INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
CAMPUS EUNÁPOLIS
DEPARTAMENTO DE ENSINO - DEPEN
COLEGIADO DE MATEMÁTICA – COMAT

Jairo de Almeida Santos

O Teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki

Eunápolis
2012

Jairo de Almeida Santos

O Teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura
em Matemática do IFBA/Campus Eunápolis
como requisito parcial para obtenção do grau de
licenciado emMatemática, elaborada
sob a orientação do Prof.
Ms. Marcos dos Santos Ferreira

Eunápolis
2012

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
CAMPUS EUNÁPOLIS
DEPARTAMENTO DE ENSINO - DEPEN
COLEGIADO DE MATEMÁTICA – COMAT

O Teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki

por

Jairo de Almeida Santos

Apresentação da monografia para o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, como requisito parcial para a obtenção do diploma de Licenciado em Matemática.

Prof. Ms. Marcos dos Santos Ferreira - IFBA (Orientador)

Prof. Ms. Alex Santana dos Santos - UFRB

Prof. Dr. Fabíolo Moraes Amaral - IFBA

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por mais um objetivo alcançado.

Em segundo quero agradecer ao Professor Marcos Ferreira, por ter me orientado, pela compreensão, paciência, incentivo e ensinamentos. Mas, principalmente, por ter apostado que nosso trabalho sempre daria certo.

Aos meus colegas e amigos da faculdade. Pelos momentos de estudos, por estarem presentes nos momentos estressantes e também pelos bons momentos de distração.

A todos os meus professores que contribuíram para a minha formação.

A Rondinei, Silvonei, Marinalva e Valdinei.

E para finalizar, quero agradecer a minha família. Em especial aos meus irmãos, Isaac e Taiane, e aos meus pais, Eni e Lourival, a quem devo tudo.

Resumo

Neste trabalho, abordaremos um importante resultado da Análise Funcional, a saber o Teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki.

Veremos que, em espaços vetoriais normados de dimensão infinita, a bola unitária fechada nunca é compacta. Entretanto, em certas situações, o teorema mencionado acima garantirá que a bola unitária fechada de determinados espaços normados de dimensão infinita é compacta.

Palavras-Chave: Bola unitária fechada, Topologia fraca estrela, Teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki.

Sumário

Introdução

O tema de estudo deste trabalho é o Teorema de Banach-Alaouglu-Boubarki, mais conhecido como Teorema de Banach-Alaouglu.

Mostraremos que em um espaço de dimensão infinita a bola unitária fechada nunca é compacta. Mas, o Teorema de Banach-Alaouglu-Boubarki irá dizer que em um espaço dual E' com a topologia fraca estrela a bola unitária fechada é sempre compacta.

Nesse trabalho, usamos como metodologia a revisão bibliográfica do tipo metanálise, isto é, revisão sistemática de outras pesquisas, visando realizar uma avaliação crítica das mesmas e/ou produzir novos resultados ou sínteses desses estudos, segundo ([2]).

Este texto está dividido em dois capítulos. No primeiro capítulo, iniciamos com as preliminares, onde consta algumas definições e resultados de análise, topologia e álgebra linear que usamos no trabalho. Depois introduzimos os espaços vetoriais normados, operadores lineares e resultados acerca dos mesmos e os espaços de Banach de dimensão finita e infinita. Por fim, trabalhamos os conjuntos compactos em espaços vetoriais normados. No segundo capítulo definimos topologia fraca e fraca estrela e os principais resultados. Por fim, chegamos no Teorema de Banach-Alaouglu-Boubarki. Por fim, trazemos a conclusão.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Resultados gerais

Para o bom entedimento desse trabalho é necessário o conhecimento prévio de alguns conceitos e resultados de álgebra linear, análise e topologia. As definições e resultados que enunciaremos a seguir podem ser encontrados nas referências bibliográficas que citamos no final desse texto.

Definição 1.1.1 ([5, p. 1]) *Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:*
(i) $d(x,y) \geq 0$, *com* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$.
(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x,y,z \in M$.

Um espaço métrico é um par (M,d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.

Definição 1.1.2 ([5, p. 161]) *Um sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Definição 1.1.3 ([7, p. 4]) *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ (que denotará $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Uma norma em E é uma função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ que satisfaz, para todos $x,y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, as seguintes condições:*
(i) $\|x\| \geq 0$, *com* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Um espaço vetorial munido de uma norma é chamado de espaço vetorial normado (evn). Um evn sempre pode ser considerado um espaço métrico, com a métrica dada por

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Dizemos que que a métrica acima d é induzida pela norma $\|\cdot\|$.

Exemplo 1.1.4 ([5, p. 5]) *As seguintes funções são normas em* $\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{l} \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \\ \|x\|_s = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\ \|x\|_m = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \end{array}.$$

Em espaços métricos, dizemos que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para x quando

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

De modo análogo, em um evn, dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para x quando

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço vetorial E são equivalentes se existem constantes positivas c_1, c_2 tais que

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1, \forall x \in E.$$

Definição 1.1.5 *Seja M um espaço métrico. Um conjunto $X \subset M$ é compacto se toda sequência de X possui uma subsequência que converge para um elemento de X.*

Definição 1.1.6 *Seja E um espaço vetorial normado, a bola unitária fechada em E é o conjunto $B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$.*

Definição 1.1.7 *Seja E um espaço vetorial normado, a bola unitária fechada em E' é o conjunto $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$.*

Definição 1.1.8 ([5, p. 30]) *Uma função $f : E \to F$ entre espaços vetoriais normados é dita lipschitziana se existe uma constante $K > 0$, tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|, \forall x, y \in E.$$

Teorema 1.1.9 ([5, p. 149]) *Se $f : E \to F$ é lipschitziana, então f é uniformemente contínua.*

Definição 1.1.10 ([4, p. 174]) *Sejam E um evn e $X \subset E$. Dizemos que X é denso em E se, dados $y \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que*

$$\|x - y\| < \varepsilon.$$

Definição 1.1.11 ([5, p. 275]) *Um espaço métrico M é dito separável se existe $D \subset M$ enumerável e denso.*

Definição 1.1.12 ([5, p. 71]) *Uma topologia num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados conjuntos abertos, satisfazendo as seguintes propriedades:*
(i) $\emptyset$ e X pertencem a τ.
(ii)Se $A_1, ..., A_n \in \tau$, então $A_1 \cap ... \cap A_n \in \tau$.
(iii)Dada uma família $(A_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$ de elementos de τ, tem-se $\bigcup\limits_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda \in \tau$.

Na definição anterior, Γ denota um conjunto arbitrário de índices. Um espaço topológico é um par (X, τ) de acordo a definição anterior.

Definição 1.1.13 *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $Y \subset X$ é dito compacto (em X) quando, sempre que $Y \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda$, com cada A_λ aberto em X, existirem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Gamma$ tais que $Y \subset A_{\lambda_1} \cap \cdots \cap A_{\lambda_n}$.*

Proposição 1.1.14 ([7, p. 145]) *Sejam X um espaço topológico e $B \subset X$ um subespaço. $A \subset B$ é compacto em B se, e somente se, A é compacto em X. Em particular, fazendo $A = B$, segue que A é compacto em X se, e somente se, A, pensando como espaço topológico, é compacto.*

Proposição 1.1.15 ([7, p. 147]) *Sejam $A \subset B \subset Y$, A é fechado em Y e B é compacto em Y. Nessas condições A é compacto em Y.*

Definição 1.1.16 ([7, p. 130]) *Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. Uma vizinhança de x é um conjunto U contendo um aberto V de X, com $x \in V$. A coleção $\mathcal{U}_x$ de todas as vizinhanças de x é chamada de sistema de vizinhanças de x.*

Definição 1.1.17 ([7, p. 131]) *Uma base de vizinhança em x num espaço topológico X é uma subcoleção $\mathcal{B}_x$, $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x$, tendo a propriedade que cada $U \in \mathcal{U}_x$ contém algum $V \in \mathcal{B}_x$. Assim, $\mathcal{U}_x$ pode ser determinado por $\mathcal{B}_x$ da seguinte forma*

$$\mathcal{U}_x = \{U \subset X; V \subset U \text{ para algum } V \in \mathcal{B}_x\}.$$

Definição 1.1.18 ([7, p. 133]) *Se (X, τ) é um espaço topológico, uma base para τ é uma coleção $\mathcal{B} \subset \tau$ tal que*

$$\tau = \left\{ \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B; \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \right\}.$$

Definição 1.1.19 ([7, p. 135]) *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Então f é contínua em $x_0 \in X$ se, e somente se, para cada vizinhança V de $f(x_0)$ em Y, existir uma vizinhaça U de x_0 em X tal que $f(U) \subset V$. Dizemos que f é contínua em X se f for contínua em cada ponto de X.*

Proposição 1.1.20 ([7, p. 137]) *Sejam $Y \subset Z$ e $f : X \to Y$. Nessas condições, f é contínua se, e somente se, f vista como função de X em Z é contínua.*

Definição 1.1.21 ([7, p. 137]) *Seja X_α um conjunto para cada α em Γ. O produto cartesiano dos conjuntos X_α é o conjunto*

$$\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha = \{x : \Gamma \to \bigcup_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha; x(\alpha) \in X_\alpha \text{ para cada } \alpha \in \Gamma\}. \tag{1.1}$$

Quando não houver possibilidade de confusão, denotaremos $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ por ΠX_α. Na prática, o valor $x(\alpha)$ é denotado por x_α.

A função $\pi_\beta : \Pi X_\alpha \to X_\beta$, dada por $\pi_\beta(x) = x_\beta$, é chamada a β-ésima projeção.

Definição 1.1.22 ([7, p. 137]) *A topologia produto (ou topologia de Tychonoff) em ΠX_α é obtida tomando como base os conjuntos da forma ΠU_α, onde*
(a) U_α é aberto em X para cada α.
(b) $U_\alpha = X_\alpha$, exceto para uma quantidade finita de índices.

Observação 1.1.23 *Veja que ΠX_α com $U_\alpha = X_\alpha$, exceto para $\alpha = \alpha_1, ..., \alpha_n$, pode ser escrito como*

$$\Pi U_\alpha = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap ... \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}).$$

Dessa forma, a topologia produto é exatamente a topologia que tem como sub-base a coleção

$$\left\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha); \alpha \in A, U_\alpha \text{ é aberto em } X_\alpha\right\}.$$

Observação 1.1.24 *Sejam X um conjunto qualquer e $Y = \{f : X \to \mathbb{R}; f \text{ é uma função}\}$. De acordo (1.1) podemos interpretar Y como sendo $Y = \prod_{\alpha\in X} Z_\alpha$, com $Z_\alpha = \mathbb{R}$ para todo α. Dessa forma, um elemento da base da topologia produto de Y é algo do tipo:*

$$U = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

com $U_{\alpha_j}, j = 1, \ldots, n$, elementos da base (natural) da topologia de $\mathbb{R}$. Assim, cada U_{α_j} é um intervalo de raio δ_j centrado num certo b_j e

$$U = \{g \in Y; |g(\alpha_j) - b_j| < \delta_j, \text{ para cada } j = 1, \ldots, n\}.$$

Teorema 1.1.25 (Tychonoff, [7, p. 148]) *Sejam $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ uma família de espaços topológicos e $Y = \prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$. Um subconjunto não vazio $Y_0 = \prod_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ de Y é compacto se, e somente se, cada A_α é compacto.*

Em situações gerais, as sequências não caracterizam bem as topologias. Por exemplo, às vezes é possível encontrar um ponto de acumulação de um conjunto $F \subset X$ sem que exista uma sequência (x_n) em F convergindo para esse ponto. Existem duas caracterizações clássicas de sequência, que consertam essa limitação: redes e filtros. Neste texto, será imprescindível um resultado a cerca de redes.

Definição 1.1.26 ([7, p. 139]) *O conjunto Λ é dito conjunto dirigido quando existe uma relação $\leq$ em Λ, satisfazendo:*
(a) $\lambda \leq \lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$.
(b) se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$, então $\lambda_1 \leq \lambda_3$.
(c) se $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, então existe algum $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_3$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

Na definição anterior, dizemos que a relação $\leq$ é uma direção para o conjunto Λ.

Exemplo 1.1.27 *A relaçao de ordem natural em $\mathbb{R}$ é uma direção.*

Definição 1.1.28 ([7, p. 139]) *Uma rede em um conjunto X é uma função $P : \Lambda \to X$, onde Λ é um conjunto dirigido. Por convenção, o ponto $P(\lambda)$ é denotado por x_λ e escrevemos "a rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$".*

Definição 1.1.29 ([7, p. 139]) *Seja $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede em um espaço topológico X. Dizemos que $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge para $x \in X$ (escrevemos $x_\lambda \to x$) se para cada vizinhança U de x, existir algum $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, tem-se $x_\lambda \in U$.*

Exemplo 1.1.30 ([7, p. 140]) *O conjunto $\mathbb{N}$ com a ordem natural é um conjunto dirigido. Dessa forma, toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{N}$ é uma rede.*

Teorema 1.1.31 ([7, p. 141]) *Uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ no espaço produto $X = \prod\limits_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ converge para x se, e somente se, para cada $\alpha \in \Gamma$, $\pi_\alpha(x_\lambda) \to \pi_\alpha(x)$ em X_α.*

Definição 1.1.32 ([7, p. 140]) *Um espaço topológico X é chamado espaço de Hausdorff quando, para todos x, y em X distintos, existem abertos U, V de X tais que $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \varnothing$.*

Proposição 1.1.33 ([5, p. 12]) *Todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff.*

Proposição 1.1.34 ([4, p. 123]) ***(Teorema de Bolzano-Weierstrass)*** *Toda sequência limitada de números reais possui uma suquência convergente.*

Definição 1.1.35 ([1, p. 109]) *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um funcional linear em E é uma transformação linear $f : E \to \mathbb{K}$. O conjunto formado por todos os funcionais lineares $f : E \to \mathbb{K}$ chamares de espaço dual de E e denotaremos por E'.*

Definição 1.1.36 ([2, p. 117]) *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Chamamos o espaço $(E')'$ de espaço bidual a E e usamos a notação E''.*

1.2 Espaços vetoriais normados

Definição 1.2.1 *Um espaço métrico é dito completo se toda sequência de Cauchy for convergente no espaço.*

Definição 1.2.2 *Um espaço de Banach é um evn que é completo com a métrica induzida pela norma.*

Proposição 1.2.3 $\mathbb{K}^n$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração: Mostraremos apenas que $\mathbb{R}^n$ é Banach. O caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ é análogo. Seja $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Observe que os elementos x_m podem serem escritos da forma

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right) \\ x_2 &= \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right) \\ &\vdots \\ x_m &= \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right). \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, r \geq n_0 \Rightarrow ||x_m - x_r|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^{(m)} - x_j^{(r)}\right)^2} < \varepsilon \tag{1.2}$$

Elevando a desigualdade anterior ao quadrado, obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(m)} - x_j^{(r)})^2 < \varepsilon^2$$

sempre que $m, r \geq n_0$. Em particular, para cada $j = 1, \ldots, n$ fixo, temos

$$(x_j^{(m)} - x_j^{(r)})^2 < \varepsilon^2$$

para $m, r \geq n_0$, donde

$$\left|x_j^{(m)} - x_j^{(r)}\right| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

De (1.3), segue que $(x_j^{(m)})_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy de números reais e portanto convergente. Seja $x_j = \lim_{m\to\infty} x_j^{(m)}$. Considere agora $x = (x_1, \ldots, x_n)$ o vetor formado

pelos limites das n sequências $(x_j^{(m)})_{m=1}^{\infty}$.
Fazendo $r \to \infty$ em (1.2) obtemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\geq \lim_{r\to\infty} \|x_m - x_r\| \\
&= \lim_{r\to\infty} \left[\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(m)} - x_j^{(r)})^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\lim_{r\longmapsto\infty} \sum_{j=1}^{n} (x_j^{(m)} - x_j^{(r)})^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n} \lim_{r\to\infty} (x_j^{(m)} - x_j^{(r)})^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(m)} - x_j)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x_m - x\|
\end{aligned}$$

sempre que $m \geq n_0$. Isso mostra que $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ converge para $x \in \mathbb{R}^n$. ∎

Veremos mais adiante que todo evn de dimensão finita é um espaço de Banach. Para tanto, necessitamos do seguinte lema técnico:

Lema 1.2.4 *Para um conjunto li $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de vetores em um evn E, existe um número real $c > 0$ tal que, para qualquer escolha de escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vale a desigualdade*

$$\|a_1x_1 + \ldots + a_nx_n\| \geq c\left(|a_1| + \ldots + |a_n|\right). \tag{1.4}$$

Demonstração: Por simplicidade, faremos $v = |a_1| + \ldots + |a_n|$. Sendo assim, se $v = 0$ o resultado é imediato. Logo, vamos supor $v > 0$. Então, fazendo $b_j = a_j/v$, para cada $j = 1, \ldots n$, provar (1.4) equivale provar a existência de $c > 0$ tal que para quaisquer escalares $b_1, \ldots, b_n$ tem-se

$$||b_1x_1 + \ldots + b_nx_n|| \geq c, \tag{1.5}$$

onde

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j| = |\frac{a_1}{v}| + \ldots + |\frac{a_n}{v}| \; = \frac{1}{v}(|a_1| + \ldots + |a_n|) = 1.$$

Suponha, por absurdo, que isso não ocorra. Dessa forma teríamos

$$\begin{gathered}
\text{Para } c_1 = 1, \text{ existem } b_1^{(1)}, \ldots, b_n^{(1)} \text{ tais que } ||b_1^{(1)} x_1 + \ldots + b_n^{(1)} x_n|| < 1 \\
\text{Para } c_2 = \frac{1}{2}, \text{ existem } b_1^{(2)}, \ldots, b_n^{(2)} \text{ tais que } ||b_1^{(2)} x_1 + \ldots + b_n^{(2)} x_n|| < \frac{1}{2} \\
\vdots \\
\text{Para } c_m = \frac{1}{m}, \text{ existem } b_1^{(m)}, \ldots, b_n^{(m)} \text{ tais que } ||b_1^{(m)} x_1 + \ldots + b_n^{(m)} x_n|| < \frac{1}{m}. \\
\vdots
\end{gathered}$$

Seja a sequência $y_m = b_1^{(m)} x_1 + \cdots + b_n^{(m)} x_n$. Observe que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^n \left| b_j^{(m)} \right| = 1$ e que $\|y_m\| \to 0$. Dessa forma, para cada j, $|b_j^{(m)}| \leq 1$. Isso mostra que cada sequência $(b_j^{(m)}) = (b_j^{(1)}, b_j^{(2)}, \ldots)$ é limitada, e portanto, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subsequência convergente. Seja c_1 o limite da subsequência $(b_1^{(m)})_{m=1}^{\infty}$. Chame $(y_{1,m})_{m=1}^{\infty}$ a subsequência correspondente de $(y_m)_{m=1}^{\infty}$. Procedendo dessa forma n vezes, obtemos uma subsequência

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} d_j^{(m)} x_j, \text{ com } \sum_{j=1}^{n} |d_j^{(m)}| = 1$$

e, para cada j, $\lim\limits_{m \longmapsto \infty} d_j^{(m)} = c_j$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{m \to \infty} y_{n,m} &= \lim_{m \to \infty} (d_1^{(m)} x_1 + \ldots + d_n^{(m)} x_n) \\
&= \lim_{m \to \infty} d_1^{(m)} x_1 + \ldots + \lim_{m \to \infty} d_n^{(m)} x_n \\
&= c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n := y.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Veja que $\sum\limits_{j=1}^{n} |c_j| = \lim\limits_{m \to \infty} \sum\limits_{j=1}^{n} |d_j^{(m)}| = \lim\limits_{m \to \infty} 1 = 1$. Assim, nem todos os c_j são nulos e, como $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é li, segue que

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \neq 0. \tag{1.7}$$

Segue de (1.6) que

$$\lim_{m \to \infty} ||y_{n,m}|| = ||y||. \tag{1.8}$$

De (1.8) e dos fatos de $\|y_m\| \to 0$ e $(y_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ ser subsequência de $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ temos que $||y|| = 0$. Mas isso contradiz (1.7). Logo, existe $c > 0$ que satisfaz a desigualdade (1.5) para quaisquer escalares $b_1, \ldots, b_n$. ■

Terminamos esta seção enunciando duas consequências do Teorema de Hahn-Banach. Estas serão usadas na demonstração do Teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki.

Proposição 1.2.5 *Se E é um evn, então, para cada $x_0 \in E\setminus\{0\}$, existe $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Proposição 1.2.6 *Se E é um evn não trivial, então, para cada $x \in E$, tem-se*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)|\,;\varphi \in E' \text{ com } \|\varphi\| \leq 1\},$$

onde o supremo é atingido.

1.3 Operadores lineares

Definição 1.3.1 *Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $T : E \to F$ é um operador linear*

$$T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y), \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

O conjunto formado por todos os operadores lineares de E em F será denotado por $L(E, F)$.

Definição 1.3.2 *Se E e F são espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ um operador linear, definimos*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|\,; \|x\| \leq 1\}.$$

Dizemos que T é limitado quando $\|T\| < \infty$.

Proposição 1.3.3 *Sejam E e F espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$. Dado $T \in L(E, F)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) T é contínuo.
(b) T é contínuo na origem.
(c) T é limitado.

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ É óbvio.
$(b) \Rightarrow (c)$ Suponha que (c) não seja válido. Assim, existe uma sequência $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ em E tal que $\|k_k\| \leq 1$ e $\|Tx_k\| > k, \forall k \in \mathbb{N}$. Defina $z_k = \frac{x_k}{\|Tx_k\|}, \forall k \in \mathbb{N}$, e veja que

$$\lim_{k\to\infty} z_k = \lim_{k\to\infty} x_k \frac{1}{\|Tx_k\|} = 0,$$

o que contraria o fato de T ser contínua na origem.
$(c) \Rightarrow (a)$ Afirmamos que $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|, \forall x \in E$. De fato, se $x = 0$ o resultado é imediato. Suponha então $x \neq 0$. Assim

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|\frac{1}{\|x\|}Tx\right\| = \left\|T(\frac{x}{\|x\|})\right\| \leq \|T\| \Rightarrow \|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|, \forall x \in E.$$

Dessa forma, para quaisquer $x, y \in E$ temos

$$\|T(x - y)\| \leq \|T\|\,\|x - y\| \leq c\,\|x - y\|.$$

Isso mostra que T é lipschitziana, e portanto uniformemente contínua. ∎

Corolário 1.3.4 *Todo operador linear cujo domínio tem dimensão finita é contínuo.*

Demonstração: Sejam E, F espaços vetoriais normados com $\dim E = n$ e $T : E \to F$ um operador linear. Considere $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de E. Veja que

$$||T(x)|| = \left\| T\left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j T(e_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \, \|T(e_j)\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\| \sum_{j=1}^{n} |a_j|.$$

Faça $k = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\|$ e observe que, pelo Lema 1.2.4, existe $c > 0$ tal que $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_j| \leq \|x\| / c$. Logo $\|T(x)\| \leq \frac{k}{c} \|x\|$. Portanto

$$\|T\| = \sup_{||x|| \leq 1} \|T(x)\| \leq \sup_{||x|| \leq 1} \frac{k}{c} \|x\| = \frac{k}{c} \sup_{||x|| \leq 1} \|x\| = \frac{k}{c},$$

e o resultado segue. ■

Corolário 1.3.5 *Em um evn de dimensão finita, quaisquer duas normas são equivalentes.*

Demonstração: Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ normas quaisquer em E. Considere o operador identidade $id : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$. Como $\dim E < \infty$, segue do corolário anterior que id e id^{-1} são contínuas. Assim, existem c_1,$c_2 > 0$ tais que

$$\|id\,(x)\|_2 \leq c_1 \|x\|_1 \text{ e } \left\|id^{-1}(x)\right\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 .$$

Dessa forma,

$$\frac{1}{c_2} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_1 \|x\|_1 , \forall x \in E.$$

■

Definição 1.3.6 *Dizemos que dois espaços vetoriais normados E e F são isomorfos se existe um operador linear $T : E \to F$ contínuo e com inversa contínua. Neste caso, T é chamado de isomorfismo.*

Se $T : E \to F$ é um isomorfismo tal que $\|Tx\| = \|x\| , \forall x \in E$, então dizemos que E e F são isometricamente isomorfos. Neste caso, dizemos que T é uma isometria.

Corolário 1.3.7 *Se E e F são espaços vetorias normados com $\dim E = \dim F = n$, então E e F são isomorfos.*

Demonstração: Sejam $B = \{e_{1,...,}e_n\}$ e $C = \{f_1, ..., f_n\}$ bases de E e F, respectivamente. Defina $T : E \to F$ pondo $T(e_j) = f_j$, para cada $j = 1, ..., n$. É claro que T é linear.
Afirmamos que T é bijetiva. De fato, sejam $x, y \in E$ tais que $T(x) = T(y)$. Assim,

$$T(a_1e_1 + \cdots + a_ne_n) = T(b_1e_1 + \cdots + b_ne_n)$$

donde

$$a_1f_1 + ... + a_nf_n = b_1f_1 + ... + b_nf_n \Rightarrow (a_1 - b_1)f_1 + ... + (a_n - b_n)f_n = 0.$$

Logo $a_i - b_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Isso mostra que T é injetiva.
Agora se $z \in F$, então

$$\begin{aligned} y &= c_1f_1 + ... + c_nf_n \\ &= c_1T(e_1) + ... + c_nT(e_n) \\ &= T(c_1e_1) + ... + T(c_ne_n) \\ &= T(c_1e_1 + ... + c_ne_n) \\ &= T(x), \end{aligned}$$

onde $x = c_1e_1 + ... + c_ne_n \in E$. Logo$T$ é sobrejetora. Como T e T^{-1} possuem dimensão finita, segue que esses operadores são contínuos. O resultado segue. ■

Proposição 1.3.8 *Sejam E e F espaços vetoriais normados, com E completo. Se $T : E \to F$ é um isomorfismo, então F é completo.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em F. Considere $y_n = T^{-1}(x_n)$, para todo n natural.
Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Logo

$$\begin{aligned} n, m \geq n_0 \Rightarrow \quad \|y_n - y_m\| &= \|T^{-1}(x_n) - T^{-1}(x_m)\| \\ &= \|T^{-1}(x_n - x_m)\| \\ &\leq \|T^{-1}\| \, \|x_n - x_m\| \\ &\leq K\varepsilon, \end{aligned}$$

visto que T^{-1} é limitado. Isso mostra que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E. Como E é completo, segue que $y_n \to y \in E$. Por fim, como T é contínuo, segue que $T(y_n) \to T(y)$, donde $x_n \to T(y) \in F$. O resultado segue. ■

Corolário 1.3.9 *Todo evn (sobre $\mathbb{K}$) de dimensão finita é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja E um evn tal que $\dim E = n$. Pelo Corolário 1.3.7, temos que E é isomorfo a $\mathbb{K}^n$. Como $\mathbb{K}^n$ é Banach, segue, da proposição anterior, que E é Banach.
■

1.4 Os espaços l_p

Nesta seção, daremos alguns exemplos de espaços de Banach de dimensão infinita, a saber os espaços l_p. Antes desses exemplos, precisamos das Desigualdade de Hölder e Minkowski.

Lema 1.4.1 *Sejam a, b números reais positivos e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Demonstração: Considere, para cada $0 < \alpha < 1$, a função $f = f_\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^\alpha - \alpha t$. Observe que

$$f'(t) = \alpha t^{\alpha-1} - \alpha = \left(t^{\alpha-1} - 1\right) \alpha.$$

Veja que

$$\begin{aligned} f'(t) &> 0, \ \textit{se } 0 < t < 1 \\ f'(t) &< 0, \ \textit{se } t > 1. \end{aligned}$$

Como f é derivável em $t = 1$, pelo Teste da 1^a Derivada, segue que f tem um máximo local nesse ponto, isto é $f(t) \leq f(1)$ em algum intervalo contendo 1. Desse modo

$$t^\alpha - \alpha t \leq 1 - \alpha \Rightarrow t^\alpha \leq 1 - \alpha + \alpha t, \ \forall t > 0.$$

Fazendo $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$, obtemos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 - \frac{1}{p} + \frac{a}{pb}.$$

Multiplicando b em ambos os lados da desigualdade anterior temos

$$\frac{a^{\frac{1}{p}}}{b^{\frac{1}{p}}} b \leq \left(1 - \frac{1}{p}\right) b + \frac{a}{p} \Rightarrow a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} \leq \left(1 - \frac{1}{p}\right) b + \frac{a}{p}.$$

Como $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, concluímos que

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

■

Teorema 1.4.2 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer escalares x_j, y_j com $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração: O caso em que $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p = 0$ ou $\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^q = 0$ é trivial. Suponha então que $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p \neq 0$ e $\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^q \neq 0$. Usando o Lema 1.4.1 com

$$a_j = \frac{|x_j|^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p} \;\; e \;\; b_j = \frac{|y_j|^q}{\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q}$$

temos que

$$a_j^{\frac{1}{p}} b_j^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a_j}{p} + \frac{b_j}{q} \Rightarrow \frac{|x_j|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y_j|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{a_j}{p} + \frac{b_j}{q}.$$

Repetindo o procedimento acima e somando as n desigualdades, obtemos

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|\,|y_j|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{p} + \frac{b_j}{q}\right). \tag{1.9}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{p} + \frac{b_j}{q}\right) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{p} + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{q} \\
&= \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} a_j + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} bj \\
&= \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{|x_j|^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p} \right) + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{|y_j|^q}{\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q} \right) \\
&= \frac{1}{p} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^q}{\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Logo, segue de (1.9)

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|\,|y_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

o que prova o resultado. ■

Teorema 1.4.3 (Desigualdade de Minkowski) *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$. Então*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.10}$$

quaisquer que sejam os escalares x_k, y_k com $k = 1, \ldots, n$.

Demonstração: Para $p = 1$ temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| &= |x_1 + y_1| + \ldots + |x_n + y_n| \\ &\leq (|x_1| + |y_1|) + \ldots + (|x_n| + |y_n|) \\ &= (|x_1| + \ldots + |x_n|) + (|y_1| + \ldots + |y_n|) \\ &= \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k|.\end{aligned}$$

Suponha agora $p > 1$. Pela desigualdade triangular, para mostrarmos (1.10) é suficiente garantirmos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $\sum\limits_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p = 0$, o resultado segue facilmente. Seja então $\sum\limits_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p > 0$. Nosso objetivo aqui será utilizar a Desigualdade de Hölder. Veja que

$$\begin{aligned}(|x_k| + |y_k|)^p &= (|x_k| + |y_k|)(|x_k| + |y_k|)^{p-1} \\ &= |x_k|(|x_k| + |y_k|)^{p-1} + |y_k|(|x_k| + |y_k|)^{p-1}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Observe que $p = (p-1)q$. De fato,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{p+q}{pq} = 1 \Rightarrow p + q = pq \Rightarrow p = pq - q = (p-1)q.$$

Agora, fazendo em (1.11) $a_k = |x_k|$ e $b_k = (|x_k| + |y_k|)^{p-1}$ e aplicado a Desigualdade de Hölder em $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_k|$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |x_k|(|x_k| + |y_k|)^{p-1} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^{p}\right]^{\frac{1}{q}}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

De modo análogo, concluímos que

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k| (|x_k| + |y_k|)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{1.13}$$

Somando (1.12) e (1.13), obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) (|x_k| + |y_k|)^{p-1} \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left[\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Logo

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p\right]^{\frac{1}{q}}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p\right]^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

■

Definição 1.4.4 *Para cada $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$ definimos o conjunto*

$$l_p = \left\{x := (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\right\}.$$

Observação 1.4.5 *A Desigualdade de Hölder é ainda válida se $n \to \infty$. De fato, tomando $x, y \in l_p$ temos que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \ \ e \ \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q < \infty,$$

donde

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \ \ e \ \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Dessa forma, fazendo $n \to \infty$ na Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Usando um raciocínio análogo, obtemos a Desigualdade de Minkowski para $n \to \infty$.

Proposição 1.4.6 *Se $1 \leq p < \infty$, l_p é um espaço vetorial normado com a norma dada por*

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.14}$$

Demonstração: Tomando $x, y \in l_p$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, definimos

$$\begin{aligned} x + y &= (x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty} = (x_1 + y_1, \ldots, x_j + y_j, \ldots) \\ \lambda * x &= \lambda (x_j)_{j=1}^{\infty} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_j, \ldots). \end{aligned}$$

Mostraremos que as operações estão bem definidas. Inicialmente observe que, pela desigualdade de Minkowski, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

donde $x + y \in l_p$. Por outro lado, veja que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda x_j|^p = |\lambda|^p \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty$$

portanto $\lambda x \in l_p$. As propriedades de espaço vetorial não oferecem dificuldades. Provaremos agora que a função (1.14) é uma norma em l_p. De fato, vejamos as condições:
(i) É claro que $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p > 0$. Agora veja que, sendo $(x_j)_{j=1}^{\infty} = 0$ temos $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p = 0$. Por outro lado, se $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$ então $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p = 0$ e portanto $x_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}$.
(ii) Veja que

$$\left\|\lambda (x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p = \left\|(\lambda x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p.$$

(iii) Como

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p = \left\|(x_j + y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

segue da Desigualdade de Minkowski que

$$\begin{aligned} \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p + \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p, \end{aligned}$$

o que prova o resultado. ■

Proposição 1.4.7 *Se $1 \leq p < \infty$, então l_p é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em l_p. Consideremos a seguinte denotação

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_{11}, x_{12}, \ldots) \\ x_2 &= (x_{21}, x_{22}, \ldots) \\ &\vdots \\ x_n &= (x_{n1}, x_{n2}, \ldots). \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \varepsilon > \|x_n - x_m\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{nj} - x_{mj}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq |x_{nj} - x_{mj}|, \tag{1.15}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Dessa forma, para cada j, $(x_{nj})_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ é Banach, temos que cada $(x_{nj})_{j=1}^{\infty}$ converge, digamos para $y_j \in \mathbb{K}$. Seja $x = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Vamos mostrar que $x \in l_p$ e $x_n \to x$. De (1.15) segue, para cada N natural, que

$$\left(\sum_{j=1}^{N} |x_{mj} - x_{nj}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \tag{1.16}$$

sempre que $n, m \geq n_0$. Fazendo $n \to \infty$ em (1.16), obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{N} |x_{mj} - y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

para $n, m \geq n_0$ e todo N natural. Fazendo agora $N \to \infty$, temos

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{mj} - y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

donde, $x_n \to x$. Por outro lado, como $x_{n_0} - x$ e x_{n_0} pertencem ao espaço vetorial l_p e $x = x_{n_0} - (x_{n_0} - x)$, segue que $x \in l_p$. ■

Definição 1.4.8 *Se $p = \infty$, definimos o espaço vetorial*

$$l_\infty = \left\{ x := (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < \infty \right\}$$

munido da norma

$$\|x\|_\infty := \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|.$$

Proposição 1.4.9 *O* $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em l_∞. Denotemos cada termo da sequência x_n por

$$\begin{array}{c} x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, ..., x_{1n}, ...) \\ \vdots \\ x_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, ..., x_{nn}, ...) \\ \vdots \end{array},$$

onde, para cada n, $(x_{nj})_{j=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$.
Como $(x_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_{nj} - x_{mj}| \leq \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon,$$

donde

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |x_{nj} - x_{mj}| < \varepsilon, \tag{1.17}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$ fixo.
Dessa forma, para cada j, a sequência de escalares $(x_{nj})_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, e portando convergente. Seja $y_j = \lim_{n\to\infty} x_{nj}$ e considere $y = (y_j)_{j=1}^\infty$. Nosso objetivo agora é mostrar que $x_n \to y$ e que $y \in l_\infty$.
Em (1.17), fazendo $n \to \infty$, obtemos, para cada j,

$$|x_{mj} - y_j| \leq \varepsilon, \text{ sempre que } m \geq n_0.$$

Assim

$$m \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - y\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_{mj} - y_j| \leq \varepsilon, \tag{1.18}$$

donde $x_m \to y$. Por outro lado, de (1.18), temos que $x_{n_0} - y \in l_\infty$. Como $x_{n_0} \in l_\infty$ e $y = x_{n_0} - (x_{n_0} - y)$, segue que $y \in l_\infty$, visto que l_∞ é um espaço vetorial. O resultado segue. ∎

1.5 Conjuntos compactos em espaços vetoriais normados

Nessa seção, mostraremos que a compacidade apresenta comportamentos diferentes em dimensões finita e infinita. Mostraremos que a bola unitária fechada é sempre compacta em espaços de dimensão finita e que ela nunca é compacta em espaços de dimensão infinita.

Teorema 1.5.1 *Se* E *é um evn de dimensão finita, então um subconjunto* $X \subset E$ *é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Demonstração: Sendo E um espaço métrico segue que, se $X \subset E$ é compacto, então é fechado e limitado (veja [5, p. 212]). Mostremos então que, se $X \subset E$ é fechado e limitado, então é compacto. Mostraremos que X é sequencialmente compacto. De fato, sejam $\mathcal{B} = \{e_{1,}..., e_n\}$ uma base de E e $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência em X. Observe que, para cada $m \in \mathbb{N}$, tem-se

$$x_m = a_1^{(m)} e_1 + \cdots + a_n^{(m)} e_n.$$

Como $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ é limitada, existe $k > 0$ tal que $\|x_m\| \leq k$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Dessa forma, pelo Lema 1.2.4, exite $c > 0$ tal que

$$k \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i^{(m)} e_i \right\| \geq c \sum_{i=1}^{n} \left| a_i^{(m)} \right|, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Em particular,

$$\frac{k}{c} \geq \left| a_i^{(m)} \right|$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e cada $i = 1, \ldots, n$. Isso mostra que cada sequência de escalares $\left(a_i^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ é limitada. Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, cada $\left(a_i^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ admite uma subsequência convergente. Usando um raciocício análogo à demonstração do Lema 1.2.4, obtemos uma subsequência de $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ que converge para um certo $y = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. Como X é fechado, segue que $y \in X$. Isso mostra que X é compacto. ∎

Corolário 1.5.2 *A bola unitária fechada em um evn de dimensão finita é compacta.*

Demonstração: Segue diretamente do teorema anterior. ∎

Lema 1.5.3 (Lema de Riesz) *Sejam M um subespaço fechado próprio de um evn E e θ um número real tal que $0 < \theta < 1$. Então existe $y \in E$ tal que $\|y\| = 1$ e $\|y - x\| \geq \theta, \forall x \in M$.*

Demonstração: Seja $y_0 \in E \backslash M$ e considere $d = dist\,(y_0, M) := \inf_{x \in M} \|y_0 - x\|$. Afirmamos que $d > 0$. Com efeito, se $d = 0$, então existiria uma sequência de elementos de M convergindo para y_0. Porém, como M é fechado, isso contraria o fato de $y_0 \notin M$. Seja $x_0 \in M$ tal que

$$\|y_0 - x_0\| \leq \frac{d}{\theta}.$$

Considere agora

$$y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|},$$

e veja que $\|y\| = 1$ e, além disso, para cada $x \in M$ temos

$$\|y - x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \frac{\|y_0 - (x_0 + \|y_0 - x_0\| \, x)\|}{\|y_0 - x_0\|} \geq \frac{d}{\|y_0 - x_0\|} \geq \theta,$$

onde usamos o fato de $(x_0 + \|y_0 - x_0\| \, x) \in M$. ∎

Teorema 1.5.4 *Um evn tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada é compacta.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Corolário 1.5.2.
($\Leftarrow$) Seja B_E a bola unitária fechada compacta. Devemos mostrar que $\dim E < \infty$. Suponha por absurdo que dim $E = \infty$, e tome $x_1 \in E$ com $\|x_1\| = 1$. Como dim $E = \infty$, segue que $[x_1]$ é um subespaço (fechado) próprio de E. Assim, pelo Lema de Riesz, existe $x_2 \in E \backslash [x_1]$ tal que $\|x_2\| = 1$ e

$$\|x_2 - x_1\| \geq \theta := \frac{1}{2}.$$

Agora, como $[x_1, x_2]$ é um subespaço próprio de E, novamente pelo Lema de Riez, existe $x_3 \in E \backslash [x_1, x_2]$ tal que $\|x_3\| = 1$ e

$$\|x_3 - x_i\| \geq \frac{1}{2}, \text{ para } i = 1, 2.$$

Repetindo esse procedimento n vezes, obtemos uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de vetores unitários tais que

$$\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$$

para todo $m \neq n$. Assim, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

Assim, (x_n) é uma sequência em B_E que não possui subsequência convergente. Mas isso fere o fato de B_E ser compacta. O resultado segue. ■

Capítulo 2

O Teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki

Já mostramos que em espaços de dimensão infinita a bola unitária fechada nunca é compacta. Neste capítulo iremos ver que no espaço dual E', de um evn E de dimensão infinita, a bola unitária fechada é compacta considerando uma certa topologia, chamada de topologia fraca-estrela.

2.1 Topologia Fraca

Como todo evn E é um espaço métrico, temos que E é um espaço topológico. Neste caso, os abertos da topologia em E são os conjuntos abertos de E, visto como um espaço métrico. Esta topologia é chamada de topologia métrica. A partir de agora, sempre que quisermos falar da topologia métrica de um evn, usaremos os termos "topologia forte"ou "topologia da norma".

Definição 2.1.1 *Se $(X_\alpha, \sigma_\alpha)$ é uma família de espaços topológicos, com $\alpha \in \Gamma$, e $f_\alpha : X \to X_\alpha$ são funções, a topologia fraca em X, gerada pela família de funções $\{f_\alpha; \alpha \in \Gamma\}$, é a topologia cujos abertos são a união arbitrária de interseções finitas de conjuntos da forma*

$$f_\alpha^{-1}(V_\alpha), \text{ com } V_\alpha \text{ aberto em } X_\alpha.$$

Observe que se σ é a topologia fraca em X, então cada $f_\alpha : (X, \sigma) \to (X_\alpha, \sigma_\alpha)$ é contínua. Mais ainda, a topologia fraca é a topologia mais econômica (no sentido de conter menos abertos) que torna todas as f_α contínuas.

Na Análise Funcional, quando nos referimos à topologia fraca em um evn E, estaremos nos referindo à topologia fraca em E gerada pela família dos funcionais lineares contínuos $f \in E'$.

Denotaremos por $\sigma(E, E')$ a topologia fraca em um evn E. Se uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para x na topologia fraca, escrevemos $x_n \xrightarrow{w} x$.

Proposição 2.1.2 *Se X tem a topologia fraca gerada pela família $\{f_\alpha : X \to X_\alpha; \alpha \in \Gamma\}$, então $f : Y \to X$ será contínua se, e só se, $f_\alpha \circ f$ for contínua, para cada α.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) É imediato.
($\Leftarrow$) Suponha $f_\alpha \circ f$ contínua, para cada $\alpha \in \Gamma$, e considere

$$U = \bigcap_{j=1}^{n} f_{\alpha_j}^{-1}(V_{\alpha_j})$$

um aberto da base da topolgia fraca em X (lembrando que os V_{α_j} são abertos de X_{α_j}). Veja que

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{n} f_{\alpha_j}^{-1}(V_{\alpha_j})\right) = \bigcap_{j=1}^{n} f^{-1}\left(f_{\alpha_j}^{-1}\left(V_{\alpha_j}\right)\right) = \bigcap_{j=1}^{n} \left(f_\alpha \circ f\right)^{-1}\left(V_{\alpha_j}\right),$$

que é aberto pois cada $f_{\alpha_j} \circ f$ é contínua.

Suponha agora que A seja um aberto arbitrário. Assim, A será a união de abertos A_λ da base de X. Logo,

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Gamma} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} f^{-1}(U_\lambda),$$

que é aberto pois, pelo que já vimos, cada $f^{-1}(A_\lambda)$ é aberto. ■

Proposição 2.1.3 *Um evn E com a topologia fraca é um espaço de Hausdorff, isto é, dados $x_1, x_2 \in E$ disntintos, existem $A, B \in \sigma(E, E')$ tais que $A \cap B = \emptyset$, $x_1 \in A$ e $x_2 \in B$.*

Demonstração: Como $x_1 - x_2 \neq 0$, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $f \in E'$ de modo que

$$f(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\| \neq 0,$$

donde $f(x_1) \neq f(x_2)$. Como $\mathbb{K}$ é um espaço de Hausdorff, existem abertos $V_1, V_2 \subset \mathbb{K}$ disjuntos, tais que $f(x_1) \in V_1$ e $f(x_2) \in V_2$. Nessas condições, temos

$$x_1 \in f^{-1}(V_1) \text{ e } x_2 \in f^{-1}(V_2).$$

Veja que

$$f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \varnothing.$$

Como $f^{-1}\left(V_1\right), f^{-1}\left(V_2\right) \in \sigma(E, E')$, o resultado segue. ■

Proposição 2.1.4 *Se E é um evn, então $x_n \xrightarrow{w} x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \xrightarrow{w} \varphi(x), \forall \varphi \in E'$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Observe que $\varphi : (E, \sigma(E, E')) \to \mathbb{K}$ é contínua. Logo, se $x_n \xrightarrow{w} x$, então $\varphi(x_n) \to \varphi(x), \forall \varphi \in E'$.
($\Leftarrow$) Suponha que $\varphi(x_n) \to \varphi(x), \forall \varphi \in E'$. Devemos mostrar que $x_n \xrightarrow{w} x$, isto é dado $A \in \sigma(E, E')$ com $x \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, tem-se $x_n \in A$. Certamente, A contém um aberto da forma

$$A_2 = \varphi_1^{-1}(V_1) \cap ... \cap \varphi_n^{-1}(V_n),$$

onde cada V_i é aberto de $\mathbb{K}$ e $x \in A_2$.
Dessa forma, basta mostrarmos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $x_n \in A_2$, sempre que $n \geq n_0$. Ora,

$$x \in A_2 \Rightarrow x \in \varphi_i^{-1}(V_i), \forall i = 1, ..., n \Rightarrow \varphi_i(x) \in V_i, \forall i = 1, ..., n.$$

Como, para cada $i = 1, \ldots, n$, temos $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$, existem $n_i \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geq n_i \Rightarrow \varphi_i(x_n) \in V_i$$

para todo i. Tomando $n_0 = \max\{n_1, ..., n_n\}$, segue que

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Rightarrow \varphi_i(x_n) \in V_i, \forall i = 1, ..., n. \\ &\Rightarrow x_n \in \varphi_i^{-1}(V_i) \\ &\Rightarrow x_n \in \varphi_1^{-1}(V_1) \cap ... \cap \varphi_n^{-1}(V_n), \end{aligned}$$

donde $x_n \in A$, e portanto $x_n \xrightarrow{w} x$. ■

Proposição 2.1.5 ([7, p. 89]) *Sejam E um evn e $x_0 \in E$. Os conjuntos da forma*

$$V_{I,\varepsilon} = \{x \in E; |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon, \text{ para todo } i \in I\}$$

com I finito, $\varphi_i \in E'$ e $\varepsilon > 0$ formam uma base de vizinhanças de x_0 na topologia fraca de E.

Proposição 2.1.6 ([7, p. 90]) *Se E é um evn, então*
(i) $x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow (\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ é limitada e $\|x_n\| \leq \liminf \|x_n\|$.
(ii) Se $x_n \xrightarrow{w} x$ e $f_n \to f$ em E', então $f_n(x_n) \to f(x)$.

O próximo resultado mostra que, em dimensão finita, os conceitos de topologia fraca e forte coincidem.

Proposição 2.1.7 *Se $\dim E < \infty$, então a topologia fraca e a topologia da norma coincidem.*

Demonstração: Segue da definição que todo aberto da topologia fraca é também aberto da topologia forte. Resta-nos mostrar que os abertos da topologia forte são abertos da topologia fraca.
Seja U um aberto da topologia forte de E. Devemos mostrar que, para todo $x_0 \in U$, existe um aberto V da topologia fraca de modo que $x_0 \in V \subset U$. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base normalizada de E. Como U é aberto e $x_0 \in U$, existe $r > 0$ tal que $B_{x_0}(r) \subset U$. Para cada $i = 1, ..., n$,defina

$$\begin{array}{rcl} f_i : E & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j e_j & \mapsto & a_i \end{array}.$$

Veja que

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i - \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \, \|e_i\| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(x_0)| \, . \end{aligned}$$

Considere agora o seguinte subconjunto

$$U = \{x \in E; |f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{r}{2n}, \text{ com } i = 1, ..., n\},$$

e veja que $V \in \sigma(E.E')$ e $x_0 \in V$. Por fim, devemos mostrar que $V \subset U$. De fato, se $x \in V$, então

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(x_0)| < \sum_{i=1}^{n} \frac{r}{2n} = \frac{nr}{2n} = \frac{r}{2} < r,$$

donde $x_0 \in V \subset U$. ■

Proposição 2.1.8 *Se E é um evn de dimensão infinita, então a topologia fraca e a topologia da norma nunca coincidem.*

Demonstração: Sejam $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$. Sabemos que S é fechado na topologia da norma. Vamos mostrar que S não é fechado na topologia fraca. Para tanto, mostraremos que

$$\{x \in E; \|x\| < 1\} \subset \overline{S}^{\sigma(E,E')}.$$

Seja $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| < 1$ e considere $V = V_{x_0}$ um aberto qualquer da topologia fraca contendo x_0. Mostraremos que $V_{x_0} \cap S \neq \varnothing$.
Seja $W \subset V_{x_0}$ da forma

$$W = \{x \in E; |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, i = 1, ..., n\}.$$

Mostraremos que $W \cap S \neq \varnothing$. De fato, seja $y_0 \in E \setminus \{0\}$ tal que $f_i(y_0) = 0$, para todo $i = 1, ..., n$, isto é, $y_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$. Veja que, de fato, existe tal y_0. Se não existisse, a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} g: & E & \rightarrow & \mathbb{K}^n \\ & x & \mapsto & (f_1(x), ..., f_n(x)) \end{array}$$

seria injetiva. Mas isto é um absurdo pois $\dim E \neq \dim K^n$.
Defina agora

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \|x_0 + ty_0\| \end{array}.$$

Note que $r(0) = \|x_0\| < 1$ e $\lim_{t\to\infty} r(t) = \infty$. Deste modo, como r é contínua, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $r(t_0) = \|x_0 + t_0 y_0\| = 1$, donde $x_0 + t_0 y_0 \in S$. Por fim, veja que

$$f_i(x_0 + t_0 y_0) - f_i(0) = f_i(t_0 y_0) = t_0 f_i(y_0) = 0, \forall i = 1, ..., n,$$

e portanto $x_0 + t_0 y_0 \in W$. Segue que $x_0 + t_0 y_0 \in (W \cap S) \subset (V_{x_0} \cap S)$, e o resultado segue. ■

2.2 Topologia Fraca Estrela

Nessa seção, iremos introduzir o conceito de topologia fraca estrela. Esta é peça fundamental na demonstração do teorema central de nosso trabalho.

Seja E um espaço vetorial normado. Sabemos que em E temos a topologia forte (a norma) e a topologia fraca ($\sigma(E, E')$). O espaço E' também está munido das topologias fraca e da norma. Iremos definir agora, uma outra topologia em E'.

Considere a seguinte aplicação

$$\begin{array}{l} J : E \rightarrow E'' \\ \quad x \mapsto J(x) : E' \rightarrow \mathbb{K} \\ \qquad\qquad\qquad f \mapsto J(x)(f) = f(x). \end{array}$$

Afirmamos que, para cada $x \in E$, $J(x)$ está em E'. De fato, se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f, g \in E'$, então

$$J(x)(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) = J(x)(f) + \lambda J(x)(g).$$

Vejamos agora que $J(x)$ é contínua. Com efeito, como

$$\|J(x)\|_{E'} = \sup\{|J(x)(f)|; \|f\| \leq 1\} = \sup\{|f(x)|; \|f\| \leq 1\} = \|x\|. \tag{2.1}$$

segue nossa afirmação.

Observe que J é linear. De fato, para $x, y \in E$ e $\lambda \in K$, temos

$$\begin{aligned}
J(x+\lambda y)(f) &= f(x+\lambda y) \\
&= f(x)+\lambda f(y) \\
&= J(x)(f)+\lambda J(y)(f) \\
&= (J(x)+\lambda J(y))(f), \forall f \in E'
\end{aligned}$$

donde $J(x+\lambda y) = J(x)+\lambda J(y)$.

De (2.1) temos que J é uma isometria sobre sua imagem. Neste caso, dizemos que $J(E)$ é uma "cópia"de E em E''. A função J é chamada de injeção canônica de E em E''.

Definição 2.2.1 *A topologia fraca estrela $\sigma(E', E)$ em E' é a topologia fraca em E' gerada pelos funcionais lineares de $J(E)$.*

Embora não usaremos os seguintes resultados na próxima seção, por conhecimento, apresentamos estes ao leitor. Salientamos que suas demonstrações, em sua maioria, são análogas aos resultados correspondentes à topologia fraca.

No que se segue, $x_n \overset{w^*}{\to} x$ denotará convergência na topologia fraca estrela.

Proposição 2.2.2 ([7, p. 93]) *E' é um espaço de Hausdorff com a topologia fraca estrela.*

Proposição 2.2.3 ([7, p. 93]) *Os conjuntos da forma*

$$V = \{f \in E'; |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \text{ para todo } i \in I\}$$

com I finito, $x_i \in E$ e $\varepsilon > 0$ formam uma base de vizinhanças de f_0 para a topologia fraca estrela.

Proposição 2.2.4 ([7, p. 93]) *Sejam E um espaço de Banach e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E'. Nessas condições:*

(i) $f_n \overset{w^*}{\to} f \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x)$ para todo x em E.

(ii) $f_n \overset{w}{\to} f \Rightarrow f_n \overset{w^*}{\to} f$.

(iii) $f_n \overset{w^*}{\to} f \Rightarrow (\|f_n\|)_{n=1}^{\infty}$ é limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

(iv) $f_n \overset{w^*}{\to} f$ e $x_n \to x \Rightarrow f_n(x_n) \to f(x)$.

Proposição 2.2.5 ([7, p. 93]) *Seja $\varphi : (E', \sigma(E', E)) \to \mathbb{K}$ linear e contínua. Então existe $x \in E$ tal que $\varphi = Jx$. Em outras termos, $(E', \sigma(E', E))' = J(E)$.*

Proposição 2.2.6 ([7, p. 93]) *Se E e F são espaços vetoriais normados e $f : E \to F$ é linear e contínua, então $f : (E, \sigma(E, E')) \to (F, \sigma(F, F'))$ é contínua.*

2.3 O Teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki

Finalmente, podemos demonstrar o principal resultado de nosso trabalho.

Teorema 2.3.1 *(Banach-Alaoglu-Boubarki) A bola fechada unitária $B_{E'}$ é compacta com a topologia fraca estrela.*

Demonstração: Inicialmente, mostraremos que E' com a topologia fraca estrela é homeomorfo a um subespaço do espaço produto $Y = \mathbb{K}^E = \{f : E \to \mathbb{K}\}$.
Seja $\psi : E' \to Y$ dada por $\psi(f) = f$. É claro que ψ é injetiva. Afirmamos que ψ é contínua. De fato, para cada $x_0 \in E$, considere a projeção $\pi_{x_0} : Y \to K$ na coordenada x_0. Dessa forma, temos que a aplicação $\pi_{x_0} \circ \psi : E' \to \mathbb{K}$ é tal que

$$\pi_{x_0} \circ \psi(f) = \pi_{x_0}(f) = f(x_0) = J(x_0)(f), \forall f \in E'.$$

Logo $\pi_{x_0} \circ \psi = J(x_0)$, e portanto, pela definição da topologia fraca estrela em E', temos que $\pi_{x_0} \circ \psi$ é contínua. Como a topologia produto em Y é a topologia fraca gerada pelas projeções π_{x_0} (Observação 1.1.24) que são contínuas, segue da Proposição 2.1.2 que ψ é contínua.
Como ψ é injetiva, a aplicação $\phi : E' \to \psi(E')$ dada por $\phi(f) = \psi(f)$ está bem definida. É claro que ϕ é bijetiva. Como ψ é contínua, segue da Proposição 1.1.20 que ϕ é contínua. Para mostrarmos que E' é homeomorfo a $\psi(E')$, resta-nos mostrar que $\phi^{-1} : \psi(E') \to E'$ é contínua.
Como E' está munido com a topologia fraca estrela, mais uma vez a Proprosição 2.1.2 garante que ϕ^{-1} será contínua se provarmos que para cada x_0, a aplicação

$$J(x_0) \circ \phi^{-1} : \psi(E') \to \mathbb{K}$$

é contínua. Observe que, se $\psi(f) \in \psi(E')$ então

$$J(x_0) \circ \phi^{-1}(\psi(f)) = J(x_0)(f) = f(x_0) = \left(\pi_{x_0|_{\psi(E')}}\right)(\psi(f)),$$

donde

$$J(x_0) \circ \phi^{-1} = \pi_{x_0|_{\psi(E')}}. \tag{2.2}$$

Como π_{x_0} é contínua, segue que a restrição $\pi_{x_0|_{\psi(E')}}$ é também contínua. Dessa forma, de 2.2, segue que cada $J(x_0) \circ \phi^{-1}$ é contínua, e portanto ϕ^{-1} é contínua. Isso mostra que E' é homeomorfo ao subespaço $\psi(E')$ de Y, e consequentemente $B_{E'}$ é homeomorfo a $\psi(B_{E'})$.
Assim, para provar que $B_{E'}$ é compacta na topologia fraca estrela, basta provar que $\psi(B_{E'})$ é compacta em $\psi(E')$. Mas, pela Proposição 1.1.14, basta provar que $\psi(B_{E'})$ é compacta em Y.
Lembremos que

$$\psi(B_{E'}) = \psi\left(\{\varphi \in E'; |\varphi(x)| \leq \|x\|, \forall x \in E\}\right) \subset Y.$$

Logo, pela Observação 1.1.24 temos que

$$\psi(B_{E'}) \subset \prod_{x\in E}[-\|x\|, \|x\|] \subset Y.$$

O Teorema de Tychonoff garante que $\prod_{x\in E}[-\|x\|, \|x\|]$ é compacto em Y. Para obtermos a compacidade de $\psi(B_{E'}) = \phi(B_{E'})$, basta garantirmos que $\psi(B_{E'})$ é fechado em Y (Proposição 1.1.15). Com efeito, considere $(\psi(\varphi_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em $\psi(B_{E'})$ que converge para $f \in Y$, na topologia produto. Dessa forma, pelo Teorema 1.1.31, segue que

$$\pi_{x_0}(\psi(\varphi_\lambda)) \to \pi_{x_0}(f) \Rightarrow \pi_{x_0}(\psi(\varphi_\lambda))(x) \to \pi_{x_0}(f)(x), \forall x \in E,$$

ou melhor

$$\psi(\varphi_\lambda)(x) \to f(x) \Rightarrow \varphi_\lambda(x) \to f(x), \forall x \in E. \tag{2.3}$$

Usando o fato que cada φ_λ, segue de (2.3) que f é linear. Como

$$\|\varphi_\lambda(x)\| \leq \|\varphi_\lambda\| \|x\| \leq \|x\|$$

para cada λ e cada $x \in E$, segue, novamente de (2.3), que

$$\|f(x)\| \leq \|x\|$$

e portanto e $\|f\| \leq 1$. Dessa forma, $f \in B_{E'}$ donde $f = \psi(f) \in \psi(B')$. Isso mostra que $\psi(B_{E'})$ é fechado em Y, e o resultado segue. ■

Conclusão

Nesse trabalho, fizemos um estudo sobre a compacidade da bola unitária fechada em espaços vetoriais normados de dimensão infinita. Mais precisamente, demonstramos o Teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki. Também vimos que há uma dicotomia com essa compacidade e a dimensão de um espaço vetorial normado.

Referências Bibliográficas

[1] COELHO, F. U. LOURENÇO, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear**. São Paulo: Edusp, 2007.

[2] FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Processo de Coleta de Informações e de Constituição do Material de Estudo.** In:______. Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: São Paulo, 2006. p. 101 – 131.(Coleção Formação de Professores).

[3] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis With Applications**. Délhi: Wiley Classics Library, 1989.

[4] LIMA, E. L. **Curso de Análise vol. 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. (Coleção Projeto Euclides)

[5] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Coleção Projeto Euclides)

[6] OLIVEIRA, C. R. **Introdução à Análise Funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. (Coleção Projeto Euclides)

[7] PELLEGRINO, D. M. **Notas de Aula de Introdução À Análise Funcional**. João Pessoa: UFPB, 2008.