

GERALDO ÁVILA

VARIÁVEIS Complexas *e aplicações*

3ª edição



LTC

Variáveis Complexas e Aplicações

Variáveis Complexas e Aplicações

Terceira edição

Geraldo Ávila

O autor e a editora empenharam-se para citar adequadamente e dar o devido crédito a todos os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado neste livro, dispondo-se a possíveis acertos caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

Não é responsabilidade da editora nem do autor eventuais danos ou perdas a pessoas ou bens que tenham origem no uso desta publicação.

Direitos exclusivos para a língua portuguesa
Copyright © 2000 by Geraldo Severo de Souza Ávila

LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

Uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na internet ou outros), sem permissão expressa da Editora.

Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040
Tel.: 21-3543-0770 / 11-5080-0770
Fax: 21-3543-0896
ltc@grupogen.com.br
www.ltceditora.com.br

Capa: Silvana Mattievich

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ.

A972v
3.ed.

Ávila, Geraldo, 1933-
Variáveis complexas e aplicações / Geraldo Ávila. - 3.ed. - Rio de Janeiro : LTC, 2008.
2024p.

Inclui bibliografia e índice
ISBN 978-85-216-1217-9

1. Funções de variáveis complexas. I. Título.

08-3559.

CDD: 515.9
CDU: 517.55

*Para meu filho Geraldo, minha nora
Regina e meus netos Felipe e Camila*

Prefácio

Muitas das atuais teorias matemáticas surgiram da Ciência Aplicada, e só depois adquiriram aquele aspecto axiomático e abstrato que tanto dificulta o seu aprendizado.

V. I. Arnold

A teoria das funções de uma variável complexa é uma extensão natural da teoria das funções reais, e é de importância fundamental, tanto em matemática pura como nas aplicações. Trata-se, pois, de disciplina mandatória nos currículos de matemática, física e diversos ramos da engenharia, sobretudo eletrônica e aeronáutica.

O presente livro foi escrito com vistas a atender às necessidades dos estudantes desses vários cursos. Os pré-requisitos são mínimos: apenas um curso de cálculo, cobrindo derivadas e integrais, seqüências e séries infinitas. O pouco que se requer de derivadas parciais, integrais de linha e integrais duplas pode ser suprido num curso concomitante de cálculo de várias variáveis.

A ênfase da exposição está no desenvolvimento dos métodos e técnicas da teoria. O formalismo e o rigor são reduzidos a um mínimo, como convém num primeiro curso, para facilitar o aprendizado, decorrência natural do que diz Arnold, eminente matemático russo da atualidade.

Insistimos em que o texto é apropriado tanto a matemáticos aplicados, físicos e engenheiros, como a estudantes que pretendam se dedicar à matemática em si, como carreira de ensino ou pesquisa. De fato, as necessidades de todos esses alunos são as mesmas: eles precisam adquirir familiaridade com a fórmula de Cauchy e suas conseqüências, com as séries de Taylor e de Laurent, com o cálculo de resíduos e aplicações. Só depois é que estarão preparados para apreciar devidamente um tratamento rigoroso do teorema de Cauchy-Goursat ou estudar tópicos especiais da teoria.

Os cinco primeiros capítulos cabem muito bem num curso de um semestre. O Capítulo 5, sobre singularidades isoladas e cálculo de resíduos, completa o que pode ser considerado conteúdo mínimo de um curso introdutório.

O Capítulo 7 versa sobre dinâmica dos fluidos e aerodinâmica, e é independente do Capítulo 6, sobre continuação analítica. Sem nos estendermos muito num assunto que pode rapidamente tornar-se bastante técnico, logramos, todavia, chegar às idéias centrais da teoria de Kutta-

Joukovski, apresentando, inclusive, o cálculo da força de levantamento que se exerce numa asa de avião. O tratamento que fazemos é direto e completo, abordando uma aplicação de largo alcance e que certamente há de interessar ao leitor curioso.

No Capítulo 6 apresentamos os resultados mais importantes sobre continuação analítica, noções elementares das superfícies de Riemann e propriedades da função gama. O Capítulo 8 é dedicado à representação conforme, com algumas aplicações à teoria do potencial e à eletrostática. Aqui o leitor verá que várias passagens do Capítulo 7 são exemplos de representação conforme; e que esses tópicos puderam ser apresentados nesse capítulo sem necessidade de desenvolver toda a teoria da representação conforme.

Escrito primeiramente em 1974, o livro teve uma segunda edição em 1990, e agora esta terceira edição, com a maior revisão feita, o maior acréscimo de matéria nova, tanto exemplos e exercícios como os tópicos dos Capítulos 6 e 8.

Queremos, por fim, agradecer aos dirigentes e aos dedicados funcionários da LTC Editora pelo continuado interesse e apoio ao nosso trabalho.

Geraldo Ávila
Brasília, janeiro de 2000

Sobre o Autor

Geraldo Severo de Souza Ávila foi professor no Instituto Tecnológico de Aeronáutica, no Instituto de Física Teórica de São Paulo (UNESP), nas Universidades de Wisconsin, Georgetown (em Washington, D. C.), Brasília, na Unicamp e na Universidade Federal de Goiás. Bacharel e licenciado em Matemática pela USP, mestre e doutor pela Universidade de Nova York (NYU), é membro titular da Academia Brasileira de Ciências e da Academia de Ciências do Estado de São Paulo. Foi presidente da Sociedade Brasileira de Matemática por dois anos. É autor de vários trabalhos de pesquisa e monografias especializadas na área de equações diferenciais parciais e propagação ondulatória, além de textos universitários e artigos de ensino e divulgação.

Sumário

CAPÍTULO 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Necessidade dos números complexos	1
Números complexos	2
Os reais como subcorpo dos complexos	3
O plano complexo	4
Módulo e complexo conjugado	6
Exercícios	7
Representação polar	8
Fórmulas do produto e do quociente	9
Fórmula de De Moivre	11
Exercícios	11
Respostas e sugestões	12
Propriedades do valor absoluto	13
Exercícios	15
Raízes n -ésimas	15
Raízes da unidade	16
Raízes primitivas	18
Exercícios	19
Respostas, sugestões e soluções	20
A exponencial	21
Propriedades da exponencial	22
Exercícios	24
Respostas, sugestões e soluções	25
Conjuntos de pontos no plano	26
Exercícios	31
Respostas e sugestões	33

CAPÍTULO 2

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Funções de variável complexa	34
Exercícios	36
Limite e continuidade	36
Exercícios	42
Sugestões	43
Propriedades do limite	44
Exercícios	47

Sugestões e soluções	48
Função analítica	49
Regras de derivação	51
Exercícios	52
Sugestões	53
As equações de Cauchy-Riemann	53
Condição necessária e suficiente	55
Cauchy-Riemann em coordenadas polares	57
Interpretação geométrica	59
A função exponencial	61
Exercícios	62
As funções trigonométricas e hiperbólicas	63
Exercícios	64
O logaritmo	65
O logaritmo como transformação e sua inversa	67
Propriedades do logaritmo	69
Definição de z^n	70
As funções trigonométricas inversas	72
Exercícios	73
Respostas e sugestões	74

CAPÍTULO 3

TEORIA DA INTEGRAL

Arcos e contornos	75
Teorema de Jordan e conectividade simples	77
Arco regular e contornos	78
Exercícios	79
Integral de contorno	79
Integral curvilínea ou de contorno	81
Invariância da integral	81
Propriedades da integral	82
Exercícios	86
Respostas e sugestões	88
Teorema de Cauchy	89
Teorema de Green	89
Teorema de Cauchy	91
Integrais de contorno e primitivas	93
Exercícios	99
Sugestões	101
Fórmula integral de Cauchy	101
Derivadas de todas as ordens	103
Exercícios	107
Respostas e sugestões	109
Funções harmônicas	109
Função harmônica determina função analítica	111
Regiões multiplamente conexas	112
Princípio do módulo máximo	113
Problemas de Dirichlet e de Neumann	114
Exercícios	116
Respostas	117

CAPÍTULO 4**SÉRIES DE POTÊNCIAS**

Séries de funções complexas	118
Convergência simples ou pontual	119
Convergência uniforme	120
Exercícios	125
Sugestões	127
Séries de potências	127
Exercícios	132
Respostas e sugestões	132
Séries de potências, série de Taylor	133
Exemplos de séries de potências	136
Produto e quociente de séries de potências	138
Exercícios	142
Sugestões	144
Série de Laurent	144
Regularidade no infinito	147
Zeros de funções analíticas	147
Exercícios	149

CAPÍTULO 5**SINGULARIDADES E RESÍDUOS**

Singularidades isoladas	151
Singularidades removíveis	152
Singularidades do tipo pólo	153
Singularidades essenciais	154
Exercícios	156
Respostas	157
Teorema do resíduo	157
Exercícios	160
Respostas e sugestões	161
Integrais impróprias de funções racionais	161
Exercícios	163
Respostas e sugestões	164
Lema de Jordan	164
Exercícios	168
Respostas e sugestões	169
Integrandos multivalentes	169
Exercícios	173
Integrais envolvendo funções trigonométricas	173
Exercícios	174
Resíduos logarítmicos e princípio do argumento	175
Exercícios	178

CAPÍTULO 6**CONTINUAÇÃO ANALÍTICA**

Primeiras conseqüências	181
Permanência das relações funcionais	

Continuação analítica por reflexão	183
Exercícios	185
Respostas e sugestões	186
Continuação analítica e singularidades	187
Singularidades	189
Continuação analítica por cadeias	192
Superfícies de Riemann	193
Exercícios	197
Funções analíticas definidas por integrais	198
A função gama	200
Continuação analítica a todo o plano	201
Exercícios	202

CAPÍTULO 7

APLICAÇÕES À DINÂMICA DOS FLUIDOS

Os movimentos fluidos a considerar	204
Conservação da massa	205
Escoamentos irrotacionais	209
As funções potenciais	210
Exemplos básicos	212
Exercícios	215
Fontes, sumidouros e vórtices	215
Exercícios	220
Escoamento em volta de um cilindro circular	221
Exercícios	225
Escoamento em volta de um cilindro qualquer	225
A dinâmica do movimento	226
Força sobre um cilindro e fórmula de Blasius	229
Fórmula de Kutta-Joukowski	231
A transformação de Möbius	232
Exercícios	234
Sugestões	235
A transformação de Joukowski	235
O potencial complexo apropriado ao perfil de Joukowski	238
Os paradoxos da teoria	242

CAPÍTULO 8

REPRESENTAÇÃO CONFORME E APLICAÇÕES

Considerações preliminares	245
Representação conforme	245
Invariância da equação de Laplace	248
Exercícios	248
Inversão local e inversão global	249
Inversão global	251
Exercícios	253
A transformação de Möbius	253
A razão cruzada	256
Exercícios	259

Potencial eletrostático	260
Os potenciais escalares	261
A transformação $\omega = z + e^z$	262
O condensador de placas paralelas	263
Exercícios	265
Referências e Bibliografia	267
Índice Alfabético	269

NÚMEROS COMPLEXOS

NECESSIDADE DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos são comumente estudados nos cursos de Álgebra, ou em cursos que tratam das construções numéricas, aí incluídos os números inteiros, racionais e reais. Vamos fazer aqui uma apresentação desses números, mais do ponto de vista prático, sem maiores preocupações com os detalhes da teoria.

Como se sabe, as raízes de uma equação do 2º grau,

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

são dadas pela conhecida fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Obtemos, efetivamente, duas raízes, quando o discriminante $b^2 - 4ac$ é positivo e apenas uma se ele for nulo.

Quando o discriminante é negativo, a fórmula acima não conduz a nenhuma raiz real. Neste caso, o trinômio $ax^2 + bx + c$ é sempre diferente de zero, qualquer que seja o valor real que se atribua a x . Por exemplo, se tentarmos resolver a equação

$$x^2 - 6x + 13 = 0,$$

somos levados a

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2},$$

2 Capítulo 1: Números complexos

que não representa número real algum. No entanto, se operarmos formalmente, como se $\sqrt{-1}$ fosse um número, obteremos:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{16(-1)}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{-1},$$

ou seja, $x' = 3 + 2\sqrt{-1}$ e $x'' = 3 - 2\sqrt{-1}$. Vamos substituir esses “números” na equação original para verificar se eles são realmente raízes. Ao fazermos isto, devemos tratar o símbolo $\sqrt{-1}$ como se ele fosse mesmo um número; em particular, seu quadrado deve ser -1 : $(\sqrt{-1})^2 = -1$. Teremos:

$$\begin{aligned}(x')^2 - 6x' + 13 &= (3 + 2\sqrt{-1})^2 - 6(3 + 2\sqrt{-1}) + 13 \\ &= 9 + 12\sqrt{-1} + 4(-1) - 18 - 12\sqrt{-1} + 13 = 0.\end{aligned}$$

Do mesmo modo, verificamos que x'' também é raiz.

Números complexos

Dessas considerações segue-se que é possível resolver a equação do 2º grau mesmo no caso em que $b^2 - 4ac < 0$, se operarmos com o símbolo $i = \sqrt{-1}$ como se fosse um número¹. Ele deve ter a propriedade de que $i^2 = -1$ e deve operar ao lado dos números reais com as mesmas leis formais que regem estes números. Somos assim levados a introduzir os *números complexos* como sendo os números da forma $a + bi$, como

$$3 + 5i, \quad \frac{2}{3} - 2i, \quad \sqrt{2} + \frac{5}{2}i, \quad -3 - \frac{2}{\sqrt{5}}i.$$

O novo elemento $i = \sqrt{-1}$ é chamado *unidade imaginária*; a é chamado de *parte real* e b de *parte imaginária* do número complexo $a + bi$.

¹Na verdade, a motivação maior para a aceitação dos números complexos ocorreu no século XVI, quando os matemáticos descobriram a fórmula geral de resolução de equações do 3º grau. Aplicada à equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, essa fórmula se reduz a

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{-2 + 11\sqrt{-1}}.$$

Sabendo que $x = 4$ é raiz, percebeu-se que as raízes cúbicas aí indicadas devem ser $(2 + \sqrt{-1})$ e $(-2 + \sqrt{-1})$, respectivamente, o que se comprova elevando-as ao cubo e operando formalmente. Como tal procedimento permitia obter a raiz $x = 4$ pela fórmula, ficou evidente que tal interpretação deveria ser aceita. Portanto, os números complexos entraram na Matemática pela equação do 3º grau, não do 2º.

Vemos assim que, ao introduzirmos os números complexos, devemos definir adição e multiplicação de maneira que permaneçam válidas as propriedades associativa, comutativa e distributiva que essas operações possuem quando referidas aos números reais. Assim, os números complexos ficam determinados pelas seguintes regras:

$$i^2 = -1; \quad ai = ia;$$

$$a + bi = c + di \text{ significa } a = c, b = d;$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

O leitor deve notar que a definição de multiplicação é motivada pelo que obteríamos operando formalmente, assim:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bidi = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Vejamos alguns exemplos de operações com números complexos:

$$(-5 + 7i) + (3 - 12i) = -2 - 5i;$$

$$(1 - 5i)(3 + 2i) = (3 + 10) + (2 - 15)i = 13 - 13i = 13(1 - i);$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{18}} - i\sqrt{50} \right) = \frac{1}{3} - i\sqrt{100} = \frac{1}{3} - 10i.$$

A *subtração* de números complexos é definida em termos da adição e do oposto de um número. O *oposto* de $z = x + iy$ é o número $-z = (-x) + i(-y)$. Dados então $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, definimos:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Os reais como subcorpo dos complexos

Observe que os números complexos da forma $a + i0$ se comportam, com relação à adição e à multiplicação, do mesmo modo que os números reais a ; em outras palavras, fazendo corresponder o número complexo $a + i0$ ao número real a , então à soma $a + b$ corresponderá $(a + b) + i0$, que é o mesmo que $(a + i0) + (b + i0)$; e ao produto ab corresponderá $ab + i0$, que é o

mesmo que $(a+i0)(b+i0)$. Isso quer dizer que somar e multiplicar números reais equivale, pela correspondência $a \mapsto a+i0$, a somar e multiplicar, respectivamente, os números complexos correspondentes, o que nos permite identificar o número real a com o número complexo $a+i0$, já que, do ponto de vista da adição e da multiplicação, seu comportamento é o mesmo. Deste modo, os números complexos se apresentam como uma extensão natural dos números reais.

O plano complexo

Dado o número complexo $z = x + iy$, sua *parte real* x é denotada por $\operatorname{Re} z$, e sua *parte imaginária* y , por $\operatorname{Im} z$. O *plano complexo* é o conjunto das representações de todos os números complexos $z = x + iy$ pelos pontos $P = (x, y)$ do plano. É conveniente identificar o número complexo $z = x + iy$ com o ponto $P = (x, y)$, o que é possível através das seguintes definições:

$(a, b) = (c, d)$ significa $a = c, b = d$;

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

É fácil ver então que $a = (a, 0)$ e $i = (0, 1)$.

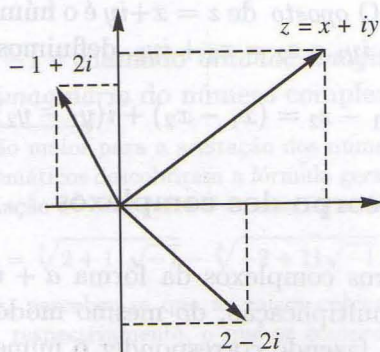


Fig. 1.1

A representação dos números complexos por pontos do plano é muito útil e de uso freqüente. Por meio dela, o número complexo $z = x + iy$ é identificado com o ponto (x, y) , ou com o vetor Oz de componentes x e y (Fig. 1.1). As conhecidas regras do paralelogramo para a soma e subtração de vetores se aplicam, então, no caso de soma e subtração de números complexos (Figs. 1.2 e 1.3).

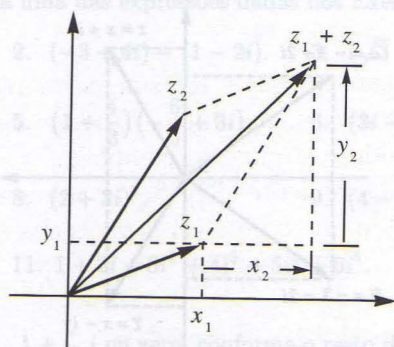


Fig. 1.2

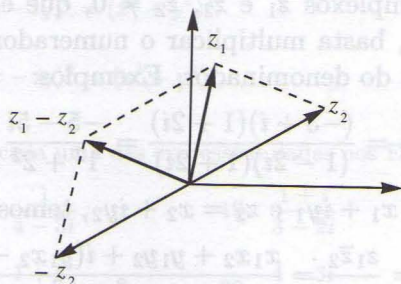


Fig. 1.3

Módulo e complexo conjugado

Definimos o *módulo*, *valor absoluto* ou *norma* de um número complexo $z = x + iy$ como sendo o número não-negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como se vê, ele é a distância do ponto z à origem.

O *complexo conjugado* de $z = x + iy$ é definido como sendo $\bar{z} = x - iy$. A Fig. 1.4 ilustra exemplos de complexos conjugados.

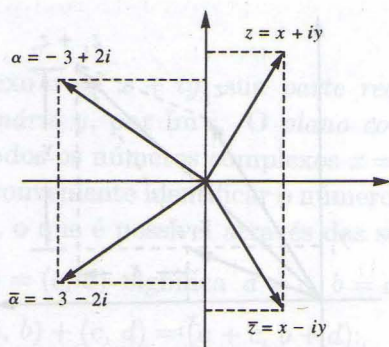


Fig. 1.4

Em termos do módulo e do conjugado, temos:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = (x^2 + y^2) + i(-xy + yx) = x^2 + y^2,$$

isto é, $z\bar{z} = |z|^2$. Esta propriedade permite calcular o *quociente* $z = z_1/z_2$ de dois números complexos z_1 e z_2 , $z_2 \neq 0$, que é definido pela condição $zz_2 = z_1$. Para isso, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador. Exemplos:

$$\frac{-3 + i}{1 - 2i} = \frac{(-3 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-5 - 5i}{1^2 + 2^2} = -1 - i.$$

Em geral, com $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Deixamos ao leitor a tarefa de provar as seguintes propriedades:

$$|z| = |\bar{z}|; \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i};$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Esta última segue da penúltima e da definição de quociente:

$$z \overline{z_2} = z_1; \quad \text{logo, } \overline{z} \overline{z_2} = \overline{z_1}, \quad \text{donde } \overline{z} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

EXERCÍCIOS

Reduza à forma $a + bi$ cada uma das expressões dadas nos Exercs. 1 a 11.

1. $(3 + 5i) + (-2 + i)$. 2. $(-3 + 4i) - (1 - 2i)$. 3. $(\sqrt{3} - 2i) - i[2 - i(\sqrt{3} + 4)]$.

4. $(3 - 5i)(-2 - 4i)$. 5. $(1 + \frac{i}{3})(-\frac{6}{5} + 3i)$. 6. $(3i - 1)(\frac{1}{3} + \frac{i}{2})$.

7. $7 - 2i(2 - \frac{2i}{5})$. 8. $(2 + 3i)^2$. 9. $(4 - 2i)^2$.

10. $(1 + i)^3$ 11. $1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + 6i^5$.

12. Mostre que $\sum_{n=0}^N i^n = 1, 1 + i, i$ ou zero, conforme o resto da divisão de N por 4 seja zero, 1, 2 ou 3, respectivamente.

13. Mostre que $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

14. Mostre que $(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$.

15. Mostre que $(x + iy)^2(x - iy)^2 = (x^2 + y^2)^2$.

16. Mostre que $(x + iy)^n(x - iy)^n = (x^2 + y^2)^n$.

Reduza à forma $a + bi$ cada uma das expressões dadas nos Exercs. 17 a 27.

17. $\frac{1}{2 + 3i}$. 18. $\frac{1}{4 - 3i}$. 19. $\frac{1 + i}{3 - 2i}$. 20. $\frac{3 - i}{2i - 1}$.

21. $\frac{1 - i}{1 + i}$. 22. $\frac{1 + i}{1 - i}$. 23. $\frac{4 - 3i}{i - 1}$. 24. $\frac{1 - i}{\sqrt{2} - i}$.

25. $\frac{1}{(1 + i)^2}$. 26. $(\frac{1 + i}{1 - i})^{30}$. 27. $(1 - i)(\sqrt{3} + i)$.

8 Capítulo 1: Números complexos

Nos Exercs. 28 a 32, represente graficamente os números complexos z_1 , z_2 , $z_1 z_2$ e z_1/z_2 .

28. $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = \frac{1-i}{5\sqrt{2}}$.

29. $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

30. $z_1 = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

31. $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$.

32. $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 3 - i/2$.

33. Mostre que $\operatorname{Re}[-i(2-3i)^2] = -12$.

34. Mostre que $\frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i} = -i$.

35. Mostre que $\operatorname{Im}\left[\frac{(1-i\sqrt{3})^2}{i-2}\right] = \frac{2(1+2\sqrt{3})}{5}$.

36. Mostre que $\frac{1+i\operatorname{tg}\theta}{1-i\operatorname{tg}\theta} = \cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta$.

37. Dados dois números complexos α e β , prove que

$$|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2.$$

Faça um gráfico e obtenha a seguinte interpretação geométrica: a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das diagonais.

38. Dados três vértices de um paralelogramo pelos números complexos z_1 , z_2 e z_3 , determine o vértice z_4 oposto a z_2 . Faça um gráfico.

39. Prove que o produto de dois números complexos é zero se e somente se um dos fatores se anula.

40. O Teorema Fundamental da Álgebra afirma que todo polinômio com coeficientes complexos possui uma raiz (real ou complexa). Prove, como corolário, que todo polinômio $P(x)$ de grau n possui n raízes, contadas as multiplicidades; e sendo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ essas raízes, então $P(x)$ se escreve $P(x) = a(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$. Prove também que se o polinômio tem coeficientes reais, e se α é uma raiz complexa, então $\bar{\alpha}$ também é raiz.

REPRESENTAÇÃO POLAR

Considerando a representação geométrica de um número complexo $z \neq 0$, chama-se *argumento* de z o ângulo θ formado pelo eixo Ox e o vetor Oz (Fig.

1.5). Como em Trigonometria, os ângulos são aqui orientados: consideramos positivo o sentido de percurso oposto ao dos ponteiros do relógio.

O argumento de z só pode ser definido quando $z \neq 0$; mesmo nesta hipótese, o argumento só fica determinado a menos de múltiplos inteiros de 2π . Como $x = |z| \cos \theta$ e $y = |z| \sin \theta$, temos a seguinte representação de z , conhecida como *representação polar* ou *representação trigonométrica*:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r = |z|;$$

r e θ são designados as *coordenadas polares* de z .

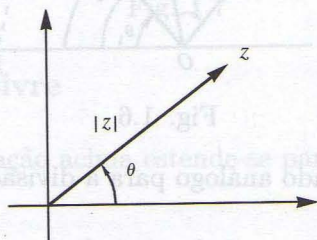


Fig. 1.5

Fórmulas do produto e do quociente

De posse da representação polar, vamos deduzir uma regra muito conveniente para a multiplicação. Sejam

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

dois números complexos quaisquer. Então,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)], \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i (\sin(\theta_1 + \theta_2))].$$

Vemos assim que o *produto de dois números complexos é o número cujo módulo é o produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é a soma dos*

argumentos dos fatores (Fig. 1.6). Observe que os triângulos de vértices 0 , 1 , z_1 e 0 , z_2 , $z_1 z_2$ são semelhantes, o que facilita a construção do produto $z_1 z_2$ a partir dos dados 0 , 1 , e z_2 .

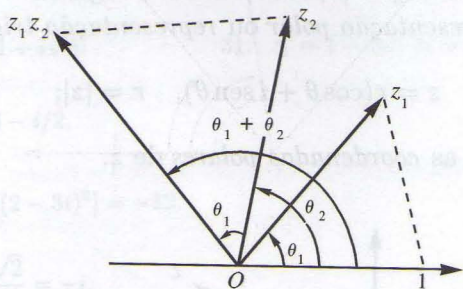


Fig. 1.6

Vamos deduzir resultado análogo para a divisão. Como

$$\frac{1}{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta} = \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta,$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1}{\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i (\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)],$$

isto é, para dividir números complexos basta fazer o quociente dos módulos e a diferença dos argumentos (Fig. 1.7). Também aqui, como no caso do produto, a construção do quociente é facilitada pela semelhança dos triângulos de vértices 0 , 1 , z_1/z_2 e 0 , z_2 , z_1 .

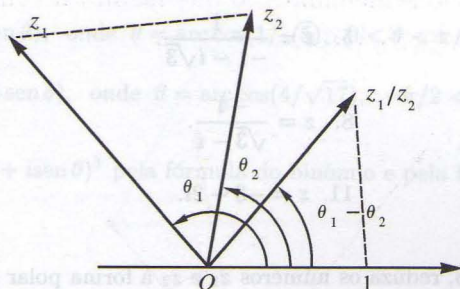


Fig. 1.7

Fórmula de De Moivre

A fórmula de multiplicação acima estende-se para um número qualquer de fatores. Sendo

$$z_j = r_j(\cos \theta_j + i \operatorname{sen} \theta_j), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

teremos:

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)].$$

A demonstração deste fato é simples e fica a cargo do leitor. Em particular, quando todos os fatores são iguais e de módulo unitário, obtemos a fórmula seguinte, chamada *fórmula de De Moivre*:

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

Esta fórmula é válida também para expoentes negativos. De fato,

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-n} &= \frac{1}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n} = \frac{1}{\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta} \\ &= \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta = \cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta). \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

Nos Exercs. 1 a 12, determine o argumento dos números complexos dados, escreva esses números na forma polar e represente-os geometricamente.

12 Capítulo 1: Números complexos

1. $z = -2 + 2i$.
2. $z = 1 + i\sqrt{3}$.
3. $z = -\sqrt{3} + i$.
4. $z = \left(\frac{i}{1+i}\right)^5$.
5. $z = \frac{1}{-1 - i\sqrt{3}}$.
6. $z = -1 - i$.
7. $z = \frac{-3 + 3i}{1 + i\sqrt{3}}$.
8. $z = \frac{-4}{\sqrt{3} - i}$.
9. $z = 1 + 2i$.
10. $z = -1 + 3i$.
11. $z = -3 - 2i$.
12. $z = 4 - i$.

Nos Exercs. 13 a 18, reduza os números z_1 e z_2 à forma polar e determine as formas polares de $z_1 z_2$ e z_1/z_2 . Represente esses quatro números num gráfico.

13. $z_1 = \sqrt{3} + 3i$, $z_2 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}$.
14. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$.
15. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.
16. $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.
17. $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 + i$.
18. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + 2i$.
19. Prove que se $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ e $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, então z_1 , z_2 e z_3 são os vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo unitário de centro na origem. Faça um gráfico.
20. Prove que

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \quad \text{e} \quad \sin 3\theta = -\sin^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin \theta.$$

21. Obtenha fórmulas análogas às do exercício anterior para $\cos 4\theta$ e $\sin 4\theta$.

22. Prove, de um modo geral, que

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \cos^n \theta - \frac{n(n-1)}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \dots \\ &= P(\cos \theta, \sin \theta), \\ \sin n\theta &= n \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \dots \\ &= Q(\cos \theta, \sin \theta), \end{aligned}$$

onde P e Q são polinômios convenientes, homogêneos e de grau n nas duas variáveis $\cos \theta$ e $\sin \theta$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$.
2. $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

$$3. z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right). \quad 4. z = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right).$$

$$9. z = \sqrt{5}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \text{ onde } \theta = \arccos(1/\sqrt{5}), \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

$$12. z = \sqrt{17}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \text{ onde } \theta = \arccos(4/\sqrt{17}), \quad -\pi/2 < \theta < 0.$$

20. Desenvolva $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3$ pela fórmula do binômio e pela fórmula de De Moivre.

PROPRIEDADES DO VALOR ABSOLUTO

As seguintes propriedades são de verificação imediata:

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$$|z| = |-z|; \quad |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

A propriedade

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

segue da seguinte observação: $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$. Menos trivial é a *desigualdade do triângulo*,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad (1.1)$$

assim chamada por exprimir propriedade geométrica bem conhecida: *a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é maior ou igual ao comprimento do terceiro lado* (Fig. 1.8). Para demonstrá-la, observemos que

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Daqui segue a desigualdade desejada por uma simples extração de raiz.

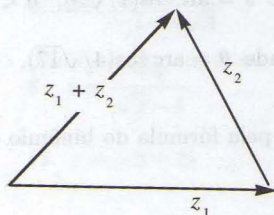


Fig. 1.8

Como $|-z_2| = |z_2|$, vale também a desigualdade

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

pois

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Uma terceira desigualdade muito importante é a seguinte:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|. \quad (1.2)$$

Para demonstrá-la, basta observar que

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|.$$

Obtém-se daqui o resultado desejado subtraindo $|z_2|$ do primeiro e último membros.

Trocando z_1 com z_2 em (1.2), obtemos também a desigualdade

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|. \quad (1.3)$$

Pondo agora $|z_1| - |z_2| = a$, as desigualdades (1.2) e (1.3) podem ser escritas, respectivamente, $a \leq |z_1 + z_2|$ e $-a \leq |z_1 + z_2|$, donde segue-se que $|a| \leq |z_1 + z_2|$, ou seja,

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|.$$

EXERCÍCIOS

1. Mostre que $\left| \frac{2+i}{2-i\sqrt{3}} \right|^2 = \frac{5}{7}$ e $\frac{(\sqrt{3}+i)(1-3i)}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{2}$.
2. Demonstre, por indução, a desigualdade seguinte, e interprete o resultado graficamente.

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$
3. Supondo ser $|z_2| > |z_3|$, prove que

$$\left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} \right| \leq \frac{|z_1|}{|z_2| - |z_3|} \quad \text{e} \quad \left| \frac{z_1}{z_2 - z_3} \right| \leq \frac{|z_1|}{|z_2| + |z_3|}.$$
4. Prove que $|z| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$, onde $z = x + iy$.
5. Prove que $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$, quaisquer que sejam os números complexos z_1 e z_2 .
6. Prove que, se vale a desigualdade do exercício anterior, então $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, quaisquer que sejam os números z_1 e z_2 ; isto é, a desigualdade do triângulo (1.1) é equivalente a (1.2) ou (1.3).
7. Sendo $z \neq 0$, mostre que $\operatorname{Re} z = |z|$ se e somente se $z > 0$.
8. Utilize o resultado anterior com $z = z_1 \bar{z}_2$ para provar que, sendo $z_1 \neq 0$ e $z_2 \neq 0$, então a igualdade vale em (1.1) se e somente se $\arg z_1 = \arg z_2$, a menos de um múltiplo inteiro de 2π . Interprete este resultado geometricamente.

RAÍZES n-ÉSIMAS

Diz-se que um número z é *raiz n-ésima* de um dado número complexo a se $z^n = a$. Como veremos logo a seguir, um número complexo ($\neq 0$) possui n raízes distintas. Para isso, consideremos o número dado $a \neq 0$ em sua forma polar: $a = r(\cos \theta + i \sin \theta)$; e representemos, também em forma polar, a raiz que desejamos encontrar: $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Utilizando a fórmula de De Moivre, a equação $z^n = a$ assume a forma seguinte:

$$\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Como a igualdade de números complexos requer a igualdade das partes reais e das partes imaginárias, separadamente, devemos ter

$$\rho^n \cos n\varphi = r \cos \theta \quad \text{e} \quad \rho^n \sin n\varphi = r \sin \theta.$$

Estas equações, por sua vez, equivalem a

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi.$$

onde k é um inteiro. Daqui segue-se que ρ é a raiz n -ésima positiva de r , donde

$$z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right). \quad (1.4)$$

Esta fórmula produz n raízes distintas, quando a k se atribuem os valores $k = 0, 1, \dots, n-1$. Como é fácil ver, qualquer outro valor atribuído a k conduz a uma raiz já obtida com um dos valores acima, precisamente aquele que é o resto da divisão de k por n . Vemos, assim, que um número complexo $a \neq 0$ possui n raízes n -ésimas $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, todas com o mesmo módulo $\rho = \sqrt[n]{|a|}$ (Fig. 1.9) e com argumentos

$$\varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

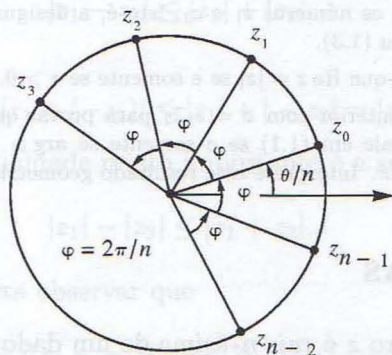


Fig. 1.9

Raízes da unidade

No caso particular $a = 1$, o ângulo θ assume o valor zero e a fórmula (1.4) se reduz a

$$z = \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right)$$

que são as *raízes n -ésimas da unidade*. Pondo

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n},$$

e utilizando a fórmula de De Moivre, vemos que as raízes n -ésimas da unidade são dadas por

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}.$$

Observe que, representadas no plano complexo, essas raízes são os vértices de um polígono regular de n lados. A Fig. 1.10 ilustra as raízes da unidade no caso $n = 6$. Aqui,

$$\omega = \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\omega^2 = -\bar{\omega}, \quad \omega^3 = -1, \quad \omega^4 = -\omega, \quad \omega^5 = \bar{\omega}.$$

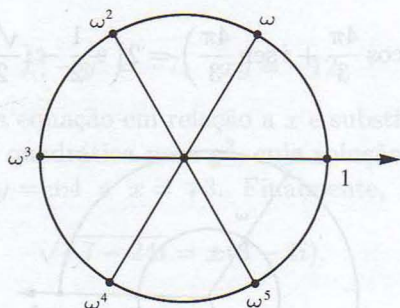


Fig. 1.10

A fórmula (1.4) pode ser escrita assim:

$$z = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right) \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right),$$

ou seja,

$$a = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right) \cdot \omega^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Esta expressão nos diz que as raízes n -ésimas de um número complexo não nulo podem ser obtidas como o produto de uma de suas raízes particulares,

$$z_0 = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right)$$

pelas raízes n -ésimas da unidade, $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$.

Como exemplo, seja determinar as raízes cúbicas do número $a = 8$. Uma delas é $z_0 = 2$. As raízes cúbicas da unidade são dadas por $1, \omega, \omega^2$, sendo que agora

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, as raízes cúbicas de 8 são (Fig. 1.11):

$$z_0 = 2; \quad z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$z_2 = 2\omega^2 = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

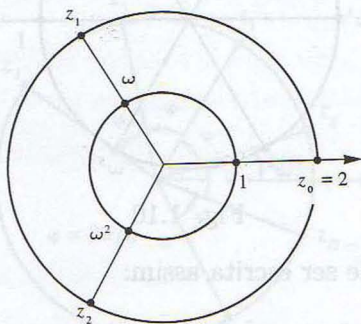


Fig. 1.11

Raízes primitivas

Chama-se *raiz n -ésima primitiva da unidade* qualquer raiz n -ésima $z \neq 1$ tal que n é o menor inteiro positivo tal que $z^n = 1$. É claro que, qualquer que seja n ,

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

é raiz primitiva. Ela é a primeira raiz primitiva que ocorre quando percorremos o círculo unitário no sentido anti-horário a partir da unidade real. Mas pode não ser a única raiz primitiva; por exemplo, no caso das raízes triplas da unidade, como vimos há pouco, ω é raiz primitiva, mas ω^2 também é. Já no caso das raízes sêxtuplas, ω e ω^5 são raízes primitivas, enquanto ω^2 ,

ω^3 e ω^4 não o são. Veja o Exerc. 22 adiante para uma caracterização das raízes primitivas.

Observação. O processo de cálculo de raízes, utilizando a representação trigonométrica, é de caráter geral; mas nem sempre é o mais conveniente. Por exemplo, no cálculo da raiz quadrada do número $-7 - 24i$, é mais fácil proceder assim:

$$\sqrt{-7 - 24i} = x + iy, \quad \text{donde} \quad x^2 - y^2 + 2ixy = -7 - 24i.$$

Mas isto equivale a

$$x^2 - y^2 = -7, \quad xy = -12.$$

Resolvendo esta última equação em relação a x e substituindo na primeira, obtemos uma equação quadrática para y^2 , cuja solução é $y^2 = 16$ (como y é real, $y^2 > 0$). Logo, $y = \pm 4$ e $x = \mp 3$. Finalmente,

$$\sqrt{-7 - 24i} = \pm(3 - 4i).$$

EXERCÍCIOS

Calcule as raízes dos números complexos dados nos Exercs. 1 a 8 e faça a representação gráfica correspondente.

1. $\sqrt[3]{-1}$.
2. $(1 + i\sqrt{3})^{1/2}$.
3. $\sqrt{2i}$.
4. $\sqrt{-2i}$.
5. $\sqrt[3]{i}$.
6. $\sqrt[3]{-i}$.
7. $(-1 + i\sqrt{3})^{1/4}$.
8. $(-1 - i\sqrt{3})^{1/2}$.

Usando o procedimento descrito na Observação acima, calcule as raízes indicadas nos Exercs. 9 a 11.

9. $\sqrt{-5 - 12i}$.
10. $\sqrt{3 + 4i}$.
11. $\sqrt{1 + 2i\sqrt{6}}$.

12. Decomponha o polinômio $P(x) = x^4 + 1$ em fatores do 2º grau com coeficientes reais.
13. Faça o mesmo com o polinômio $P(x) = x^4 + 9$.

Nos Exercs. 14 a 21, decomponha cada polinômio dado em um produto de fatores do 1º grau.

20 Capítulo 1: Números complexos

14. $P(z) = z^6 - 64$. 15. $P(z) = z^6 + 64$. 16. $P(z) = 3z^2 - i$.
17. $P(z) = 5z^3 + 8$. 18. $P(z) = z^2 - 2z + 2$. 19. $P(z) = 2z^2 + z + 1$.
20. $P(z) = z^2 - (1 + i)z + 5i$.
21. $P(z) = z^4 - (1 - i)z^2 - i$.
22. Prove que $\omega = \cos(2k\pi/n) + i \operatorname{sen}(2k\pi/n)$ é raiz n -ésima primitiva da unidade se e somente se k e n forem primos entre si. Em consequência, sendo $n > 2$, as raízes primitivas são sempre em número maior do que 1; e exatamente $n - 1$ se n for número primo.
23. Prove que se $\omega = \cos(2k\pi/n) + i \operatorname{sen}(2k\pi/n)$ é raiz n -ésima primitiva da unidade, então as n raízes n -ésimas da unidade são dadas por $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$.
24. Prove que $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$, onde ω é qualquer raiz n -ésima da unidade, diferente de 1.
25. Prove que

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + n\omega^{n-1} = \frac{n}{\omega - 1},$$

onde ω é qualquer raiz n -ésima da unidade, diferente de 1.

RESPOSTAS, SUGESTÕES E SOLUÇÕES

1. $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ e -1 . 3. $1 + i$. 4. $1 - i$.
5. $\frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}$ e $-i$. 7. $\pm \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}$ e $\pm \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt[4]{8}}$.

12. Pondo $\omega = (1 + i)/\sqrt{2}$, temos:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - i^2 = (x^2 - i)(x^2 + i) = (x^2 - \omega^2)(x^2 - \bar{\omega}^2) \\ &= [(x - \omega)(x + \omega)][(x - \bar{\omega})(x + \bar{\omega})] \\ &= [(x - \omega)(x - \bar{\omega})][(x + \omega)(x + \bar{\omega})] \\ &= (x^2 - \sqrt{2} + 1)(x^2 + \sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

25. Seja S a referida soma. Então,

$$\begin{aligned} S &= (1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1}) + \omega[1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + (n-1)\omega^{n-2}] \\ &= \omega(S - n\omega^{n-1}). \end{aligned}$$

A EXPONENCIAL

Admitimos que o leitor tenha familiaridade com as funções trigonométricas, a constante de Euler e e a função exponencial e^x , conceitos estes que são estudados nos cursos de Cálculo. Lembramos, em particular, os desenvolvimentos dessas funções em séries de MacLaurin, válidos para todos os valores reais da variável x :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad (1.5)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots; \quad (1.6)$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (1.7)$$

A *constante de Euler* e , que é um número irracional compreendido entre 2 e 3 ($e \approx 2,71828\dots$), é dada pela série

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots,$$

que se obtém de (1.5) com $x = 1$.

Vamos tomar o desenvolvimento (1.5) como base para definir e^z com z complexo. Se e^z já tivesse significado para z complexo, e o desenvolvimento (1.5) fosse válido neste caso, então teríamos, com y real,

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Admitindo ainda que seja possível rearrumar os termos desta série, pondo juntos os termos reais e separadamente os termos imaginários, obtemos:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right),$$

ou seja, em vista de (1.6) e (1.7),

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \quad (1.8)$$

Essas considerações, que são puramente formais, não estabelecem a relação (1.8), mas servem como motivação para definirmos a função exponencial. Fazemos isso tomando a relação (1.8) como ponto de partida; ela é aqui usada para definir a exponencial no caso de expoente puramente imaginário iy . Por outro lado, a definição da exponencial no caso de um expoente qualquer $z = x + iy$ é feita de maneira a manter a propriedade aditiva da exponencial real:

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1} e^{x_2}.$$

Definimos, então, a exponencial e^z , para um número complexo qualquer $z = x + iy$, mediante a expressão

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y). \quad (1.9)$$

Propriedades da exponencial

Da definição que acabamos de dar da exponencial, e das propriedades das funções reais $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e e^x , decorrem as seguintes propriedades da exponencial complexa:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}; \quad (1.10)$$

$$e^{-z} = 1/e^z; \quad (1.11)$$

$$(e^z)^n = e^{nz}, \quad n \text{ inteiro}; \quad (1.12)$$

$$e^z \neq 0 \quad \text{para todo } z; \quad (1.13)$$

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}; \quad (1.14)$$

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, \quad k \text{ inteiro}. \quad (1.15)$$

Demonstração de (1.10). Com a notação usual,

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{e} \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

obtemos, em vista da definição (1.9),

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} [(\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) \\ &\quad + i (\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \operatorname{sen} y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)]. \end{aligned}$$

Daqui e da definição (1.9) concluímos que

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2},$$

o que completa a demonstração.

Demonstração de (1.11). Temos, com $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} e^{-z} &= e^{-x} e^{-iy} = \frac{1}{e^x} [(\cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y))] = \\ &= \frac{1}{e^x} (\cos y - i \operatorname{sen} y) = \frac{1}{e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)} = \frac{1}{e^{x+iy}} = \frac{1}{e^z} \end{aligned}$$

Demonstração de (1.12). A fórmula (1.12) é imediata nos casos $n = 0$ e $n = 1$. Para $n = 2$, ela segue facilmente de (1.10); e em geral, para $n > 0$, ela é estabelecida por indução. Para isso, como ela é válida para $n = 0$, basta mostrar que do fato de ser válida para $n = k$ segue-se que é válida também para $n = k + 1$, $k \geq 0$. Supomos, então, que

$$(e^z)^k = e^{kz}.$$

Em consequência,

$$(e^z)^{k+1} = (e^z)^k (e^z) = e^{kz} e^z = e^{kz+z} = e^{(k+1)z}.$$

O caso $n < 0$ reduz-se facilmente ao caso $n > 0$. De fato, supondo $n < 0$, temos

$$(e^z)^n = \frac{1}{(e^z)^{-n}};$$

mas $-n > 0$, logo $(e^z)^{-n} = e^{-nz}$, portanto,

$$(e^z)^n = \frac{1}{e^{-nz}} = e^{nz}.$$

Isto completa a demonstração de (1.12).

Deixamos ao leitor a tarefa de demonstrar as propriedades (1.13), (1.14) e (1.15).

Com a notação exponencial, a representação polar de um número complexo assume a forma compacta $z = re^{i\theta}$, onde $r = |z|$ e $\theta = \arg z$; por exemplo, $i = e^{i\pi/2}$, $-2 = 2e^{i\pi}$, $-4i = 4e^{-i\pi/2}$ etc. A mesma notação permite escrever a fórmula de De Moivre assim:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

Observamos também que é costume usar a notação $\exp z$ em lugar de e^z , principalmente quando o expoente é muito carregado. Por exemplo, costuma-se escrever

$$\exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] \quad \text{em vez de} \quad e^{\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)}.$$

EXERCÍCIOS

Reduza à forma $re^{i\theta}$ cada um dos números complexos dados nos Exercs. 1 a 6 e faça os gráficos correspondentes.

1. $1 + i$.

2. $1 - i$.

3. $-1 + i$.

4. $-1 - i$.

5. $1 + i\sqrt{3}$.

6. $1 - i\sqrt{3}$.

7. $\sqrt{3} + i$.

8. $\sqrt{3} - i$.

9. $-\sqrt{3} - i$.

10. $-1 - i\sqrt{3}$.

11. $\frac{i}{1+i}$.

12. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$.

Volte à p. 12 e refaça os Exercs. 1 a 12 lá propostos, utilizando agora a notação exponencial. Você há de ver que, juntamente com sua representação geométrica, essa notação facilita muito o trabalho de extrair raízes.

13. Mostre que $\exp(3 + 7\pi i) = -e^3$.

14. Mostre que $\exp \frac{3 - 2\pi i}{6} = \frac{\sqrt{e}(1 - i\sqrt{3})}{2}$.

15. Estabeleça as fórmulas de Euler:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

16. Sendo $z = re^{i\theta}$, prove que $|e^{iz}| = e^{-r \sin \theta}$.

17. Prove que $r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = r_3 e^{i\theta_3}$, onde

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \theta_3 = \frac{r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2}.$$

Faça um gráfico.

18. Estabeleça as duas identidades seguintes:

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n+1/2)\theta]}{2 \sin(\theta/2)};$$

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{1}{2 \sin(\theta/2)} \left[\cos \frac{\theta}{2} - \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \right]$$

19. Prove que a condição para que três números complexos a , b e c sejam vértices de um triângulo equilátero é que $a + jb + j^2 c = 0$, onde $j = e^{2\pi i/3}$. Prove que esta condição equivale a $b + jc + j^2 a = 0$ e a $c + ja + j^2 b = 0$.

20. Determine z de forma que o triângulo de vértices i , z e iz seja equilátero.

21. Prove que $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$, k inteiro. Isto prova, em particular, que e^z é função periódica de período $2\pi i$.

RESPOSTAS, SUGESTÕES E SOLUÇÕES

1. $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

2. $\sqrt{2}e^{-\pi i/4}$.

6. $2e^{-i\pi/3}$.

11. $\frac{e^{\pi i/4}}{\sqrt{2}}$

18. Utilize a fórmula de De Moivre e a soma dos termos de uma PG, assim:

$$\sum_{j=0}^n [\cos j\theta + i \sin j\theta] = \sum_{j=0}^n e^{ij\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i(n+1/2)\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = \text{etc.}$$

19. Observe que as raízes cúbicas da unidade são 1, w e w^2 , e que $1 + j = -j^2$. Faça uma figura e note que a condição mencionada equivale a $a = b + (c - b)(-j^2)$.

20. Como z e iz têm o mesmo módulo, eles jazem na mesma circunferência de centro na origem; e como o terceiro vértice do triângulo é i , vemos que um de seus lados (de vértices z e iz) é paralelo ao eixo Ox . Então esses vértices z e iz jazem nas retas $y = x$ e $y = -x$ (já que eles estão simetricamente posicionados em relação ao eixo Oy e fazem entre si um ângulo de $\pi/2$ radianos). Eles podem estar ambos no semiplano superior ou ambos no semiplano inferior. (Faça uma figura em cada caso.) No primeiro caso, z , i e iz estão posicionados no sentido anti-horário, portanto, de acordo com o exercício anterior, devemos ter

$$z + ji + j^2(iz) = 0, \quad \text{donde} \quad z = \frac{-ij}{1 + ij^2} = \frac{e^{\pi i/4}}{2 \sin(5\pi/12)}.$$

No segundo caso, i , z e iz é que estarão posicionados no sentido anti-horário, portanto,

$$i + jz + j^2(iz) = 0, \quad \text{donde} \quad z = \frac{-i}{j + ij^2} = \frac{-e^{3\pi i/4}}{2 \sin(\pi/12)}.$$

CONJUNTOS DE PONTOS NO PLANO

Dados os números $r > 0$ e z_0 complexo qualquer, chama-se *disco aberto*² de centro z_0 e raio r ao conjunto $D_r(z_0)$ de todos os números complexos que estão a uma distância menor do que r do ponto z_0 , isto é,

$$D_r(z_0) = \{z: |z - z_0| < r\},$$

como ilustra a Fig. 1.12. O *disco fechado* é o conjunto $\{z: |z - z_0| \leq r\}$, que inclui a fronteira, isto é, o círculo $\{z: |z - z_0| = r\}$.

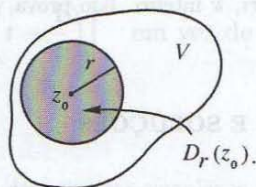


Fig. 1.12

Chama-se *vizinhança* de um ponto z_0 a todo conjunto V que contém um disco de centro z_0 . Em particular, qualquer disco $D_r(z_0)$ é uma vizinhança de z_0 , que freqüentemente denotaremos por $V_r(z_0)$. Usaremos $V'_r(z_0)$ para denotar a vizinhança $V_r(z_0)$, da qual excluímos o ponto z_0 , isto é, $V'_r(z_0) = V_r(z_0) - \{z_0\}$. Costuma-se chamar $V'_r(z_0)$ de *vizinhança perfurada*.

Dizemos que z_0 é *ponto interior* de um conjunto C se C é vizinhança de z_0 , isto é, se existe um disco de centro z_0 todo contido em C . Dizemos que C é *aberto* se todos os seus pontos são interiores, ou seja, se C é vizinhança de cada um de seus pontos.

A título de ilustração, vamos demonstrar que todo disco $D_r(z_0)$ é aberto. Para isto, seja w um ponto qualquer de $D_r(z_0)$. Temos de mostrar que existe

²No 2º grau é costume distinguir entre “círculo” e “circunferência”. Mas na universidade, “círculo” costuma ter o mesmo significado de “circunferência”, daí a palavra “disco” ser usada para designar o interior do círculo.

um disco $D_\varepsilon(w)$ contido em $D_r(z_0)$ (Fig. 1.13). Seja $\delta = |w - z_0|$; então, $\delta < r$. Seja $\varepsilon < r - \delta$ e z um ponto qualquer de $D_\varepsilon(w)$. Pela desigualdade do triângulo,

$$|z - z_0| = |(z - w) + (w - z_0)| \leq |z - w| + |w - z_0|.$$

Como $|z - w| < \varepsilon < r - \delta$ e $|w - z_0| = \delta$, obtemos $|z - z_0| < (r - \delta) + \delta = r$. Logo, $z \in D_r(z_0)$. Mas z é arbitrário em $D_\varepsilon(w)$, o que nos leva a concluir que $D_\varepsilon(w) \subset D_r(z_0)$, e isto completa a demonstração.

Dizemos que um conjunto F é *fechado* quando o seu complementar é aberto. Lembramos que o *complementar* de um conjunto C é o conjunto C' dos pontos que não pertencem a C . É claro que o complementar do complementar de C é o próprio C .

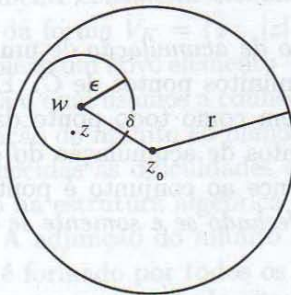


Fig. 1.13

Chama-se *fronteira* de um conjunto C ao conjunto dos pontos z tais que qualquer vizinhança de z contém pontos de C e pontos do seu complementar C' (Fig. 1.14). Desta definição segue-se que a fronteira de C é também a fronteira de C' . Um ponto da fronteira pode ou não pertencer ao conjunto em questão. Por exemplo, no conjunto

$$A = \{z: 3 \leq |z| < 5\},$$

a fronteira é a união do conjunto dos pontos z tais que $|z| = 3$ (que pertencem ao conjunto) com o conjunto dos pontos z tais que $|z| = 5$ (que não

pertencem ao conjunto). Esse conjunto não é aberto nem fechado.

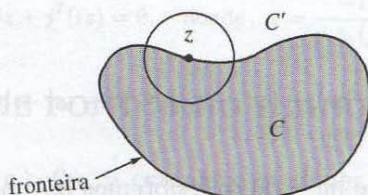


Fig. 1.14

É fácil ver que nenhum ponto interior a um conjunto pode ser ponto de sua fronteira, e nenhum ponto da fronteira pode ser ponto interior. Em consequência, *um conjunto é aberto se e somente se ele não contém pontos de sua fronteira*. Daqui e da definição de conjunto fechado segue-se que *um conjunto é fechado se e somente se ele contém todos os pontos de sua fronteira*.

Dizemos que z_0 é *ponto de acumulação* de um conjunto C se qualquer vizinhança de z_0 contém infinitos pontos de C . É fácil ver que um ponto interior a um conjunto, bem como todo ponto da fronteira que não pertence ao conjunto, são pontos de acumulação do conjunto; todo ponto de acumulação que não pertence ao conjunto é ponto da fronteira; em consequência, *um conjunto é fechado se e somente se ele contém todos os seus pontos de acumulação*.

Dizemos que um conjunto aberto é *conexo* se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por um arco todo contido no conjunto. (Veja a definição de arco no início do Capítulo 3.) Chama-se *região* a todo conjunto aberto e conexo. É freqüente, na literatura, o uso do vocábulo “domínio” com o mesmo significado de “região”, caso em que se deve tomar cuidado para não confundir “domínio” com “domínio de função”; por isso mesmo usaremos sempre o vocábulo “região” com o significado que lhe damos aqui, e não “domínio”.

Diz-se que um conjunto C é *limitado* se existe um número positivo K tal que $|z| \leq K$ para todo z em C . Chama-se conjunto *compacto* a todo conjunto limitado e fechado.

Chama-se *ponto isolado* de um conjunto C a todo ponto de C que não é ponto de acumulação desse conjunto. Por exemplo, todos os pontos do

conjunto infinito

$$C = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, \dots, n/(n+1), \dots\}$$

são pontos isolados; 1 é o único ponto de acumulação desse conjunto e não pertence a ele.

Todas essas noções são as mesmas do plano euclidiano. Elas se baseiam apenas na noção de *distância de dois pontos* z_1 e z_2 , dada por $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, que é o mesmo que a distância euclidiana $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, onde $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$. Aliás, mesmo do ponto de vista algébrico, o plano complexo e o plano euclidiano só diferem um do outro devido ao fato de termos definido a multiplicação de números (ou pontos) complexos, enquanto no plano euclidiano não temos tal operação.

Muitas vezes é conveniente considerar *vizinhanças do infinito*, assim denominados os conjuntos da forma $V_K = \{z: |z| > K\}$. Isto corresponde a incorporar ao plano complexo um novo elemento — o ponto no infinito, como costumamos dizer — para o qual usamos a conhecida notação ∞ . Deve ficar bem claro que essa adjunção do infinito ao plano complexo não tem caráter algébrico. São bem conhecidas as dificuldades que surgem quando procuramos envolver o infinito na estrutura algébrica por meio das operações de adição e multiplicação. A adjunção do infinito ao plano complexo resulta no *plano estendido*, que é formado por todos os pontos finitos, juntamente com o ponto infinito. Este ponto é único, em contraste com a reta, onde temos dois infinitos, $+\infty$ e $-\infty$. No plano estendido, qualquer semi-reta de origem z liga z ao ponto infinito.

Vejam os alguns exemplos de conjuntos de pontos no plano complexo. Faremos a descrição deles, deixando ao leitor a tarefa de fazer os respectivos gráficos. O conjunto dos pontos z tais que $|z - 3i| < 5$ é o disco de centro $z_0 = 3i$ e raio 5; $|z + 3| > 7$ é o complementar, ou exterior, do disco fechado $|z - (-3)| \leq 7$ de centro -3 e raio 7; o conjunto dos pontos z tais que $|z - 1/2 + i| \leq 2$ é o disco fechado de centro $z_0 = 1/2 - i$ e raio 2; $|2z + 4 - 3i| \geq 5$ é o mesmo que $|z + 2 - 3i/2| \geq 5/2$, que é o exterior do disco de centro $z_0 = -2 + 3i/2$ e raio $5/2$.

A equação $z = \alpha + re^{i\theta}$ descreve o disco de centro α e raio r , θ variando

no intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$ (Fig. 1.15).

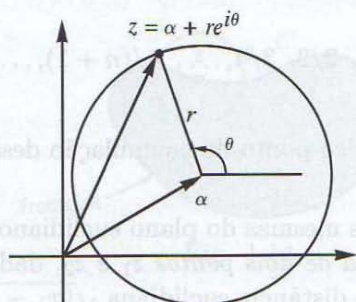


Fig. 1.15

A reta que passa pelos pontos α e β é dada pela equação paramétrica $z = \alpha + (\beta - \alpha)t$, o parâmetro t variando no conjunto dos números reais (Fig. 1.16).

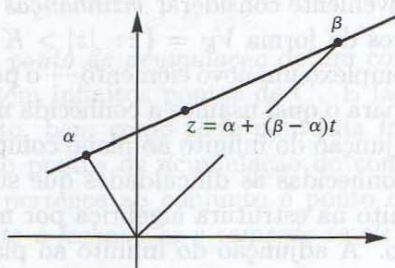


Fig. 1.16

Qual é o conjunto dos pontos z tais que $\operatorname{Re} z^2 < 0$? Pondo $z = re^{i\theta}$, temos: $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$, portanto, a transformação que leva z em $w = z^2$ transforma uma região angular $0 < \arg z < \alpha$ na região $0 < \arg w < 2\alpha$, como ilustra a Fig. 1.17.

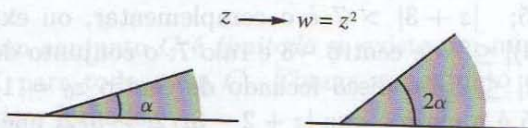


Fig. 1.17

Feita esta observação, vemos que o conjunto dos pontos $\operatorname{Re} z^2 < 0$ é a reunião dos dois conjuntos ilustrados na Fig. 1.18:

$$C_1 = \left\{ z : \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \right\} \quad \text{e} \quad C_2 = \left\{ z : -\frac{3\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{4} \right\}.$$

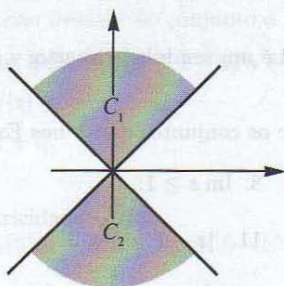


Fig. 1.18

De modo análogo, verifica-se que o conjunto dos pontos z tais que $\operatorname{Im} z^2 > 0$ é a união dos conjuntos

$$S_1 = \{ z : 0 < \arg z < \pi/2 \} \quad \text{e} \quad S_2 = \{ z : \pi < \arg z < 3\pi/2 \},$$

mostrados na Fig. 1.19.

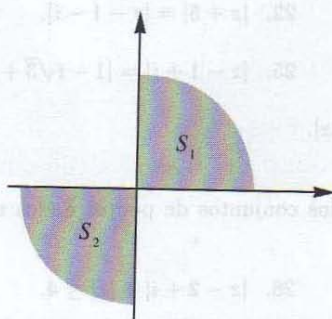


Fig. 1.19

EXERCÍCIOS

1. Mostre que o plano complexo é um conjunto aberto. (Portanto, seu complementar, o conjunto vazio ϕ , é fechado.)

32 Capítulo 1: Números complexos

- Prove que o conjunto vazio é aberto. (Portanto, o seu complementar, que é o plano todo, é fechado.)
- Prove que qualquer união de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
- Dê um contra-exemplo para mostrar que uma união de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado.
- Prove que a interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
- Verifique que $y > 2x - 3$ é um semiplano aberto; e que $x \leq 3y/2 + 1$ é um semiplano fechado.

Represente graficamente os conjuntos dados nos Exercs. 7 a 20.

- $\operatorname{Re} z < -3$.
- $\operatorname{Im} z \geq 1$.
- $|z - 2i| > 2$.
- $|z + 1| \leq 2$.
- $|z - 1 + i| < 3$.
- $z \neq 0, 0 \leq \arg z < \pi/3$.
- $|z| > 2, |\arg z| < \pi$.
- $1 < |z + 1 - 2i| < 2$.
- $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{4}$.
- $|3z - 2i| \leq 5$.
- $\operatorname{Im} z^2 < 0$.
- $\operatorname{Re} z^2 > 0$.
- $z \neq 0, |\arg z^3| < 2\pi/3$.
- $\operatorname{Im} z^3 < 0$.

Mostre que cada um dos conjuntos dados nos Exercs. 21 a 26 é uma reta. Faça os respectivos gráficos.

- $|z - 2| = |z - 3i|$.
- $|z + 5| = |z - 1 - i|$.
- $|z - 1 + i| = |3 + i - z|$.
- $|z + 3 - i| = |z - 4i|$.
- $|z - 1 + i| = |1 - i\sqrt{3} + z|$.
- $|(z - i)(1 - i\sqrt{3})| = |2z|$.

Identifique cada um dos conjuntos de pontos dados nos Exercs. 27 a 30. Faça os respectivos gráficos.

- $|z - i| + |z + 2| = 3$.
- $|z - 2 + i| + |z| \leq 4$.
- $|z - 2| = 2|z + 2i|$.
- $\operatorname{Re}(1 - z) = |z|$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

2. Observe que a proposição

$$x \in \phi \Rightarrow x \text{ é ponto interior do conjunto } \phi$$

equivale a

$$x \text{ não é ponto interior do conjunto } \phi \Rightarrow x \notin \phi$$

4. Observe que a união dos discos fechados $|z| \leq 1 - 1/n$ é o disco aberto $|z| < 1$.
15. Observe que $\operatorname{Re}(1/z) = \operatorname{Re}(\bar{z}/|z|^2)$.
22. Mediatrix do segmento $[-5, 1 + i]$.
26. Mediatrix do segmento $[0, i]$.
27. Elipse de focos i e -2 , excentricidade $\sqrt{5}/3$.

FUNÇÕES ANALÍTICAS

FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA

Vamos considerar funções definidas em conjuntos complexos, assumindo valores complexos. Mais precisamente, seja D um conjunto de números complexos e seja f uma lei que faz corresponder, a cada elemento z do conjunto D , um único número complexo, que denotamos por $f(z)$. Nestas condições, diz-se que f é uma função com domínio D . O conjunto I dos valores $w = f(z)$, correspondentes a todos os valores de z em D , é chamado a *imagem* de D pela função f (Fig. 2.1); z é chamada *variável independente*, e w , a *variável dependente*.

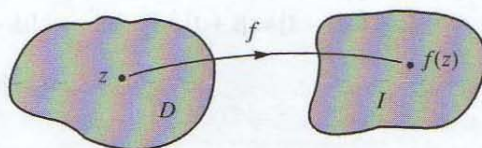


Fig. 2.1

O leitor deve notar que para caracterizar uma função não basta dar a lei de correspondência f ; é preciso especificar também o domínio de definição D . Entretanto, freqüentemente consideramos funções dadas em termos de relações analíticas bem definidas $w = f(z)$, sem especificar o domínio de definição. Nestes casos, fica então subentendido que o domínio da função é o conjunto de todos os valores z para os quais faz sentido a expressão

analítica $f(z)$. Por exemplo, quando falamos “seja a função

$$w = \frac{3z - 5i}{(z - i)(z + 7)},$$

estamos usando esta relação para especificar a lei que faz corresponder um valor w a cada valor z ; ao mesmo tempo, fica subentendido que o domínio desta função é o plano complexo, excetuados os pontos $z = i$ e $z = -7$, já que nestes pontos o denominador se anula.

Diz-se que uma função f_1 com domínio D_1 é *restrição* de uma função f_2 com domínio D_2 se D_1 estiver contido em D_2 e $f_1(z) = f_2(z)$ para todo z em D_1 (Fig. 2.2). Nestas mesmas condições, diz-se que f_2 é uma *extensão* de f_1 . Por exemplo, a expressão

$$w = e^z, \quad z \text{ complexo},$$

define uma função em todo o plano complexo, a qual é uma extensão da função

$$y = e^x, \quad x \text{ real}.$$

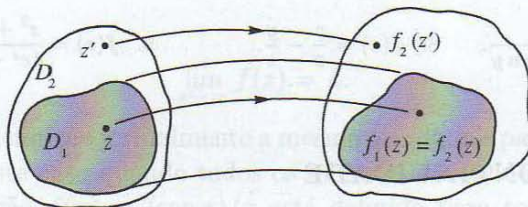


Fig. 2.2

Uma função da variável complexa z pode assumir valores puramente reais. Por exemplo,

$$f(x) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = x + iy,$$

é uma função real da variável complexa z .

A cada função $w = f(z)$ de uma variável complexa $z = x + iy$ estão associadas duas funções reais das variáveis reais x e y , dadas por

$$u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) \quad \text{e} \quad v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Por exemplo, sendo $f(z) = z^2 + 3z - 5$, temos:

$$u = x^2 - y^2 + 3x - 5 \quad \text{e} \quad v = 2xy + 3y.$$

Outro exemplo é dado por $f(z) = \exp(z^2 + 4z)$, em cujo caso,

$$u = e^{x^2 - y^2 + 4x} \cos(2xy + 4y) \quad \text{e} \quad v = e^{x^2 - y^2 + 4x} \sin(2xy + 4y).$$

EXERCÍCIOS

Determine as partes real e imaginária de cada uma das funções dadas nos Exercs. 1 a 6.

$$1. \quad w = z^2 - 5z + 3. \quad 2. \quad w = \frac{3}{z - 5}. \quad 3. \quad w = \frac{z + 2}{z - 2}.$$

$$4. \quad w = \frac{z - 4i}{z + 3i}. \quad 5. \quad w = \frac{z - 3i\bar{z}}{z - i}. \quad 6. \quad w = e^z(z - i).$$

Determine o domínio máximo de definição das funções dadas nos Exercs. 7 a 9.

$$7. \quad f(z) = \frac{z}{(z - i) \sin y}. \quad 8. \quad f(z) = \frac{z}{x} - \frac{y}{z}. \quad 9. \quad f(z) = \frac{z^2 + (z - 1)^3}{(e^z - 1) \cos y}.$$

LIMITE E CONTINUIDADE

A definição de limite que daremos agora é formalmente a mesma dos cursos de Cálculo e Análise na reta. E, como veremos, sua importância é de natureza teórica, pois ela permite provar todos os resultados que são essenciais à construção da teoria do limite.

Seja f uma função com domínio D . Desejamos atribuir significado preciso à expressão “ f tem limite L com z tendendo a z_0 ”. Isto deverá significar que a distância $|f(z) - L|$ entre $f(z)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena, à custa de restringir z a uma vizinhança conveniente de z_0 . Mas a variável z apenas aproxima z_0 , sem nunca assumir este valor. É claro também que z deve pertencer ao domínio da função e z_0 deve ser ponto de acumulação desse domínio. Essas observações ajudam a bem compreender

a definição que damos a seguir. (Veja a Fig. 2.3.)

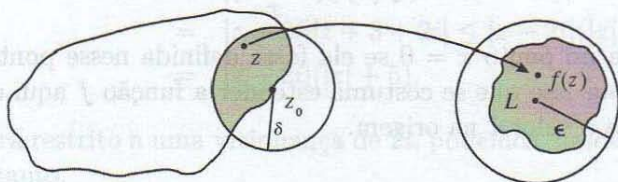


Fig. 2.3

2.1. Definição. Seja z_0 um ponto de acumulação do domínio D de uma função f . Diz-se que f tem limite L com z tendendo a z_0 se dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon;$$

ou ainda, de maneira equivalente:

$$z \in D \cap V'_\delta(z_0) \Rightarrow f(z) \in V_\varepsilon(L).$$

Escreve-se:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

Sendo essa definição formalmente a mesma que damos para funções reais, ela se reduz a este caso quando todos os números envolvidos são reais. Por exemplo, a função $f(x) = (\sin x)/x$ está definida para todo número real $x \neq 0$; e, como o leitor deve se lembrar do seu curso de Cálculo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Este é um exemplo típico de função que tem limite num ponto sem estar definida neste ponto; ele evidencia bem o fato de que o limite L nada tem a ver com o valor da função no ponto z_0 .

Quando o ponto z_0 pertence ao domínio de f e $L = f(z_0)$, dizemos que f é *contínua* no ponto z_0 e escrevemos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Neste caso não há por que excluir o ponto $z = z_0$ na definição de limite.

Com essa definição de continuidade, a função que consideramos há pouco,

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

seria contínua no ponto $x = 0$ se ela fosse definida nesse ponto com valor $f(0) = 1$. É por isso que se costuma estender a função f aqui considerada, atribuindo-lhe o valor 1 na origem.

2.2. Exemplos. Usando a Definição 2.1, vamos mostrar que a função

$$f(z) = \frac{z + 3i}{2}$$

é contínua no ponto $z_0 = 2 - i$. Temos:

$$|f(z) - f(z_0)| = \left| \frac{z + 3i}{2} - (1 + i) \right| = \frac{|z - (2 - i)|}{2}.$$

Daqui segue-se que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = 2\varepsilon$ para termos

$$|z - (2 - i)| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

(Observe que esta implicação vale também no sentido inverso, mas nem sempre é assim, como veremos no Exemplo 2.3 adiante.)

Se, ao invés da função f anterior, considerarmos a função

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{para } z = 2 - i, \\ \frac{z + 3i}{2} & \text{para } z \neq 2 - i, \end{cases}$$

o limite com $z \rightarrow 2 - i$ será o mesmo que no caso da função f , porém diferente do valor de g no ponto $2 - i$.

2.3. Exemplo. Ainda usando a Definição 2.1, vamos mostrar que

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z^2 + 3z) = -4 + 6i.$$

De fato, temos:

$$\begin{aligned} |(z^2 + 3z) - (-4 + 6i)| &= |(z^2 + 4) + 3(z - 2i)| \\ &= |(z - 2i)(z + 2i) + 3(z - 2i)| \\ &= |z - 2i||z + 3 + 2i| \leq |z - 2i|(|z| + |3| + |2i|) \\ &= |z - 2i|(|z| + 5). \end{aligned}$$

Como z ficará restrito a uma vizinhança de $2i$, podemos, desde agora, supor $|z| < 3$, portanto,

$$|(z^2 + 3z) - (-4 + 6i)| \leq 8|z - 2i|.$$

Esta última expressão será menor do que ε , desde que $|z - 2i| < \varepsilon/8$. Isto parece indicar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon/8$; mas não podemos nos esquecer de que z deve satisfazer a restrição $|z| < 3$. Observando a Fig. 2.4, vemos que esta condição ficará satisfeita se tomarmos $\delta < 1$. Para provar isto, usamos a desigualdade do triângulo, assim:

$$|z| = |(z - 2i) + 2i| \leq |z - 2i| + 2 \leq \delta + 2 < 1 + 2 = 3.$$

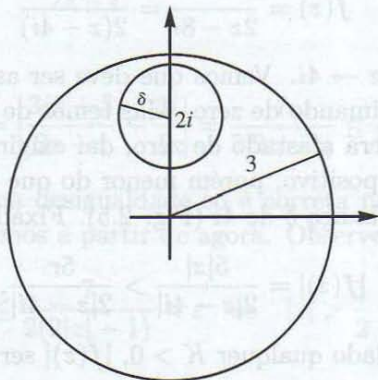


Fig. 2.4

Concluimos que δ deve ser o menor dos números 1 e $\varepsilon/8$, garantindo-nos o resultado desejado:

$$|z - 2i| < \delta \Rightarrow |(z^2 + 3z) - (-4 + 6i)| < \varepsilon.$$

(Observe que esta última implicação não vale no sentido inverso, da direita para a esquerda. E não tem de valer mesmo, pois, para chegarmos a ela utilizamos a desigualdade do triângulo e a estimativa $|z| < 3$. Por exemplo, tomando $\varepsilon = 8$, $\delta = 1$, e $z = 0,9i$, a última desigualdade fica satisfeita, mas não a primeira.)

Como no caso de funções de variável real, a Definição 2.1 pode ser facilmente adaptada ao caso em que z ou $f(z)$ tende a infinito, resultando nas definições que damos a seguir.

2.4. Definições. Diz-se que uma função $f(z)$ com domínio D tem limite finito L com $z \rightarrow \infty$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$ para todo $z \in D$, $|z| > M$.

Diz-se que $f(z)$ tende a infinito com z tendendo a z_0 se, dado qualquer $K > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z)| > K$ para todo $z \in D \cap V_\delta'(z_0)$.

Diz-se que $f(z)$ tende a infinito com z tendendo a infinito se, dado qualquer $K > 0$, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| > K$ para todo $z \in D$, $|z| > M$.

2.5. Exemplo. A função

$$f(z) = \frac{5z}{2z - 8i} = \frac{5z}{2(z - 4i)}$$

tende a infinito com $z \rightarrow 4i$. Vemos que deve ser assim porque o denominador estará se aproximando de zero. Mas temos de nos certificar de que o numerador permanecerá afastado de zero, daí exigirmos que $|z| > r$, onde r é qualquer número positivo, porém menor do que 4, para que z possa se acomodar numa vizinhança δ de $4i$ (Fig. 2.5). Fixado esse r , teremos:

$$|f(z)| = \frac{5|z|}{2|z - 4i|} > \frac{5r}{2|z - 4i|}.$$

Daqui segue-se que, dado qualquer $K > 0$, $|f(z)|$ será maior do que K se

$$\frac{5r}{2|z - 4i|} > K, \quad \text{ou seja,} \quad 0 < |z - 4i| < \frac{5r}{2K}.$$

Esta condição deve ser satisfeita juntamente com a condição $|z| > r$. Tomando então $0 < |z - 4i| < \delta$, onde $\delta = \min\{5r/2K, 4 - r\}$, obtemos

$$|z| = |4i + (z - 4i)| \geq 4 - |z - 4i| > 4 - \delta > 4 - (4 - r) = r,$$

logo,

$$0 < |z - 4i| < \delta \Rightarrow |f(z)| > K.$$

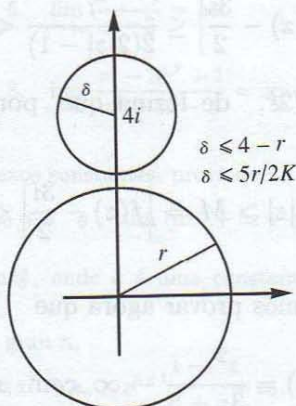


Fig. 2.5

2.6. Exemplo. Vamos provar que

$$f(z) = \frac{3iz + 5}{2z - i} \rightarrow 3i/2 \quad \text{com } z \rightarrow \infty.$$

De fato,

$$\left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| = \left| \frac{3iz + 5}{2z - i} - \frac{3i}{2} \right| = \frac{7}{2|2z - i|} \leq \frac{7}{2(2|z| - 1)}.$$

Observe que esta última desigualdade só é correta no pressuposto de que $|z| > 1/2$, como admitimos a partir de agora. Observe também que

$$\left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| \leq \frac{7}{2(2|z| - 1)} < \varepsilon \quad \text{se } |z| > \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2\varepsilon} + 1 \right).$$

Assim, com

$$M = \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2\varepsilon} + 1 \right) \right\}$$

obtemos o resultado desejado:

$$|z| > M \Rightarrow \left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| < \varepsilon.$$

Poderíamos também ter simplificado um pouco mais, tomando $|z| > 1$, donde $2|z| - 1 > |z|$; portanto,

$$\left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| \leq \frac{7}{2(2|z| - 1)} < \frac{7}{2|z|},$$

que é $< \varepsilon \Leftrightarrow |z| > 7/2\varepsilon$, de forma que, pondo $M = \max\{1, 7/2\varepsilon\}$, teríamos, como antes,

$$|z| > M \Rightarrow \left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| < \varepsilon.$$

2.7. Exemplo. Vamos provar agora que

$$f(z) = \frac{z^2 - i}{3z + 5} \rightarrow \infty \text{ com } z \rightarrow \infty.$$

Com a restrição $|z| > 5$, teremos:

$$|f(z)| = \frac{|z^2 - i|}{|3z + 5|} \geq \frac{|z|^2 - 1}{3|z| + 5} > \frac{|z|^2 - 1}{4|z|} > \frac{|z|^2 - |z|^2/2}{4|z|} = \frac{|z|}{8}.$$

Dado $K > 0$, basta então fazer $|z| > 8K$ e $|z| > 5$ para termos $|f(z)| > K$, isto é, sendo M o maior dos números 5 e $8K$, teremos:

$$|z| > M \Rightarrow |f(z)| > K.$$

Como ilustram esses exemplos, para demonstrar, diretamente da definição de limite, que $f(z) \rightarrow L$ com $z \rightarrow z_0$, temos de obter uma desigualdade do tipo $|f(z) - L| < K|z - z_0|$. Conseguimos isto por meio de simplificações, à custa de desigualdades triangulares do tipo $|a + b| \leq |a| + |b|$ em numeradores, e do tipo $|a + b| \geq |a| - |b|$ em denominadores. Evidentemente, neste último caso é preciso que $|a|$ seja maior do que $|b|$. Para obter uma desigualdade do tipo $|f(z)| > K$, devemos inverter o uso das desigualdades triangulares.

EXERCÍCIOS

Estabeleça, diretamente da definição, os limites indicados nos Exercs. 1 a 9.

1. $\lim_{z \rightarrow -3i} (z^2 - 5z) = -9 + 15i$.
2. $\lim_{z \rightarrow 2i} (2x + y^2) = 4$.
3. $\lim_{z \rightarrow i} \frac{4z + i}{z + 1} = \frac{5i}{1 + i}$.
4. $\lim_{z \rightarrow i} \frac{7}{z^2 + 1} = \infty$.
5. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 - 1}{z - 3} = \infty$.
6. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{6z + 7}{2z - 3} = 3$.
7. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z + 1}{z^2 - 7} = 0$.
8. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{z^2 + 5z - 3} = \infty$.
9. $\lim_{z \rightarrow i} \frac{6z + 7}{2z - 3} = 3$.

10. Sendo a e b números complexos constantes, prove que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (az + b) = az_0 + b \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (az^2 + bz + c) = az_0^2 + bz_0 + c.$$

11. Prove que $\lim_{z \rightarrow z_0} az^n = az_0^n$, onde a é uma constante complexa e n um inteiro positivo.
12. Prove que um polinômio de grau n ,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

tende a ∞ com $z \rightarrow \infty$.

13. Prove que o quociente de dois polinômios,

$$f(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0}, \quad a_m b_n \neq 0,$$

tende a zero, a a_m/b_n ou a ∞ , com $z \rightarrow \infty$, conforme seja $m < n$, $m = n$ ou $m > n$, respectivamente.

14. Prove que a função $w = \sqrt{z}$ é contínua em todo ponto z .
15. Prove que a função $w = \lim 1/z$ é contínua em todo ponto $z \neq 0$.
16. Prove que a função $w = \lim 1/(z - \alpha)$ é contínua em todo ponto $z \neq \alpha$.
17. Prove que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |L|$.

SUGESTÕES

2. Lembre-se de que $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ e $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$. Supondo, de início, $|z - z_0| < 1$, prove que $|x| < 1$ e $|y| < 3$. Então,

$$\begin{aligned} |(2x + y^2) - 4| &= |2x + (y - 2)(y + 2)| \\ &\leq 2|x| + |y - 2|(|y| + 2) \\ &\leq 5|x| + 5|y - 2| \leq 10|z - 2i|. \end{aligned}$$

8. Observe que, sendo, digamos, $|z| \geq 5$, então,

$$\left| \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{z^2 + 5z - 3} \right| \geq \frac{|z|^3 - |3z^2 + 1|}{|z|^2 + 5|z| + 3} \geq \frac{|z|^3 - 3|z|^2 - 1}{|z|^2 + 5|z| + 3} \geq \frac{|z|^3 - 3|z|^3/5 - |z|^3/5}{|z|^2 + 5|z|^2 + |z|^2} = \dots$$

11. Lembre-se de que $z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1})$.

12. Observe:

$$|P(z)| \geq |z|^n \left| |a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right| \geq |z|^n \left[|a_n| - \left(\left| \frac{a_{n-1}}{z} \right| + \cdots + \left| \frac{a_0}{z^n} \right| \right) \right].$$

Faça o último parêntese menor do que $|a_n|/2$.

14. Sendo $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ e $z = r e^{i\theta}$, as funções $\sqrt{z}$ e $\sqrt{z_0}$ devem ser entendidas como

$$\sqrt{z_0} = r_0^{1/2} e^{i\theta_0/2} \quad \text{e} \quad \sqrt{z} = r^{1/2} e^{i\theta/2},$$

θ variando numa vizinhança de θ_0 ; por exemplo, $|\theta - \theta_0| < \pi/2$. Observe que

$$\sqrt{z} - \sqrt{z_0} = \frac{z - z_0}{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}},$$

$$|\sqrt{z} + \sqrt{z_0}|^2 = (\sqrt{z} - \sqrt{z_0})(\overline{\sqrt{z}} - \overline{\sqrt{z_0}}) = r + r_0 + 2\sqrt{rr_0} \cos[(\theta - \theta_0)/2] > r_0,$$

desde que se tome $|z - z_0| < \delta = r_0$. Faça uma figura para entender o que se passa.

15. Observe que

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z z_0|} < \frac{2|z - z_0|}{|z_0|^2},$$

desde que $|z| > |z_0|/2$. Prove que isto acontece tomando $|z - z_0| < \delta = |z_0|/2$.

PROPRIEDADES DO LIMITE

As propriedades do limite, relativas aos limites da soma, do produto, do quociente etc., já conhecidas no caso de funções de variáveis reais, permanecem válidas para funções de variável complexa, e são estabelecidas como no caso de variável real. É o que veremos agora.

2.8. Teorema. Se f e g têm limites finitos com $z \rightarrow z_0$ (digamos, $\lim f = F$ e $\lim g = G$), então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z); \quad (2.1)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z); \quad (2.2)$$

$$\text{se } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0, \text{ então } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}. \quad (2.3)$$

Demonstração de (2.1). Observe que

$$\begin{aligned}|f(z) + g(z) - (F + G)| &= |(f(z) - F) + (g(z) - G)| \\ &\leq |f(z) - F| + |g(z) - G|,\end{aligned}$$

de sorte que, dado $\varepsilon > 0$, $|f(z) + g(z) - (F + G)|$ será $< \varepsilon$ se fizermos $|f(z) - F| < \varepsilon/2$ e $|g(z) - G| < \varepsilon/2$. Ora, sendo D_f e D_g os domínios de f e g , respectivamente, existem $\delta' > 0$ e $\delta'' > 0$ tais que

$$z \in D_f \cap V_{\delta'}'(z_0) \Rightarrow |f(z) - F| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$z \in D_g \cap V_{\delta''}'(z_0) \Rightarrow |g(z) - G| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Então, valem essas desigualdades se tomarmos

$$z \in D_f \cap D_g \cap V_{\delta}'(z_0),$$

onde $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, pois $\delta \leq \delta'$ e $\delta \leq \delta''$. Assim,

$$z \in D_f \cap D_g \cap V_{\delta}'(z_0) \Rightarrow |f(z) + g(z) - (F + G)| < \varepsilon,$$

o que completa a demonstração.

Deixamos as demonstrações das propriedades (2.2) e (2.3) para os exercícios. O leitor poderá demonstrá-las com a ajuda dos resultados do teorema seguinte.

2.9. Teorema. 1) Se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \neq 0$, então existe uma vizinhança $V_{\delta}'(z_0)$ na qual $f(z)$ é limitada.

2) com a mesma hipótese, existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in D_f \cap V_{\delta}'(z_0) \Rightarrow |f(z)| > |L|/2.$$

Demonstração. Da hipótese segue-se que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in D_f \cap V_{\delta}'(z_0) \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Então, com as mesmas restrições em z ,

$$|f(z)| = |L + [f(z) - L]| \leq |L| + |f(z) - L| < |L| + \varepsilon.$$

Isto prova que a função é limitada pela constante $|L| + \varepsilon$.

Para provar a segunda parte, tomemos $\varepsilon = |L|/2$. Teremos, com as mesmas restrições em z :

$$\begin{aligned} |f(z)| = |L + [f(z) - L]| &\geq |L| - |f(z) - L| \\ &> |L| - \varepsilon = |L| - |L|/2 = |L|/2, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração.

Consequência imediata dos teoremas anteriores são as propriedades das funções contínuas enunciadas a seguir.

2.10. Teorema. *A soma e o produto de funções contínuas são funções contínuas.*

O quociente de duas funções f e g , contínuas num ponto z_0 , é uma função contínua em z_0 , desde que $g(z_0)$ não se anule.

Vale também a propriedade da função composta, enunciada a seguir e cuja demonstração deixamos para os exercícios.

2.11. Teorema. *Seja g uma função cujo domínio contenha um ponto z_0 e cuja imagem esteja contida no domínio de uma função f . Nestas condições, se g for contínua em z_0 e f contínua em $g(z_0)$, então a função composta $f(g(z))$ será contínua no ponto z_0 .*

Existe uma importante relação entre o limite de uma função complexa e os limites de suas partes real e imaginária, que consideramos a seguir.

2.12. Teorema. *Seja $f = u + iv$ uma função com domínio D , e seja $L = U + iV$. Então*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \quad (2.4)$$

se e somente se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(x, y) = U \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y) = V. \quad (2.5)$$

Demonstração. Suponhamos satisfeita a condição (2.4). Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in D \cap V_\delta(z_0) \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon. \quad (2.6)$$