}$.

Se o ângulo ϕ entre dois vetores é 0°, a componente de um vetor em relação ao outro é máxima, o que também acontece com o produto escalar dos vetores. Se o ângulo é 90°, a componente de um vetor em relação ao outro é nula, o que também acontece com o produto escalar.

Para separar as componentes, a Eq. 3-20 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a \cos \phi)(b) = (a)(b \cos \phi). \tag{3-21}$$

A propriedade comutativa se aplica ao produto escalar, de modo que podemos escrever

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Quando os dois vetores são escritos em termos dos vetores unitários, o produto escalar assume a forma

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{\mathrm{i}} + a_y \hat{\mathrm{j}} + a_z \hat{\mathrm{k}}) \cdot (b_x \hat{\mathrm{i}} + b_y \hat{\mathrm{j}} + b_z \hat{\mathrm{k}}), \tag{3-22}$$

que pode ser expandida de acordo com a propriedade distributiva: calculando os produtos escalares das componentes vetoriais do primeiro vetor pelas componentes vetoriais do segundo vetor, obtemos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{3-23}$$

TESTE 4 Os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ têm módulos de 3 unidades e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se $\vec{C} \cdot \vec{D}$ é igual (a) a zero, (b) a 12 unidades e (c) a −12 unidades?

Exemplo 3-7

Qual é o ângulo ϕ entre $\vec{a} = 3{,}0\hat{\mathrm{i}} - 4{,}0\hat{\mathrm{j}}$ e $\vec{b} = -2{,}0\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\hat{\mathrm{k}}$? (*Atenção:* Muitos dos cálculos a seguir não são necessários quando se usa uma calculadora, mas você aprenderá mais sobre produtos escalares se, pelo menos no início, executar esses cálculos.)

IDÉIA-CHAVE O ângulo entre as orientações dos dois vetores aparece na definição de seu produto escalar (Eq. 3-20):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi. \tag{3-24}$$

Cálculos: Na Eq. 3-24, a é o módulo de $\vec{a}$, ou seja,

$$a = \sqrt{3{,}0^2 + (-4{,}0)^2} = 5{,}00, \tag{3-25}$$

e b é o módulo de $\vec{b}$, ou seja,

$$b = \sqrt{(-2{,}0)^2 + 3{,}0^2} = 3{,}61. \tag{3-26}$$

Podemos calcular o lado esquerdo da Eq. 3-24 escrevendo os vetores em termos dos vetores unitários e usando a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (3{,}0\hat{\mathrm{i}} - 4{,}0\hat{\mathrm{j}}) \cdot (-2{,}0\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\hat{\mathrm{k}}) \\ &= (3{,}0\hat{\mathrm{i}}) \cdot (-2{,}0\hat{\mathrm{i}}) + (3{,}0\hat{\mathrm{i}}) \cdot (3{,}0\hat{\mathrm{k}}) \\ &\quad + (-4{,}0\hat{\mathrm{j}}) \cdot (-2{,}0\hat{\mathrm{i}}) + (-4{,}0\hat{\mathrm{j}}) \cdot (3{,}0\hat{\mathrm{k}}).\end{aligned}$$

Em seguida, aplicamos a Eq. 3-20 a cada termo desta última expressão. O ângulo entre os vetores unitários do primeiro termo ($\hat{\mathrm{i}}$ e $\hat{\mathrm{i}}$) é de 0°, e nos outros ângulos é de 90°. Assim, temos

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= -(6{,}0)(1) + (9{,}0)(0) + (8{,}0)(0) - (12)(0) \\ &= -6{,}0.\end{aligned}$$

Substituindo este resultado e os resultados das Eqs. 3-25 e 3-26 na Eq. 3-24, obtemos:

$$-6{,}0 = (5{,}00)(3{,}61) \cos \phi,$$

e portanto

$$\phi = \cos^{-1} \frac{-6{,}0}{(5{,}00)(3{,}61)} = 109° \approx 110°.$$

(Resposta)

O Produto Vetorial

O **produto vetorial** de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é escrito como $\vec{a}\times\vec{b}$, e resulta em um terceiro vetor, $\vec{c}$, cujo módulo é

$$c = ab \operatorname{sen} \phi, \tag{3-27}$$

onde ϕ é o *menor* dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. (É preciso usar o menor dos ângulos entre os vetores porque sen ϕ e sen$(360° - \phi)$ têm sinais opostos.) O produto $\vec{a}\times\vec{b}$ é lido como "*a* vetor *b*".

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos ou antiparalelos, $\vec{a}\times\vec{b} = 0$. O módulo de $\vec{a}\times\vec{b}$, que pode ser escrito como $|\vec{a}\times\vec{b}|$, é máximo quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são mutuamente perpendiculares um ao outro.

A direção de $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A Fig. 3-21*a* mostra como podemos determinar o sentido de $\vec{c} = \vec{b}\times\vec{a}$ usando a chamada **regra da mão direita**. Superponha as origens de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sem mudar suas orientações e imagine uma reta perpendicular ao plano definido pelos dois vetores, passando pela origem comum. Envolva essa linha com a mão *direita* de modo que seus dedos empurrem $\vec{a}$ em direção a $\vec{b}$ ao longo do menor ângulo entre os vetores. O polegar estendido aponta no sentido de $\vec{c}$.

No caso do produto vetorial, a ordem dos vetores é importante. Na Fig. 3-21*b*, estamos determinando o sentido de $\vec{c}' = \vec{b}\times\vec{a}$, de modo que os dedos da mão direita empurram $\vec{b}$ na direção de $\vec{a}$ ao longo do menor ângulo. O polegar neste caso aponta no sentido contrário ao da Fig. 3-21*a*, de modo que $\vec{c}' = -\vec{c}$, ou seja,

$$\vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{b}). \tag{3-28}$$

Em outras palavras, a propriedade comutativa não se aplica ao produto vetorial.

Em termos dos vetores unitários, podemos escrever

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k})\times(b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}), \tag{3-29}$$

que pode ser expandido de acordo com a propriedade distributiva, ou seja, calculando-se o produto vetorial de cada componente do primeiro vetor por todas as componentes do segundo vetor. Os produtos vetoriais dos vetores unitários aparecem no Apêndice E (veja "Produtos de Vetores"). Assim, por exemplo, na expansão da Eq. 3-29 temos:

$$a_x\hat{\imath}\times b_x\hat{\imath} = a_x b_x(\hat{\imath}\times\hat{\imath}) = 0,$$

porque os vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\imath}$ são paralelos e, portanto, seu produto vetorial é zero. Analogamente, temos:

$$a_x\hat{\imath}\times b_y\hat{\jmath} = a_x b_y(\hat{\imath}\times\hat{\jmath}) = a_x b_y\hat{k}.$$

No último passo usamos a Eq. 3-27 para descobrir que o módulo de $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}$ é um. (O módulo dos vetores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ é um, e o ângulo entre eles é de 90°.) Usando a regra da mão direita, descobrimos que o sentido de $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}$ é o sentido do semi-eixo z positivo, ou seja, o sentido de $\hat{k}$.

Continuando a expandir a Eq. 3-29, é possível mostrar que

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - b_z a_z)\hat{\imath} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\jmath} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}. \tag{3-30}$$

Também é possível calcular o resultado de um produto vetorial usando um determinante (veja o Apêndice E) ou uma calculadora.

Para verificar se um sistema de coordenadas xyz é um sistema dextrogiro, aplique a regra da mão direita ao produto vetorial $\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$ no sistema dado. Se seus dedos empurrarem $\hat{\imath}$ (semi-eixo x positivo) na direção de $\hat{\jmath}$ (semi-eixo y positivo) e o polegar estendido apontar no sentido do semi-eixo z positivo, é porque o sistema é dextrogiro.

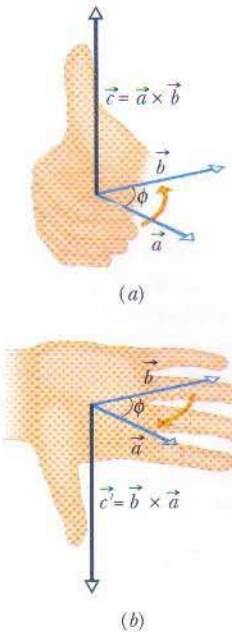


FIG. 3-21 Ilustração da regra da mão direita para produtos vetoriais. (*a*) Empurre o vetor $\vec{a}$ na direção do vetor $\vec{b}$ com os dados da mão direita. O polegar estendido mostra a orientação do vetor $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$. (*b*) O vetor $\vec{b}\times\vec{a}$ tem o sentido oposto ao de $\vec{a}\times\vec{b}$.

TESTE 5 Os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ têm módulos de 3 unidades e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se o módulo do produto vetorial $\vec{C} \times \vec{D}$ é igual a (a) zero e (b) 12 unidades?

Exemplo 3-8

Na Fig. 3-22, o vetor $\vec{a}$ está no plano xy, tem módulo igual a 18 unidades e uma orientação que faz um ângulo de 250° com o semi-eixo x positivo. O vetor $\vec{b}$ tem módulo de 12 unidades e está orientado ao longo do semi-eixo z positivo. Qual é o produto vetorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?

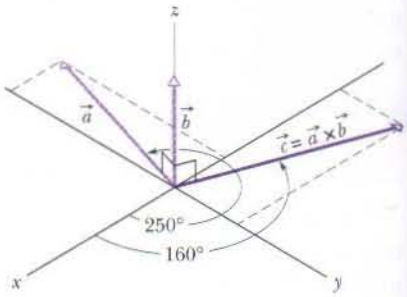


FIG. 3-22 O vetor $\vec{c}$ (no plano xy) é o produto vetorial dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

IDÉIA-CHAVE Quando conhecemos dois vetores na notação módulo-ângulo podemos calcular o módulo do produto vetorial usando a Eq. 3-27 e a orientação do produto vetorial usando a regra da mão direita da Fig. 3-21.

Cálculos: O módulo do produto vetorial é dado por

$$c = ab \operatorname{sen} \phi = (18)(12)(\operatorname{sen} 90°) = 216. \quad \text{(Resposta)}$$

Para determinar a orientação do produto vetorial na Fig. 3-22, coloque os dedos da mão direita em torno de uma reta perpendicular ao plano de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (a reta na qual se encontra o vetor $\vec{c}$) de modo que seus dedos empurrem o vetor $\vec{a}$ na direção de $\vec{b}$; seu polegar estendido fornece a orientação de $\vec{c}$. Assim, como mostra a figura, $\vec{c}$ está no plano xy. Como a direção de $\vec{c}$ é perpendicular à direção de $\vec{a}$, o vetor faz um ângulo de

$$250° - 90° = 160° \quad \text{(Resposta)}$$

com o semi-eixo x positivo.

Exemplo 3-9

Se $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ e $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$, determine $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?

IDÉIA-CHAVE Quando dois vetores estão expressos em termos dos vetores unitários, podemos determinar o produto vetorial usando a lei distributiva.

Cálculos: Temos:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (3\hat{i} - 4\hat{j}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{k}) \\ &= 3\hat{i} \times (-2\hat{i}) + 3\hat{i} \times 3\hat{k} + (-4\hat{j}) \times (-2\hat{i}) \\ &\quad + (-4\hat{j}) \times 3\hat{k}.\end{aligned}$$

Podemos calcular os valores dos diferentes termos usando a Eq. 3-27 e determinando a orientação dos vetores com o auxílio da regra da mão direita. No primeiro termo, o ângulo ϕ entre os dois vetores envolvidos no produto vetorial é 0; nos outros três termos, $\phi = 90°$. O resultado é o seguinte:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= -6(0) + 9(-\hat{j}) + 8(-\hat{k}) - 12\hat{i} \\ &= -12\hat{i} - 9\hat{j} - 8\hat{k}. \quad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

O vetor $\vec{c}$ é perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o que pode ser demonstrado observando que $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ e $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$, ou seja, não existem componentes de $\vec{c}$ em relação a $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 5: *Erros Freqüentes no Cálculo de Produtos Vetoriais* Vários erros são freqüentes no cálculo de produtos vetoriais. (1) Deixar de posicionar os vetores com a origem no mesmo ponto em comum quando uma figura mostra a origem de um dos vetores coincidindo com a extremidade do outro; você deve deslocar mentalmente um dos vetores para a posição apropriada sem modificar a direção e o sentido (ou, melhor ainda, refazer o desenho). (2) Usar a mão esquerda ao aplicar a regra da mão direita quando a última está ocupada com uma calculadora ou com um lápis. (3) Não respeitar o sentido do primeiro vetor para o segundo quando a orientação dos vetores exige um movimento complicado da mão para aplicar a regra mão direita. Às vezes isso ocorre quando você tenta realizar mentalmente a manobra em vez de mover realmente a mão. (4) Deixar de usar um sistema de coordenadas dextrogiro. A Fig. 3-14 mostra um desenho em perspectiva de um sistema de coordenadas desse tipo.

REVISÃO E RESUMO

Escalares e Vetores *Grandezas escalares*, como a temperatura, possuem apenas um valor. São especificadas por um número com uma unidade (10°C, por exemplo) e obedecem às regras da aritmética e da álgebra comum. As *grandezas vetoriais*,

como o deslocamento, possuem um módulo e uma orientação (5 m para cima, por exemplo), e obedecem às regras da álgebra vetorial.

Soma Geométrica de Vetores Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ podem ser somados geometricamente desenhando-os na mesma escala e posicionando-os com a extremidade de um na origem do outro. O vetor que liga a origem do primeiro à extremidade do segundo é o vetor soma, $\vec{s}$. Para subtrair $\vec{b}$ de $\vec{a}$ invertemos o sentido de $\vec{b}$ para obter $-\vec{b}$ e somamos $-\vec{b}$ a $\vec{a}$. A soma vetorial é comutativa e associativa.

Componentes de um Vetor As *componentes* (escalares) a_x e a_y de um vetor bidimensional $\vec{a}$ em relação ao eixos de um sistema de coordenadas xy são obtidas traçando retas perpendiculares aos eixos a partir da origem e da extremidade de $\vec{a}$. As componentes são dadas por

$$a_x = a\cos\theta \text{ e } a_y = a\,\text{sen}\,\theta, \tag{3-5}$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{a}$ e o semi-eixo x positivo. O sinal algébrico de uma componente indica seu sentido em relação ao eixo correspondente. Dadas as componentes, podemos encontrar o módulo e a orientação de um vetor $\vec{a}$ através das equações

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \text{ e } \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}. \tag{3-6}$$

Notação com Vetores Unitários Os *vetores unitários* $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ e $\hat{\mathrm{k}}$ têm módulo unitário e sentido igual ao sentido positivo dos eixos x, y e z, respectivamente, em um sistema de coordenadas dextrogiro. Podemos expressar um vetor $\vec{a}$ em termos de vetores unitários como

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}, \tag{3-7}$$

onde $a_x\hat{\mathrm{i}}$, $a_y\hat{\mathrm{j}}$ e $a_z\hat{\mathrm{k}}$ são as **componentes vetoriais** de $\vec{a}$, e a_x, a_y e az são as **componentes escalares**.

Soma de Vetores na Forma de Componentes Para somar vetores na forma de componentes, usamos as regras

$$r_x = a_x + b_x \quad r_y = a_y + b_y \quad r_z = a_z + b_z. \tag{3-11 a 3-13}$$

onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são os vetores a serem somados e $\vec{r}$ é o vetor soma.

Produto de um Escalar por um Vetor O produto de um escalar s por um vetor $\vec{v}$ é um vetor de módulo sv com a mesma orientação de $\vec{v}$ se s é positivo e com a orientação oposta se s é negativo. Para dividir $\vec{v}$ por s, multiplicamos $\vec{v}$ por $1/s$.

O Produto Escalar O **produto escalar** de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é representado por $\vec{a}\cdot\vec{b}$ e é igual à grandeza *escalar* dada por

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi, \tag{3-20}$$

onde ϕ é o menor dos ângulos entre as direções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O produto escalar é o produto do módulo de um dos vetores pela componente escalar do outro em relação ao primeiro. Em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}})\cdot(b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}), \tag{3-22}$$

que pode ser expandida de acordo com a lei distributiva. Note que $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

O Produto Vetorial O **produto vetorial** de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, representado por $\vec{a}\times\vec{b}$, é um *vetor* $\vec{c}$ cujo módulo c é dado por

$$c = ab\,\text{sen}\,\phi, \tag{3-27}$$

onde ϕ é o menor dos ângulos entre as direções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A orientação de $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e é dada pela regra da mão direita, como mostra a Fig. 3-21. Note que $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$. Em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}})\times(b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}), \tag{3-29}$$

que pode ser expandida de acordo com a lei distributiva.

PERGUNTAS

1 Como a mascote da Universidade da Flórida é um jacaré, a equipe de golfe da universidade joga em um campo onde existe um lago com jacarés. A Fig. 3-23 mostra uma vista aérea da região em torno de um dos buracos do campo com um sistema de coordenadas xy superposto. As tacadas da equipe devem levar a bola da origem até o buraco, que está nas coordenadas (8 m, 12 m), mas a bola pode sofrer apenas os seguintes deslocamentos, que podem ser usados mais de uma vez:

FIG. 3-23 Pergunta 1.

$$\vec{d}_1 = (8\text{ m})\hat{\mathrm{i}} + (6\text{ m})\hat{\mathrm{j}}, \quad \vec{d}_2 = (6\text{ m})\hat{\mathrm{j}}, \quad \vec{d}_3 = (8\text{ m})\hat{\mathrm{i}}.$$

O lago está nas coordenadas (8 m, 6 m). Se um membro da equipe lança a bola no lago, é imediatamente transferido para a Universidade Estadual da Flórida, a eterna rival. Que seqüência de deslocamentos deve ser usada por um membro do time para evitar o lago?

2 A Eq. 3-2 mostra que a soma de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é comutativa. Isso significa que a subtração é comutativa, ou seja, que $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$?

3 A soma dos módulos de dois vetores pode ser igual ao módulo da soma dos mesmos vetores? Justifique sua resposta.

4 Os dois vetores da Fig. 3-24 estão em um plano xy. Determine os sinais das componentes x e y, respectivamente, de (a) $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$; (b) $\vec{d}_1 - \vec{d}_2$; (c) $\vec{d}_2 - \vec{d}_1$.

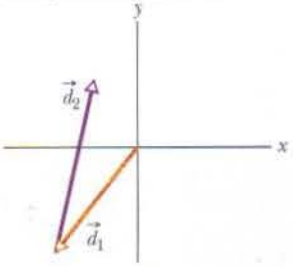


FIG. 3-24 Pergunta 4.

5 Se $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$, é verdade que (a) $\vec{a} + (-\vec{d}) = \vec{c} + (-\vec{b})$; (b) $\vec{a} = (-\vec{b}) + \vec{d} + \vec{c}$; (c) $\vec{c} + (-\vec{d}) = \vec{a} + \vec{b}$?

6 Descreva dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tais que

(a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a + b = c$;

(b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$;

(c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a^2 + b^2 = c^2$.

7 Quais dos sistemas de eixos na Fig. 3-25 são sistemas de coordenadas dextrogiros? Como de costume, a letra que identifica o eixo está no semi-eixo positivo.

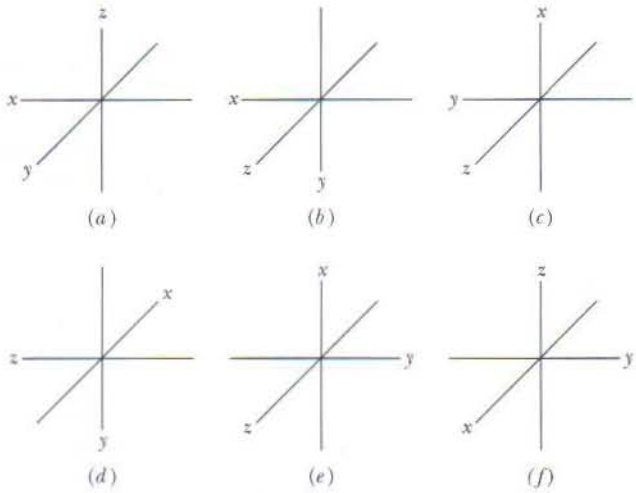


FIG. 3-25 Pergunta 7.

8 A Fig. 3-26 mostra um vetor $\vec{A}$ e outros quatro vetores de mesmo módulo e orientações diferentes. (a) Quais dos outros quatro vetores têm o mesmo produto escalar com $\vec{A}$? (b) Quais têm um produto escalar com $\vec{A}$ negativo?

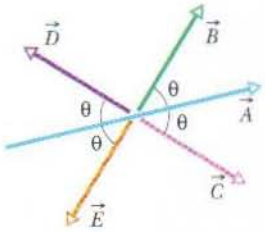


FIG. 3-26 Pergunta 8.

9 Se $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ e $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{B}$, qual é a orientação de $\vec{B}$ nas três situações da Fig. 3-27 se a constante q é (a) positiva e (b) negativa?

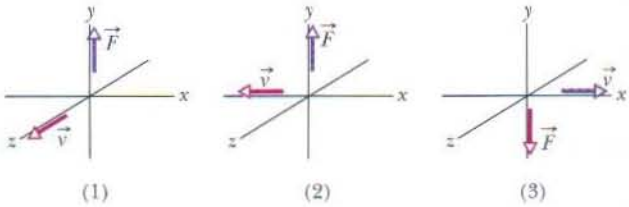


FIG. 3-27 Pergunta 9.

10 Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b}$ é necessariamente igual a $\vec{c}$?

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 3-4 Componentes de Vetores

•1 A componente x do vetor $\vec{A}$ é $-25{,}0$ m e a componente y é $+40{,}0$ m. (a) Qual é o módulo de $\vec{A}$? (b) Qual é o ângulo entre a orientação de $\vec{A}$ e o semi-eixo x positivo?

•2 Expresse os seguintes ângulos em radianos: (a) 20,0°; (b) 50,0°; (c) 100°. Converta os seguintes ângulos para graus: (d) 0,330 rad; (e) 2,10 rad; (f) 7,70 rad.

•3 Quais são (a) a componente x e (b) a componente y de um vetor $\vec{a}$ do plano xy que faz um ângulo de 250° no sentido anti-horário como o semi-eixo x positivo e tem um módulo de 7,3 m?

•4 Na Fig. 3-28, uma máquina pesada é erguida com o auxílio de uma rampa que faz um ângulo $\theta = 20{,}0°$ com a horizontal, na qual a máquina percorre uma distância $d = 12{,}5$ m. (a) De quanto a máquina foi erguida verticalmente? (b) Qual é a distância vertical percorrida pela máxima? (c) Qual é a distância horizontal?

•5 O objetivo de um navio é chegar a um porto situado 120 km ao norte do ponto de partida, mas uma tempestade inesperada o leva para um local situado 100 km a leste do ponto de partida. (a) Que distância o navio deve percorrer e (b) que rumo deve tomar para chegar ao destino?

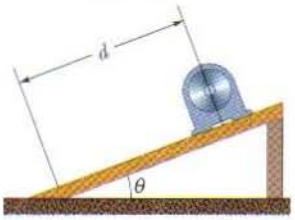


FIG. 3-28 Problema 4.

•6 Um vetor deslocamento $\vec{r}$ no plano xy tem 15 m de comprimento e faz um ângulo $\theta = 30°$ com o semi-eixo x positivo, como mostra a Fig. 3-29. Determine (a) a componente x e (b) a componente y do vetor.

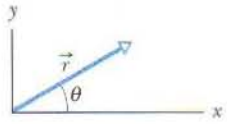


FIG. 3-29 Problema 6.

••7 As dimensões de uma sala são 3,00 m (altura) × 3,70 m × 4,30 m. Uma mosca parte de um canto da sala e vai pousar em um canto diagonalmente oposto. (a) Qual é o módulo do deslocamento da mosca? (b) A distância percorrida pode ser menor que este valor? (c) Pode ser maior? (d) Pode ser igual? (e) Escolha um sistema de coordenadas apropriado e expresse as componentes do vetor deslocamento em termos de vetores unitários. (f) Se a mosca caminhar, em vez de voar, qual o comprimento do caminho mais curto para o outro canto? (*Sugestão:* O problema pode ser resolvido sem fazer cálculos complicados. A sala é como uma caixa; desdobre as paredes para representá-las em um único plano antes de procurar uma solução).

seção 3-6 Soma de Vetores através de Suas Componentes

•8 Um carro viaja 50 km para leste, 30 km para o norte e 25 km em uma direção 30° a leste do norte. Desenhe o diagrama vetorial e determine (a) o módulo e (b) o ângulo do deslocamento total do carro em relação ao ponto de partida.

•9 (a) Determine a soma $\vec{a} + \vec{b}$, em termos de vetores unitários, para $\vec{a} = (4{,}0\text{ m})\hat{i} + (3{,}0\text{ m})\hat{j}$ e $\vec{b} = (-13{,}0\text{ m})\hat{i} + (7{,}0\text{ m})\hat{j}$. Determine (b) o módulo e (c) o sentido de $\vec{a} + \vec{b}$.

•10 Uma pessoa caminha da seguinte forma: 3,1 km para o norte, 2,4 km para oeste e 5,2 km para o sul. (a) Desenhe o diagrama vetorial que representa este movimento. (b) Que distância e (c) em que direção deve voar um pássaro em linha reta do mesmo ponto de partida ao mesmo ponto de chegada?

•11 Uma pessoa deseja chegar a um ponto que está a 3,40 km de sua localização atual, em uma direção 35,0° ao norte do leste. As ruas por onde pode passar são todas na direção norte-sul ou na direção leste-oeste. Qual é a menor distância que a pessoa precisa percorrer para chegar ao destino?

•12 Para os vetores $\vec{a} = (3{,}0\ \text{m})\hat{\text{i}} + (4{,}0\ \text{m})\hat{\text{j}}$ e $\vec{b} = (5{,}0\ \text{m})\hat{\text{i}} + (-2{,}0\ \text{m})\hat{\text{j}}$, determine $\vec{a} + \vec{b}$ (a) em termos de vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo (em relação a $\hat{\text{i}}$). Determine $\vec{b} - \vec{a}$ (d) em termos de vetores unitários e em termos (e) do módulo e (f) do ângulo.

•13 Dois vetores são dados por

$$\vec{a} = (4{,}0\ \text{m})\hat{\text{i}} - (3{,}0\ \text{m})\hat{\text{j}} + (1{,}0\ \text{m})\hat{\text{k}}$$

e

$$\vec{b} = (-1{,}0\ \text{m})\hat{\text{i}} + (1{,}0\ \text{m})\hat{\text{j}} + (4{,}0\ \text{m})\hat{\text{k}}.$$

Em termos de vetores unitários, determine (a) $\vec{a} + \vec{b}$, (b) $\vec{a} - \vec{b}$ e (c) um terceiro vetor, $\vec{c}$, tal que $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$.

•14 Determine as componentes (a) x, (b) y e (c) z da soma $\vec{r}$ dos deslocamentos $\vec{c}$ e $\vec{d}$ cujas componentes em metros ao longo dos três eixos são $c_x = 7{,}4$, $c_y = -3{,}8$, $c_z = -6{,}1$, $d_x = 4{,}4$, $d_y = -2{,}0$, $d_z = 3{,}3$.

•15 Uma formiga, enlouquecida pelo sol em um dia quente, sai correndo em um plano xy. As componentes $(x; y)$ de quatro corridas consecutivas em linha reta são as seguintes, todas em centímetros: (30,0; 40,0), $(b_x; -70{,}0)$, $(-20{,}0; c_y)$;$(-80{,}0; -70{,}0)$. O deslocamento resultante das quatro corridas tem componentes $(-140; -20{,}0)$. Determine (a) b_x e (b) c_y. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo (em relação ao semi-eixo x positivo) do deslocamento total.

•16 Na soma $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$, o vetor $\vec{A}$ tem um módulo de 12,0 m e um ângulo de 40,0° no sentido anti-horário em relação ao semi-eixo x positivo, e o vetor $\vec{C}$ tem um módulo de 15,0 m e um ângulo de 20,0° no sentido anti-horário em relação ao semi-eixo x negativo. Determine (a) o módulo de $\vec{B}$ e (b) o ângulo de $\vec{B}$ em relação ao semi-eixo x positivo.

•17 Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ na Fig. 3-30 têm módulos iguais a 10,0 m e os ângulos são $\theta_1 = 30°$ e $\theta_2 = 105°$. Determine as componentes (a) x e (b) y da soma vetorial $\vec{r}$ dos dois vetores, (c) o módulo de $\vec{r}$ e (d) o ângulo que $\vec{r}$ faz com o semi-eixo x positivo.

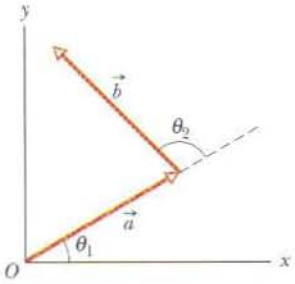


FIG. 3-30 Problema 17.

•18 Você deve executar quatro deslocamentos sucessivos na superfície plana num deserto, começando na origem de um sistema de coordenadas xy e terminando nas coordenadas (−140 m, 30 m). As componentes de seus deslocamentos são, respectivamente, as seguintes, em metros: (20, 60), $(b_x, -70)$, $(-20, c_y)$ e $(-60, -70)$. Determine (a) b_x e (b) c_y. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo (em relação ao semi-eixo x positivo) do deslocamento total.

•19 Três vetores, $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, têm módulos iguais a 50 m e estão em um plano xy. Suas orientações em relação ao sentido semi-eixo x positivo são 30°, 195° e 315°, respectivamente. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo do vetor $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ e (c) o módulo e (d) o ângulo de $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. Determine (e) o módulo e (f) o ângulo de um quarto vetor, $\vec{d}$, tal que $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d}) = 0$.

•20 (a) Qual é a soma dos quatro vetores seguintes em termos de vetores unitários? (b) Para esta soma, quais são (b) o módulo, (c) o ângulo em graus e (d) o ângulo em radianos?

$\vec{E}$: 6,00 m a + 0,900 rad	$\vec{F}$: 5,00 m a − 75,0°
$\vec{G}$: 4,00 m a + 1,20 rad	$\vec{H}$: 6,00 m a − 210°

•21 Em um jogo de xadrez ao ar livre, no qual as peças ocupam o centro de quadrados com 1,00 m de lado, um cavalo é movido da seguinte forma: (1) dois quadrados para a frente e um quadrado para a direita; (2) dois quadrados para a esquerda e um quadrado para a frente; (3) dois quadrados para a frente e um quadrado para a esquerda. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao sentido "para a frente") do deslocamento total do cavalo após a série de três movimentos.

••22 Um explorador polar foi surpreendido por uma nevasca, que reduziu a visibilidade a praticamente zero, quando retornava ao acampamento. Para chegar ao acampamento ele deveria caminhar 5,6 km para o norte, mas quando o tempo melhorou percebeu que na realidade havia caminhado 7,8 km em uma direção 50° ao norte do leste. (a) Que distância e (b) em que sentido deve caminhar para voltar à base?

••23 O oásis B está 25 km a leste do oásis A. Partindo do oásis A, um camelo percorre 24 km em uma direção 15° ao sul do leste e 8,0 km para o norte. A que distância o camelo está do oásis B?

••24 Dois besouros correm em um deserto plano, partindo do mesmo ponto. O besouro 1 corre 0,50 m para leste e 0,80 m em uma direção 30° ao norte do leste. O besouro 2 corre 1,6 m em uma direção 40° ao leste do norte e depois corre em outra direção. Quais devem ser (a) o módulo e (b) o sentido da segunda corrida do segundo besouro para que ele termine na mesma posição final que o primeiro besouro?

••25 Se $\vec{B}$ é somado a $\vec{C} = 3{,}0\hat{\text{i}} + 4{,}0\hat{\text{j}}$, o resultado é um vetor no sentido do semi-eixo y positivo, com um módulo igual ao de $\vec{C}$. Qual é o módulo de $\vec{B}$?

••26 O vetor $\vec{A}$, paralelo ao eixo x, deve ser somado ao vetor $\vec{B}$, que tem um módulo de 7,0 m. A soma é um vetor paralelo ao eixo y, com um módulo 3 vezes maior que o de $\vec{A}$. Qual é o módulo de $\vec{A}$?

••27 Para se orientarem, as formigas de jardim costumam criar uma rede de trilhas marcadas por feromônios. Partindo do formigueiro, cada uma dessas trilhas se bifurca repetidamente em duas trilhas que formam um ângulo de 60°. Quando uma formiga perdida encontra uma trilha, pode saber em que direção fica o formigueiro ao chegar ao primeiro ponto de bifurcação. Se estiver se afastando do formigueiro, encontrará duas trilhas que formam ângulos pequenos com a direção em que estava se movendo, 30° para a esquerda e 30° para a direita. Se estiver se aproximando do formigueiro, encontrará apenas uma trilha com essa característica, 30° para a esquerda ou 30° para a direita. A Fig. 3-31 mostra uma rede de trilhas típica, com segmentos de reta de 2,0 cm de comprimento e bifurcações simétricas de 60°. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao semi-eixo x positivo) do deslocamento até o formigueiro (encontre-o na figura) de uma formiga que entra na rede de trilhas no ponto A. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo de uma formiga que entra na rede de trilhas no ponto B.

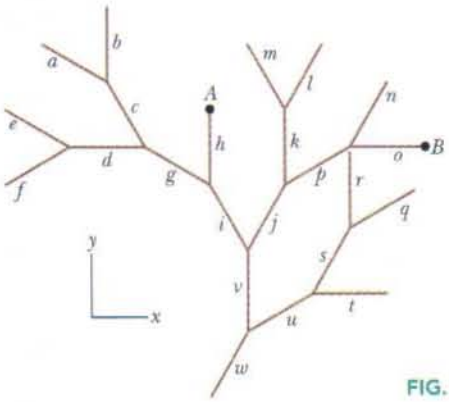


FIG. 3-31 Problema 27.

••28 São dados dois vetores:

$$\vec{a} = (4{,}0\ \text{m})\hat{\imath} - (3{,}0\ \text{m})\hat{\jmath} \text{ e } \vec{b} = (6{,}0\ \text{m})\hat{\imath} - (8{,}0\ \text{m})\hat{\jmath}.$$

Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação a $\hat{\imath}$) de $\vec{a}$. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo de $\vec{b}$. Determine (e) o módulo e (f) o ângulo de $\vec{a} + \vec{b}$; (g) o módulo e (h) o ângulo de $\vec{b} - \vec{a}$; (i) o módulo e (j) o ângulo de $\vec{a} - \vec{b}$. (k) Determine o ângulo entre as direções de $\vec{b} - \vec{a}$ e $\vec{a} - \vec{b}$.

••29 Se $\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = 5\vec{d}_3$, $\vec{d}_1 - \vec{d}_2 = 3\vec{d}_3$ e $\vec{d}_3 = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$, determine em termos dos vetores unitários, (a) $\vec{d}_1$ e (b) $\vec{d}_2$.

••30 Determine a soma dos quatro vetores a seguir (a) em termos dos vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo.

$$\vec{A} = (2{,}00\ \text{m})\hat{\imath} + (3{,}00\ \text{m})\hat{\jmath} \qquad \vec{B}\text{: } 4{,}00\ \text{m, a } +65{,}0^\circ$$

$$\vec{C} = (-4{,}00\ \text{m})\hat{\imath} + (-6{,}00\ \text{m})\hat{\jmath} \qquad \vec{D}\text{: } 5{,}00\ \text{m, a } -235^\circ$$

•••31 Na Fig. 3.32, um cubo de aresta a tem um de seus vértices posicionado na origem de um sistema de coordenadas xyz. A *diagonal do cubo* é uma reta que vai de um vértice a outro do cubo, passando pelo centro. Em termos dos vetores unitários, qual é a diagonal do cubo que passa pelo vértice cujas coordenadas são (a) $(0, 0, 0)$, (b) $(a, 0, 0)$ (c) $(0, a, 0)$ e (d) $(a, a, 0)$? (e) Determine os ângulos que as diagonais do cubo fazem com as arestas vizinhas. (f) Determine o comprimento das diagonais do cubo em termos de a.

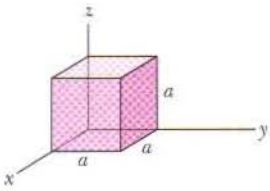


FIG. 3-32 Problema 31.

seção 3-7 Vetores e as Leis da Física

•32 Na Fig. 3-33, um vetor $\vec{a}$ com um módulo de 17,0 m faz um ângulo $\theta = 56{,}0^\circ$ no sentido anti-horário como o semi-eixo x positivo. Quais são as componentes (a) a_x e (b) a_y do vetor? Um segundo sistema de coordenadas está inclinado de um ângulo $\theta' = 18^\circ$ em relação ao primeiro. Quais são as componentes (c) a'_x e (d) a'_y neste novo sistema de coordenadas?

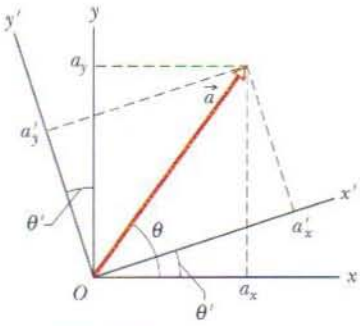


FIG. 3-33 Problema 32.

seção 3-8 Multiplicação de Vetores

•33 Dois vetores, $\vec{r}$ e $\vec{s}$, estão no plano xy. Seus módulos são 4,50 unidades e 7,30 unidades, respectivamente, e eles estão orientados a 320° e 85,0°, respectivamente, no sentido anti-horário em relação ao semi-eixo x positivo. Quais são os valores de (a) $\vec{r} \cdot \vec{s}$ e (b) $\vec{r} \times \vec{s}$?

•34 Se $\vec{d}_1 = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ e $\vec{d}_2 = -5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$, determine $(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \cdot (\vec{d}_1 \times 4\vec{d}_2)$

•35 Três vetores são dados por $\vec{a} = 3{,}0\hat{\imath} + 3{,}0\hat{\jmath} - 2{,}0\hat{k}$, $\vec{b} = -1{,}0\hat{\imath} - 4{,}0\hat{\jmath} + 2{,}0\hat{k}$ e $\vec{c} = 2{,}0\hat{\imath} + 2{,}0\hat{\jmath} + 1{,}0\hat{k}$. Determine (a) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, (b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ e (c) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$.

•36 Dois vetores são dados por $\vec{a} = 3{,}0\hat{\imath} + 5{,}0\hat{\jmath}$ e $\vec{b} = 2{,}0\hat{\imath} + 4{,}0\hat{\jmath}$. Determine (a) $\vec{a} \times \vec{b}$, (b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ e (d) a componente de $\vec{a}$ em relação a $\vec{b}$. [*Sugestão:* Para resolver o item (d) considere a Eq. 3-20 e a Fig. 3-20.]

•37 Para os vetores da Fig. 3-34, com $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$, determine (a) o módulo e (b) a orientação de $\vec{a} \times \vec{b}$, (c) o módulo e (d) a orientação de $\vec{a} \times \vec{c}$ e (e) o módulo e (f) orientação de $\vec{b} \times \vec{c}$. (Embora exista, o eixo z não é mostrado na figura.)

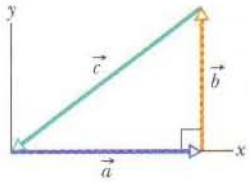


FIG. 3-34 Problemas 37 e 50.

••38 O deslocamento $\vec{d}_1$ está no plano yz, faz um ângulo de 63,0° com o semi-eixo y positivo, tem uma componente z positiva e um módulo de 4,50 m. O deslocamento $\vec{d}_2$ está no plano xz, faz um ângulo de 30,0° com o semi-eixo x positivo, tem uma componente z positiva e um módulo de 1,40 m. Determine (a) $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2$; (b) $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$ e (c) o ângulo entre $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$.

••39 Use a definição de produto escalar, $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\theta$, e o fato de que $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ para calcular o ângulo entre os dois vetores dados por $\vec{a} = 3{,}0\hat{\imath} + 3{,}0\hat{\jmath} + 3{,}0\hat{k}$ e $\vec{b} = 2{,}0\hat{\imath} + 1{,}0\hat{\jmath} + 3{,}0\hat{k}$.

••40 Determine $3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B})$ para os três vetores a seguir.

$$\vec{A} = 2{,}00\hat{\imath} + 3{,}00\hat{\jmath} - 4{,}00\hat{k}$$

$$\vec{B} = -3{,}00\hat{\imath} + 4{,}00\hat{\jmath} + 2{,}00\hat{k} \qquad \vec{C} = 7{,}00\hat{\imath} - 8{,}00\hat{\jmath}$$

••41 O vetor $\vec{A}$ tem módulo igual a 6,00 unidades, o vetor $\vec{B}$ tem módulo igual a 7,00 unidades e $\vec{A} \cdot \vec{B} = 14{,}0$. Qual é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$?

••42 No produto $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, faça $q = 2$,

$$\vec{v} = 2{,}0\hat{\imath} + 4{,}0\hat{\jmath} + 6{,}0\hat{k} \text{ e } \vec{F} = 4{,}0\hat{\imath} - 20\hat{\jmath} + 12\hat{k}.$$

Determine $\vec{B}$, em termos dos vetores unitários, para $B_x = B_y$.

••43 Os três vetores na Fig. 3-35 têm módulos $a = 3{,}00$ m, $b = 4{,}00$ m e $c = 10{,}0$ m; $\theta = 30{,}0^\circ$. Determine (a) a componente x e (b) a componente y de $\vec{a}$; (c) a componente x e (d) a componente y de $\vec{b}$; (e) a componente x e (f) a componente y de $\vec{c}$. Se $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$, quais são os valores de (g) p e (h) q?

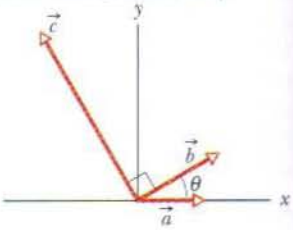


FIG. 3-35 Problema 43.

••44 Em um encontro de mímicos, o mímico 1 se desloca de $\vec{d}_1 = (4{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (5{,}0\ \text{m})\hat{\jmath}$ e o mímico 2 se desloca de $\vec{d}_2 = (-3{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (4{,}0\ \text{m})\hat{\jmath}$. Determine (a) $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$, (b) $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2$, (c) $(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \cdot \vec{d}_2$ e (d) a componente de $\vec{d}_1$ em relação a $\vec{d}_2$. [*Sugestão:* Para resolver o item (d), veja a Eq. 3-20 e a Fig. 3-20.]

Problemas Adicionais

45 Uma *falha* em uma rocha é uma ruptura ao longo da qual faces opostas da rocha deslizaram uma em relação à outra. Na Fig.

3-36, os pontos A e B coincidiam antes de a rocha em primeiro plano deslizar para a direita. O deslocamento total $\vec{AB}$ está no plano da falha. A componente horizontal de $\vec{AB}$ é o *rejeito horizontal* AC. A componente de $\vec{AB}$ dirigida para baixo no plano da falha é o *rejeito de mergulho* AD. (a) Qual é o módulo do deslocamento total $\vec{AB}$ se o rejeito horizontal é 22,0 m e o rejeito de mergulho é 17,0 m? (b) Se o plano da falha faz um ângulo $\phi = 52{,}0°$ com a horizontal, qual é a componente vertical de $\vec{AB}$?

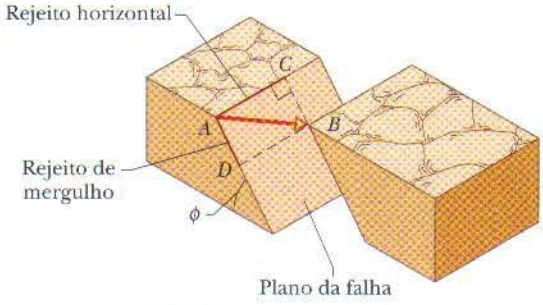


FIG. 3-36 Problema 45.

46 Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm componentes, em metros, $a_x = 3{,}2$, $a_y = 1{,}6$, $b_x = 0{,}50$ e $b_y = 4{,}5$. (a) Determine o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Existem dois vetores no plano xy que são perpendiculares a $\vec{a}$ e têm um módulo de 5,0 m. Um deles, o vetor $\vec{c}$, tem uma componente x positiva; o outro, o vetor $\vec{d}$, tem uma componente x negativa. Determine (b) a componente x e (c) a componente y de $\vec{c}$; (d) a componente x e (e) a componente y de $\vec{d}$.

47 Um vetor $\vec{a}$ de módulo 10 unidades e outro vetor $\vec{b}$ de módulo 6,0 unidades fazem um ângulo de 60°. Determine (a) o produto escalar dos dois vetores e (b) o módulo do produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

48 O vetor $\vec{a}$ tem módulo 5,0 m e aponta para leste. O vetor $\vec{b}$ tem módulo 4,0 m e aponta na direção 35° a oeste do norte. Determine (a) o módulo e (b) a orientação do vetor $\vec{a} + \vec{b}$. Determine (c) o módulo e (d) a orientação do vetor $\vec{b} - \vec{a}$. (e) Desenhe os diagramas vetoriais correspondentes às duas combinações de vetores.

49 Uma partícula sofre três deslocamentos sucessivos em um plano: $\vec{d}_1$, 4,00 m para sudoeste, $\vec{d}_2$, 5,00 m para leste e $\vec{d}_3$, 6,00 m em uma direção 60,0° ao norte do leste. Use um sistema de coordenadas com o eixo y apontando para o norte e o eixo x apontando para o leste. Determine (a) a componente x e (b) a componente y de $\vec{d}_1$. Determine (c) a componente x e (d) a componente y de $\vec{d}_2$. Determine (e) a componente x e (f) a componente y de $\vec{d}_3$. Considere o deslocamento *total* da partícula após os três deslocamentos. Determine (g) a componente x, (h) a componente y, (i) o módulo e (j) a orientação do deslocamento total. Para que a partícula volte ao ponto de partida (k), que distância deve percorrer e (l) em que direção deve se deslocar?

50 Para os vetores da Fig. 3.34, com $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$, calcule (a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (b) $\vec{a} \cdot \vec{c}$ e (c) $\vec{b} \cdot \vec{c}$.

51 Um barco a vela parte do lado americano do lago Erie para um ponto no lado canadense, 90,0 km ao norte. O navegante, contudo, termina 50,0 km a leste do ponto de partida. (a) Que distância e (b) em que sentido deve navegar para chegar ao ponto desejado?

52 Determine a soma dos quatro vetores a seguir (a) em termos dos vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo em relação ao semi-eixo x positivo.

$\vec{P}$: 10,0 m, 25,0°, sentido anti-horário em relação a $+x$

$\vec{Q}$: 12,0 m, 10,0°, sentido anti-horário em relação a $+y$

$\vec{R}$: 8,00 m, 20,0°, sentido horário em relação a $-y$

$\vec{S}$: 9,00 m, 40,0°, sentido anti-horário em relação a $-y$

53 Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão no plano xy. $\vec{B}$ tem módulo 8,00 e ângulo 130°; $\vec{B}$ tem componentes $B_x = -7{,}72$ e $B_y = -9{,}20$. Determine os ângulos entre o semi-eixo y negativo e (a) o vetor $\vec{A}$, (b) o vetor $\vec{A} \times \vec{B}$ e (c) o vetor $\vec{A} \times (\vec{B} + 3{,}00\hat{k})$.

54 São dados três deslocamentos em metros: $\vec{d}_1 = 4{,}0\hat{i} + 5{,}0\hat{j} - 6{,}0\hat{k}$, $\vec{d}_2 = -1{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}$ e $\vec{d}_3 = 4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$. (a) Determine $\vec{r} = \vec{d}_1 - \vec{d}_2 + \vec{d}_3$. (b) Determine o ângulo entre $\vec{r}$ e o semi-eixo z positivo. (c) Determine a componente de $\vec{d}_1$ em relação a $\vec{d}_2$. (d) Qual é a componente de $\vec{d}_1$ que é perpendicular a $\vec{d}_2$ e está no plano de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$? (*Sugestão:* Para resolver o item (c), considere a Eq. 3-20 e a Fig. 3-20; para resolver o item (d), considere a Eq. 3-27.)

55 Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão no plano xy. $\vec{A}$ tem módulo 8,00 e ângulo 130°; $\vec{B}$ tem componentes $B_x = -7{,}72$ e $B_y = -9{,}20$. (a) Determine $5\vec{A} \cdot \vec{B}$. Determine $4\vec{A} \times 3\vec{B}$ (b) em termos dos vetores unitários e (c) através do módulo e do ângulo em coordenadas esféricas (veja a Fig. 3-37). (d) Determine o ângulo entre os vetores $\vec{A}$ e $4\vec{A} \times 3\vec{B}$. (*Sugestão:* Pense um pouco antes de iniciar os cálculos.) Determine $\vec{A} + 3{,}00\hat{k}$ (e) em termos dos vetores unitários e (f) através do módulo e do ângulo em coordenadas esféricas.

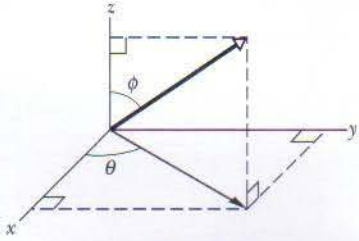


FIG. 3-37 Problema 55.

56 O vetor $\vec{d}_1$ está no sentido negativo do eixo y e o vetor $\vec{d}_2$ está no sentido positivo do eixo x. Determine a orientação (a) de $\vec{d}_2/4$ e (b) de $\vec{d}_1/(-4)$. Determine o módulo (c) de $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2$ e (d) de $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2/4)$. Determine a orientação do vetor (e) $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$ e (f) do vetor $\vec{d}_2 \times \vec{d}_1$. Determine o módulo (g) de $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$ e (h) de $\vec{d}_2 \times \vec{d}_1$. Determine (i) o módulo e (j) a orientação de $\vec{d}_1 \times (\vec{d}_2/4)$.

57 São dados três vetores em metros:

$$\vec{d}_1 = -3{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$$
$$\vec{d}_2 = -2{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$$
$$\vec{d}_3 = 2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 1{,}0\hat{k}.$$

Determine (a) $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 + \vec{d}_3)$, (b) $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 \times \vec{d}_3)$ e (c) $\vec{d}_1 \times (\vec{d}_2 + \vec{d}_3)$.

58 Um jogador de golfe precisa de três tacadas para colocar a bola no buraco. A primeira tacada lança a bola 3,66 m para o norte, a segunda 1,83 m para o sudeste e a terceira 0,91 m para o sudoeste. Determine (a) o módulo e (b) a direção do deslocamento necessário para colocar a bola no buraco na primeira tacada.

59 Considere um vetor $\vec{a}$ no sentido positivo do eixo x, um vetor $\vec{b}$ no sentido positivo do eixo y e um escalar d. Qual é a orientação de $\vec{b}/d$ se d é (a) positivo e (b) negativo? Qual é o módulo de (c) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e (d) $\vec{a} \cdot \vec{b}/d$? Qual é orientação (e) de $\vec{a} \times \vec{b}$ e (f) $\vec{b} \times \vec{a}$? (g) Qual é o módulo de $\vec{a} \times \vec{b}$? (h) Qual é o módulo de $\vec{b} \times \vec{a}$? Qual é (i) a amplitude e (j) a orientação de $\vec{a} \times \vec{b}/d$ se d é positivo?

60 Um vetor $\vec{d}$ tem módulo 2,5 m e aponta para o norte. Determine (a) o módulo e (b) a orientação de $4{,}0\vec{d}$. Determine (c) o módulo e (d) a orientação de $-3{,}0\vec{d}$.

61 Suponha que $\hat{i}$ aponta para leste, $\hat{j}$ aponta para o norte e $\hat{k}$ aponta para cima. Determine os valores de (a) $\hat{i} \cdot \hat{k}$, (b) $(-\hat{k}) \cdot (-\hat{j})$ e (c) $\hat{j} \cdot (-\hat{j})$. Determine as orientações (como, por exemplo, para leste ou para baixo) dos produtos vetoriais (d) $\hat{k} \times \hat{j}$, (e) $(-\hat{i}) \times (-\hat{j})$ e (f) $(-\hat{k}) \times (-\hat{j})$.

62 Considere dois deslocamentos, um de módulo 3 m e outro de módulo 4 m. Mostre que os vetores deslocamento podem ser combinados para produzir um deslocamento de módulo (a) 7m, (b) 1 m e (c) 5m.

63 Um banco no centro de Boston é assaltado (veja o mapa da Fig. 3-38). Os ladrões fogem de helicóptero, realizando três deslocamentos sucessivos: 32 km, 45° ao sul do leste; 53 km, 26° ao norte do oeste; 26 km, 18° a leste do sul. No final do terceiro vôo, são capturados. Em que cidade os ladrões foram presos?

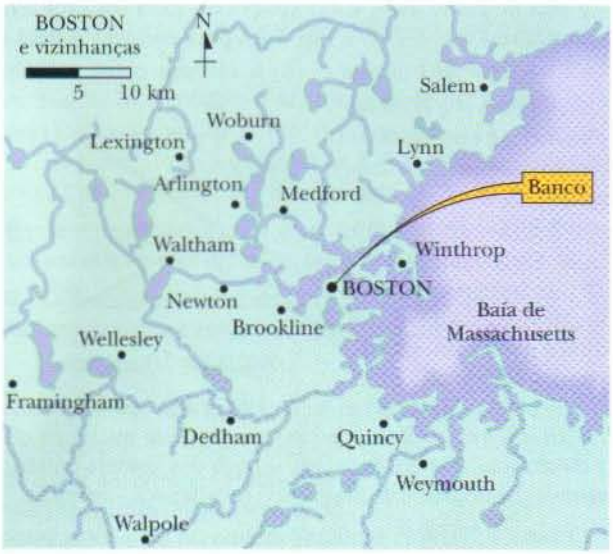


FIG. 3-38 Problema 63.

64 Uma roda com 45,0 cm de raio rola sem escorregar em um piso horizontal (Fig. 3-39). No instante t_1, o ponto P, pintado na borda da roda, está no ponto de contato entre a roda e o piso. Em um instante posterior t_2, a roda descreveu meia revolução. Quais são (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao piso) do deslocamento do ponto P?

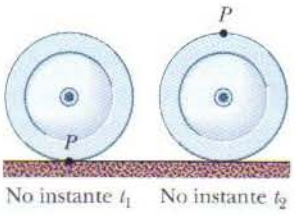


FIG. 3-39 Problema 64.

65 O vetor $\vec{A}$ tem um módulo de 12,0 m e faz um ângulo de 60,0° no sentido anti-horário com o semi-eixo x positivo de um sistema de coordenadas xy. O vetor $\vec{B}$ é dado por $(12{,}0\text{ m})\hat{i} + (8{,}00\text{ m})\hat{j}$ no mesmo sistema de coordenadas. O sistema de coordenadas sofre uma rotação de 20,0° no sentido anti-horário em torno da origem para formar um sistema $x'y'$. Determine os vetores (a) $\vec{A}$ e (b) $\vec{B}$ em termos dos vetores unitários do novo sistema.

66 Uma mulher caminha 250 m na direção 30° a leste do norte e 175 m na direção leste. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo do deslocamento total. (c) Determine a distância percorrida pela mulher. (d) Qual é maior, a distância percorrida ou o módulo do deslocamento?

67 (a) Determine, em termos dos vetores unitários, $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ para $\vec{a} = 5{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j} - 6{,}0\hat{k}$, $\vec{b} = -2{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}$ e $\vec{c} = 4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$. (b) Calcule o ângulo entre $\vec{r}$ e o semi-eixo z positivo. (c) Determine a componente de $\vec{a}$ em relação a $\vec{b}$. (d) Determine a componente de $\vec{a}$ em uma direção perpendicular a $\vec{b}$, no plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. (*Sugestão:* para resolver o item (c), veja a Eq. 3-20 e a Fig. 3-20; para resolver o item (d), veja a Eq. 3-27.)

68 Se $\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} = 4\vec{c}$ e $\vec{c} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$, determine (a) $\vec{a}$ e (b) $\vec{b}$.

69 Um manifestante, com sua placa de protesto, parte da origem de um sistema de coordenadas xyz, com o plano xy na horizontal. Ele se desloca 40 m no sentido negativo do eixo x, faz uma curva de noventa graus à esquerda, caminha mais 20 m e sobe até o alto de uma torre com 25 m de altura. (a) Em termos de vetores unitários, qual é o deslocamento da placa do início ao fim? (b) O manifestante deixa cair a placa, que vai parar na base da torre. Qual é o módulo do deslocamento total, do início até este novo fim?

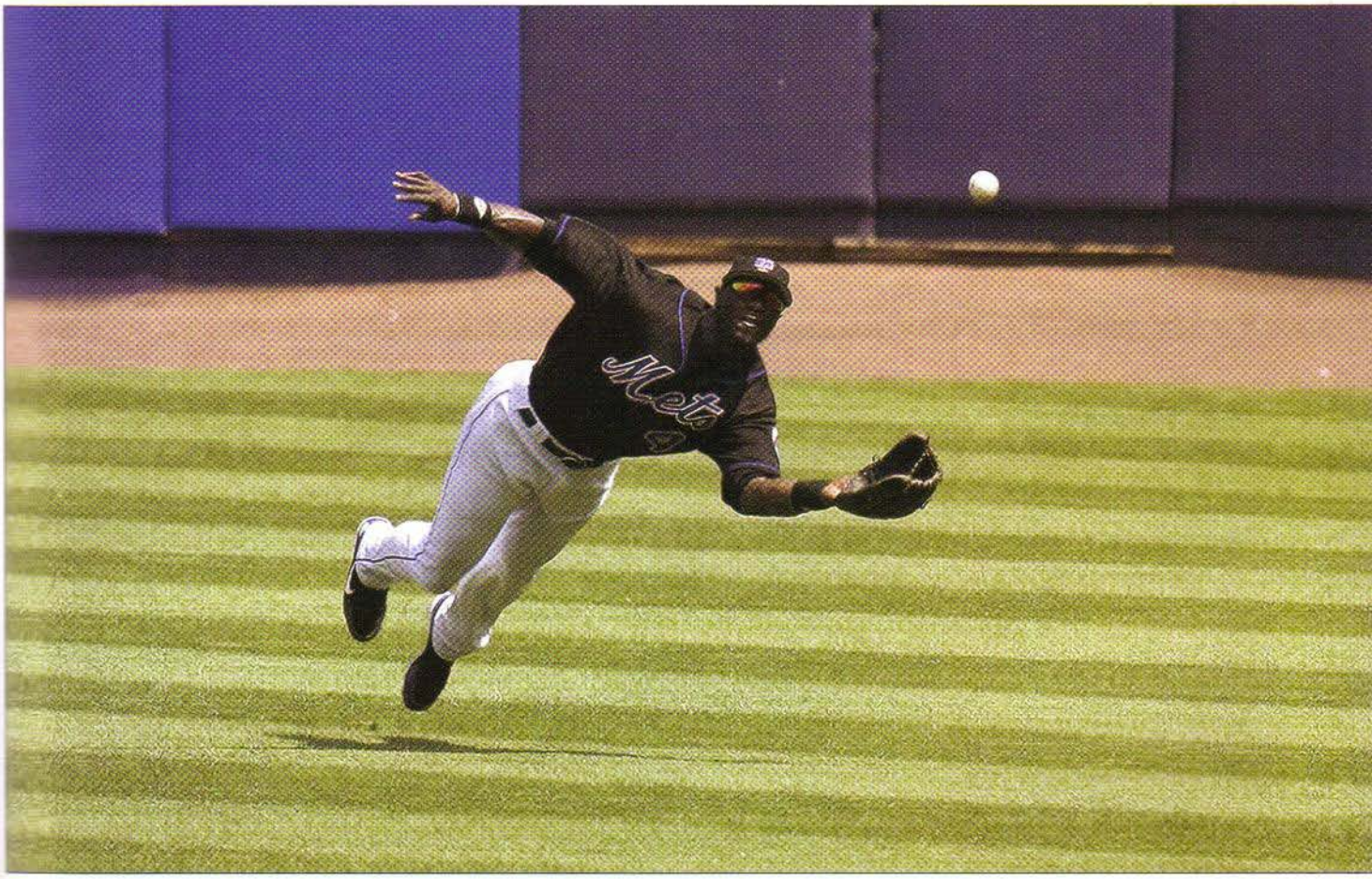
70 Um vetor $\vec{d}$ tem um módulo de 3,0 m e aponta para o sul. Determine (a) o módulo e (b) a orientação do vetor $5{,}0\vec{d}$. Determine (c) o módulo e (d) a orientação do vetor $-2{,}0\vec{d}$.

71 Se $\vec{B}$ é somado a $\vec{A}$, o resultado é $6{,}0\hat{i} + 1{,}0\hat{j}$. Se $\vec{B}$ é subtraído de $\vec{A}$, o resultado é $-4{,}0\hat{i} + 7{,}0\hat{j}$. Qual é o módulo de $\vec{A}$?

72 Uma formiga-de-fogo, em busca de molho picante em uma área de piquenique, executa três deslocamentos sucessivos no nível do solo: $\vec{d}_1$, de 0,40 m para sudoeste (ou seja, 45° entre sul e oeste), $\vec{d}_2$, de 0,50 m para leste, e $\vec{d}_3$, de 0,60 m em uma direção 60° ao norte do leste. Suponha que o sentido positivo do eixo x aponte para leste e o sentido positivo do eixo y para o norte. Quais são (a) a componente x e (b) a componente y de $\vec{d}_1$? Quais são (c) a componente x e (d) a componente y de $\vec{d}_2$? Quais são (e) a componente x e (f) a componente y de $\vec{d}_3$?

Quais são (g) a componente x e (h) a componente y, (i) o módulo e (j) o sentido do deslocamento total da formiga? Para a formiga voltar diretamente ao ponto de partida, (k) que distância deve percorrer e (l) em que direção deve se mover?

Movimento em Duas e Três Dimensões 4



Fonte: Rob Tringali/Sports Chrome Inc.

Quando uma bola de beisebol é rebatida e se aproxima de um jogador, como ele sabe onde deve estar para apanhá-la? Freqüentemente, o jogador caminha ou corre para um certo local do campo, chegando ali ao mesmo tempo que a bola. A experiência de jogo certamente ajuda, mas algum outro fator parece estar envolvido.

O que um jogador faz para saber onde deve estar para apanhar uma bola de beisebol?

A resposta está neste capítulo.

4-1 O QUE É FÍSICA?

Neste capítulo continuaremos a estudar a parte da física que analisa o movimento, mas agora os movimentos podem ser em duas ou três dimensões. Médicos e engenheiros aeronáuticos, por exemplo, precisam conhecer a física das curvas realizadas por pilotos de caça durante os combates aéreos, já que os jatos modernos podem fazer curvas tão rápidas que o piloto perde momentaneamente a consciência. Um engenheiro esportivo pode estar interessado na física do basquetebol. Quando um jogador vai cobrar um *lance livre* (em que o jogador lança a bola em direção à cesta, sem marcação, de uma distância de 4,3 m), pode arremessar a bola da altura dos ombros ou da altura da cintura. A primeira técnica é usada pela maioria esmagadora dos jogadores profissionais, mas o legendário Rick Barry estabeleceu o recorde de aproveitamento de lances livres usando a segunda.

Não é fácil compreender os movimentos em três dimensões. Por exemplo: você provavelmente é capaz de dirigir um carro em uma auto-estrada (movimento em uma dimensão), mas teria muita dificuldade para pousar um avião (movimento em três dimensões) sem um treinamento adequado.

Iniciaremos nosso estudo do movimento em duas e três dimensões com as definições de posição e deslocamento.

4-2 | Posição e Deslocamento

A localização de uma partícula (ou de um objeto que se comporte como uma partícula) pode ser especificada, de forma geral, através do **vetor posição** $\vec{r}$, um vetor que liga um ponto de referência (em geral a origem de um sistema de coordenadas) à partícula. Na notação de vetores unitários da Seção 3-5, $\vec{r}$ pode ser escrito na forma

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \tag{4-1}$$

onde $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ e $z\hat{k}$ são as componentes vetoriais de $\vec{r}$ e x, y e z são as componentes escalares.

Os coeficientes x, y e z fornecem a localização da partícula ao longo dos eixos de coordenadas em relação à origem; ou seja, a partícula possui coordenadas retangulares (x, y, z). A Fig. 4-1, por exemplo, mostra uma partícula cujo vetor posição é

$$\vec{r} = (-3\text{ m})\hat{i} + (2\text{ m})\hat{j} + (5\text{ m})\hat{k}$$

e cujas coordenadas retangulares são $(-3\text{ m}, 2\text{ m}, 5\text{ m})$. Ao longo do eixo x a partícula está a 3 m da origem, no sentido contrário ao do vetor unitário $\hat{i}$. Ao longo do eixo y ela está a 2 m da origem, no sentido do vetor unitário $\hat{j}$. Ao longo do eixo z ela está a 5 m da origem, no sentido do vetor unitário $\hat{k}$.

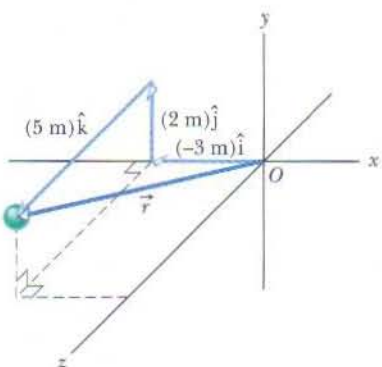


FIG. 4-1 O vetor posição $\vec{r}$ de uma partícula é a soma vetorial de suas componentes vetoriais.

Quando uma partícula se move, seu vetor posição varia de tal forma que sempre liga o ponto de referência (origem) à partícula. Se o vetor posição varia (de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$, digamos, durante um certo intervalo de tempo), o **deslocamento** da partícula, $\Delta\vec{r}$, durante esse intervalo de tempo é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{4-2}$$

Usando a notação de vetores unitários da Eq. 4-1, podemos escrever esse deslocamento como

$$\Delta\vec{r} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

ou como

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}, \tag{4-3}$$

onde as coordenadas (x_1, y_1, z_1) correspondem ao vetor posição $\vec{r}_1$ e as coordenadas (x_2, y_2, z_2) correspondem ao vetor posição $\vec{r}_2$. Podemos também escrever o vetor deslocamento substituindo $(x_2 - x_1)$ por Δx, $(y_2 - y_1)$ por Δy e $(z_2 - z_1)$ por Δz:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}. \qquad (4\text{-}4)$$

Exemplo 4-1

Na Fig. 4-2 o vetor posição de uma partícula é inicialmente

$$\vec{r}_1 = (-3{,}0\ \text{m})\hat{i} + (2{,}0\ \text{m})\hat{j} + (5{,}0\ \text{m})\hat{k}$$

e depois passa a ser

$$\vec{r}_2 = (9{,}0\ \text{m})\hat{i} + (2{,}0\ \text{m})\hat{j} + (8{,}0\ \text{m})\hat{k}.$$

Qual é o deslocamento da partícula $\Delta\vec{r}$ de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$?

IDÉIA-CHAVE O deslocamento $\Delta\vec{r}$ é obtido subtraindo o vetor posição inicial $\vec{r}_1$ do vetor posição final $\vec{r}_2$.

Cálculo: A subtração nos dá

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1\\ &= [9{,}0 - (-3{,}0)]\hat{i} + [2{,}0 - 2{,}0]\hat{j} + [8{,}0 - 5{,}0]\hat{k}\\ &= (12\ \text{m})\hat{i} + (3{,}0\ \text{m})\hat{k}. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

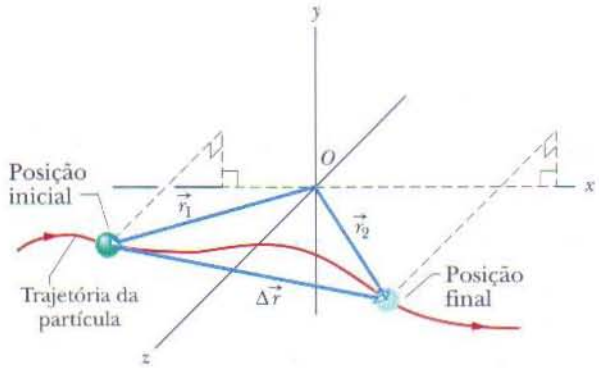


FIG. 4-2 O deslocamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vai da extremidade do vetor correspondente à posição inicial, $\vec{r}_1$, até a extremidade do vetor correspondente à posição final, $\vec{r}_2$.

O vetor deslocamento é paralelo ao plano xz porque a componente y é nula.

Exemplo 4-2

Um coelho atravessa um estacionamento, no qual, por alguma razão, um conjunto de eixos coordenados foi desenhado. As coordenadas da posição do coelho, em metros, em função do tempo t, em segundos, são dadas por

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28 \qquad (4\text{-}5)$$

e

$$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30. \qquad (4\text{-}6)$$

(a) No instante $t = 15$ s, qual é o vetor posição $\vec{r}$ do coelho na notação de vetores unitários e na notação módulo-ângulo?

IDÉIA-CHAVE As coordenadas x e y da posição do coelho, dadas pelas Eqs. 4-5 e 4-6, são as componentes escalares do vetor posição $\vec{r}$ do coelho.

Cálculos: Podemos escrever

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}. \qquad (4\text{-}7)$$

(Escrevemos $\vec{r}(t)$ em vez de $\vec{r}$ porque as componentes são funções de t e, portanto, $\vec{r}$ também é função de t.)

Em $t = 15$ s, as componentes escalares são

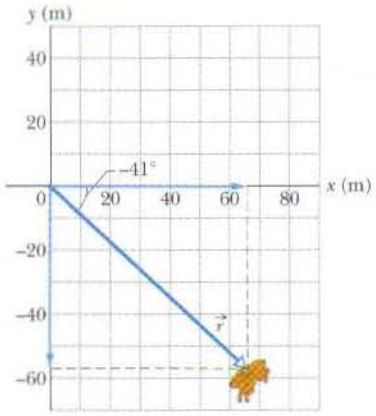
$$x = (-0{,}31)(15)^2 + (7{,}2)(15) + 28 = 66\ \text{m}$$

e

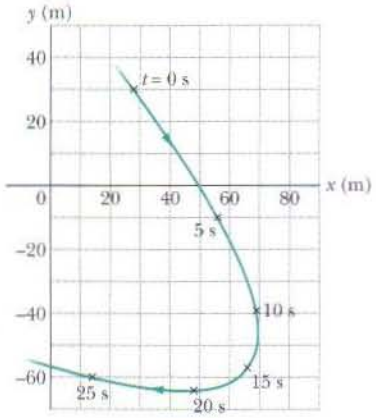
$$y = (0{,}22)(15)^2 - (9{,}1)(15) + 30 = -57\ \text{m},$$

e portanto

$$\vec{r} = (66\ \text{m})\hat{i} - (57\ \text{m})\hat{j}, \qquad \text{(Resposta)}$$



(a)



(b)

FIG. 4-3 (a) O vetor posição de um coelho, $\vec{r}$, no instante $t = 15$ s. As componentes escalares de $\vec{r}$ são mostradas ao longo dos eixos. (b) A trajetória do coelho e sua posição para cinco valores de t.

que está desenhado na Fig. 4-3*a*. Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{r}$, usamos a Eq. 3-6:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66\text{ m})^2 + (-57\text{ m})^2}$$
$$= 87\text{ m}, \qquad \text{(Resposta)}$$

e $$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{-57\text{ m}}{66\text{ m}}\right) = -41°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Verificação: Embora $\theta = 139°$ possua a mesma tangente que $-41°$, os sinais das componentes de $\vec{r}$ indicam que o ângulo desejado é $139° - 180° = -41°$.

(b) Trace o gráfico da trajetória do coelho de $t = 0$ a $t = 25$ s.

Plotagem: Podemos repetir a parte (a) para vários valores de t e plotar os resultados. A Fig. 4-3*b* mostra os pontos do gráfico para cinco valores de t e a curva que liga esses pontos. Podemos também plotar a curva em uma calculadora gráfica a partir das Eqs. 4-5 e 4-6.

4-3 | Velocidade Média e Velocidade Instantânea

Se uma partícula se move de um ponto para outro, podemos estar interessados em saber com que rapidez ela se move. Como no Capítulo 2, podemos definir duas grandezas que expressam a "rapidez" de um movimento: *velocidade média* e *velocidade instantânea*. Entretanto, no caso de um movimento bidimensional ou tridimensional devemos considerar essas grandezas como vetores e usar a notação vetorial.

Se uma partícula sofre um deslocamento $\Delta\vec{r}$ em um intervalo de tempo Δt, sua **velocidade média** $\vec{v}_{\text{méd}}$ é dada por

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{intervalo de tempo}},$$

ou

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{4-8}$$

Esta equação nos diz que a orientação de $\vec{r}_{\text{méd}}$ (o vetor do lado esquerdo da Eq. 4-8) deve ser igual à do deslocamento $\Delta\vec{r}$ (o vetor do lado direito). Usando a Eq. 4-4, podemos escrever a Eq. 4-8 em componentes vetoriais:

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta x\hat{\text{i}} + \Delta y\hat{\text{j}} + \Delta z\hat{\text{k}}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\text{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\text{j}} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{\text{k}}. \tag{4-9}$$

Assim, por exemplo, se a partícula do Exemplo 4-1 se move da posição inicial para outra posição em 2,0 s, a velocidade média durante esse movimento é

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(12\text{ m})\hat{\text{i}} + (3{,}0\text{ m})\hat{\text{k}}}{2{,}0\text{ s}} = (6{,}0\text{ m/s})\hat{\text{i}} + (1{,}5\text{ m/s})\hat{\text{k}}.$$

Logo, a velocidade média (uma grandeza vetorial) tem uma componente de 6,0 m/s em relação ao eixo x e uma componente de 1,5 m/s em relação ao eixo z.

Quando falamos da **velocidade** de uma partícula em geral estamos nos referindo à **velocidade instantânea** $\vec{v}$ em algum instante. Esta velocidade $\vec{v}$ é o valor para o qual tende a velocidade $\vec{v}_{\text{méd}}$ quando o intervalo de tempo Δt tende a zero. Usando a linguagem do cálculo, podemos escrever $\vec{v}$ como a derivada

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{4-10}$$

A Fig. 4-4 mostra a trajetória de uma partícula que se move no plano xy. Quando a partícula se desloca para a direita ao longo da curva, o vetor posição gira

para a direita. Durante o intervalo de tempo Δt o vetor posição muda de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$ e o deslocamento da partícula é $\Delta\vec{r}$.

Para determinar a velocidade instantânea da partícula no instante t_1 (instante em que a partícula se encontra na posição 1), reduzimos o intervalo de tempo Δt nas vizinhanças de t_1, fazendo-o tender a zero. Ao fazermos isso, três coisas acontecem: (1) o vetor posição $\vec{r}_2$ da Fig. 4-4 se aproxima de $\vec{r}_1$, fazendo $\Delta\vec{r}$ tender a zero. (2) A direção de $\Delta\vec{r}/\Delta t$ (e, portanto, de $\vec{v}_{\text{méd}}$) se aproxima da direção da reta tangente à trajetória da partícula na posição 1. (3) A velocidade média $\vec{v}_{\text{méd}}$ se aproxima da velocidade instantânea $\vec{v}$ no instante t_1.

No limite $\Delta t \to 0$ temos $\vec{v}_{\text{méd}} \to \vec{v}$ e, o que é mais importante neste contexto, aqui $\vec{v}_{\text{méd}}$ assume a direção da reta tangente. Assim, $\vec{v}$ também assume essa direção:

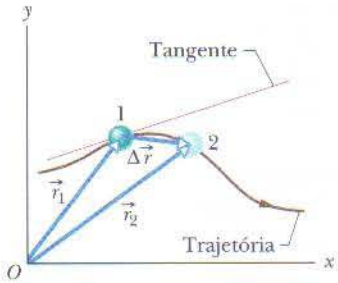


FIG. 4-4 O deslocamento $\Delta\vec{r}$ de uma partícula durante um intervalo de tempo Δt, da posição 1, com vetor posição $\vec{r}_1$ no instante t_1, até a posição 2, com vetor posição $\vec{r}_2$ no instante t_2. A figura mostra também a tangente à trajetória da partícula na posição 1.

A direção da velocidade instantânea $\vec{v}$ de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula na posição da partícula.

O resultado é o mesmo em três dimensões: $\vec{v}$ é sempre tangente à trajetória da partícula.

Para escrever a Eq. 4-10 na forma de vetores unitários, usamos a expressão para $\vec{r}$ dada pela Eq. 4-1:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{\text{i}} + y\hat{\text{j}} + z\hat{\text{k}}) = \frac{dx}{dt}\hat{\text{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\text{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\text{k}}.$$

Esta equação pode ser simplificada se a escrevermos como

$$\vec{v} = v_x\hat{\text{i}} + v_y\hat{\text{j}} + v_z\hat{\text{k}}, \tag{4-11}$$

onde as componentes escalares de $\vec{v}$ são

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad \text{e} \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{4-12}$$

Assim, por exemplo, dx/dt é a componente escalar de $\vec{v}$ em relação ao eixo x. Isso significa que podemos encontrar as componentes escalares de $\vec{v}$ derivando as componentes de $\vec{r}$.

A Fig. 4-5 mostra o vetor velocidade $\vec{v}$ e suas componentes escalares x e y. Note que $\vec{v}$ é tangente à trajetória da partícula na posição da partícula. *Atenção*: Quando um vetor posição é desenhado, como nas Figs. 4-1 a 4-4, ele é uma seta que se estende de um ponto ("aqui") a outro ("lá"). Entretanto, quando um vetor velocidade é desenhado, como na Fig. 4-5, ele *não* vai de um ponto a outro. Em vez disso, sua orientação coincide com a do movimento instantâneo de uma partícula localizada na sua origem, e seu comprimento (que representa o módulo da velocidade) pode ser desenhado em qualquer escala.

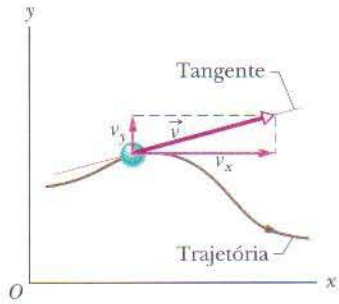
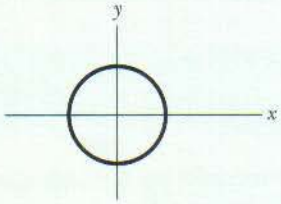


FIG. 4-5 A velocidade $\vec{v}$ de uma partícula e as componentes escalares de $\vec{v}$.

TESTE 1 A figura mostra uma trajetória circular descrita por uma partícula. Se a velocidade da partícula em um certo instante é $\vec{v} = (2\text{ m/s})\hat{\text{i}} - (2\text{ m/s})\hat{\text{j}}$, em qual dos quadrantes a partícula está se movendo nesse instante se ela se move (a) no sentido horário e (b) no sentido anti-horário? Desenhe $\vec{v}$ na figura para os dois casos.



Exemplo 4-3

Determine a velocidade $\vec{v}$ do coelho do Exemplo 4-2 no instante $t = 15$ s.

IDÉIA-CHAVE Podemos determinar $\vec{v}$ calculando as derivadas das componentes do vetor posição do coelho.

Cálculos: Aplicando a parte da Eq. 4-12 correspondente a v_x à Eq. 4-5, descobrimos que a componente x de $\vec{v}$ é

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28)$$
$$= -0{,}62t + 7{,}2. \qquad (4\text{-}13)$$

Em $t = 15$ s, isso nos dá $v_x = -2{,}1$ m/s. Da mesma forma, aplicando a parte da Eq. 4-12 correspondente a v_y à Eq. 4-6, descobrimos que a componente y é

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30)$$
$$= 0{,}44t - 9{,}1. \qquad (4\text{-}14)$$

Em $t = 15$ s, isso nos dá $v_y = -2{,}5$ m/s. Assim, de acordo com a Eq. 4-11,

$$\vec{v} = (-2{,}1 \text{ m/s})\hat{i} + (-2{,}5 \text{ m/s})\hat{j}, \quad \text{(Resposta)}$$

que está desenhada na Fig. 4-6, tangente à trajetória do coelho e no sentido em que ele está se movendo em $t = 15$ s.

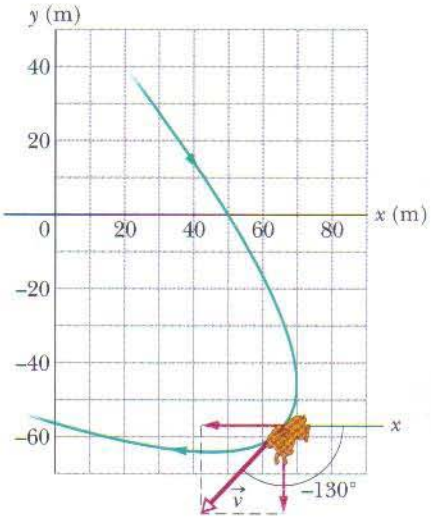


FIG. 4-6 A velocidade $\vec{v}$ do coelho em $t = 15$ s.

Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{v}$, podemos usar uma calculadora ou escrever, de acordo com a Eq. 3-6,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2{,}1 \text{ m/s})^2 + (-2{,}5 \text{ m/s})^2}$$
$$= 3{,}3 \text{ m/s} \qquad \text{(Resposta)}$$

e
$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}5 \text{ m/s}}{-2{,}1 \text{ m/s}}\right)$$
$$= \tan^{-1} 1{,}19 = -130°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Verificação: O ângulo é $-130°$ ou $-130° + 180° = 50°$?

4-4 | Aceleração Média e Aceleração Instantânea

Quando a velocidade de uma partícula varia de $\vec{v}_1$ para $\vec{v}_2$ em um intervalo de tempo Δt, sua **aceleração média** $\vec{a}_{\text{méd}}$ durante o intervalo Δt é

$$\text{aceleração média} = \frac{\text{variação de velocidade}}{\text{intervalo de tempo}},$$

ou
$$\vec{a}_{\text{méd}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \qquad (4\text{-}15)$$

Quando fazemos Δt tender a zero no entorno de um certo instante, $\vec{a}_{\text{méd}}$ tende para a **aceleração instantânea** (ou, simplesmente, **aceleração**) $\vec{a}$ nesse instante, ou seja,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (4\text{-}16)$$

Se o módulo *ou* a orientação da velocidade varia (ou ambos variam), a partícula possui uma aceleração.

Podemos escrever a Eq. 4-16 em termos de vetores unitários substituindo $\vec{v}$ pelo seu valor, dado pela Eq. 4-11, para obter

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} + v_z\hat{\mathrm{k}})$$
$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathrm{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathrm{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathrm{k}}.$$

Podemos escrever esta equação na forma

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}, \tag{4-17}$$

onde as componentes escalares de $\vec{a}$ são

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \text{e} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{4-18}$$

Assim, podemos obter as componentes escalares de $\vec{a}$ derivando as componentes escalares de $\vec{v}$ em relação ao tempo.

A Fig. 4-7 mostra o vetor aceleração $\vec{a}$ e suas componentes escalares para uma partícula que se move em duas dimensões. *Atenção:* Quando um vetor aceleração é desenhado, como na Fig. 4-7, ele *não vai* de um ponto a outro. Em vez disso, sua orientação coincide com a da variação instantânea do movimento de uma partícula localizada na sua origem, e seu comprimento (que representa o módulo da aceleração) pode ser desenhado em qualquer escala.

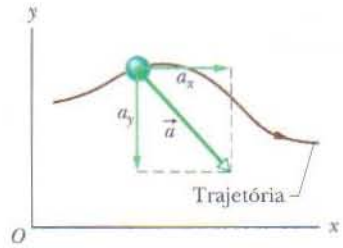


FIG. 4-7 A aceleração $\vec{a}$ de uma partícula e as componentes escalares de $\vec{a}$.

TESTE 2 Considere as seguintes descrições da posição (em metros) de uma partícula que se move no plano xy:

(1) $x = -3t^2 + 4t - 2$ e $y = 6t^2 - 4t$ (3) $\vec{r} = 2t^2\hat{\mathrm{i}} - (4t + 3)\hat{\mathrm{j}}$
(2) $x = -3t^3 - 4t$ e $y = -5t^2 + 6$ (4) $\vec{r} = (4t^3 - 2t)\hat{\mathrm{i}} + 3\hat{\mathrm{j}}$

As componentes x e y da aceleração são constantes em todas essas situações? A aceleração $\vec{a}$ é constante?

Exemplo 4-4

Para o coelho dos Exemplos 4-2 e 4-3, determine a aceleração $\vec{a}$ no instante $t = 15$ s.

IDÉIA-CHAVE Podemos determinar a aceleração $\vec{a}$ calculando as derivadas das componentes da velocidade do coelho.

Cálculos: Aplicando a parte da Eq. 4-18 correspondente a a_x à Eq. 4-13, descobrimos que a componente x de $\vec{a}$ é

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}62t + 7{,}2) = -0{,}62\ \mathrm{m/s^2}.$$

Analogamente, aplicando a parte da Eq. 4-18 correspondente a a_y à Eq. 4-14 descobrimos que a componente y é

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}44t - 9{,}1) = 0{,}44\ \mathrm{m/s^2}.$$

Vemos que essa aceleração não varia com o tempo (é constante), pois a variável tempo t não aparece na expressão das componentes da aceleração. De acordo com a Eq. 4-17,

$$\vec{a} = (-0{,}62\ \mathrm{m/s^2})\hat{\mathrm{i}} + (0{,}44\ \mathrm{m/s^2})\hat{\mathrm{j}}, \quad \text{(Resposta)}$$

que é mostrada superposta à trajetória do coelho na Fig. 4-8.

Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{a}$, novamente podemos usar uma calculadora ou a Eq. 3-6. No caso do módulo, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0{,}62\ \mathrm{m/s^2})^2 + (0{,}44\ \mathrm{m/s^2})^2}$$
$$= 0{,}76\ \mathrm{m/s^2}. \quad \text{(Resposta)}$$

No caso do ângulo, temos:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x} = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}44\ \mathrm{m/s^2}}{-0{,}62\ \mathrm{m/s^2}}\right) = -35°.$$

Entretanto, esse ângulo, que é o resultado fornecido por uma calculadora, indica que a orientação de $\vec{a}$ é para a direita e para baixo na Fig. 4-8. Porém, sabemos pelas componentes x e y que a orientação de $\vec{a}$ é para a esquerda e para cima. Para determinar o outro ângulo que possui a mesma tangente que $-35°$, mas não é mostrado pela calculadora, somamos 180°:

$$-35° + 180° = 145°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este novo resultado *é* compatível com as componentes de $\vec{a}$. Observe que $\vec{a}$ tem o mesmo módulo e a mesma orientação para qualquer instante de tempo, já que a aceleração do coelho é constante.

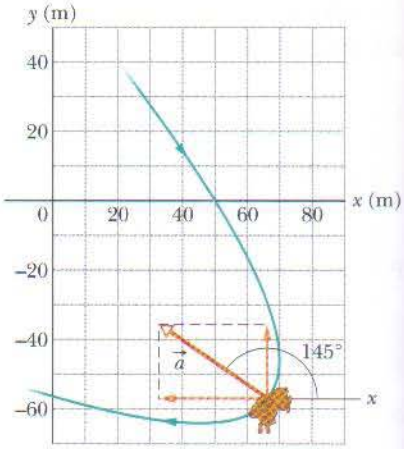


FIG. 4-8 A aceleração $\vec{a}$ do coelho em $t = 15$ s. O coelho possui essa mesma aceleração em todos os pontos de sua trajetória.

Exemplo 4-5

Uma partícula cuja velocidade é $\vec{v}_0 = -2{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j}$ (em metros por segundo) em $t = 0$ sofre uma aceleração constante $\vec{a}$, de módulo $a = 3{,}0$ m/s², que faz um ângulo $\theta = 130°$ com o semi-eixo x positivo. Qual é a velocidade $\vec{v}$ da partícula em $t = 5{,}0$ s?

IDÉIA-CHAVE Como a aceleração é constante, a Eq. 2-11 ($v = v_0 + at$) pode ser usada, mas devemos aplicá-la separadamente ao movimento paralelo ao eixo x e para o movimento paralelo ao eixo y.

Cálculos: Determinamos as componentes da velocidade, v_x e v_y, a partir das equações

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \text{e} \quad v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Nessas equações, v_{0x} (= −2,0 m/s) e v_{0y} (= 4,0 m/s) são as componentes x e y de $\vec{v}_0$ e a_x e a_y são as componentes x e y de $\vec{a}$. Para determinar a_x e a_y podemos decompor $\vec{a}$ usando uma calculadora ou com o auxílio da Eq. 3-5:

$$a_x = a\cos\theta = (3{,}0\ \text{m/s}^2)(\cos 130°) = -1{,}93\ \text{m/s}^2,$$
$$a_y = a\,\text{sen}\,\theta = (3{,}0\ \text{m/s}^2)(\text{sen}\ 130°) = +2{,}30\ \text{m/s}^2.$$

Quando esses valores são inseridos nas equações de v_x e v_y, descobrimos que no instante $t = 5{,}0$ s

$$v_x = -2{,}0\ \text{m/s} + (-1{,}93\ \text{m/s}^2)(5{,}0\ \text{s}) = -11{,}65\ \text{m/s},$$
$$v_y = 4{,}0\ \text{m/s} + (2{,}30\ \text{m/s}^2)(5{,}0\ \text{s}) = 15{,}50\ \text{m/s}.$$

Assim, em $t = 5{,}0$ s temos, depois de arredondar,

$$\vec{v} = (-12\ \text{m/s})\hat{i} + (16\ \text{m/s})\hat{j}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Usando uma calculadora ou a Eq. 3-6 descobrimos que o módulo e o ângulo de $\vec{v}$ são:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 19{,}4 \approx 19\ \text{m/s} \qquad \text{(Resposta)}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = 127° \approx 130°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Verificação: Que resultado a sua calculadora fornece, 127° ou −53°? Desenhe o vetor $\vec{v}$ com suas componentes para verificar qual dos dois ângulos é mais razoável.

4-5 | Movimento de Projéteis

Consideraremos a seguir um caso especial de movimento bidimensional: Uma partícula que se move em um plano vertical com velocidade inicial $\vec{v}_0$ e com uma aceleração constante, igual à aceleração de queda livre $\vec{g}$, dirigida para baixo. Uma partícula que se move dessa forma é chamada de **projétil** (o que significa que é projetada ou lançada), e seu movimento é chamado de **movimento balístico**. Um projétil pode ser uma bola de tênis (Fig. 4-9) ou de pingue-pongue, mas não um avião ou um pato. Muitos esportes (do golfe e do futebol ao lacrosse e ao raquetebol) envolvem os movimentos balísticos de uma bola; jogadores e técnicos estão sempre procurando controlar esses movimentos para obter o máximo de vantagem. O jogador que descobriu a rebatida em Z no raquetebol na década

de 1970, por exemplo, vencia os jogos com facilidade porque a trajetória peculiar da bola no fundo da quadra surpreendia os adversários.

Nosso objetivo atual é analisar o movimento dos projéteis usando as ferramentas descritas nas Seções 4-2 a 4-4 para o movimento bidimensional, desprezando a influência do ar. A Fig. 4-10, que será discutida na próxima seção, mostra a trajetória de um projétil quando o efeito do ar pode ser ignorado. O projétil é lançado com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$ que pode ser escrita na forma

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}. \tag{4-19}$$

As componentes v_{0x} e v_{0y} podem ser calculadas se conhecermos o ângulo θ_0 entre $\vec{v}_0$ e o semi-eixo x positivo:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0. \tag{4-20}$$

Durante o movimento bidimensional, o vetor posição $\vec{r}$ e a velocidade $\vec{v}$ do projétil mudam continuamente, mas o vetor aceleração $\vec{a}$ é constante e está *sempre* dirigido verticalmente para baixo. O projétil *não possui* aceleração horizontal.

O movimento de projéteis, como os das Figs. 4-9 e 4-10, parece complicado, mas temos a seguinte propriedade simplificadora (demonstrada experimentalmente):

No movimento de projéteis, o movimento horizontal e o movimento vertical são independentes, ou seja, um não afeta o outro.

Esta propriedade permite decompor um problema que envolve um movimento bidimensional em dois problemas unidimensionais independentes e mais fáceis de serem resolvidos, um para o movimento horizontal (com *aceleração nula*) e outro para o movimento vertical (com *aceleração constante para baixo*). Apresentamos a seguir dois experimentos que mostram que o movimento horizontal e o movimento vertical são realmente independentes.

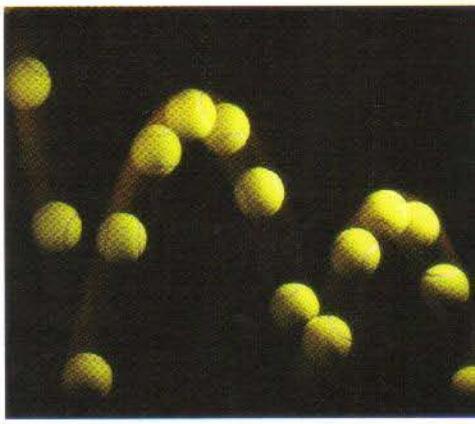


FIG. 4-9 Fotografia estroboscópica de uma bola de tênis amarela quicando em uma superfície dura. Entre os impactos, a trajetória da bola é balística. *Fonte:* Richard Megna/ Fundamental Photographs.

Duas Bolas de Golfe

A Fig. 4-11 é uma fotografia estroboscópica de duas bolas de golfe, uma que simplesmente se deixou cair e outra que é lançada horizontalmente por uma mola. As bolas de golfe têm o mesmo movimento vertical; ambas percorrem a mesma distância vertical no mesmo intervalo de tempo. *O fato de uma bola estar se movendo horizontalmente enquanto está caindo não afeta o seu movimento vertical*, ou seja, os movimentos horizontal e vertical são independentes.

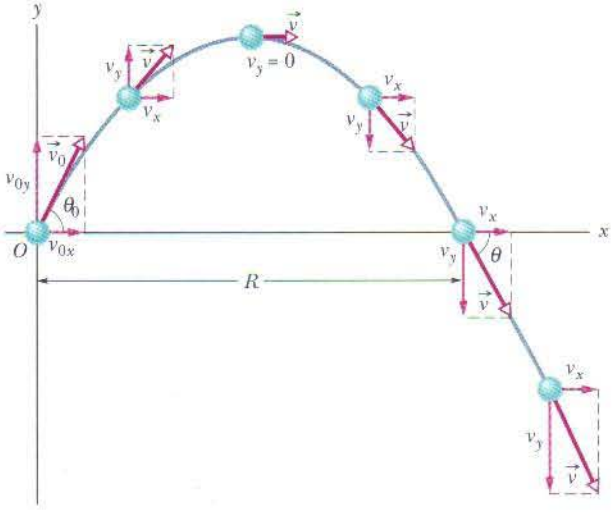


FIG. 4-10 Trajetória de um projétil que é lançado em $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$. São mostradas a velocidade inicial e as velocidades em vários pontos ao longo da trajetória, juntamente com suas componentes. Observe que a componente horizontal da velocidade permanece constante, mas a componente vertical muda continuamente. O *alcance R* é a distância horizontal percorrida pelo projétil *quando retorna à altura do lançamento*.

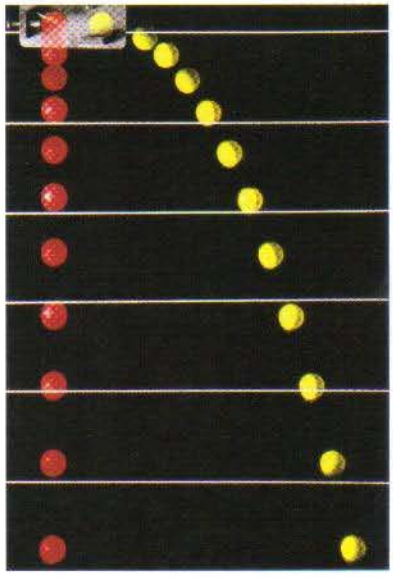


FIG. 4-11 Uma bola é deixada cair a partir do repouso no mesmo instante que outra bola é lançada horizontalmente para a direita. Os movimentos verticais das duas bolas são iguais. *Fonte:* Richard Megna/ Fundamental Photographs.

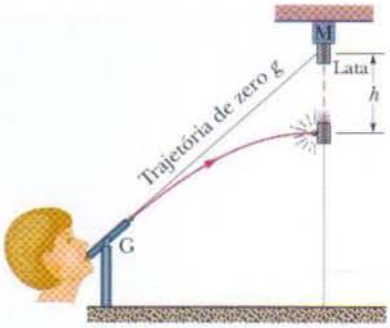


FIG. 4-12 A bola sempre acerta na lata que está caindo, já que as duas percorrem a mesma distância h em queda livre.

Uma Demonstração Interessante

A Fig. 4-12 mostra uma demonstração que tem animado muitas aulas de física. Ela envolve um canudo G, através do qual se pode soprar pequenas bolas que se comportam como projéteis. O alvo é uma lata suspensa por um eletroímã M, e o tubo é apontado para a lata. O experimento é arranjado de tal forma que o ímã solta a lata no mesmo instante em que a bola deixa o tubo.

Se g (o módulo da aceleração de queda livre) fosse zero, a bola seguiria a trajetória em linha reta mostrada na Fig. 4-12 e a lata continuaria no mesmo lugar após ter sido solta pelo eletroímã. Assim, a bola certamente atingiria a lata.

Na verdade, g *não é* zero, mas a bola *atinge* a lata! Como mostra a Fig. 4-12, a aceleração da gravidade faz com que a bola e a lata sofram o mesmo deslocamento para baixo, h, em relação à posição que teriam, a cada instante, se a gravidade fosse nula. Quanto maior a força do sopro, maior a velocidade inicial da bola, menor o tempo que a bola leva para se chocar com a lata e menor o valor de h.

TESTE 3 Em um certo instante, uma bola que descreve um movimento balístico tem uma velocidade $\vec{v} = 25\hat{i} - 4{,}9\hat{j}$ (o eixo x é horizontal, o eixo y é para cima e $\vec{v}$ está em metros por segundo). A bola já passou pelo ponto mais alto da trajetória?

4-6 | Análise do Movimento de um Projétil

Agora estamos preparados para analisar o movimento horizontal e vertical de um projétil.

Movimento Horizontal

Como *não existe aceleração* na direção horizontal, a componente horizontal v_x da velocidade de um projétil permanece inalterada e igual ao seu valor inicial v_{0x} durante toda a trajetória, como mostra a Fig. 4-13. Em qualquer instante t, o deslocamento horizontal do projétil em relação à posição inicial, $x - x_0$, é dado por

$$x - x_0 = v_{0x}t.$$

Como $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$, temos:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \tag{4-21}$$

FIG. 4-13 A componente vertical da velocidade deste skatista está variando, mas não a componente horizontal, que é igual à velocidade do skate. Em conseqüência, o skate permanece abaixo do atleta, permitindo que ele pouse no skate após o salto. *Fonte:* Jamie Budge/Liaison/Getty Images, Inc.

Movimento Vertical

O movimento vertical é o movimento que discutimos na Seção 2-9 para uma partícula em queda livre. O mais importante é que a aceleração é constante. Assim, as equações da Tabela 2-1 podem ser usadas, desde que a seja substituído por $-g$ e o eixo x seja substituído pelo eixo y. Assim, por exemplo, a Eq. 2-15 se torna

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ &= (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \end{aligned} \tag{4-22}$$

onde a componente vertical da velocidade inicial, v_{0y}, é substituída pela expressão equivalente $v_0 \operatorname{sen} \theta_0$. Da mesma forma, as Eqs. 2-11 e 2-16 se tornam

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt \tag{4-23}$$

$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4-24}$$

Como mostram a Fig. 4-10 e a Eq. 4-23, a componente vertical da velocidade se comporta exatamente como a de uma bola lançada verticalmente para cima.

Inicialmente ela está dirigida para cima e seu módulo diminui continuamente até se anular, *o que determina a altura máxima da trajetória*. Em seguida, a componente vertical da velocidade muda de sentido e seu módulo passa a aumentar com o tempo.

Equação da Trajetória

Podemos obter a equação do caminho percorrido pelo projétil (sua **trajetória**) eliminando o tempo t nas Eqs. 4-21 e 4-22. Explicitando t na Eq. 4-21 e substituindo o resultado na Eq. 4-22, obtemos, após algumas manipulações algébricas,

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \quad \text{(trajetória)}. \tag{4-25}$$

Esta é a equação da trajetória mostrada na Fig. 4-10. Ao deduzi-la, para simplificar, fizemos $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ nas Eqs. 4-21 e 4-22, respectivamente. Como g, θ_0 e v_0 são constantes, a Eq. 4-25 é da forma $y = ax + bx^2$, onde a e b são constantes. Como esta é a equação de uma parábola, a trajetória é *parabólica*.

Alcance Horizontal

O *alcance horizontal* R de um projétil, como mostra a Fig. 4-10, é a distância *horizontal* percorrida pelo projétil até voltar à sua altura inicial (altura de lançamento). Para determinar o alcance R, fazemos $x = x_0 = R$ na Eq. 4-21 e $y - y_0 = 0$ na Eq. 4-22, obtendo

$$R = (v_0 \cos \theta_0)t$$

e

$$0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Eliminando t nessas duas equações, obtemos

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0.$$

Usando a identidade $\operatorname{sen} 2\theta_0 = 2 \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0$ (veja o Apêndice E), obtemos

$$R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0. \tag{4-26}$$

Atenção: Esta equação *não* fornece a distância horizontal percorrida pelo projétil quando a altura final é diferente da altura de lançamento.

Observe que R na Eq. 4-26 atinge o valor máximo para $\operatorname{sen} 2\theta_0 = 1$, que corresponde a $2\theta_0 = 90°$ ou $\theta_0 = 45°$.

O alcance horizontal R é máximo para um ângulo de lançamento de 45°.

Quando a altura final é diferente da altura de lançamento, como acontece no arremesso de peso, lançamento de disco e basquetebol, a distância horizontal máxima não é atingida para um ângulo de lançamento de 45°.

Efeito do Ar

Até agora, supusemos que o ar não exerce efeito algum sobre o movimento de um projétil. Entretanto, em muitas situações a diferença entre a trajetória calculada dessa forma e a trajetória real do projétil pode ser muito grande, já que o ar resiste (se opõe) ao movimento. A Fig. 4-14, por exemplo, mostra as trajetórias de duas bolas de beisebol que deixam o bastão fazendo um ângulo de 60° com a horizontal, com uma velocidade inicial de 44,7 m/s. A trajetória I (de uma bola de verdade) foi calculada para as condi-

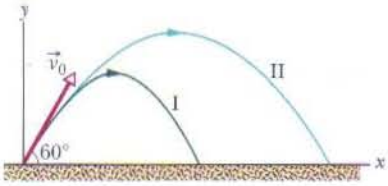


FIG. 4-14 (I) Trajetória teórica de uma bola, levando em conta a resistência do ar. (II) Trajetória que a bola seguiria no vácuo, calculada usando as equações deste capítulo. Os dados correspondentes estão na Tabela 4-1. (Adaptada de "The Trajectory of a Fly Ball," Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985.)

TABELA 4-1

Trajetórias de Duas Bolas de Beisebol*

	Trajetória I (Ar)	Trajetória II (Vácuo)
Alcance	98,5 m	177 m
Altura máxima	53,0 m	76,8 m
Tempo de percurso	6,6 s	7,9 s

*Veja a Fig. 4-14. O ângulo de lançamento é de 60° e a velocidade de lançamento é de 44,7 m/s.

ções normais de jogo, levando em conta a resistência do ar. A trajetória II (de uma bola em condições ideais) é a trajetória que a bola seguiria no vácuo.

TESTE 4 Uma bola de beisebol é rebatida em direção ao campo de jogo. Durante o percurso (ignorando o efeito do ar), o que acontece com as componentes (a) horizontal e (b) vertical da velocidade? Quais são as componentes (c) horizontal e (d) vertical da aceleração durante a subida, durante a descida e no ponto mais alto da trajetória da bola?

Exemplo 4-6 Aumente sua capacidade

Na Fig. 4-15 um avião de salvamento voa a 198 km/h (= 55,0 m/s), a uma altura constante de 500 m, rumo a um ponto diretamente acima da vítima de um naufrágio, para deixar cair uma balsa.

(a) Qual deve ser o ângulo ϕ da linha de visada do piloto para a vítima no instante em que o piloto deixa cair a balsa?

IDÉIAS-CHAVE Depois de liberada, a balsa é um projétil; assim, seus movimentos horizontal e vertical podem ser examinados separadamente (não é preciso levar em conta a forma da trajetória).

Cálculos: Na Fig. 4-15 vemos que ϕ é dado por

$$\phi = \tan^{-1}\frac{x}{h}, \qquad (4\text{-}27)$$

onde x é a coordenada horizontal da vítima (e da balsa ao chegar à água) e $h = 500$ m. Podemos calcular x com o auxílio da Eq. 4-21:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t. \qquad (4\text{-}28)$$

Sabemos que $x_0 = 0$ porque a origem foi colocada no ponto de lançamento. Como a balsa é *deixada cair* e não lançada do avião, sua velocidade inicial $\vec{v}_0$ é igual à velocidade do avião. Assim, sabemos também que a velocidade inicial tem módulo $v_0 = 55{,}0$ m/s e ângulo $\theta_0 = 0°$ (medido em relação ao semi-eixo x positivo). Entretanto, não conhecemos o tempo t que a balsa leva para percorrer a distância do avião até a vítima.

Para determinar o valor de t, temos que considerar o movimento *vertical* e, mais especificamente, a Eq. 4-22:

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \qquad (4\text{-}29)$$

onde o deslocamento vertical $y - y_0$ da balsa é -500 m (o valor negativo indica que a balsa se move *para baixo*). Assim,

$$-500\text{ m} = (55{,}0\text{ m/s})(\operatorname{sen} 0°)t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\text{ m/s}^2)t^2.$$

Resolvendo esta equação, obtemos $t = 10{,}1$. Substituindo este valor na Eq. 4-28, temos:

$$x - 0 = (55{,}0\text{ m/s})(\cos 0°)(10{,}1\text{ s}),$$

ou

$$x = 555{,}5\text{ m}.$$

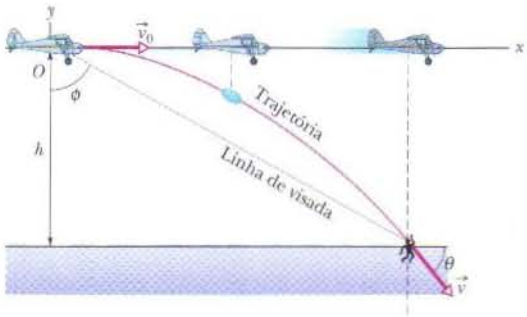


FIG. 4-15 Um avião lança uma balsa enquanto se desloca com velocidade constante em um vôo horizontal. Durante a queda a velocidade horizontal da balsa permanece igual à velocidade do avião.

Nesse caso, a Eq. 4-27 nos dá

$$\phi = \tan^{-1}\frac{555{,}5\text{ m}}{500\text{ m}} = 48{,}0°. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) No momento em que a balsa atinge a água, qual é sua velocidade $\vec{v}$ em termos dos vetores unitários e na notação módulo-ângulo?

IDÉIAS-CHAVE (1) As componentes horizontal e vertical da velocidade da balsa são independentes. (2) A componente v_x não muda em relação ao valor inicial $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, pois não existe uma aceleração horizontal. (3) A componente v_y muda em relação ao valor inicial $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$, pois existe uma aceleração vertical.

Cálculos: Quando a balsa atinge a água,

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = (55{,}0\text{ m/s})(\cos 0°) = 55{,}0\text{ m/s}.$$

Usando a Eq. 4-23 e o tempo de queda da balsa $t = 10{,}1$ s, descobrimos que quando a balsa atinge a água

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt \qquad (4\text{-}30)\\ &= (55{,}0\text{ m/s})(\operatorname{sen} 0°) - (9{,}8\text{ m/s}^2)(10{,}1\text{ s})\\ &= -99{,}0\text{ m/s}. \end{aligned}$$

Assim, no momento em que a balsa atinge a água, sua velocidade é

$$\vec{v} = (55{,}0\text{ m/s})\hat{i} - (99{,}0\text{ m/s})\hat{j}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Usando a Eq. 3-6 como guia, descobrimos que o módulo e o ângulo de $\vec{v}$ são

$$v = 113\text{ m/s} \quad \text{e} \quad \theta = -60{,}9°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 4-7

A Fig. 4-16 mostra um navio pirata a 560 m de um forte que protege a entrada de um porto. Um canhão de defesa, situado ao nível do mar, dispara balas com uma velocidade inicial $v_0 = 82$ m/s.

(a) Com que ângulo θ_0 em relação à horizontal as balas devem ser disparadas para acertar o navio?

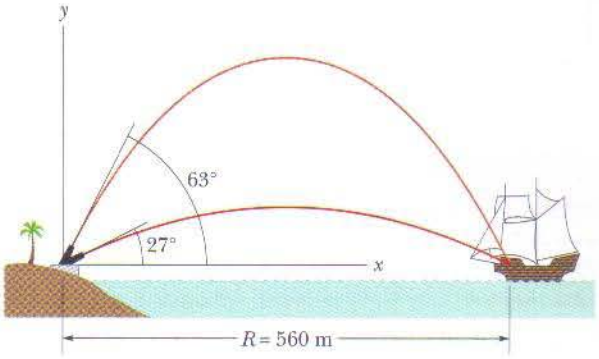


FIG. 4-16 Um navio pirata sendo atacado.

IDÉIAS-CHAVE (1) Uma bala disparada pelo canhão é um projétil. Estamos interessados em uma equação que relacione o ângulo de lançamento θ_0 ao deslocamento horizontal da bala entre o canhão e o navio. (2) Como o canhão e o navio estão na mesma altura, o deslocamento horizontal é igual ao alcance.

Cálculos: Podemos relacionar o ângulo de lançamento θ_0 ao alcance R através da Eq. 4-26, $R = (v_0^2/g)$ sen $2\theta_0$, que pode ser escrita na forma

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\,\text{sen}^{-1}\,\frac{gR}{v_0^2} = \frac{1}{2}\,\text{sen}^{-1}\,\frac{(9{,}8\ \text{m/s}^2)(560\ \text{m})}{(82\ \text{m/s})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\,\text{sen}^{-1}\,0{,}816. \qquad (4\text{-}31)$$

Uma solução de $\text{sen}^{-1}\,0{,}816$ (54,7°) é a fornecida pelas calculadoras; subtraindo-a de 180°, obtemos a outra solução (125,3°). Assim, a Eq. 4-31 nos dá

$$\theta_0 = 27° \quad \text{e} \quad \theta_0 = 63°. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o alcance máximo das balas de canhão?

Cálculos: Como vimos anteriormente, o alcance máximo corresponde a um ângulo de elevação θ_0 de 45°. Assim,

$$R = \frac{v_0^2}{g}\,\text{sen}\,2\theta_0 = \frac{(82\ \text{m/s})^2}{9{,}8\ \text{m/s}^2}\,\text{sen}\,(2 \times 45°)$$
$$= 686\ \text{m} \approx 690\ \text{m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Quando o navio pirata se afasta do porto, a diferença entre os dois ângulos de elevação que permitem acertar o navio diminui até que eles se tornam iguais entre si e iguais a $\theta = 45°$ quando o navio está a 690 m de distância. Para distâncias maiores é impossível acertar o navio.

Exemplo 4-8

Suponha que um jogador de beisebol B rebata uma bola na direção de um jogador F com uma velocidade inicial $v_0 = 40$ m/s e um ângulo inicial $\theta_0 = 35°$. Durante o trajeto da bola uma reta ligando o jogador F à posição da bola faz um ângulo ϕ com o solo. Faça um gráfico do ângulo de visada ϕ em função do tempo t, supondo (a) que o jogador F está na posição correta para apanhar a bola; (b) que o jogador está a 6,0 m de distância da posição correta, mais perto do jogador B; (c) está a 6,0 m de distância da posição correta, mais longe do batedor B.

IDÉIAS-CHAVE (1) Desprezando a resistência do ar, a bola é um projétil para o qual o movimento vertical e o movimento horizontal podem ser analisados separadamente. (2) Supondo que a bola é apanhada aproximadamente na mesma altura em que é rebatida, a distância horizontal percorrida pela bola é o alcance R, dado pela Eq. 4-26, $R = (v_0^2/g)$ sen $2\theta_0$.

Cálculos: A bola será apanhada se a distância entre o jogador F e o jogador B for igual ao alcance R da bola. De acordo com a Eq. 4-26, temos:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\,\text{sen}\,2\theta_0 = \frac{(40\ \text{m/s})^2}{9{,}8\ \text{m/s}^2}\,\text{sen}\,(70°) = 153{,}42\ \text{m}. \qquad (4\text{-}32)$$

A Fig. 4-17*a* mostra um instantâneo da bola quando ela se encontra a altura y e a uma distância horizontal x do jogador B (que está na origem). A distância horizontal entre a bola e o jogador F é $R - x$, e o ângulo de visada da bola, ϕ, do ponto de vista do jogador F, é dado por $\tan\phi = y/(R - x)$. Para calcular a altura y usamos a Eq. 4-22, $y - y_0 = (v_0\,\text{sen}\,\theta_0)t - gt^2/2$, fazendo $y_0 = 0$. Para calcular a distância horizontal x usamos a Eq. 4-21, $x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t$, fazendo $x_0 = 0$. Nesse caso, para $v_0 = 40$ m/s e $\theta_0 = 35°$, temos:

$$\phi = \tan^{-1}\,\frac{(40\,\text{sen}\,35°)t - 4{,}9t^2}{153{,}42 - (40\cos 35°)t}. \qquad (4\text{-}33)$$

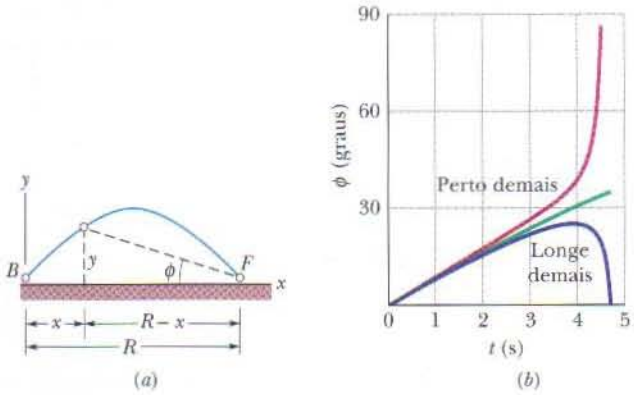


FIG. 4-17 (*a*) Ângulo de elevação ϕ de uma bola em relação a um jogador. (*b*) Gráfico de ϕ em função do tempo t.

A curva do meio da Fig. 4-17*b* é o gráfico desta função. Vemos que o ângulo de visada aumenta de forma quase linear durante todo o percurso da bola.

Se o jogador F está a 6,0 m de distância da posição correta, mais perto do jogador B, substituímos a distância de 153,42 m da Eq. 4-33 por 153,42 m − 6,0 m = 147,42 m. O gráfico da nova função é a curva "perto demais" da Fig. 4-17*b*. Nesse caso, o ângulo de visada da bola aumenta rapidamente na parte final do percurso, quando a bola passa sobre a cabeça do jogador. Se o jogador F está a 6,0 m de distância da posição correta, mais longe do jogador B, substituímos a distância de 153,42 m da Eq. 4-33 por 153,42 + 6,0 m = 159,42 m. O gráfico da nova função é a curva "longe demais" da Fig. 4-17*b*. Nesse caso, o ângulo de visada primeiro aumenta e depois diminui rapidamente. Assim, se a bola é rebatida na direção do jogador F, este é capaz de avaliar, pelo modo como o ângulo de visada ϕ varia com o tempo, se deve permanecer onde está, correr na direção do jogador B ou correr na direção oposta.

Exemplo 4-9 Aumente sua capacidade

Uma bola de golfe é lançada no instante $t = 0$, como mostra a Fig. 4-18*a*. A Fig. 4-18*b* mostra o ângulo θ entre a direção do movimento da bola e o semi-eixo x positivo em função do tempo t. A bola se choca com o solo no instante $t = 6{,}00$ s. Determine o módulo v_0 da velocidade de lançamento da bola, a altura $(y - y_0)$ do ponto em que a bola atinge o solo em relação ao ponto de lançamento e a direção do movimento da bola no momento em que atinge o solo.

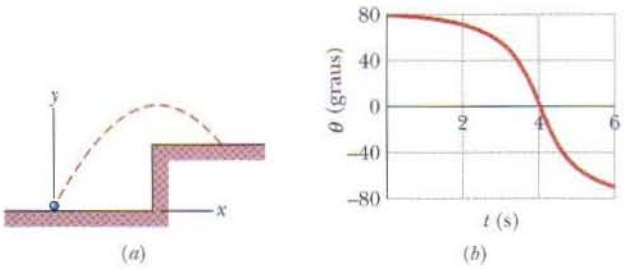


FIG. 4-18 (*a*) Trajetória de uma bola de golfe lançada em um terreno mais elevado. (*b*) Gráfico do ângulo θ entre a direção do movimento da bola e o semi-eixo x positivo em função do tempo t.

IDÉIAS-CHAVE (1) Como a bala se comporta como um projétil, as componentes horizontal e vertical do movimento podem ser analisadas separadamente. (2) A componente horizontal do movimento da bola, $v_x = v_0 \cos \theta_0$, não varia com o tempo. (3) A componente vertical do movimento da bola, v_y, *varia* com o tempo e se anula quando a bola atinge a altura máxima. (4) A direção do movimento da bola em qualquer instante é o ângulo do vetor velocidade $\vec{v}$ nesse instante. Esse ângulo é dado por $\tan \theta = v_x/v_y$, com as componentes da velocidade calculadas para esse instante.

Cálculos: Quando a bola atinge a altura máxima, $v_y = 0$. Assim, a direção da velocidade $\vec{v}$ é horizontal, ou seja, $\theta = 0°$. Observando o gráfico, vemos que isso acontece no instante $t = 0{,}4$ s. Vemos também que o ângulo de lançamento θ_0 (o ângulo no instante $t = 0$) é 80°. Usando a Eq. 4-23, $v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt$, com $t = 4{,}0$ s, $g = 9{,}8$ m/s² e $v_y = 0$, obtemos

$$v_0 = 39{,}80 \approx 40 \text{ m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

A bola se choca com o solo no instante $t = 6{,}00$ s. Usando a Eq. 4-22, $y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - gt^2/2$, com $t = 6{,}00$ s, obtemos

$$y - y_0 = 58{,}77 \text{ m} \approx 59 \text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

No momento em que a bola se choca com o solo, sua velocidade horizontal v_x ainda é $v_0 \cos \theta_0$; substituindo v_0 e θ_0 por seus valores, obtemos $v_x = 6{,}911$ m/s. Para determinar a velocidade vertical nesse instante usamos a Eq. 4-23, $v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt$, com $t = 6{,}00$ s, o que nos dá $v_y = -19{,}60$ m/s. Assim, o ângulo da direção do movimento da bola com a horizontal no momento em que se choca com o solo é

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \frac{-19{,}60 \text{ m/s}}{6{,}911 \text{ m/s}} \approx -71°. \qquad \text{(Resposta)}$$

4-7 | Movimento Circular Uniforme

Uma partícula está em **movimento circular uniforme** se descreve uma circunferência ou um arco de circunferência com velocidade escalar constante (*uniforme*). Embora a velocidade escalar não varie, *o movimento é acelerado* porque a velocidade muda de direção.

A Fig. 4-19 mostra a relação entre os vetores velocidade e aceleração em várias posições durante o movimento circular uniforme. O módulo dos dois vetores permanece constante durante o movimento, mas a orientação varia continuamente. A velocidade está sempre na direção tangente à circunferência e tem o mesmo sentido que o movimento. A aceleração está sempre na direção *radial* e aponta para o centro do círculo. Por essa razão, a aceleração associada ao movimento circular uniforme é chamada de **aceleração centrípeta** ("que busca o centro"). Como será demonstrado a seguir, o módulo dessa aceleração $\vec{a}$ é

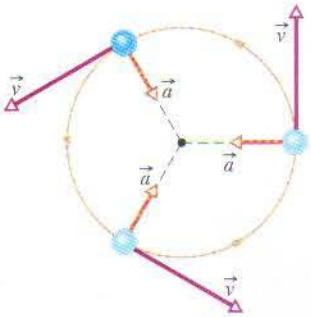


FIG. 4-19 Os vetores velocidade e aceleração de uma partícula em movimento circular uniforme.

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad \text{(aceleração centrípeta)}, \tag{4-34}$$

onde r é o raio da circunferência e v é a velocidade da partícula.

Durante essa aceleração com velocidade escalar constante a partícula percorre a circunferência completa (uma distância igual a $2\pi r$) em um intervalo de tempo dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v} \qquad \text{(período)}. \tag{4-35}$$

O parâmetro T é chamado de *período de revolução* ou, simplesmente, *período*. No caso mais geral o período é o tempo que uma partícula leva para completar uma volta em uma trajetória fechada.

Demonstração da Eq. 4-34

Para determinar o módulo e a orientação da aceleração no caso do movimento circular uniforme, considere a Fig. 4-20. Na Fig. 4-20*a* a partícula p se move com velocidade escalar constante v enquanto percorre uma circunferência de raio r. No instante mostrado, p possui coordenadas x_p e y_p.

Como vimos na Seção 4-3, a velocidade $\vec{v}$ de uma partícula em movimento é sempre tangente à trajetória da partícula na posição considerada. Na Fig. 4-20*a* isso significa que $\vec{v}$ é perpendicular a uma reta r que liga o centro da circunferência à posição da partícula. Nesse caso, o ângulo θ que $\vec{v}$ faz com uma reta vertical passando pelo ponto p é igual ao ângulo θ que o raio r faz com o eixo x.

As componentes escalares de $\vec{v}$ aparecem na Fig. 4-20*b*. Em termos dessas componentes, a velocidade $\vec{v}$ pode ser escrita na forma

$$\vec{v} = v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} = (-v \operatorname{sen}\theta)\hat{\mathrm{i}} + (v\cos\theta)\hat{\mathrm{j}}. \tag{4-36}$$

Usando o triângulo retângulo da Fig. 4-20*a*, podemos substituir sen θ por y_p/r e cos θ por x_p/r e escrever

$$\vec{v} = \left(-\frac{vy_p}{r}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(\frac{vx_p}{r}\right)\hat{\mathrm{j}}. \tag{4-37}$$

Para determinar a aceleração $\vec{a}$ da partícula p devemos calcular a derivada dessa equação em relação ao tempo. Observando que a velocidade escalar v e o raio r não variam com o tempo, obtemos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_p}{dt}\right)\hat{\mathrm{j}}. \tag{4-38}$$

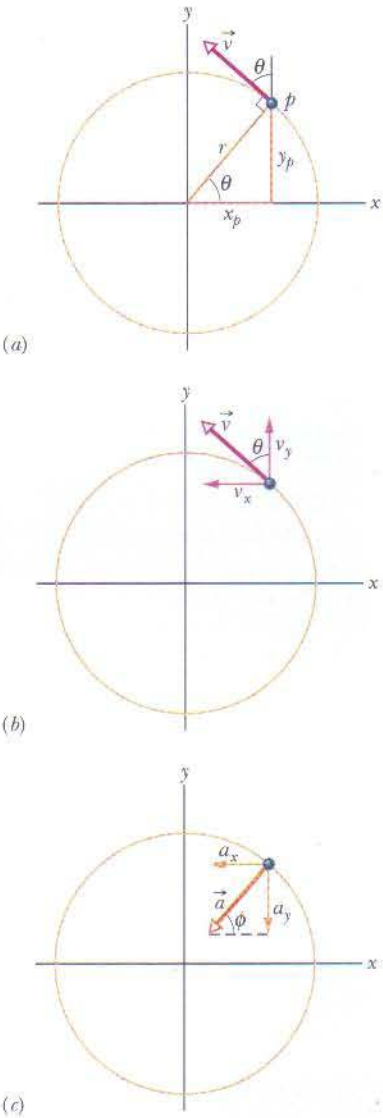


FIG. 4-20 Uma partícula p em movimento circular uniforme no sentido anti-horário. (*a*) Posição e velocidade $\vec{v}$ da partícula em um certo instante de tempo. (*b*) Velocidade $\vec{v}$. (*c*) Aceleração $\vec{a}$.

Note que a taxa de variação com o tempo de y_p, dy_p/dt, é igual à componente y da velocidade, v_y. Analogamente, $dx_p/dt = v_x$, e, novamente de acordo com a Fig. 4-20*b*, $v_x = -v \operatorname{sen} \theta$ e $v_y = v \cos \theta$. Fazendo essas substituições na Eq. 4-38, encontramos

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(-\frac{v^2}{r}\operatorname{sen}\theta\right)\hat{\mathrm{j}}. \tag{4-39}$$

Este vetor e suas componentes aparecem na Fig. 4-20*c*. De acordo com a Eq. 3-6, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{(\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{1} = \frac{v^2}{r},$$

como queríamos demonstrar. Para determinar a orientação de $\vec{a}$, calculamos o ângulo ϕ da Fig. 4-20*c*:

$$\tan\phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r)\operatorname{sen}\theta}{-(v^2/r)\cos\theta} = \tan\theta.$$

Assim, $\phi = \theta$, o que significa que $\vec{a}$ aponta na direção do raio r da Fig. 4-20*a*, no sentido do cento da circunferência, como queríamos demonstrar.

TESTE 5 Um objeto se move com velocidade escalar constante, ao longo de uma trajetória circular, em um plano xy horizontal com centro na origem. Quando o objeto está em $x = -2$ m sua velocidade é $-(4\text{ m/s})\hat{\mathrm{j}}$. Determine (a) a velocidade e (b) a aceleração do objeto em $y = 2$ m.

Exemplo 4-10

Os pilotos de caça se preocupam quando têm que fazer curvas muito fechadas. Como o corpo do piloto fica submetido à aceleração centrípeta, com a cabeça mais próxima do centro de curvatura, a pressão sanguínea no cérebro diminui, o que pode levar à perda das funções cerebrais.

Os sinais de perigo são vários. Quando a aceleração centrípeta é de $2g$ ou $3g$, o piloto se sente pesado. Por volta de $4g$ a visão do piloto passa para preto e branco e se reduz à "visão de túnel". Se a aceleração é mantida ou aumentada o piloto deixa de enxergar e, logo depois, perde a consciência, uma situação conhecida como g-LOC, da expressão em inglês "g-induced loss of consciousness", ou seja, "perda de consciência induzida por g".

Qual é o módulo da aceleração, em unidades de g, para um piloto cuja aeronave inicia uma curva horizontal com uma velocidade $\vec{v}_i = (400\hat{\mathrm{i}} + 500\hat{\mathrm{j}})$ m/s e, 24,0 s mais tarde, termina a curva com uma velocidade $\vec{v}_f = (400\hat{\mathrm{i}} + 500\hat{\mathrm{j}})$ m/s?

IDÉIAS-CHAVE Supomos que o avião executa a curva com um movimento circular uniforme. Nesse caso, o módulo da aceleração centrípeta é dado pela Eq. 4-34 ($a = v^2/R$), onde R é o raio da curva. O tempo necessário para descrever uma circunferência completa é o período dado pela Eq. 4-35 ($T = 2\pi R/v$).

Cálculos: Como não conhecemos o raio R, vamos explicitar R na Eq. 4-35 e substituí-lo pelo seu valor na Eq. 4-34. O resultado é o seguinte:

$$a = \frac{2\pi v}{T}.$$

Nesta equação, v é o módulo (constante) da velocidade durante a curva. Vamos substituir as componentes da velocidade inicial na Eq. 3-6:

$$v = \sqrt{(400\text{ m/s})^2 + (500\text{ m/s})^2} = 640{,}31\text{ m/s}.$$

Para determinar o período T do movimento, observamos que a velocidade final é igual ao negativo da velocidade inicial. Isso significa que a aeronave termina a curva no lado oposto da circunferência e completou metade de uma circunferência em 24,0 s. Assim, levaria $T = 48{,}0$ s para descrever uma circunferência completa. Substituindo esses valores na equação de a, obtemos

$$a = \frac{2\pi(640{,}31\text{ m/s})}{48{,}0\text{ s}} = 83{,}81\text{ m/s}^2 \approx 8{,}6g. \quad \text{(Resposta)}$$

4-8 | Movimento Relativo em Uma Dimensão

Suponha que você veja um pato voando para o norte a 30 km/h. Para um outro pato voando ao lado do primeiro este parece estar parado. Em outras palavras, a velocidade de uma partícula depende do **referencial** de quem está observando ou medindo a velocidade. Para os nossos propósitos um referencial é um objeto físico ao qual fixamos nosso sistema de coordenadas. No dia-a-dia esse objeto é freqüentemente o solo. Assim, por exemplo, a velocidade que aparece em uma multa de trânsito é a velocidade em relação ao solo. A velocidade em relação ao guarda de trânsito será diferente se o guarda estiver em movimento enquanto mede a velocidade.

Suponha que Alexandre (situado na origem do referencial A da Fig. 4-21) está estacionado no acostamento de uma auto-estrada, observando o carro P (a "partícula") passar. Bárbara (situada na origem do referencial B) está dirigindo um carro na auto-estrada com velocidade constante e também observa o carro P. Suponha que os dois meçam a posição do carro em um dado momento. De acordo com a Fig. 4-21, temos:

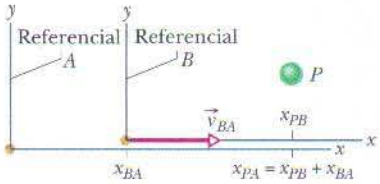


FIG. 4-21 Alexandre (referencial A) e Bárbara (referencial B) observam o carro P, enquanto B e P se movem com velocidades diferentes ao longo do eixo x comum aos dois referenciais. No instante mostrado, x_{BA} é a coordenada de B no referencial A. A coordenada de P é x_{PB} no referencial B e $x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$ no referencial A.

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}. \tag{4-40}$$

Essa equação significa o seguinte: "A coordenada x_{PA} de P medida por A é *igual* à coordenada x_{PB} de P medida por B *mais* a coordenada x_{BA} de B medida por A". Observe que esta leitura está de acordo com a ordem em que os índices foram usados.

Derivando a Eq. 4-40 em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d}{dt}(x_{PA}) = \frac{d}{dt}(x_{PB}) + \frac{d}{dt}(x_{BA}).$$

Assim, as componentes da velocidade estão relacionadas através da equação

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}. \tag{4-41}$$

Esta equação significa o seguinte: "A velocidade v_{PA} de P medida por A é *igual* à velocidade v_{PB} de P medida por B *mais* a velocidade v_{BA} de B medida por A". O termo v_{BA} é a velocidade do referencial B em relação ao referencial A.

Neste capítulo estamos considerando apenas referenciais que se movem com velocidade constante uns em relação aos outros. Em nosso exemplo isso significa que Bárbara (referencial B) dirige sempre com velocidade constante v_{BA} em relação a Alexandre (referencial A). Esta restrição não vale para o carro P (a partícula em movimento), cuja velocidade pode mudar de módulo e direção (ou seja, a partícula pode sofrer uma aceleração).

Para relacionar as acelerações de P medidas por Bárbara e por Alexandre em um mesmo instante, calculamos a derivada da Eq. 4-41 em relação ao tempo:

$$\frac{d}{dt}(v_{PA}) = \frac{d}{dt}(v_{PB}) + \frac{d}{dt}(v_{BA}).$$

Como v_{BA} é constante, o último termo é zero e temos

$$a_{PA} = a_{PB}. \tag{4-42}$$

Em outras palavras,

A aceleração de uma partícula medida por observadores em diferentes referenciais que se movem com velocidade constante uns em relação aos outros é sempre a mesma.

Exemplo 4-11

Na Fig. 4-21, suponha que a velocidade de Bárbara em relação a Alexandre é $v_{BA} = 52$ km/h (constante) e que o carro P está se movendo no sentido negativo do eixo x.

(a) Se Alexandre mede uma velocidade constante $v_{PA} = -78$ km/h para o carro P, qual é a velocidade v_{PB} medida por Bárbara?

IDÉIAS-CHAVE Podemos associar um referencial A a Alexandre e um referencial B a Bárbara. Como os dois referenciais se movem com velocidade constante um em relação ao outro ao longo do eixo x, podemos usar a Eq. 4-41 ($v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$) para relacionar v_{PB} a v_{PA} e v_{BA}.

Cálculo: Temos

$$-78 \text{ km/h} = v_{PB} + 52 \text{ km/h}.$$

Assim,

$$v_{PB} = -130 \text{ km/h}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentário: Se o carro P estivesse ligado ao carro de Bárbara por um fio flexível enrolado em uma bobina, o fio se desenrolaria a uma velocidade de 130 km/h enquanto os dois carros estivessem se separando.

(b) Se o carro P freia até parar em relação a Alexandre (e, portanto, em relação ao solo) no instante $t = 10$ s, com uma aceleração constante, qual é a sua aceleração a_{PA} em relação a Alexandre?

IDÉIAS-CHAVE Para calcular a aceleração do carro P *em relação a Alexandre* devemos usar as velocidades do carro *em relação a Alexandre*. Como a aceleração é constante, podemos usar a Eq. 2-11 ($v = v_0 + at$) para relacionar a aceleração às velocidades inicial e final de P.

Cálculo: A velocidade inicial de P em relação a Alexandre é $v_{PA} = -78$ km/h, enquanto a velocidade final é 0. Assim,

$$a_{PA} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-78 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} \frac{1 \text{ m/s}}{3{,}6 \text{ km/h}}$$
$$= 2{,}2 \text{ m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a aceleração a_{PB} do carro P em relação a Bárbara durante a frenagem?

IDÉIA-CHAVE Para calcular a aceleração do carro P *em relação a Bárbara* devemos usar as velocidades do carro *em relação a Bárbara*.

Cálculo: A velocidade inicial de P em relação a Bárbara foi determinada no item (a) ($v_{PB} = -130$ km/h). A velocidade final de P em relação a Bárbara é -52 km/h (esta é a velocidade do carro parado em relação ao carro de Bárbara). Assim,

$$a_{PB} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{-52 \text{ km/h} - (-130 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} \frac{1 \text{ m/s}}{3{,}6 \text{ km/h}}$$
$$= 2{,}2 \text{ m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentário: Poderíamos prever este resultado. Como Alexandre e Bárbara estão se movendo com velocidade constante um em relação ao outro, a aceleração do carro P medida pelos dois deve ser a mesma.

4-9 | Movimento Relativo em Duas Dimensões

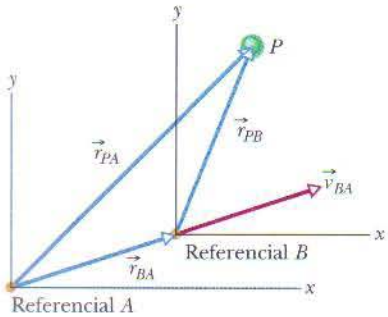


FIG. 4-22 O referencial B possui uma velocidade bidimensional constante $\vec{v}_{BA}$ em relação ao referencial A. O vetor posição de B em relação a A é $\vec{r}_{BA}$. Os vetores posições da partícula P são $\vec{r}_{PA}$ em relação a A e $\vec{r}_{PB}$ em relação a B.

Nossos dois amigos estão novamente observando o movimento de uma partícula P a partir da origem dos referenciais A e B, enquanto B se move com velocidade constante $\vec{v}_{BA}$ em relação a A. (Os eixos correspondentes destes dois sistemas de coordenadas permanecem paralelos.) A Fig. 4-22 mostra um certo instante durante o movimento. Nesse instante o vetor posição da origem de B em relação à origem de A é $\vec{r}_{BA}$. Os vetores posição da partícula P são $\vec{r}_{PA}$ em relação à origem de A e $\vec{r}_{PB}$ em relação à origem de B. A posição das origens e extremidades desses três vetores mostra que estão relacionados através da equação

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}. \qquad (4\text{-}43)$$

Derivando essa equação em relação ao tempo, encontramos uma equação que envolve as velocidades $\vec{v}_{PA}$ e $\vec{v}_{PB}$ da partícula P em relação aos nossos observadores:

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}. \qquad (4\text{-}44)$$

Derivando essa equação em relação ao tempo, obtemos uma equação que envolve as acelerações $\vec{a}_{PA}$ e $\vec{a}_{PB}$ da partícula P em relação aos nossos observadores. Note, porém, que, como $\vec{v}_{BA}$ é constante, sua derivada é zero. Assim, obtemos

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}. \tag{4-45}$$

Como para o movimento unidimensional, temos a seguinte regra: A aceleração de uma partícula medida por observadores em diferentes referenciais que se movem com velocidade constante uns em relação aos outros é sempre a mesma.

Exemplo 4-12

Na Fig. 4-23*a* um avião se move para leste enquanto o piloto direciona o avião ligeiramente ao sul do leste, para compensar um vento constante que sopra para nordeste. O avião tem uma velocidade $\vec{v}_{AV}$ em relação ao vento, com uma velocidade do ar (velocidade escalar em relação ao vento) de 215 km/h e uma orientação que faz um ângulo θ ao sul do leste. O vento tem uma velocidade $\vec{v}_{VS}$ em relação ao solo, com uma velocidade escalar de 65,0 km/h e uma orientação que faz um ângulo de 20° a leste do norte. Qual é o módulo da velocidade $\vec{v}_{AS}$ do avião em relação ao solo e qual é o valor de θ?

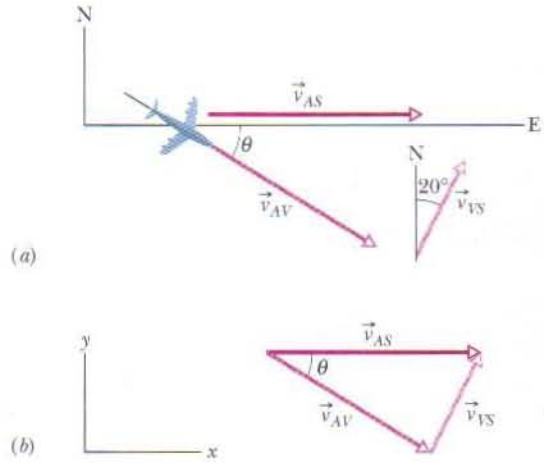


FIG. 4-23 Efeito do vento sobre um avião.

IDÉIAS-CHAVE A situação é semelhante à da Fig. 4-22. Neste caso, a partícula P é o avião, o referencial A está associado ao solo (que chamaremos de S) e o referencial B está associado ao vento (que chamaremos de V). Precisamos construir um diagrama vetorial semelhante ao da Fig. 4-22, mas dessa vez usando os três vetores velocidade.

Cálculos: Primeiro, escrevemos uma frase que expressa uma relação entre os três vetores da Fig. 4-23*b*:

velocidade do avião em relação ao solo (AS)	=	velocidade do avião em relação ao vento (AV)	+	velocidade do vento em relação ao solo (VS)

Em notação vetorial, essa relação se torna

$$\vec{v}_{AS} = \vec{v}_{AV} + \vec{v}_{VS}. \tag{4-46}$$

Podemos determinar as componentes dos vetores no sistema de coordenadas da Fig. 4-23*b* e resolver a Eq. 4-46 eixo por eixo. No caso das componentes y, temos:

$$v_{AS,y} = v_{AV,y} + v_{VS,y}$$

ou $0 = -(215 \text{ km/h}) \operatorname{sen} \theta + (65{,}0 \text{ km/h})(\cos 20{,}0°)$.

Explicitando θ, obtemos

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{(65{,}0 \text{ km/h})(\cos 20{,}0°)}{215 \text{ km/h}} = 16{,}5°. \quad \text{(Resposta)}$$

No caso das componentes x, temos:

$$v_{AS,x} = v_{AV,x} + v_{VS,x}.$$

Como $\vec{v}_{AS}$ é paralela ao eixo x, a componente $v_{AS,x}$ é igual ao módulo v_{AS} do vetor. Substituindo $v_{AS,x}$ por v_{AS} e fazendo $\theta = 16{,}5°$, obtemos

$$v_{AS} = (215 \text{ km/h})(\cos 16{,}5°) + (65{,}0 \text{ km/h})(\operatorname{sen} 20{,}0°)$$
$$= 228 \text{ km/h}. \quad \text{(Resposta)}$$

REVISÃO E RESUMO

Vetor Posição A localização de uma partícula em relação à origem de um sistema de coordenadas é dada por um *vetor posição* $\vec{r}$, que em termos dos vetores unitários assume a forma

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \tag{4-1}$$

onde $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ e $z\hat{k}$ são as componentes vetoriais do vetor posição $\vec{r}$ e x, y e z são as componentes escalares (e também as coordenadas da partícula). Um vetor posição pode ser descrito por um módulo e um ou dois ângulos, pelas componentes vetoriais ou pelas componentes escalares.

Deslocamento Se uma partícula se move de tal forma que seu vetor posição muda de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$, o deslocamento $\Delta\vec{r}$ da partícula é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{4-2}$$

O deslocamento também pode ser escrito na forma

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \tag{4-3}$$
$$= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}. \tag{4-4}$$

Velocidade Média e Velocidade Instantânea Se uma partícula sofre um deslocamento $\Delta\vec{r}$ em um intervalo de tempo Δt, sua velocidade média $\vec{v}_{\text{méd}}$ nesse intervalo de tempo é dada por

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{4-8}$$

Quando Δt na Eq. 4-8 tende a 0, $\vec{v}_{\text{méd}}$ tende para um limite $\vec{v}$ que é chamado de *velocidade instantânea* ou, simplesmente, *velocidade*:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{4-10}$$

Em termos dos vetores unitários, a velocidade instantânea assume a forma

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}, \tag{4-11}$$

onde $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ e $v_z = dz/dt$. A velocidade instantânea $\vec{v}$ de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula na posição da partícula.

Aceleração Média e Aceleração Instantânea Se a velocidade de uma partícula varia de $\vec{v}_1$ para $\vec{v}_2$ no intervalo de tempo Δt, sua *aceleração média* durante o intervalo Δt é

$$\vec{a}_{\text{méd}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{4-15}$$

Quando Δt na Eq. 4-15 tende a zero, $\vec{a}_{\text{méd}}$ tende para um limite $\vec{a}$ que é chamado de *aceleração instantânea* ou, simplesmente, *aceleração*:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{4-16}$$

Na notação de vetores unitários,

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \tag{4-17}$$

onde $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$ e $a_z = dv_z/dt$.

Movimento de Projéteis *Movimento balístico* é o movimento de uma partícula que é lançada com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$. Durante o percurso a aceleração horizontal da partícula é zero e a aceleração vertical é a aceleração de queda livre, $-g$. (A orientação para cima é escolhida como sentido positivo.) Se $\vec{v}_0$ é expressa através de um módulo (a velocidade escalar v_0) e um ângulo θ_0 (medido em relação à horizontal), as equações de movimento da partícula ao longo do eixo horizontal x e do eixo vertical y são

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t, \tag{4-21}$$

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \tag{4-22}$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt, \tag{4-23}$$

$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4-24}$$

A **trajetória** de uma partícula em movimento balístico é parabólica e é dada por

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2}, \tag{4-25}$$

se x_0 e y_0 das Eqs. (4-21), (4-22) e (4-24) forem nulos. O **alcance horizontal** R da partícula, que é a distância horizontal do ponto de lançamento ao ponto em que a partícula retorna à altura do ponto de lançamento, é dado por

$$R = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen} 2\theta_0. \tag{4-26}$$

Movimento Circular Uniforme Se uma partícula descreve uma circunferência ou arco de circunferência de raio r com velocidade constante v, dizemos que está em *movimento circular uniforme*. Nesse caso, a partícula possui uma aceleração $\vec{a}$ cujo módulo é dado por

$$a = \frac{v^2}{r}. \tag{4-34}$$

O vetor $\vec{a}$ aponta sempre para o centro da circunferência ou arco de circunferência, e é chamado de *aceleração centrípeta*. O tempo que a partícula leva para descrever uma circunferência completa é dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \tag{4-35}$$

O parâmetro T é chamado de *período de revolução* ou, simplesmente, *período*.

Movimento Relativo Quando dois referenciais A e B estão se movendo um em relação ao outro com velocidade constante, a velocidade de uma partícula P, medida por um observador do referencial A, é em geral diferente da velocidade medida por um observador do referencial B. As duas velocidades medidas estão relacionadas através da equação

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}, \tag{4-44}$$

onde $\vec{v}_{BA}$ é a velocidade de B em relação a A. Os dois observadores medem a mesma aceleração:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}. \tag{4-45}$$

PERGUNTAS

1 A Fig. 4-24 mostra a posição inicial i e a posição final f de uma partícula. Determine (a) o vetor posição inicial $\vec{r}_i$ e (b) o vetor posição final $\vec{r}_f$ da partícula, ambos na notação de vetores unitários. (c) Qual é a componente x do deslocamento $\Delta\vec{r}$?

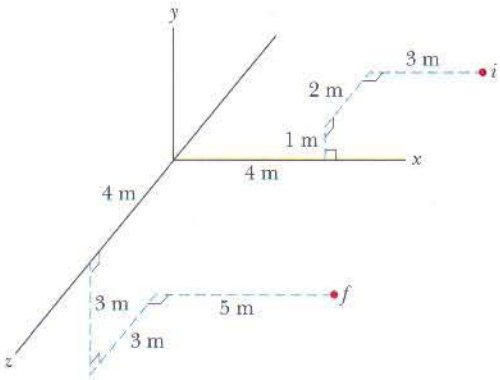


FIG. 4-24 Pergunta 1.

2 A Fig. 4-25 mostra o caminho seguido por um gambá à procura de comida no lixo, a partir do ponto inicial i. O gambá levou o mesmo tempo T para ir de cada um dos pontos marcados até o ponto seguinte. Ordene os pontos a, b e c de acordo com o módulo da velocidade média do gambá para alcançá-los a partir do ponto inicial i, começando pelo maior.

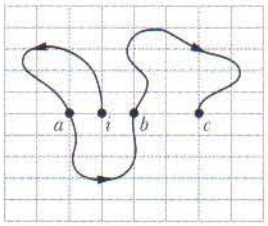


FIG. 4-25 Pergunta 2.

3 Você tem que lançar um foguete, praticamente do nível do solo, com uma das velocidades iniciais especificadas pelos seguintes vetores: (1) $\vec{v}_0 = 20\hat{i} + 70\hat{j}$; (2) $\vec{v}_0 = -20\hat{i} + 70\hat{j}$; (3) $\vec{v}_0 = 20\hat{i} - 70\hat{j}$; (4) $\vec{v}_0 = -20\hat{i} - 70\hat{j}$. No seu sistema de coordenadas, x varia ao longo do nível do solo e y cresce para cima. (a) Ordene os vetores de acordo com o módulo da velocidade de lançamento do projétil, começando pelo maior. (b) Ordene os vetores de acordo com o tempo de vôo do projétil, começando pelo maior.

4 A Fig. 4-26 mostra três situações nas quais projéteis idênticos são lançados do solo (a partir do mesmo nível) com velocidades escalares e ângulos iguais. Entretanto, os projéteis não caem no mesmo terreno. Ordene as situações de acordo com as velocidades escalares finais dos projéteis imediatamente antes de aterrissarem, começando pela maior.

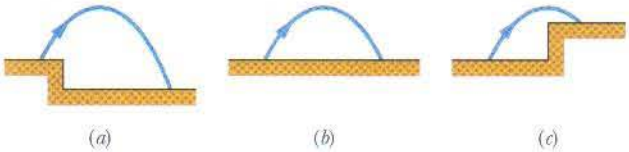


FIG. 4-26 Pergunta 4.

5 Quando Paris foi bombardeada a mais de 100 km de distância na Primeira Guerra Mundial por um canhão apelidado de "Big Bertha", os projéteis foram lançados com um ângulo maior que 45° para atingirem uma distância maior, possivelmente até duas vezes maior que a 45°. Este resultado significa que a densidade do ar em grandes altitudes aumenta ou diminui com a altitude?

6 Na Fig. 4-27, uma tangerina é arremessada para cima e passa pelas janelas 1, 2 e 3, que têm o mesmo tamanho e estão regularmente espaçadas na vertical. Ordene essas três janelas de acordo (a) com o tempo que a tangerina leva para passar e (b) com a velocidade média da tangerina durante a passagem, em ordem decrescente.

Na descida a tangerina passa pelas janelas 4, 5 e 6, que têm o mesmo tamanho e não estão regularmente espaçadas na horizontal. Ordene essas três janelas de acordo (c) com o tempo que a tangerina leva para passar por elas e (d) com a velocidade média da tangerina durante a passagem, em ordem decrescente.

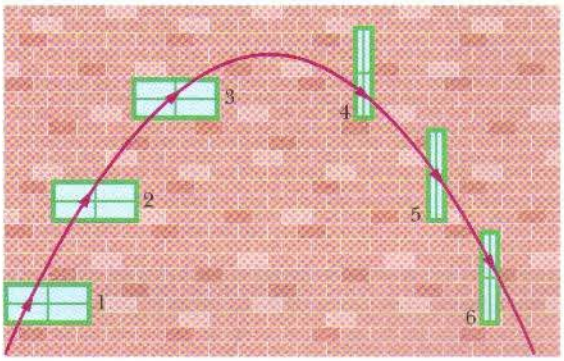


FIG. 4-27 Pergunta 6.

7 A Fig. 4-28 mostra três trajetórias de uma bola de futebol chutada a partir do chão. Ignorando os efeitos do ar, ordene as trajetórias de acordo (a) com o tempo de percurso, (b) com a componente vertical da velocidade inicial, (c) com a componente horizontal da velocidade inicial e (d) com a velocidade escalar inicial, em ordem decrescente.

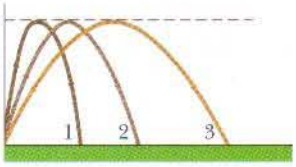


FIG. 4-28 Pergunta 7.

8 O único uso decente de um bolo de frutas é na prática da catapulta. A curva 1 na Fig. 4-29 mostra a altura y de um bolo de frutas arremessado por uma catapulta em função do ângulo θ entre o vetor velocidade e o vetor aceleração durante o percurso. (a) Qual dos pontos assinalados por letras nessa curva corresponde ao choque do bolo de frutas com o solo? (b) A curva 2 é um gráfico semelhante para a mesma velocidade escalar inicial, mas um ângulo de lançamento diferente. Nesse caso, o bolo de frutas vai cair em um ponto mais distante ou mais próximo do ponto de lançamento?

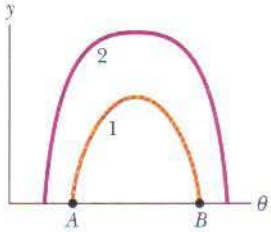


FIG. 4-29 Pergunta 8.