



## POLIEDROS ESTRELADOS: O ESTUDO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS ALÉM DOS LIVROS DIDÁTICOS

Rafael Telma de Lima  
Programa “LICENCIAR”  
UFPR – Departamento de Expressão Gráfica  
rafaelzinho\_tl@hotmail.com

Adriana Augusta Benigno dos Santos Luz  
UFPR – Departamento de Expressão Gráfica  
driu@ufpr.br

Anderson Roges Teixeira Góes  
UFPR – Departamento de Expressão Gráfica; e  
Secretaria de Educação do Município de Araucária/Pr  
artgoes@ufpr.br

### Resumo

Este trabalho de pesquisa é desenvolvido por professores do Departamento de Expressão Gráfica e alunos do curso de Licenciatura em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, no programa Licenciar, projeto: “Deixe-me pensar: uma abordagem filosófica para o ensino da Geometria na disciplina de Matemática nas escolas da rede pública”. Várias mudanças metodológicas são apontadas como tendências no processo de ensino e aprendizagem na busca de privilegiar a participação do aluno. Para despertar o interesse e a busca pelo saber matemático, o indivíduo deve questionar, ser curioso e vivenciar diferentes perspectivas de aprendizagem, tendo assim a oportunidade de descobrir, por meio de ação inventiva e criativa, as possíveis respostas. Nesta perspectiva, foi desenvolvido este trabalho com os sólidos de Kepler-Poinsot, conhecidos como “poliedros estrelados”, gerando novos conceitos que estão além dos apresentados nos livros didáticos. Com isso, conseguimos um olhar mais crítico por parte do estudante para assuntos da geometria presentes nestes sólidos, que até então eram vistos em um horizonte abstrato, sem conexão prática ligada ao contexto real do dia a dia.

**Palavras-chave:** poliedros estrelados, geometria, expressão gráfica.

## Abstract

This research is developed by professors of the Department of Graphic Expression and students of the Bachelor's Degree in Mathematics, Department of Exact Sciences, Federal University of Parana, program licensing, project: "Let me think: a philosophical approach to teaching Geometry in mathematics in public schools. "Several methodological changes are discussed as trends in the teaching and learning in the pursuit of promoting student participation. To wake interest and the pursuit of mathematical knowledge, one should ask, be curious and to experience different perspectives, thus having the opportunity to discover, through creative and inventive action, the possible answers. In this perspective, this work was developed with the Kepler-Poinsot solids, known as a "polyhedra starry", generating new concepts that are beyond those presented in the textbooks. With that, we got a more critical by the student to the issues present in these solid geometry, which until then were seen in an abstract horizon, no practical connection linked to the real context of everyday life.

**Keywords:** stellate polyhedra, geometry, graphic expression.

## 1 Introdução

Desde a infância nos deparamos com situações que lembram noções de espaço e forma dos objetos. Desta maneira vamos adquirindo conhecimentos sobre geometria, que é a ciência da prática diária. O simples ato de atravessar uma rua está relacionado aos conhecimentos básicos da geometria. Esta tem por objetivo analisar, sistematizar e organizar o conhecimento espacial destacando a beleza das formas está presentes na natureza do próprio espaço geográfico que nos circunda.

Sua importância foi reconhecida e destacada nos parâmetros curriculares nacionais, como segue:

A geometria constitui a parte mais importante do currículo matemático do aluno, pois através do estudo, o aluno desenvolve um pensamento espacial, que possibilitará a compreensão do mundo onde vivemos. São estas idéias as principais norteadoras da presente abordagem. (BRASIL, p. 57, 1998)

Os Sólidos Estrelados que não estão presentes nas propostas oficiais de ensino e nem nos livros didáticos, despertam um grande interesse para o trabalho em sala de aula pela sua beleza estética e magnitude conceitual. Portanto, este trabalho com a geometria, levando os sólidos de Kepler-Poinsot proporcionou o desenvolvimento de habilidades como representar e argumentar, além de investigar, imaginar e criar, de

modo a romper com a perspectiva axiomática e com a descoberta de fórmulas, tão comumente utilizadas e apresentadas no método tradicional de ensino.

Não temo dizer que inexistem validade no ensino em que não resulta um aprendizado em que aprendiz não se tornou capaz de recriar ou de refazer o ensinado. (...) nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da realidade do saber ensinado. (...) Percebe-se, assim, que faz parte da tarefa docente não apenas ensinar conteúdos mas também ensinar a pensar certo. (Freire, 1998, 26-29)

A ciência está em constante movimento. A dúvida, a pesquisa e a experimentação devem ser estimuladas em sala de aula para que os alunos compreendam que os conhecimentos matemáticos foram construídos por pessoas comuns e para que se sintam capazes de produzir novos conhecimentos. O educador também necessita de diferentes materiais para criação de situações pedagógicas desafiadoras.

Nesta perspectiva este artigo trata da teorização a cerca dos Poliedros Estrelados e o desenvolvimento de uma metodologia para a abordagem deste conhecimento com os estudantes das séries finais do ensino fundamental os agentes principais da aprendizagem.

## **2 Revisão bibliográfica**

Ensinar a geometria hoje implica repensar o próprio currículo e as finalidades do ensino da matemática. O Ensino da Matemática deve ser primordial, pois esta ciência faz parte do patrimônio cultural importante na organização da nossa sociedade. Depois de anos em que a geometria ficou a mercê do ensino da matemática, agora ela se mostra como caminho para interpretar e intervir no espaço em que vivemos.

Os antigos filósofos aceitavam a declaração de seus eminentes colegas segundo a qual Deus geometrizou no início da criação (LUZ, 2004). Já Lewis (2001), explica que ao pesquisarmos a origem e operação da lei natural e espiritual, descobrimos cada vez mais que todo o esquema do universo, bem como o esquema individual de cada elemento do universo, opera e se manifesta de acordo com os princípios da geometria. O autor explica:

Deus, assim, é o grande Arquiteto e Matemático; o complexo mapa dos movimentos e desenhos geométricos da ação e existência de todas as coisas apenas começa a ser compreendido pelo ser humano. Talvez nunca cheguemos a conhecer a origem e o plano geral do universo de Deus em seu todo e talvez nunca cheguemos a conhecer o motivo da progressão matemática de todos os acontecimentos (Lewis, 2001, p. 32)

Como afirma Luz (2004), o ensino da geometria no ensino médio e fundamental, se bem direcionado, se comprova como um formador do pensamento, facilitando sua

representação. Nele conhecer um objeto ou determinado problema, é agir sobre ele e transformá-lo, aprendendo os mecanismos dessa transformação e vinculando-os às ações transformadoras.

Uma forma potencial proporcionada pelos materiais manipulativos é revelada no momento da construção pelos próprios alunos, pois aí surgem imprevistos e desafios, os quais levam a uma reflexão sobre o caminho a ser tomado para a solução. Assim afirma Kaleff (2004), o processo de confecção de poliedros é bastante simples e as vantagens do material são muitas: baixo custo, facilidade de uso, rapidez no processo.

Porém, Veloso (1998) nos alerta com o cuidado, pois a realização de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. O mais importante é que o aluno sinta o prazer da descoberta e se olhe como um sujeito capaz de construir o conhecimento e entender que a matemática é um campo vasto onde ele pode aprender e interagir.

### **3 Desenvolvimento teórico e metodológico**

Este trabalho foi desenvolvido com alunos voluntários dos 8º e 9º anos do ensino fundamental do Colégio da Polícia Militar do Paraná “Coronel PM Felipe de Souza Miranda”, os quais participaram de uma oficina com o tema “Sólidos Estrelados” que teve duração de quatro horas e foi realizada no contra turno.

Na metodologia elaborada tratamos de uma categoria específica de sólidos geométricos: os Sólidos de Kepler-Poinsot ou também conhecidos como Poliedros Estrelados Regulares. Por isso um estudo dos elementos próprios foi fundamental para a realização de análises e atividades práticas com esses poliedros. Porém, para que fosse possível uma ampla articulação com o que eles já sabem de geometria aliados aos aspectos curriculares, foi necessário um estudo sobre sólidos regulares e o conceito de estrelação de polígonos e poliedros, para então, entendermos quando um sólido é considerado estrelado.

Portanto, com um resgate de alguns conceitos da geometria vistos durante seus vários anos de escolarização, começamos a explicação com o seguinte tópico: o que é um poliedro?

Poliedro é um sólido geométrico cuja superfície é composta por um número finito de faces, em que cada uma das faces é um polígono.

Logo após foi importante a conceituação de Poliedros Regulares, também chamados de Platônicos. Estes foram estudados e divulgados por Platão. São conhecidos como Regulares, pois todas as faces, ângulos e ângulos entre faces são sempre os mesmos. Existem cinco poliedros regulares. Os alunos puderam manusear estes sólidos feitos em acrílico.

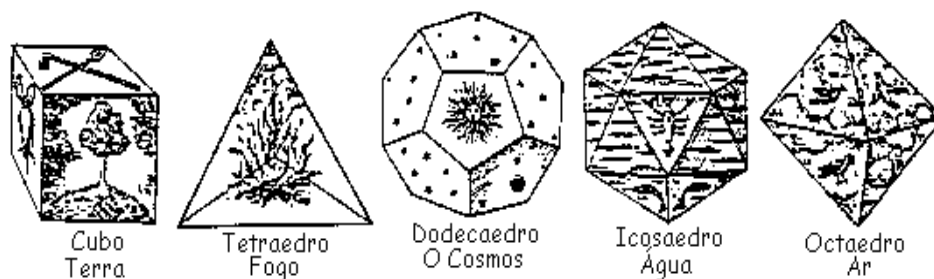


Figura 01: os poliedros platônicos

Esses poliedros são convexos porque tomado um plano que contém uma face, todos as outras faces estão do mesmo lado do plano. Um poliedro convexo é regular quando as suas faces são polígonos regulares iguais entre si e em cada vértice se encontram o mesmo número de faces. Num poliedro deste tipo as faces não se distinguem entre si, o mesmo sucedendo às arestas (e aos vértices). Assim os Sólidos de Platão são exemplos de Poliedros Convexos Regulares. Foi então que indagamos aos alunos a seguinte conjectura: será que todos os Poliedros Regulares são Convexos?

Em 1619, Johannes Kepler descobriu dois poliedros que são simultaneamente regulares, mas não convexos e chamou-os de Pequeno Dodecaedro estrelado e Grande Dodecaedro Estrelado. Na realidade sólidos deste tipo já eram conhecidos, e Kepler tratou de formalizá-los.

Como mostra a figura 02, datada entre os anos de 1420 a 1425 em mosaico feito por Paolo Uccello, já aparece um exemplo de um Pequeno Dodecaedro Estrelado. Ao examinarmos bem essa figura, e considerarmos que a parte escondida é simétrica da que se vê, instigui aos alunos a intuir que esse poliedro pode ser obtido a partir de um dodecaedro.

Todavia, para compreendermos bem como se geram os sólidos estrelados, tornou-se conveniente começar por ver o que são polígonos estrelados.



Figura 02: Mosaico de Uccello na Catedral de São Marcos em Veneza

### 3.1 Estrelação de polígonos

Estrelar um polígono significa prolongar seus lados. Se esse processo gerar um novo polígono e, se este não for dado pela sobreposição de polígonos diremos que o polígono é estrelado. A Figura 03 mostra o processo de estrelação de um pentágono regular. Os lados prolongados interceptam-se, e podemos, portanto formar um novo polígono com cinco segmentos formados a partir dos lados prolongados.

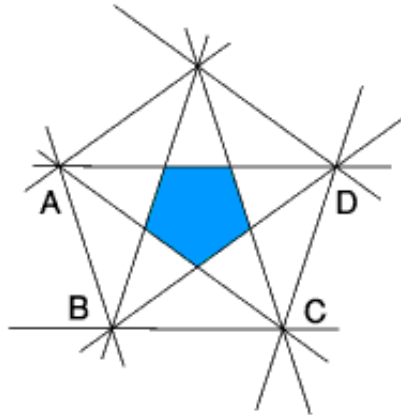


Figura 03: Processo de estrelação de um pentágono regular.

A figura (03) resultante é chamada de pentagrama dos pitagóricos. Este é um polígono não convexo, com cinco lados congruentes. Se considerarmos que é regular o polígono de lados congruentes e ângulos formados por pares de lados consecutivos também congruentes, estamos perante um polígono regular.

Um polígono pode admitir mais que uma estrelação. O heptágono, por exemplo, admite duas estrelações.

### 3.2 Sólidos estrelados

O processo de obter sólidos estrelados é análogo ao dos polígonos. Se prolongarmos as faces de um dodecaedro, e considerarmos as suas intersecções, obtemos a primeira estrelação do dodecaedro, como Kepler enunciou, pequeno dodecaedro estrelado. Percebe-se que as faces deste poliedro são pentagramas.

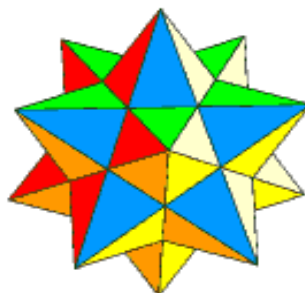


Figura 04: Pequeno dodecaedro estrelado

O dodecaedro possui ainda outras estrelções. Ao prolongarmos as faces, pentagramas, do pequeno dodecaedro estrelado, obtemos o “grande dodecaedro”, cujas doze faces são pentágonos regulares.

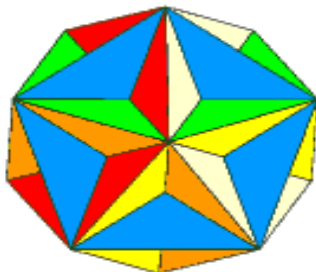


Figura 05: grande dodecaedro

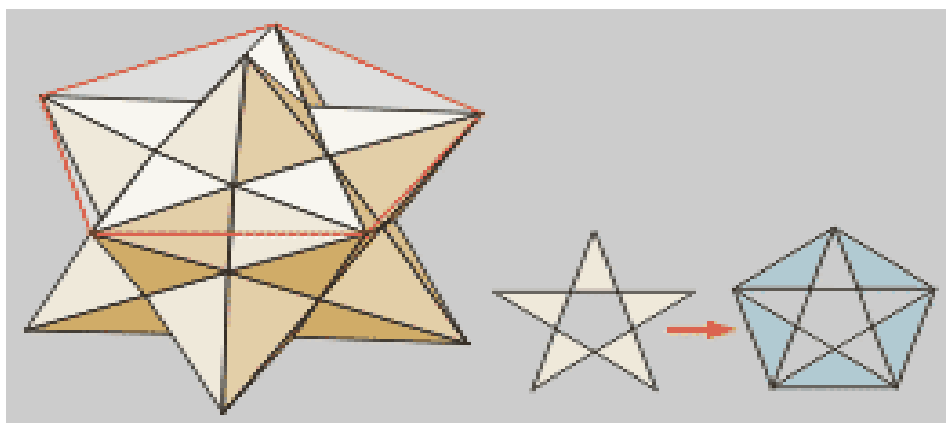


Figura 06: segunda estrelação do dodecaedro

Fazendo ainda uma nova estrelação, resulta um sólido estrelado, o “grande dodecaedro estrelado”. Novamente possui 12 faces que são pentagramas.

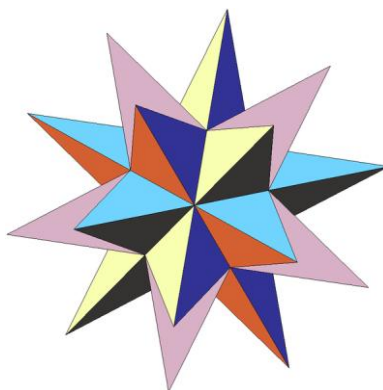


Figura 07: grande dodecaedro estrelado

Quando se pretende ficar com uma ideia de como são estes sólidos, a única solução é observar um modelo, de preferência construí-lo. Essa foi a primeira atividade prática proposta aos alunos na oficina, construir em grupos o pequeno

dodecaedro estrelado a partir dos moldes do dodecaedro e das pirâmides regulares de base pentagonal.

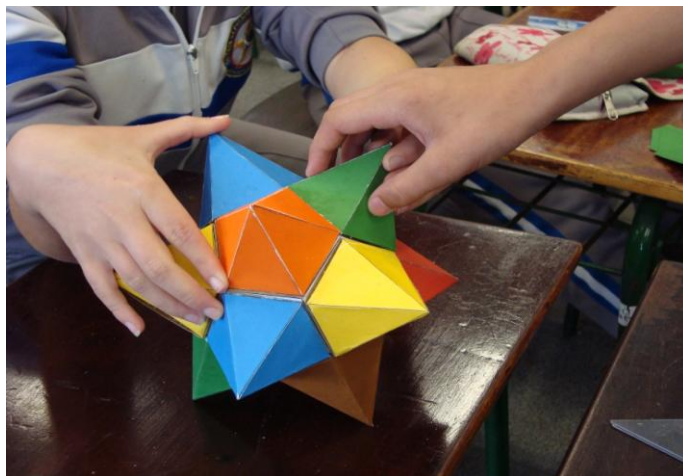


Figura 08: construção do pequeno dodecaedro estrelado

Deve-se ressaltar que as faces se interceptam, como já foi observado. Para interpretar estes sólidos como verdadeiros poliedros, foi essencial compreender quais eram as faces, as arestas e os vértices. Assim, no pequeno dodecaedro estrelado, os lados dos pequenos triângulos equiláteros não são arestas. As arestas são os lados das faces, e as faces são pentagramas, não são triângulos equiláteros. Do mesmo modo, existem falsos vértices deste poliedro, que são os vértices dos ângulos sólidos côncavos. Como não estão nas extremidades das arestas, não são verdadeiros vértices do grande dodecaedro.

Contando corretamente as faces, os vértices e as arestas do grande dodecaedro e do pequeno dodecaedro estrelado veremos que são iguais os números em ambos os poliedros, doze faces, doze vértices e trinta arestas. Quanto ao grande dodecaedro estrelado, tem doze faces, vinte vértices e trinta arestas.

Um poliedro platônico que dá origem a muitas estrelações é o icosaedro. Muitos sólidos obtidos nestas estrelações do icosaedro não são verdadeiros poliedros, se não sólidos compostos. Do ponto de vista histórico nos interessou particularmente a 16ª estrelação do icosaedro, chamado grande icosaedro, como mostra a figura 09.

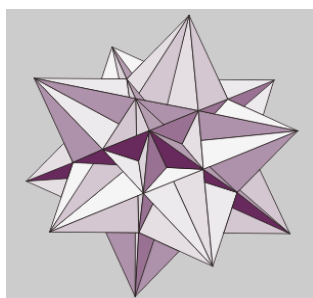


Figura 09: grande icosaedro



O pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro foram descobertos por Kepler embora não haja indicações de que Kepler os anunciou como regulares aos cinco platônicos. Em 1810, Louis Poinot (1777-1859) decobre os quatro estrelados, e existem indicações de que Poinot compreendeu que num certo sentido esses quatro poliedros eram regulares. Não existe, no entanto, a certeza que Poinot não conhecesse a anterior descoberta de Kepler. Em qualquer caso, os quatro estrelados são conhecidos pelos poliedros de Kepler-Poinot.

Assim, adaptando num sentido largo os conceitos de polígonos e poliedros regulares, os trabalhos de Kepler e Poinot afirmam que existem pelo menos nove poliedros regulares. Pouco depois das descobertas de Poinot, Augustin Cauchy (1789-1857) provou, em 1813, que apenas podem existir nove poliedros regulares.

### 3.3 Uso de animações como recurso didático

Uma das maiores dificuldades no ensino dos poliedros estrelados é a visualização da estrelação dos poliedros, isto é, visualizar o encontro dos planos. Por isso desenvolvemos uma sequência de animações que facilitam as visualizações.

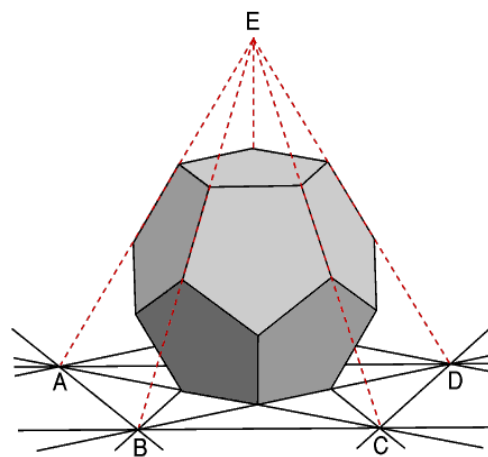


Figura 10: encontro dos planos

### **3.4 Construindo os sólidos estrelados com dobraduras.**

Outro recurso que foi utilizado na construção desses sólidos, o qual foi proposto aos alunos como uma segunda atividade na oficina, é a junção de módulos e a montagem através de dobraduras de origami. São construídos 30 módulos iguais de forma simples, mas há um grau de complexidade no momento de colocar os módulos para construção do poliedro, no caso proposto, o grande dodecaedro.

## **4 Considerações Finais**

Estar motivado é um grande caminho para aprender, e os Poliedros Estrelados são uma alternativa que despertam interesse de educadores e educandos pela beleza dessas representações e pelo prazer de estar desenvolvendo uma atividade prática, fugindo da metodologia do ensino tradicional em que o professor fala e o aluno escuta.

Esse trabalho teve como objetivo desenvolver um estudo e uma alternativa didática para o ensino da geometria, através da aprendizagem dos sólidos estrelados, utilizando-os como uma ferramenta facilitadora do aprendizado da disciplina de matemática. Isto posto, proporcionando ao acadêmico do curso de licenciatura em matemática experiências diferenciadas daquelas aprendidas em sala de aula, complementando sua formação como futuros docentes. Ao mesmo tempo apresentamos aos educandos do ensino fundamental subsídios para que possam ter um olhar mais crítico sobre a geometria, utilizando os conhecimentos anteriormente adquiridos com os novos elementos geométricos presentes através do estudo desses sólidos.

Portanto, mais que desenvolver conceitos é importante estimular o aluno para a intuição e visualização, recorrendo aos materiais manipuláveis, proporcionando um ensino baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas ligados a geometria e a prática construída da realidade acadêmica diária.

## **Referências**

BRASIL. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/index.php>> Acesso em: 02 set. 2009.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo, Paz e Terra, 1998.

KALEFF, A. M. **Vendo e Entendendo Poliedros**. Niterói: EDUNFF, 2004. 2ª ed.

LUZ, A. A. B. S. **A (re) significação da geometria descritiva na formação profissional do engenheiro agrônomo**. Curitiba, 2004. Tese (Doutorado em Agronomia) - Universidade Federal do Paraná.

VELOSO, E. **Geometria: temas actuais**. Lisboa: IIE, 1998.