Evolução da simbologia algébrica: Um passeio pela história evolutiva do pensar matemático humano

Carlos Alexandre Ornelas Santos[1]

Marcos Francisco Borges[2]

RESUMO: Partindo da premissa de que alguns alunos tem dificuldade em absorver certos conceitos matemáticos e que a Álgebra ocupa um lugar de destaque, tanto na sua importância na estrutura curricular, bem como no fato de os alunos apresentam uma singular dificuldade de assimilar o conteúdo, que muitas vezes se manifestam de forma abstrata. Assim esse trabalho tem por objetivo facilitar o entendimento da Álgebra através do seu desenvolvimento ao longo da história, em particular o desenvolvimento da simbologia algébrica. Fazendo com que, através do conhecimento histórico, não só o ensino se torne mais eficaz, como atrativo e de fácil contextualização. Através de analises de autores que abordam a evolução da simbologia algébrica como Florian Cajori, entre outros, observamos um relação direta e objetiva entre a Matemática e a História e nessa perspectiva um valoroso recurso a ser usado como ponte entre o ensino da Álgebra e seus aprendizes.

Palavras-chave: Álgebra, história, ensino.

1- Introdução

A Álgebra atual pode ser definida em dois grupos bem distintos: Álgebra elementar que é o estudo das equações e o método de resolvê-las, e a Álgebra moderna que é o estudo das estruturas matemáticas tais como grupos, anéis e corpos.

O que podemos observar no ensino de Álgebra elementar um excesso de valorização pela "manipulação das letras e números", onde decorar regras, fórmulas, exercícios de repetições são o auge do ensino da matemática e nesse sistema o contexto histórico não é apresentado deixando assim uma lacuna entre o conhecimento e como ele foi adquirido através do tempo. Assim o desenvolvimento, que levou mais 3000 anos acaba sendo deixado de lado. Os alunos, principalmente no Ensino Básico, desconhecem coisas como Álgebra Retórica, Álgebra Sincopada e pouco sabem sobre como chegou até eles a famosa Álgebra Simbólica. Ou nas poucas vezes que a história da matemática é abordada resume-se em não uma meia dúzia de "historiazinhas" ou

[1]Aluno de pós-graduação em educação pela Universidade do Estado de Matogrosso
carlos.ornelas.sud@gmail.com
[2] Professor Doutor Universidade do Estado de Mato grosso
marcus.borges@unemat.br

parcas informações a respeito de uns poucos teoremas ou narrativas referentes a certos momentos de um fazer matemático e que mais apareciam como apêndice em alguns capítulos de certos livros didáticos.

Sabendo que a Matemática é tão antiga quanto à própria história da humanidade, se levamos em conta que esta última se inicia a partir da descoberta da escrita. Não se pode transmitir o esse conhecimento sem se dar a contextualização histórica, ou seja, ela faz parte da própria evolução cultural do homem. E com isso dando espaço as indagações, onde se constrói o conhecimento, não sendo ele apenas transmitido como algo pronto e acabado. Para Caraça (1989), a Matemática é um grande capítulo da História da Humanidade. A História da Matemática pode nos revelar isso.

Na busca da valorização, bem como na contextualização histórica da Álgebra é o que propomos nosso trabalho. E tendo como motivador o clamor dos alunos, principalmente por aqueles que dizem não gostar, ou não saber Matemática.

Para um melhor entendimento dessa evolução, dividimos o trabalho nas fases evolutivas da Álgebra, ou seja, Retórica onde o conhecimento era totalmente verbal, Sincopada caracterizada pela abreviação de palavras e Simbólico estado atual da Álgebra. Sendo que nesse ultimo estágio a notação passou por diversas mudanças se tornando razoavelmente estável ao tempo de Isaac Newton, porém percebemos que mesmo hoje não há uma uniformidade sobre essa notação matemática. Um exemplo disso é que os americanos escrevem "3.1416" como aproximação de π, e muitos europeus escrevem "3,1416". O símbolo "=' é usado às vezes para "aproxima-se de um limite" e em alguns países europeus o símbolo "÷" significa "menos". (BAUMGART, 1992).

2- HISTÓRIA DA ÁLGEBRA

Quando o homem teria se utilizado, pela primeira vez, da Álgebra? Pois até a própria origem da palavra "álgebra" é intrigante, pois não se sujeita a uma etimologia nítida como, por exemplo, a palavra "aritmética", que deriva do grego arithmos ("número"). Álgebra é uma variante latina da palavra árabe al-jabr (às vezes transliterada al-jebr), usada no título de um livro, Hisab al-jabr w'al-muqabalah, escrito em Bagdá por volta do ano 825 pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al Khowarizmi (Maomé, filho de Moisés, de Khowarizm). Este trabalho de álgebra é com frequência citado, abreviadamente, como Al-jabr. Uma tradução literal do título completo do livro é a "ciência da restauração (ou reunião) e redução", mas matematicamente seria melhor "ciência da transposição e cancelamento". Assim, dada a equação:

$x^2 + 5x + 4 = 4 - 2x + 5x^3$

al-jabr fornece

$x^2 + 7x + 4 = 4 + 5x^3$

e al-muqabalah fornece

$x^2 + 7x = 5x^3$

Para que a Álgebra se encontre nos estágio que a vemos hoje, ela sofreu diversas modificações ao longo dos séculos e para uma melhor compreensão dessa modificação/evolução, foi dividida em três bem distintos estágios: Álgebra Retórica, Álgebra Sincopada e Álgebra Simbólica.

2.2- ÁLGEBRA RETÓRICA

Um bom exemplo para se ilustrar de como era o desenvolvimento da Álgebra Retórica, é vermos a abordagem de um problema, singularmente resolvido pelos babilônicos, que, segundo Boyer (1991), foi na Babilônia provavelmente surgiu a Álgebra. Segue um típico exemplo de problemas que encontramos em escrita cuneiforme, em tábuas de argila ao tempo do rei Hammurabi. Para a explicação, naturalmente, usaremos o português e, consequentemente a notação decimal indo-arábica em vez da notação sexagesimal cuneiforme da época. A coluna à direita fornece as passagens em notação moderna. Abaixo segue o exemplo que desenvolveremos em 5 etapas:

[1] Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura, obtendo assim a área: 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se: comprimento e largura.

[2] [Dado] 32 soma; 252 área.	$x + y=k$ $xy = P$
[3] [Resposta] 18 comprimento; 14 largura.	
[4] Segue-se este método: Tome metade de 32 [que é 16].	$k/2$
16 x 16 = 256	$(k/2)^2$

256 - 252 = 4	$(k/2)^2 - P = t^2$
A raiz quadrada de 4 é 2.	$\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - P} = t.$
16 + 2 = 18 comprimento.	(k/2) + t = x.
16 - 2 = 14 largura	(k/2) - t = y.
[5] [Prova] Multipliquei 18 comprimento por 14 largura. 18 x 14 = 252 área	((k/2) +t) ((k/2)-t) $= (k^2/4) - t^2 = P = xy$

Fonte: BAUMGART, pg 04 e 05

Na etapa [1] o problema é formulado, na [2] os dados são apresentados, na [3] a resposta é dada, na [4] o método de solução é explicado com números e, finalmente, na [5] a resposta é testada.

O que percebemos é uma elabora “receita”, onde os passos para resolução seguem uma distinta e detalhada descrição, sendo empregada em semelhantes problemas. Ou seja, o desenvolvimento da álgebra babilônica se caracterizada pela forma verbalizada da resolução de seus problemas.

A "receita" acima é usada repetidamente em problemas semelhantes. Tem um importante significado histórico porque a Álgebra grega seguia semelhante método de resolução, porém em termos de retas e áreas, sendo ilustradas por figuras geométricas. Diofanto, alguns séculos depois, também usou essa abordagem paramétrica, variável de caráter secundário cuja finalidade é especificar os objetos de um conjunto ou de uma família, dando início ao simbolismo moderno, introduzindo abreviações de palavras e com isso evitando o estilo complexo da álgebra geométrica.

O que também se observa é que o desenvolvimento matemático dos babilônios ia além da maneira puramente intuitiva, contando com algum raciocínio dedutivo não formalizado.

O desenvolvimento da álgebra egípcia, apesar de ter surgido ao mesmo tempo, faltava-lhe sofisticação da babilônica. Um dos mais famosos documentos matemáticos egípcios o papiro de Ahmes (ou Rhind) datado cerca de 1650 a.C. é um ótimo exemplo do conhecimento algébrico da época, onde um escriba ensina 85 solução de problemas matemáticos em um descrição verbal. Um dos problemas de Ahmes diz: “Uma quantidade, somada a seus 2/3, mais sua metade e mais uma sétima parte perfaz 33.

Qual é esta quantidade?” Com um sistema de numeração, consideravelmente primitivo se comparado com o babilônico, nos ajuda a entender a falta de sofisticação algébrica dos egípcios. Assim como os matemáticos europeus do século XVI tiveram de estender a notação indo-arábica, para avançar de forma mais significativa além dos resultados babilônicos de resolução de equações.

Já a álgebra grega, como já mencionada, era geométrica. E essa formulação geométrica é de difícil compreensão se comparada com atual e até mesmo se comparada com a babilônica. E o que levou a esse desenvolvimento, segundo Waerden (1956), eram as dificuldades conceituais com frações e números irracionais. Mesmo possuindo conhecimento pra contornar frações, como sendo a razão entre dois números inteiros, porém quando se tratavam de numero do tipo $\sqrt{2}$ existiam dificuldades insuperáveis. E esse rigor os forçou a usar um conjunto de segmentos de reta como domínio conveniente de elementos. Um exemplo de como era o desenvolvimento dessa álgebra geométrica encontra-se em Elementos de Euclides, livro II, aqui simplificado, pois o enunciado de Euclides é geral e denso. O que nós escrevemos hoje como:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Era postulado pelos gregos como:

“Se uma linha reta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a linha toda é igual aos quadrados sobre as duas partes, junto com duas vezes o retângulo que as partes contêm.”

Assim podemos ter uma noção de quanto sofisticada, bem como de difícil compreensão para aqueles de pouca intimidade com essa álgebra geométrica.

2.3- ALGEBRA SINCOPADA

Alguns séculos após a Euclides e seu Elementos, surge na Grécia o percussor do uso da simbologia através da abreviação de palavras Diofanto, a melhor aproximação que se tem do século que viveu é algo em torno de 250 d.C. Estudou e trabalhou na Universidade de Alexandria, como fora sua vida pouco se sabe, exceto o enigmático verso em Anthologia palatina:

> “Aqui jaz Diofanto. Maravilhosa habilidade. Pela arte da álgebra a lápide nos diz sua idade: Deus deu um sexto da vida como infante, um duodécimo mais como jovem, de barba abundante; e ainda uma sétima parte antes do casamento; em cinco anos nasce-lhe o rebento. Lastima! O filho do mestre e sábio do mundo se vai. Morreu quando da metade da idade final do pai. Quatro anos a mais de estudos

consolam-no do pesar; Para então, deixando a terra, também ele alívio encontrar.”

Em Arithmetica, Diofanto apresenta um tratamento engenhoso para as equações indeterminadas. Sendo estas chamadas de equações diofantinas, apesar dele não ser o primeiro a resolver tais sistemas. Apesar de uma abordagem inteligente, segue as linhas de sentido dos babilônicos, expressando suas incógnitas através de parâmetros.

Segue uma comparação de como expressamos hoje e como seria expressa, a mesma equação por Diofanto: $(x^3 + 8x) - (5x^2 + 1) = x$

$$K^{v}\alpha\varsigma\eta\pitchfork\delta^{v}\varepsilon\mu^{o}\alpha\iota^{\sigma}\varsigma\alpha$$

Como se observa Diofanto fez uso da simbologia através da abreviação de palavras, revolucionando o que hoje chamamos de Álgebra: a incógnita era designada pela letra sigma minúscula (ς), última da palavra αριθμος (aritmos – número, em grego); seu quadrado Δ^{γ} abreviação de δυναμις (dynamis – potência); seu cubo de K^{v}, abreviação de Κνβος (kybos – cubo); a igualdade por ι^{σ}, abreviação de ισος (isos – igual) e a subtração por $\pitchfork$. Para soma não existia um símbolo definido, sendo representada pela justaposição das parcelas e os termos independentes eram indicados pelo símbolo μ^{o} (monadei – unidade). Diofanto dava início à simbolização, porém como ela é feita através da abreviação de palavras ficou conhecida como Álgebra Retórica.

Seguindo a linha cronológica, seguiremos para a Índia e a civilização árabe. Sofrendo várias invasões romanas, na Índia, houve um intenso intercambio de ideias. Matemáticos como Brahmagupta trabalharam em um estilo sincopado semelhante ao grego (BAUMGART, 1992). O que a nossa simbologia escreveria hoje como sendo $5xy + \sqrt{35} - 12$, era expressa da seguinte maneira (o significado é dado abaixo):

ya	ka	5	bha	k(a)	35	ru	12
x	y	5	produto	irracional	35	nº “puro”	– 12

Dentre os algebristas hindus os que mais se destacaram foram Brahmagupta (628 d.C) e Bhaskara (1150 d.C) “o mais importante matemático do século doze” (BOYER, 1991). Os trabalhos dos hindus com as equações indeterminadas eram superiores ao de Diofanto, aceitavam números negativos e raízes irracionais. Possuíam, também, o conhecimento que uma equação quadrática (com raízes reais) possui duas raízes.

O ímpeto causado pelo advento do islamismo levou os árabes á conquista da Índia, Pérsia, Mesopotâmia, Norte da África e Espanha. Obtendo assim, os escritos científicos dos gregos e hindus que traduziram para árabe preservando-os ao longo da Idade Média da Europa. De suas aquisições destaca-se o sistema de numerais hindus. Nesse período, para notação algébrica, destaca-se, o já mencionado Al-Khowarizmi porque seus livros Al-jabr e o Liber algorismi, forma posteriormente traduzidos o latim, sendo de grande influencia na matemática europeia.

Assim que Toledo, na Espanha moura, foi tomada pelos cristãos textos como o Al-jabr de Al-Khowarizmi, o Almagesto de Ptolomeu, os Elementos de Euclides, entre outros árabes e gregos, foram traduzidos para o latim por eruditos cristãos. Porém, entre os eruditos, o mais importante para Europa, principalmente para Itália foi o Liber abaci (1202) de Fibonacci (Leonardo de Pisa), onde defendia veementemente o uso de numerais indo-arábicos. Fibonacci era filho de um próspero encarregado de negócios das cidades de Veneza, Pisa e Gênova, nasceu em Pisa em 1175 e passo parte da juventude no norte da África, onde teve um intenso contato com a cultura Árabe. Logo após, viajou pelo Mediterrâneo o que lhe permitiu estudar diversos sistemas aritméticos então existentes, ficando convencido que o sistema indo-arábico era o melhor de todos. No inicio de Liber Abaci estão essas palavras históricas: *“Estes sãos os noves símbolos dos hindus: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Com eles, mais o símbolo 0, que em árabe é chamado de ZÉFIRO, qualquer número pode ser escrito.”*

Sendo o primeiro cristão a escrever sobre os algarismos, bem como a facilidade de se manipular trabalhos numéricos foram uns dos motivos que levaram a ampla aceitação dos hindu-arábicos. Lembrando que com a invenção da imprensa com tipos móveis, aceleravam a padronização, pois facilitavam a comunicação baseada na ampla divulgação.

2.4- ÁLGEBRA SIMBÓLICA

O simbolismo, tal qual conhecemos hoje, começou a despontar a partir de 1500. Para uma melhor compreensão vejamos as metodologias de simbolização usadas por alguns matemáticos.

Conforme afirma Baumgart (1992, p. 12):

Cardano (1545): cubus p̄ 6 rebus aequalis 20.

$$x^3 \quad + \quad 6x \quad = 20$$

6 3

Bombelli (1572): Ĭ . p . 8 . Equale à 20

$$x^6 + 8x^3 = 20$$

Viéte (1591): I QC – 15 QQ + 85 C – 225 Q + 274 N aequatur 120

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$$

Harriot (1631): aaa – 3bba ═══ +2 . ccc.

$$x^3 - 3b^2a = 2c^3$$

Descartes (1631): $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$

Wallis (1693): $x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$

Descobrir exatamente quem inventou um respectivo simbolo requer um busca muito detalhista, e, por vezes, se torna impossível afirmar quem o fez este ou aquele simbolo. Mas dois simbolos muito usados são dignos de mensão, como no mostra Baumgart (1992, p. 13):

> O sinal de ═══ (igual) introduzido por Robert Recorde no seu The Wheststone of witte (1557). Ele usava o símbolo por entender que não havia coisas tão iguais quanto duas retas paralelas.
>
> O simbolo $\sqrt{\ }$, possivelmente uma alteração de r de radix (raiz) introduzido por Christoff Rudoff em seu livro álgebra Die coss (1525).

O matemático Girolamo Cardano (1501 – 15176) em ARTIS MAGNAE SIVE REGULIS ALGEBRAICES, mais conhecida por *Ars Magna* foi pioneiro, pois como segundo Garbi (2009, p.34) "este era sem dúvida o maior compêndio algébrico existente." Apesar de Ars Magna possuir um estilo simbólico pouco prático, seu papel de destaque consiste na acumulo de informações sobre soluções para casos especiais de equações cubícas e quadráticas.

O que podemos obeservar, até este ponto, é que o pensamento majoritário matemático era a solução manipulativa de equações, o matemático que se torna um divisor de águas por introduzir letras como coeficientes numéricos foi o frânces François Viéte, em seu livro IN ARTEM ANALYTICAM ISAGOGE (INTRODUÇÃO A ARTE ANALÍTICA) como nos diz Garbi (2009, p. 57), "ele utilizou sistematicamente as letras não só para representar as quantiadades desconhecidas (incognitas) mas, também, os coeficientes das equações". Apesar de ser um progresso ainda estava longe da simbologia que usamos hoje. Veja a comparação da equação que denotamos hoje e como a mesma era expressa por Viéte:

3BA2 – DA + A3 = Z

B3 in A quad – D plano in A + A cubo aequator Z solido

Em outro trabalho, que foi publicado postumamente, intitulado DE AEQUTIONUM RECOGNITIONE ET EMENDATIONE de 1615 ele faz contribuições significativas.

> Forneceu transformações para aumentar ou multiplicar as raízes de uma equação por uma constante; demonstrou consciência das relações entre raizes e coeficientes de uma equação polinomial; formulou uma transformação que desembaraça um polinômio de seu termo vizinho ao de maior grau. (BAUMGART, 1992, p. 14).

Apesar de o conhecimento matemático estar bem evoluído e sintetizado, é curioso pensar que um ciência quase quatro milênios, ainda via os números complexos com certa desconfiança, "como se os números positivos constituíssem um espécie de cidadãos de primeira classe no país da matemática" (Garbi, 2009, p. 74).

O responsável pela aceitação dos números complexos foi o matemático René Descartes (1596 – 1650) a quem é dado o título de inventor da Geometria Analítica, abordando em seu célebre livro DISCURSO SOBRE MÉTODO PARA BEM CONDUZIR A RAZÃO E ENCONTRAR A VERDADE NAS CIÊNCIAS os números complexos usando a expressão "Raizes imaginárias", ali ele demonstra como a geometria poderia ser estudada por meio da Álgebra. Utilizou uma simbologia muito próxima da atual, pois segundo Boyer (1991, p. 232): "o texto matemático mais antigo que um estudande posso seguir sem encontrar dificuldade de notação". Dá inicio ao uso de letras minúsculas para representar os números, ou seja, x, y e z, para as incognitas e a, b, c, d, etc, para os parâmetros,também grafou as potencias da forma x^n, porém vale observar que ele utilizava o quadrado da incognita como xx e não x^2, os sinais de soma e subtração já foram os atuais e o símbolo de raiz passou a possuir um prolongamento horizontal superior indcando claramente que era abrangido. Descreveu as equações da *forma canônica*, ou seja, igualando as equações a zero, o que passou a ser padrão. E apartir de então sua simbologia foi seguida pelos matemáticos, pois além de ser melhor que as anteriores, foi divilgada em um livro lido com adimiração por toda comunidade matemática da época. Na abertura desse Clássico livro diz:

> Todos os problemas de geometria podem ser facilmente reduzidos a tais termos que basta conhecer depois o comprimento de alguns segmebtos de retas para construí-los. E como toda Aritmética é composta de quatro ou cinco operações, que são a Adição, a Subtração, a Multiplicação, a Divisão e a extração de Raizes, que

> podemos tomar como um espécie de divisão, assim não precisamos fazer outra coisa em Geometria relatvamente os segmentos que procuramos, para prepará-los a ser conhecidos, além de a eles somar ou subtrair outros;... (Garbi, 2006, p. 141).

Podemos dizer que o progresso final, no que diz respeito ao uso da notação, consistiu em usar uma letra também para representar o grau de uma equação. A notação moderna que utiliza expoentes negativos e fracionários foi introduzida por Isaac Newton, numa carta dirigida a Oldenburg, então secretário da Royal Society, em 13 de junho de 1676, onde diz: "Como os algebristas escrevem a^2, a^3, a^4, etc., para aa, aaa, aaaa, etc., também eu escrevo $a^{1/2}$, $a^{2/3}$, $a^{5/4}$ para $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{a^5}$; e escrevo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, etc., para $\frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{aaa}$, etc." Sua fórmula para o binômio foi anunciada nesta carta, usando letras para representar também os expoentes racionais.

Importantes matemáticos e suas contribuições para a simbolização algébrica:

Leonhard Euler criou vários símbolos entre eles Σ, f(x) e $\left(\frac{m}{n}\right)$ que em simbologia atual é $\binom{m}{n}$, estabeleceu um padrão que veio ser se seguido, o uso de expoentes imaginários teve seu início com ele e foi o primeiro a utilizar a letra *i* na representação dos números complexos. Ainda consagrou a letra π como constante geométrica.

Christian Kramp de Strasbourg, França, em 1808 criou o símbolo de n! para o fatorial.

Em 1827 Carl Friedrich Gauss empregou a letra Π para representar certos produtos. Com o tempo, esse símbolo passou a representar produtos em geral.

A Gottfried Wilhelm Leibniz se deve a criação do $\int$ para integração e $\frac{dy}{dx}$ para derivação.

A representação de sucessivas derivações da função f(x) por f'(x), f''(x), f'''(x) foi de Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), que apareceu pela primeira vez em seu livro THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES, de 1797.

Chegamos ao final de um passeio maravilhoso pela história do desenvolvimento da simbologia algébrica. Estamos tão acostumados a lidar com o raciocínio matemático que podemos chegar à conclusão equivocada de que a Matemática, tal como a concebemos hoje, é algo inato ao ser humano. Porém o que se observa, ao estudar seu desenvolvimento histórico, é que foi um longo e árduo caminho.

3 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

E esse mesmo longo e árduo caminho tem sido abordado de forma satisfatória no ensino atual?

Para resposta a pregunta acima podem surgir várias e várias respostas, mas o objetivo deste trabalho não é o de questionar a forma como ele vem sendo feita e sim a de proporcionar uma alternativa em que um ensino seja facilitado através do conhecimento histórico evolutivo algébrico.

Um exemplo clássico é o de alguém que se depara pela primeira vez com a possibilidade de expressar um número de valor desconhecido através de uma variável, dificilmente ele é informado da enormidade de conceitos anteriores a esse, e que em a Álgebra possibilita expressar o desconhecido.

A história está repleta de fatos, ou até mesmo curiosidades, que não só facilitam a absorção de conhecimento como tornam a aula atrativa, saindo da tão desgastada forma de ensino que se resume a “decorar formulas”.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Sá da Costa, Lisboa,1989.

BAUMGART, John K. **Tópico de história da matemática para uso em sala de aula**. São Paulo. ed: Atual, 1992.

BOYER, Carl B. **Histórisa da Matemática**. São Paulo. ed: Edgard Blucher, 1991.

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo. ed: Editora Livraria de Física, 2009

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução a História da Educação Matemática**. São Paulo. ed. Atual, 1998

WAERDEN, B. L. **Álgebra moderna**. Tradução: Hugo Batista Ribeiro. Lisboa, 1956.

_________, **A history of Algebra** – from Al-Khowarism to Emmy Noether. Berlin: Springer Verlag,1985.