Exemplo 14.12. O sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - z = 10 \\ \quad 4y + 5z = 6 \\ \quad\quad y - z = 0 \end{cases}$$

não está na forma escalonada.

Há dois tipos de sistemas escalonados a considerar; vejamos quais são e como se resolvem.

Primeiro tipo — o número de equações é igual ao de incógnitas

Nesse caso, o sistema é determinado e cada incógnita é obtida resolvendo-se o sistema "de baixo para cima".

Exemplo 14.13. Vamos resolver o sistema escalonado abaixo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ \quad 3y - z = 1 \\ \quad\quad 3z = 6 \end{cases} \uparrow$$

- da 3ª equação obtemos $z = 2$;
- substituindo $z = 2$ na 2ª equação, obtemos $3y - 2 = 1$, ou seja, $y = 1$;
- substituindo $z = 2$ e $y = 1$ na 1ª equação, obtemos $x + 2 + 2 = 4$, resultando $x = 0$.

Portanto, a solução (única) do sistema é $(0, 1, 2)$.

Segundo tipo — o número de equações é menor que o de incógnitas

Nesse caso, pegamos as incógnitas que não aparecem no começo de nenhuma equação (chamadas variáveis livres) e as transpomos para o 2º membro. Em seguida, para cada variável livre atribuímos um valor arbitrário e resolvemos o sistema nas incógnitas do 1º membro. O fato de atribuirmos valores arbitrários a algumas das incógnitas faz com que o sistema tenha uma infinidade de soluções, sendo, portanto, indeterminado.

Exemplo 14.14. Vamos resolver o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ \quad y - z = 2. \end{cases}$$

A variável livre é z (não aparece no começo de nenhuma equação). Transpondo z para o 2º membro, teremos:

$$\begin{cases} x - y = 4 - z \\ \quad y = 2 + z. \end{cases}$$

Atribuindo a z um valor arbitrário α, teremos:

$$\begin{cases} x - y = 4 - \alpha \\ \quad y = 2 + \alpha \end{cases}$$

- da 2ª equação, temos $y = 2 + \alpha$;
- substituindo $y = 2 + \alpha$ na 1ª equação, obtemos $x - 2 - \alpha = 4 - \alpha$, ou seja, $x = 6$.

Portanto, as soluções do sistema são as triplas ordenadas $(6, 2 + \alpha, \alpha)$ em que α é um número qualquer.

Eis algumas soluções:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 \rightarrow (6, 3, 1),\\
\alpha &= 0 \rightarrow (6, 2, 0),\\
\alpha &= -6 \rightarrow (6, -4, -6).
\end{aligned}$$

Escalonamento de um Sistema

Dados dois sistemas S_1 e S_2, diremos que são equivalentes se tiverem as mesmas soluções. Assim, são equivalentes os sistemas:

$$S_1: \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

e

$$S_2: \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -3y = -5 \end{cases}$$

pois são ambos determinados (uma vez que o determinante D da matriz dos coeficientes é diferente de zero) e admitem como solução o par ordenado $\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Já que sistemas equivalentes têm o mesmo conjunto solução, o que faremos é transformar um sistema linear qualquer num outro equivalente, porém na forma escalonada; isso porque sistemas escalonados são fáceis de resolver.

Precisamos então saber que recursos usar para transformar um sistema S num outro equivalente S' na forma escalonada. Tais recursos são os teoremas que veremos a seguir.

Teorema 14.2

Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema S por um número $k \neq 0$, obteremos um sistema S' equivalente a S.

Teorema 14.3

Substituindo-se uma equação de um sistema S pela soma membro a membro dela com outra, obteremos um novo sistema S' equivalente a S.

Para escalonarmos um sistema, teremos de seguir alguns passos, todos eles baseados nos Teoremas 14.2 e 14.3.

- *Primeiro passo*: anular os coeficientes da 1ª incógnita, da 2ª equação em diante.
- *Segundo passo*: deixar de lado a 1ª equação e repetir o primeiro passo com os coeficientes da próxima incógnita que tenha coeficiente diferente de zero, nas equações remanescentes.
- *Terceiro passo*: deixar de lado as duas primeiras equações e repetir o primeiro passo com os coeficientes da próxima incógnita que tenha coeficiente diferente de zero, nas equações remanescentes.

Os próximos passos são análogos e devem ser seguidos até que o sistema fique escalonado.

Exemplo 14.15. Vamos escalonar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4. \end{cases}$$

Temos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 & \times(-2) \\ 2x + y - z = 3 & + \\ 3x - y - 2z = -4. \end{cases}$$

Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a primeira multiplicada por −2:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 & \times(-3) \\ -3y - 3z = -15 & \\ 3x - y - 2z = -4 & + \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a primeira multiplicada por −3:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ -3y - 3z = -15 & \times\left(-\frac{1}{3}\right) \\ -7y - 5z = -31. \end{cases}$$

Multiplicamos a 2ª equação por $-\dfrac{1}{3}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 & \times(7) \\ -7y - 5z = -31 & + \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a segunda multiplicada por 7:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ 2z = 4. \end{cases}$$

O sistema está escalonado. Como o número de equações é igual ao de incógnitas, ele é possível e determinado.

Exemplo 14.16

Vamos escalonar o sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 2z = 10 \\ 2x - 3y + 7z = 18. \end{cases}$

Temos

$$\begin{cases} x + y + z = 4 & \times(-3) \\ 3x + 4y + 2z = 10 & + \\ 2x - 3y + 7z = 18. \end{cases}$$

Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª multiplicada por –3:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 & \times(-2) \\ y - z = -2 \\ 2x - 3y + 7z = 18 & + \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª multiplicada por –2:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z = -2 & \times(5) \\ -5y + 5z = 10 & + \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª multiplicada por 5:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z = -2 \\ 0y + 0z = 0. \end{cases}$$

Como a última equação é satisfeita para quaisquer valores de x, y e z, ela pode ser suprimida do sistema. Assim, obtemos o seguinte sistema escalonado, em que o número de equações é menor que o de incógnitas e, portanto, indeterminado:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z = -2. \end{cases}$$

Exemplo 14.17

Vamos escalonar o sistema $\begin{cases} 2x - y + 4z = -1 \\ 2x + 7y + 3z = 0 \\ 16y - 2z = 3. \end{cases}$

Temos

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -1 & \times(-1) \\ 2x + 7y + 3z = 0 & + \\ 16y - 2z = 3. \end{cases}$$

Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª multiplicada por −1:

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -1 \\ 8y - z = 1 \quad \times(-2) \\ 16y - 2z = 3 \quad + \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª multiplicada por −2:

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -1 \\ 8y - z = 1 \\ 0y + 0z = 1. \end{cases}$$

Como a última equação não é satisfeita para nenhum valor de x, y e z, concluímos que o sistema é impossível.

Observações

i) Se, durante o escalonamento, ocorrer uma equação do tipo $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots 0 \cdot x_n = b$ (com $b \neq 0$), então o sistema será impossível (é o caso do Exemplo 14.17).

ii) Se, durante o escalonamento, ocorrer uma equação do tipo $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$, então essa equação poderá ser suprimida do sistema (é o caso do Exemplo 14.16).

iii) Como os cálculos no processo de escalonamento são feitos apenas com os coeficientes e termos independentes, é comum adotar-se uma disposição matricial em que as primeiras colunas são formadas pelos coeficientes e a última pelos termos independentes. Assim, no Exemplo 14.15 poderíamos proceder como segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix};$$

substituímos a 2ª linha pela soma dela com a 1ª multiplicada por −2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix};$$

substituímos a 3ª linha pela soma dela com a 1ª multiplicada por −3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{bmatrix};$$

multiplicamos a 2ª equação por $-\frac{1}{3}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{bmatrix};$$

substituímos a 3ª linha pela soma dela com a 2ª multiplicada por 7:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

a última matriz corresponde ao sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ \quad\quad y + z = 5 \\ \quad\quad\quad 2z = 4. \end{cases}$$

iv) No caso do exemplo anterior, é comum fazermos com que o sistema escalonado fique com uma única incógnita por equação, aplicando-se o mesmo procedimento utilizado no escalonamento. Assim, retomando o Exemplo 14.15 na forma matricial e escalonado, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

multiplicamos a 3ª linha por $\frac{1}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

substituímos a 2ª linha pela soma dela com a 3ª multiplicada por –1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

substituímos a 1ª linha pela soma dela com a 3ª multiplicada por –1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

substituímos a 1ª linha pela soma dela com a 2ª multiplicada por –2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o sistema do Exemplo 14.15 é equivalente a

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad = 1 \\ \quad\quad y \quad = 3 \\ \quad\quad\quad z = 2, \end{cases}$$

cuja solução (1, 3, 2) é imediata.

Exercícios

3. Resolva os seguintes sistemas

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y - 3z = -9 \\ 3z = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ y + z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z + t - w = 5 \\ t + w = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y - z - t + w = 2 \\ z + t - w = 0 \\ t + 2w = 0 \end{cases}$

4. Escalone e resolva (quando possível) os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 4x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 7z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \\ 4x - y + z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - 4y + z = 2 \\ 7x - 10y - 3z = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \\ 3x + 6y = 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + z + t = 2 \\ x + y + t = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

5. Num país a renda nacional é dada pelas relações macroeconômicas por meio das equações *IS-LM* (*IS*: *Investment-Saving* e *LM*: *Liquidity Money*):

$$\begin{aligned} C &= 40 + 0{,}2(Y - T) \\ I &= 15 - 20r \\ M_d &= 4 + 0{,}1Y - 10r \\ M_s &= 10 \\ G &= T = 10 \end{aligned}$$

em que: Y é a renda nacional, C é o consumo, I é o investimento, r é a taxa de juros, M_d é a demanda por moeda, M_s é a oferta de moeda, G é o gasto governamental, e T é o imposto arrecadado. Obtenha os valores de Y e r de equilíbrio, isto é, aqueles valores que satisfazem as equações:

$$\begin{cases} Y = C + I + G \\ M_d = M_s \end{cases}$$

14.2 Matriz Inversa

É freqüente, em modelos quantitativos, encontrarmos equações em que a incógnita é uma matriz X, como:

$$X = CX + D,$$
$$A^t AX = A^t B,$$

em que A, B, C e D são matrizes conhecidas.

Em problemas dessa natureza, a matriz X pode ser obtida com a utilização de matrizes inversas, que passaremos a definir.

Dada uma matriz A de ordem n, com determinante diferente de zero, prova-se que existe e é única a matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

À matriz B damos o nome de inversa de A e a indicamos por A^{-1}.

Exemplo 14.18. A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ tem inversa pois $det\,A = -2 \neq 0$.

A inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$ pois

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2,$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Exemplo 14.19. A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não tem inversa, pois, se chamarmos de B a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, teremos

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + 2c & 2b + 2d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \forall a, b, c, d.$$

Observemos que, neste exemplo, $det\,A = 0$.

Cálculo da Matriz Inversa pela Definição

Exemplo 14.20. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. Como $det\,A = 1 \neq 0$, existe a inversa de A. Seja $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Então

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 5a+3c & 5b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

logo

$$\begin{cases} 2a+c=1 \\ 5a+3c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ c=-5 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 2b+d=0 \\ 5b+3d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ d=2, \end{cases}$$

portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que os dois sistemas que foram resolvidos têm os mesmos coeficientes, e os termos independentes do primeiro são dados pela primeira coluna da matriz identidade, e os termos independentes do segundo sistema, pela segunda coluna da matriz identidade. Assim, os dois sistemas poderiam ser resolvidos simultaneamente. A matriz a ser escalonada seria:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right],$$ cujo escalonamento é dado a seguir:

multiplicamos a 1ª linha por 1/2:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right];$$

substituímos a 2ª linha pela soma dela com a 1ª multiplicada por –5:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & 1 \end{array}\right];$$

multiplicamos a 2ª linha por 2:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right];$$

substituímos a 1ª linha pela soma dela com a 2ª multiplicada por –1/2:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right].$$

O processo termina quando as primeiras colunas são as colunas da matriz identidade. A matriz inversa é dada pelas colunas seguintes da matriz escalonada. Assim:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Observemos que os sistemas escalonados são:

$$\begin{cases} a + 0 \cdot c = 3 \\ 0 \cdot a + c = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = -5 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} b + 0 \cdot d = -1 \\ 0 \cdot b + d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ d = 2. \end{cases}$$

Notemos que, no cálculo da inversa do exemplo dado, só impusemos que $A \cdot B = I_2$ sem verificarmos se $B \cdot A = I_2$. Na realidade, isto é desnecessário, pois, se existe a matriz A^{-1} e se $A \cdot B = I_2$, então $B = A^{-1}$. De fato,

$$A \cdot B = I_2 \Rightarrow A^{-1}(A \cdot B) = A^{-1}(I_2) \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot B = A^{-1} \Rightarrow I_2 \cdot B = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}.$$

Cálculo da Matriz Inversa Usando Co-fatores

Seja A uma matriz quadrada com determinante diferente de zero. Chamemos de $cof(A)$ a matriz cujos elementos são os co-fatores correspondentes dos elementos de A. Prova-se que

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}\,[cof(A)]^t.$$

A demonstração dessa propriedade pode ser encontrada em Iezzi e Hazzan (1978).

Exemplo 14.21

Calculemos a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ usando a matriz de co-fatores.

Temos:

$$det\,A = 2$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Portanto, $cof\,(A) = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e conseqüentemente

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Não nos deteremos no cálculo de inversa de matrizes de ordem superior a 3, uma vez que nas aplicações tais cálculos são, em geral, feitos por calculadoras ou computadores, dado o grande número de operações envolvidas.

Exercícios

6. Calcule a inversa das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. Mostre que, se $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ e $det\,A \neq 0$, então $A^{-1} = \dfrac{1}{det\,A}\begin{bmatrix} t & -y \\ -z & x \end{bmatrix}$.

8. Use o resultado do exercício anterior para calcular a inversa das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 15 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & -10 \end{bmatrix}$

9. Num país a renda nacional é dada pelas equações *IS-LM* (*IS*: *Investment-Saving* e *LM*: *Liquidity Money*):

$$C = 40 + 0{,}2(Y - T)$$
$$I = 15 - 20r$$
$$M_d = 4 + 0{,}1Y - 10r$$
$$M_s = 10$$
$$G = T = 10$$

em que: Y é a renda nacional , C é o consumo, I é o investimento, r é a taxa de juros, M_d é a demanda por moeda, M_s é a oferta de moeda, G é o gasto governamental, e T é o imposto arrecadado. Obtenha os valores de Y e r de equilíbrio, isto é, aqueles valores que satisfazem as equações:

$$\begin{cases} Y = C + I + G \\ M_d = M_s \end{cases}$$

Resolva o exercício expressando o sistema na forma matricial e encontre os valores de Y e r usando matriz inversa.

Aplicação: o Modelo do Insumo-Produto

A aplicação que veremos é um exemplo importante de como matrizes inversas fazem parte da formulação de modelos econômicos.

Consideremos uma economia em que sejam produzidos n produtos que podem ter dois destinos: ou serem aplicados no consumo intermediário de fabricação desses produtos, ou então servirem para consumo final de mercado.

Admitamos ainda que cada produto seja fabricado em proporções fixas de quantidade de mão-de-obra e do consumo intermediário de outros produtos.

Indiquemos por a_{ij} a quantidade do *i-ésimo* produto utilizado na fabricação de uma unidade do *j-ésimo* produto. Indiquemos por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as quantidades totais produzidas dos produtos $1, 2, \ldots, n$ e por $b_1, b_2, \ldots, b_n$ as demandas finais dos produtos.

Assim sendo, podemos escrever:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n + b_1 \\ x_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n + b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n = a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n + b_n. \end{cases}$$

O sistema de equações pode ser escrito na forma matricial

$$X = A \cdot X + B,$$

em que

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, um problema que pode ser resolvido é o seguinte: dadas as matrizes A (chamada matriz dos coeficientes técnicos) e B (chamada matriz das demandas finais de mercado), obter a matriz X (chamada matriz das quantidades produzidas) para atender às demandas intermediárias e finais dos produtos.

Assim sendo, tomemos a equação matricial

$$X = A \cdot X + B$$

e vamos resolvê-la em relação a X. Temos

$$X - A \cdot X = B,$$
$$(I - A) \cdot X = B,$$
$$X = (I - A)^{-1} \cdot B.$$

A matriz $(I - A)$ é chamada matriz de Leontief (em homenagem ao economista russo, radicado nos Estados Unidos desde 1931, Vassíli Leontief, 1906–1989, que introduziu esse modelo e ganhou, em 1973, o Prêmio Nobel em Economia).

Exemplo 14.22. Consideremos uma economia com dois setores. Os coeficientes técnicos e as demandas finais de mercado são dadas pela tabela a seguir:

Setor	Consumo intermediário para fabricar uma unidade no setor 1	Consumo intermediário para fabricar uma unidade no setor 2	Consumo final
1	0,2	0,6	50
2	0,4	0,2	80

Assim, para fabricar uma unidade do produto 1 são necessárias 0,2 unidade do produto 1 e 0,4 unidade do produto 2; para fabricar uma unidade do produto 2 são necessárias 0,6 unidade do produto 1 e 0,2 unidade do produto 2. Portanto, as matrizes dos coeficientes técnicos e do consumo final são, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}4 & 0{,}8 \end{bmatrix},$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}4} \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1{,}5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz X das produções é

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1{,}5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 210 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, devem ser produzidas 220 unidades do produto 1 e 210 unidades do produto 2, assim discriminadas:

Produto 1

Consumo intermediário no setor 1 = 0,2 · (220) =	44
Consumo intermediário no setor 2 = 0,6 · (210) =	126
Consumo final =	50
Total	220

Produto 2

Consumo intermediário no setor 1 = 0,4 · (220) =	88
Consumo intermediário no setor 2 = 0,2 · (210) =	42
Consumo final =	80
Total	210

Exercícios

10. Dada a matriz de coeficientes técnicos para dois setores $A = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,1 \end{bmatrix}$ e a matriz de consumo final $B = \begin{bmatrix} 70 \\ 140 \end{bmatrix}$, obtenha as quantidades a serem produzidas para atender às demandas intermediárias e final de mercado.

11. Resolva o exercício anterior, supondo que a demanda final seja $B = \begin{bmatrix} 35 \\ 210 \end{bmatrix}$.

12. Dada a matriz de coeficientes técnicos para três setores $A = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0,8 & 0 \end{bmatrix}$ e a matriz de consumo final $B = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$, obtenha as quantidades a serem produzidas para atender às demandas intermediárias e final de mercado.

13. Resolva o exercício anterior, supondo que a matriz de demanda final seja $B = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix}$.

14. Uma economia está dividida em dois setores: agricultura e manufatura. A matriz de coeficientes técnicos é $A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$ e a matriz de demanda final é $B = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix}$.

    a) Qual a produção de cada setor necessária para atender às demandas finais e intermediárias?

    b) Se a demanda final de manufaturados cair para 180 (mantendo-se em 100 a da agricultura) e se para produzir uma unidade do produto agrícola são necessários 1.000 homens-hora, qual o desemprego (em relação à situação do item *a*) na agricultura?

Aplicação: a Reta de Mínimos Quadrados por Meio de Matrizes

Vimos no Capítulo 11 como resolver o seguinte problema: dado um conjunto de pontos no plano cartesiano $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, achar a reta de equação $\hat{y} = ax_i + b$ que minimiza a soma dos quadrados dos desvios, em que cada desvio é dado por $y_i - (ax_i + b)$. Se usarmos a seguinte notação matricial

$$Y = \begin{bmatrix} y_i \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix},$$

pode-se provar que a matriz dos coeficientes da reta de mínimos quadrados A satisfaz a equação matricial $(X^t \cdot X) \cdot A = X^t \cdot Y$. Resolvendo essa equação obtemos

$$A = (X^t \cdot X)^{-1} \cdot X^t \cdot Y,$$

desde que a matriz $X^t \cdot X$ admita inversa.

Exemplo 14.23. Consideremos os pontos (1, 7), (2, 8), (3, 10), (4, 9) e (5, 11). As matrizes X e Y são dadas por

$$Y = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$X^tX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix},$$

$$(X^tX)^{-1} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 55 & -15 \\ -15 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix},$$

$$X^t \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 144 \end{bmatrix},$$

$$(X^tX)^{-1} \cdot X^tY = \begin{bmatrix} 1{,}1 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45 \\ 144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}3 \\ 0{,}9 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, $b = 6{,}3$ e $a = 0{,}9$ e a reta de mínimos quadrados é $\hat{y} = 0{,}9x + 6{,}3$.

Apêndice A

Notas Suplementares sobre Limites

A.1 Vizinhanças e Limites

Considere o número real a. Dizemos que o intervalo aberto $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, em que ε é um número real positivo, é uma vizinhança de ponto a, e a indicamos por $V_\varepsilon(a)$. Indicamos também por $V_\varepsilon\{a\}$ o intervalo $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ menos o ponto a, isto é:

$$V_\varepsilon\{a\} = V_\varepsilon(a) - \{a\}.$$

Sejam a e b números reais e f uma função definida em $A \subset R$. Dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

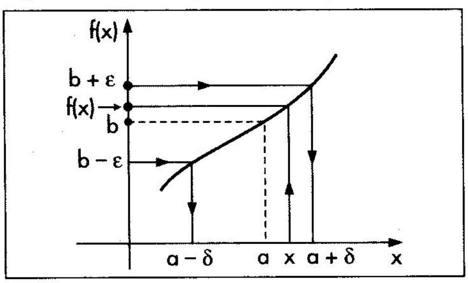
quando, dado $\varepsilon > 0$ real qualquer, existe uma vizinhança $V_\delta\{a\}$ contida em A, tal que para todo $x \in V_\delta\{a\}$ se tenha $|f(x) - b| < \varepsilon$. Isso é equivalente a dizer que, dada uma vizinhança arbitrária $V_\varepsilon(b)$ de b, existe uma vizinhança $V_\delta\{a\} \subset A$, tal que $f(x) \in V_\varepsilon(b)$ para todo $x \in V_\delta\{a\}$.

Note que:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

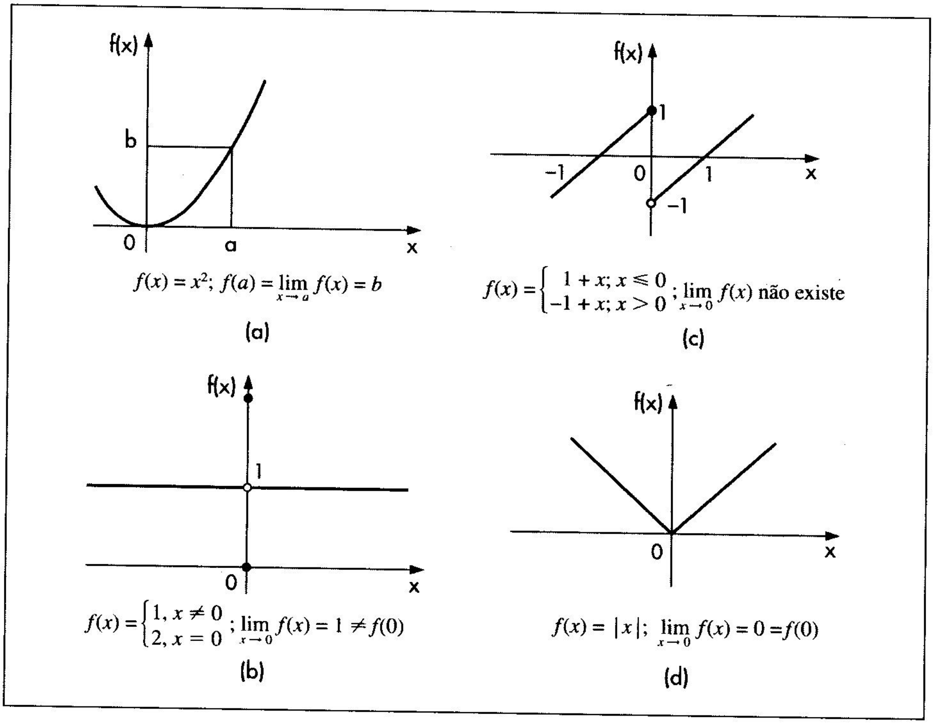
Geometricamente, temos a situação da Figura A.1.

Figura A.1: Ilustração da definição de limite.



Na Figura A.2 ilustramos certos casos que podem ocorrer. O leitor poderá comprovar os resultados de cada caso, usando a definição. No que segue, $f(a)$ é a imagem da função no ponto a, e b é o valor do limite.

Figura A.2: Exemplos de limites.



Vamos designar por $V_\varepsilon^+(a)$ uma vizinhança direita de a, isto é, um intervalo da forma $]a, a + \varepsilon[$; analogamente, $]a - \varepsilon, a[$ é uma vizinhança esquerda de a, indicada por $V_\varepsilon^-(a)$.

Sejam a e b reais e f uma função real de variável real, definida em $A \subset R$. Dizemos que b é o limite à esquerda de f, em a, e escrevemos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b \quad \text{ou} \quad f(a^-) = b,$$

se, dada uma vizinhança arbitrária $V_\varepsilon(b)$ de b, existir uma vizinhança esquerda $V_\delta^-(a)$ de a, contida em A, tal que para todo $x \in V_\delta^-(a)$ se tenha $f(x) \in V_\varepsilon(b)$.

De forma semelhante, b é o limite à direita de f em a, e escrevemos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b \quad \text{ou} \quad f(a^+) = b,$$

se, dada uma vizinhança arbitrária $V_\varepsilon(b)$ de b, existir uma vizinhança direita de a, $V_\delta^+(a)$, contida em A, tal que $f(x) \in V_\varepsilon(b)$, para todo $x \in V_\delta^+(a)$.

Por exemplo, na Figura A2(c), temos: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.

É claro que existe o limite no ponto a se, e somente se:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

e o valor é o $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

A.2 Alguns Resultados sobre Limites

Teorema A.1 (Unicidade do limite)

Se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim_{x \to a} f(x) = c$, então $b = c$.

Teorema A.2 (Limite de uma soma)

Suponha que $\lim_{x \to a} f_i(x) = b_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $g(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$.
Então:

$$\lim_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)) = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) + \ldots + \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Demonstração para $n = 2$

Suponhamos que $\lim_{x \to a} f_1(x) = b_1$ e $\lim_{x \to a} f_2(x) = b_2$.

Então, dado $\varepsilon > 0$, existem vizinhanças $V_1\{a\}$ e $V_2\{a\}$ tais que

$$|f_1(x) - b_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para } x \in V_1\{a\}$$

e

$$|f_2(x) - b_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para } x \in V_2\{a\}.$$

Portanto

$$|f_1(x) + f_2(x) - (b_1 + b_2)| = |[f_1(x) - b_1] + [f_2(x) - b_2]| \leq |f_1(x) - b_1| + |f_2(x) - b_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

para todo $x \in V_1\{a\} \cap V_2\{a\}$, ou seja,

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x)] = b_1 + b_2 = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x).$$

Teorema A.3 (Limite de um produto)

Se g for definida por

$$g(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_n(x) \text{ e se}$$

$$\lim_{x \to a} f_i(x) = b_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{então}$$

$$\lim_{x \to a} f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_n(x) = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x) \ldots \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Teorema A.4 (Limite de um quociente)

Suponha que $g(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ e que $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = b_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = b_2 \neq 0$.

Então

$$\lim_{x \to a} g(x) = \frac{b_1}{b_2}.$$

Como conseqüência dos teoremas anteriores, obtemos

Teorema A.5

Se f e g são funções contínuas em um domínio A, então

a) $f + g$ é contínua em A;

b) $f \cdot g$ é contínua em A;

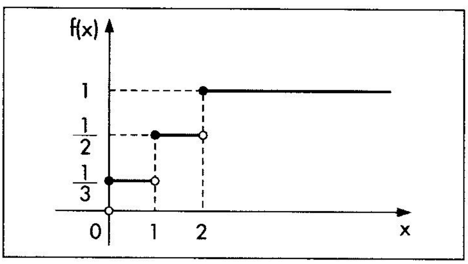
c) $\dfrac{f}{g}$ é contínua em todos os pontos de A para os quais $g(a) \neq 0$.

Dizemos que uma função f é contínua à direita do ponto a se $f(a)$ for um número real tal que $f(a^+) = f(a)$. A função f é contínua à esquerda de a se $f(a)$ for um número real tal que $f(a^-) = f(a)$. Segue-se que f é contínua em a se, e somente se, $f(a^+) = f(a^-) = f(a)$.

Considere, por exemplo, a função da Figura A.3, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ 1/3, \text{ se } 0 \leqslant x < 1 \\ 1/2, \text{ se } 1 \leqslant x < 2 \\ 1, \text{ se } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Figura A.3: Função contínua à direita.



Então, f é contínua à direita nos pontos 0, 1 e 2. Como f não é contínua à esquerda em 0, 1 e 2, dizemos que f é descontínua à esquerda nesses pontos.

Teorema A.6

a) Suponha que f seja contínua no ponto b, com $\lim_{x \to a} g(x) = b$. Então

$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = f(b).$$

b) Se f for contínua em b, e g for contínua em a, com $g(a) = b$, então $f[g(x)]$ é contínua em a.

A.3 Limites Infinitos

Dizemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$, se, dado $A > 0$, existe um número $\delta > 0$, tal que $f(x) > A$ para todo $x \in V_\delta^+(a)$.

Analogamente definimos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \ \text{ e } \ \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

Dizemos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \ \text{ se } \ f(a^+) = f(a^-) = \infty$$

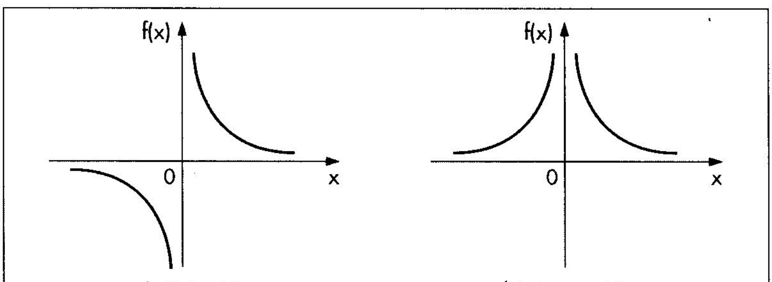
e

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \ \text{ se } \ f(a^+) = f(a^-) = -\infty.$$

Como exemplo, se $f(x) = \dfrac{1}{x}$, então $f(0^-) = -\infty$ e $f(0^+) = \infty$ (Figura A.4(a)).

Se $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, então $f(0^-) = f(0^+) = \infty$. Logo, $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$ (Figura A.4(b)).

Figura A.4: Limites infinitos.



a) $f(x) = 1/x$ b) $f(x) = 1/x^2$

Definições apropriadas podem ser dadas para:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Apêndice B

Notas Suplementares sobre Derivadas

B.1 Função Composta

Seja f a função composta de g e h, isto é:

$$f(x) = h[g(x)], \tag{B.1}$$

para $x \in A \subset R$. Para demonstrarmos a fórmula da derivada da função composta, vejamos antes o seguinte lema.

Lema B.1

Suponha que a função f, de A em R, seja tal que exista $f'(x_0)$. Então existe uma função E, de R em R, contínua na origem, com $E(0) = 0$ e tal que:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = [f'(x_0) + E(h)] \cdot h \tag{B.2}$$

para todo h de modo que $f(x_0 + h)$ esteja definido.

Demonstração

Definimos E por meio de

$$E(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0), & \text{se} \quad h \neq 0 \\ 0, \text{ se } h = 0. \end{cases}$$

Então E satisfaz (B.2) para h nas condições do lema.

Como $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, segue-se que $\lim\limits_{h \to 0} E(h) = 0 = E(0)$, o que implica continuidade de E na origem.

Teorema B.1 (Derivada da função composta)

Suponha que f, g e h sejam como em (B.1), com $g'(x)$ e $h'(u)$ finitos e $u = g(x)$. Então $f'(x)$ existe e é dada por

$$f'(x) = h'(u) \cdot g'(x).$$

Demonstração

Temos que $f(x + h) = h[g(x + h)]$, logo:

$$\Delta f = f(x + h) - f(x) = h[g(x + h)] - h[g(x)].$$

Como $u = g(x)$, $g(x + h) = u + \Delta u$, temos que $\Delta f = h(u + \Delta u) - h(u)$. Pelo Lema B.1 (com $\Delta u = h$), vem que:

$$\Delta f = h(u + \Delta u) - h(u) = [h'(u) + E(\Delta u)] \cdot \Delta u.$$

Portanto, $\dfrac{\Delta f}{h} = [h'(u) + E(\Delta u)] \cdot \dfrac{\Delta u}{h}$.

Quando h tende a 0, $\lim\limits_{h \to 0} E(\Delta u) = 0$, pois E é contínua na origem e Δu tende a 0 quando h tende a 0, pois existe a derivada $u' = g'(x)$.

Portanto, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta f}{h} = f'(x) = h'(u) \cdot u' = h'(u) \cdot g'(x)$.

B.2 Função Inversa

Vamos demonstrar o teorema sobre derivada da função inversa, visto no Capítulo 5.

Suponhamos que f seja crescente e derivável no intervalo $I =]a, b[$. Seja J a imagem de I por meio da função f e $y_0 = f(x_0)$ para $a < x_0 < b$.

Para $x_0 \in I$, existe um intervalo $]c, d[\subset I$ tal que $c < x_0 < d$, o que implica $]f(c), f(d)[\subset J$ e $f(c) < y_0 < f(d)$, pois f é crescente em I. Portanto y_0 pertence ao interior de J e $f[f^{-1}(y_0)] = y_0$. Logo:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f[f^{-1}(y)] - f[f^{-1}(y_0)]} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

pois $f'(x_0) \neq 0$ e a segunda igualdade segue do fato de que f^{-1} é contínua em y_0, e portanto:

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0,$$

isto é, $x \to x_0$ quando $y \to y_0$.

B.3 Teoremas sobre Funções Deriváveis

Vamos demonstrar aqui alguns teoremas relacionados ao Capítulo 6.

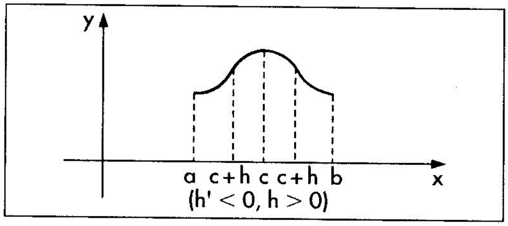
Teorema B.2

Seja f uma função definida e derivável num intervalo aberto $]a, b[$. Se c for um ponto desse intervalo que seja ponto de máximo ou de mínimo, então $f'(c) = 0$.

Demonstração

Suponhamos que c seja um ponto de máximo (Figura B.1).

Figura B.1: Máximo de f em $x = c$.



Então $f(c + h) \leqslant f(c)$, para todo h tal que $(c + h) \in\ ]a, b[$. Como $c \in\ ]a, b[$, existe $h_0 > 0$ tal que $(c + h) \in\ ]a, b[$ para todo h com $|h| < h_0$. Logo temos:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0, \text{ se } 0 < h < h_0,$$

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0, \text{ se } -h_0 < h < 0.$$

Como f é derivável em c, $f'(c^+) = f'(c^-)$ e como

$$f'(c^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0$$

e

$$f'(c^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0,$$

vem que:

$$f'(c^+) = f'(c^-) = 0 = f'(c).$$

A demonstração é análoga se c for um ponto de mínimo.

Teorema B.3 (Rolle, Michel, matemático francês, 1652–1719)

Suponhamos que a função f seja contínua no intervalo $[a, b]$, com $f(a) = f(b) = 0$, e que f seja derivável no intervalo $]a, b[$. Então existe um ponto $c \in\ ]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.