COLWELL & MATHEWS

INTRODUÇÃO ÀS VARIÁVEIS COMPLEXAS

SUPERVISÃO: ELZA F. GOMIDE

PETER COLWELL
JEROLD C. MATHEWS
Iowa State University

INTRODUÇÃO ÀS VARIÁVEIS COMPLEXAS

Tradução:
MARIA CRISTINA BONOMI BARUFI
Professora do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

Supervisão:
ELZA F. GOMIDE
Professora Assistente - Doutor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.
EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

título original
Introduction to Complex Variables
a edição em língua inglesa foi publicada por
Charles E. Merrill Publishing, EUA

EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.
0 1000 CAIXA POSTAL 5450 — RUA PEIXOTO GOMIDE, 1400
END. TELEGRÁFICO: BLUCHERLIVRO — FONES (011)287-2043 E 288-5285
SÃO PAULO — SP — BRASIL

Impresso no Brasil *Printed in Brazil*

Prefácio

Os usos e os que usam a análise complexa aparecem em todas as ciências físicas e na engenharia. Este livro oferece uma introdução rápida e eficiente desse assunto, desenvolvendo a maioria das técnicas consideradas básicas. Muitas das aplicações modernas da análise complexa requerem técnicas mais aprimoradas. Por esse motivo, uma introdução aos métodos das variáveis complexas deve tentar mostrar como as técnicas funcionam, assim como o que elas significam. Escolhemos fazer isso, estabelecendo os fatos como teoremas cujas hipóteses e conclusões são mencionados explicitamente, e incluindo aquelas demonstrações que podem ajudar a esclarecer os fatos. Nosso desenvolvimento ajudará a maioria a adquirir os conhecimentos básicos, fornecendo um preparo para o entendimento de técnicas adicionais de maior interesse, no caso específico de cada um. Levará também os estudantes de matemática a perceberem os fatos operacionais emergirem da análise elementar.

Temos alguns comentários específicos para o leitor. "Elementar" não significa "fácil". Para acompanhar nosso desenvolvimento, você deve estar preparado. Admitimos que você esteja apto a utilizar os instrumentos do cálculo de uma e diversas variáveis, integrais de linha, séries infinitas e séries de potências. Para dominar as técnicas, você deve resolver os problemas. Convidamos, especificamente aqueles que utilizam este livro autodidaticamente, a nos escreverem, no caso de terem dúvidas.

Charles E. Merrill nos ajudou muito. Gostaríamos de agradecer especialmente a Pete Hutton, o Editor, e a Linda Mohrman nossa orientadora pessoal.

Ames, Iowa

P. C.
J. C. M.

Conteúdo

Sejam $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$ dois números complexos. Damos a seguir as operações algébricas usuais com números complexos.

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);\\
z_1 z_2 &= (x_1 y_1 - x_2 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)\\
&= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)];\\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{[(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + x_2 y_1)]}{(x_2^2 + y_2^2)}\\
&= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)];
\end{aligned}$$

sempre que $x_2^2 + y_2^2 = r_2^2 \neq 0$.

Se $r_2 \neq 0$, podemos também escrever

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{r_2^2}.$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_2} &= \frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2^2 + y_2^2)}\\
&= \left(\frac{1}{r_2}\right)(\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2).
\end{aligned}$$

As operações de multiplicação e divisão são os únicos itens mencionados até aqui que distinguem o número complexo $z = x + iy$ do vetor (x,y).

Exemplo 1.1 Suponhamos $z_1 = i$ e $z_2 = 1 - i$. Na forma polar, $z_1 = 1[\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)]$, e $z_2 = 2^{1/2}[\cos(-\pi/4) + i \operatorname{sen}(-\pi/4)]$.

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= 1 + i = 2^{1/2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right];\\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(-1 + i)}{2},\\
&= 2^{-1/2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right];\\
\frac{1}{z_2} &= 2^{-1/2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right].
\end{aligned}$$

Exemplo 1.2 Encontrar todas as soluções da equação $z^4 = 1$. Se assumimos que $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ é uma solução, então $r^4(\cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta) = 1$.

Para qualquer inteiro k podemos escrever $1 = 1(\cos 2\pi k + i \operatorname{sen} 2\pi k)$. Se tomamos $r = 1$ e $\theta = \pi k/2$ para $k = 0, 1, 2, 3$, obtemos quatro soluções distintas para a equação $z^4 = 1$, da forma $z = 1(\cos \pi k/2 + i \operatorname{sen} \pi k/2)$:

$$\begin{aligned}
k &= 0; \quad z = 1;\\
k &= 1; \quad z = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = i;\\
k &= 2; \quad z = 1(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi) = -1;\\
k &= 3; \quad z = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -i.
\end{aligned}$$

O leitor poderá verificar que para qualquer outro valor de k, além de 0, 1, 2, ou 3, $z = 1(\cos \pi k/2 + i \operatorname{sen} \pi k/2)$ será um dos quatro números $1, i, -1, -i$.

Necessitamos também de alguma terminologia para descrever os tipos de conjuntos de números complexos que usaremos freqüentemente. Se a é um número complexo e r é um número real positivo, as desigualdades $|z-a| < r$, $|z-a| \leq r$, $|z-a| = r$, denotam, respectivamente, o disco aberto de raio r com centro em $z = a$, o disco fechado de raio r com centro em $z = a$, e o círculo de raio r e centro em $z = a$. Mais geralmente, um conjunto S de números complexos é *aberto* se cada ponto de S é o centro de um disco aberto de raio positivo, cujos pontos pertencem todos a S; em termos mais formais, S é aberto se para cada $z_0 \in S$ existe um número, $r(z_0) > 0$, tal que todo ponto z, com $|z - z_0| < r(z_0)$, se encontra em S.

Um conjunto aberto de números complexos é *conexo* se, para cada par de pontos de S, existe uma trajetória poligonal que os une e que se encontra inteiramente contida em S. Denominamos S um *domínio* se for aberto e conexo. Um domínio S é *simplesmente conexo* se toda curva fechada em S contém somente pontos do interior de S.

Exemplo 1.3 Sejam $S = \{z : |z| < 1\}$ e $T = \{z : 0 < |z| < 1\}$. Tanto S como T são domínios; S é simplesmente conexo, mas T não é simplesmente conexo.

O termo "domínio" é usado com maior freqüência para descrever o conjunto no qual uma função está definida. Já que achamos conveniente definir a maioria das funções consideradas em conjuntos abertos, conexos, não haverá ambigüidade real na utilização desse termo.

Exemplo 1.4 Seja H o conjunto dos números $z = x + iy$ para os quais $|z-1| < |z|$. Então $|z-1|^2 < |z|^2$, $(z-1)\overline{(z-1)} < z\bar{z}$, $(z-1)(\bar{z}-1) < z\bar{z}$, e $1 < z + \bar{z}$. Desde que $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$, isso significa que $\operatorname{Re} z > 1/2$ para todo z em H.

Uma vez que se verifica facilmente que todo z tal que $\operatorname{Re} z > 1/2$ está em H, podemos denominar H um semiplano à direita da reta $\operatorname{Re} z = 1/2$. Notamos que H é um domínio.

Problemas

1.1. Para cada número z dado, encontre $2z$, z^3, $1/z$, $\bar{z}$, e $z/|z|$ na forma retangular e polar. Represente os números seguintes no plano cartesiano.
   a) $z = i$,
   b) $z = 1 + i$,
   c) $z = 3 + 4i$.

1.2. Sejam $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$.
   a) Escreva z_1 e z_2 na forma polar com os argumentos principais.
   b) Encontre $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, z_1/z_2 na forma retangular e polar.
   c) Descreva cada um dos seguintes conjuntos geometricamente e dando uma equação em x e y que deva ser satisfeita pelos pontos de cada um dos conjuntos:

i) J é o conjunto de todos os z, para os quais

$$|z-z_1| = |z-z_2|.$$

ii) K é o conjunto de todos os z, para os quais

$$|z-z_1| + |z-z_2| = 3.$$

1.3. Verifique as seguintes afirmações.

a) $|z^n| = |z|^n$ para todo inteiro n e qualquer número complexo z.

b) $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ para n inteiro e positivo.

1.4. Que condição geométrica deve ser satisfeita por z_1 e z_2 se $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$?

1.5. Mostre que $|z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2|$ se e somente se $\arg z_1 - \arg z_2 = k\pi$ para algum inteiro k ímpar.

1.6. Se a e b são números reais, descreva geometricamente o conjunto dos números complexos z tais que $|(z-a)/(z-b)| > 1$.

1.7. Encontre todas as soluções de cada uma das equações seguintes.

a) $z^3 = 1$,

b) $z^5 = -1$,

c) $z^6 = 3$,

d) $z^2 + z + 3 = 0$,

e) $z^3 = 8i$.

1.8. Suponha que w seja uma solução qualquer para a equação $z^n = 1$, onde n é um inteiro positivo e $\operatorname{Im} w \neq 0$. Prove que

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0.$$

1.9. Use o Teorema de De Moivre para mostrar que

a) $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$, para todo real x.

b) $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$, para quaisquer x e y reais.

c) Encontre uma fórmula para a soma

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos(n-1)x$$

para qualquer x real e qualquer inteiro positivo n.

1.10. Quais dos seguintes conjuntos são abertos? conexos? domínios? domínios simplesmente conexos?

a) $A = \{z : |z-1| = 2\}$;

b) $B = \{z : |z-1| \leq 2\}$;

c) $C = \{z : |z-1| < 2\}$;

d) $D = \{z : |z-1| > 2\}$;

e) $E = \{z : 1 < |z| < 2\}$;

f) $F = \{z : 1 < |z| \leq 2\}$;

g) $G = \{z = x + iy : xy > 0\}$.

1.2 FUNÇÕES E APLICAÇÕES

Definição Seja D um domínio. Se a cada ponto z de D fazemos corresponder um único número complexo $w = f(z)$, dizemos que a equação $w = f(z)$ define uma *função a valores complexos* em D. Chamamos D de *domínio da função*, e para cada z em D, $w = f(z)$ é denominada a *imagem* de z. O conjunto de todas as imagens $\{w : w = f(z), z \in D\}$ é denominado a *imagem da função*.

Não há perigo de ambigüidade em se usar $f(z)$, ou a equação $w = f(z)$, ou mesmo f, para denotar a função definida em D. Sendo E a imagem da função $f(z)$, podemos também denominar $f(z)$ uma *aplicação* do domínio D no conjunto E. Como ilustração, vamos definir duas aplicações especialmente simples, para as quais $D = E =$ plano complexo. Em primeiro lugar, para qualquer número complexo b fixado, seja $f(z) = z + b$, para todo número complexo z. Em segundo lugar, para qualquer número complexo diferente de zero, fixado, a, definimos $f(z) = az$, para todo número complexo z. A primeira dessas funções pode ser descrita geometricamente observando-se que ela simplesmente provoca uma translação no plano complexo todo, de uma distância $|b|$ na direção Arg b. A segunda função produz uma rotação de cada z mediante o ângulo Arg a e altera a distância de z ao 0 por um fator $|a|$.

Se $w = f(z)$ é uma aplicação de D em E, onde $z = x + iy$, $w = u + iv$, e x, y, u, v são reais, podemos escrever $f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, e pensar na aplicação em termos de um par de funções a valores reais, $u(x,y)$ e $v(x,y)$, definidas no conjunto D no $\mathbb{R}^2$. No momento, queremos descrever o comportamento de $f(z)$ como função a valores complexos, de maneira tão completa quanto for possível, em termos do comportamento das funções a valores reais $u(x,y) = \text{Re } f(z)$ e $v(x,y) = \text{Im } f(z)$. Isso significa que poderíamos tratar $f(z)$ como se fosse simplesmente uma função de duas variáveis reais a valores vetoriais. O momento em nossa discussão, onde mais uma vez encararemos $f(z)$ como uma função de uma única variável complexa, é quando examinaremos a questão de uma derivada. Depois desse ponto, raramente haverá vantagem em encarar $f(z)$ como função de duas variáveis reais a valores vetoriais.

Definição Uma função $f(z)$, definida num domínio D, possui um *limite em* z_0 em D, se existe um número complexo L com a propriedade de que para todo número $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ (dependendo de z_0 e ε), tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$ sempre que $z \in D$ e $0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon, z_0)$. Denominamos L o limite de $f(z)$ em z_0 e escrevemos $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$. (Uma definição de limite equivalente a esta, em termos da convergência de seqüências, é dada no Prob. 1.16.)

O leitor pode fornecer uma demonstração para a proposição seguinte.

Teorema 1.1 Hipótese: D é um domínio, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, e $f(z)$ é uma função definida em D; $L = A + iB$ é um número complexo dado.

Conclusão

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \text{ se e somente se}$$
$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \text{Re } f(z) = A \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \text{Im } f(z) = B.$$

A definição e o teorema anteriores são mais exigentes do que é necessário. Não é preciso que $f(z)$ esteja definida no ponto z_0, para poder falar em $f(z)$ ter um limite em z_0. Tanto na definição como no teorema é suficiente exigir que $f(z)$ seja definida num domínio D que, para algum número $r > 0$, contém o conjunto $\{z{:}0 < |z - z_0| < r\}$ ao redor do ponto z_0.

Definição Seja $f(z)$ definida num domínio D e seja z_0 um ponto de D. Então $f(z)$ é *contínua em* z_0 se $f(z)$ possui limite $f(z_0)$ em z_0; $f(z)$ é *contínua em* D se for contínua em todo ponto de D.

Com o Teor. 1.1 não é difícil demonstrar o resultado seguinte.

Teorema 1.2 Hipótese: $f(z)$ é definida num domínio D e $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$.

Conclusão

$f(z)$ é contínua em z_0 se e somente se ambas Re $f(z)$ e Im $f(z)$ são contínuas em (x_0, y_0).

Nada existe de não-familiar nas definições e teoremas anteriores, e o conjunto usual de propriedades e fatos relacionados com eles são válidos. Nós os resumimos nos problemas que seguem; numerosos como são, eles nos mostram que os conceitos de função para valores complexos, limite e continuidade são idéias que reconhecemos como habituais.

Problemas

1.11. Prove que se $f(z)$ está definida num domínio D e possui um limite num ponto z_0 de D, então esse limite é único.

1.12. Prove o Teor. 1.2.

1.13. Sejam $f(z)$ e $g(z)$ definidas num domínio D contendo z_0, e suponha que $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$, $\lim_{z \to z_0} g(z) = M$.
Prove que

a) para quaisquer números complexos α, β,

$$\lim_{z \to z_0} [\alpha f(z) + \beta g(z)] = \alpha L + \beta M;$$

b) $\lim_{z \to z_0} f(z)\, g(z) = LM$;

c) $\lim_{z \to z_0} f(z)/g(z) = L/M$ se $M \neq 0$.

1.14. Se $f(z)$ e $g(z)$ estão definidas num domínio D e são contínuas num ponto z_0 de D, então as seguintes funções são também contínuas em z_0:

a) $\alpha f(z) + \beta g(z)$, onde α e β são números complexos quaisquer;

b) $f(z)\, g(z)$;

c) $f(z)/g(z)$ se $g(z_0) \neq 0$.

1.15. Seja D o plano complexo. Decida, para cada uma das seguintes funções, em que pontos elas não serão contínuas; em que pontos elas não terão um limite; em que pontos terão limite mas não serão contínuas:

a) $f(z) = |z|$,

b) $f(z) = |z|/z$,

c) $f(z) = |z|^2/z$,

d) $f(z) = 1/(z^2 + 1)$,
e) $f(z) = (z - i)/(z^2 + 1)$.

1.16. Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ uma seqüência de números complexos. Dizemos que a seqüência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para A, ou tem limite A, e escrevemos $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, se para todo número $\varepsilon > 0$, existe um inteiro (*) $N(\varepsilon) > 0$ tal que $|a_n - A| < \varepsilon$ sempre que $n > N(\varepsilon)$. Suponha que $f(z)$ esteja definida num domínio contendo z_0.
a) Prove que $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ se e somente se para toda seqüência $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ com $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, é verdade que $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = L$.
b) Prove que $f(z)$ é contínua em z_0 se e somente se $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$ para toda seqüência $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ em D com $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.

1.17. Um conjunto S de números complexos é dito *limitado* se, para algum número $M > 0$, $|z| \leq M$, para todo $z \in S$.

Dizemos que S é *fechado* se o conjunto de todos os números complexos que *não estão* em S é aberto. E dizemos que S é *compacto* se S é fechado e limitado. Quais dos seguintes conjuntos são compactos?

a) $S = \{z : |z| < 1\}$;
b) $S = \{z : |z| = 1\}$;
c) $S = \{z : |z| \leq 1\}$;
d) $S = \{z : |z| < 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z > 0\}$;
e) $S = \{z : |z| \leq 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z > 0\}$;
f) $S = \{z : |z| \leq 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

1.18. Suponha que $f(z)$ é contínua num domínio D contendo um conjunto compacto M.
a) Prove que a imagem de M pela f é um conjunto limitado.
b) Se K é o menor extremo superior dos números $|f(z)|$ para $z \in M$, prove que existe um ponto $z_0 \in M$ para o qual $|f(z_0)| = K$.

1.19. Seja $f(z)$ definida num domínio D contendo um conjunto compacto M. Dizemos que $f(z)$ é *uniformemente contínua em* M se, para todo número $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$, sempre que $z, w \in M$ e $|z - w| < \delta(\varepsilon)$.
a) Prove que se $f(z)$ é uniformemente contínua em M, então $f(z)$ é contínua em M.
b) Prove que se $f(z)$ é contínua em D e M é um conjunto compacto em D, então $f(z)$ é uniformemente contínua em M.
c) Dê um exemplo para mostrar que a proposição (b) não é necessariamente verdadeira se o termo "compacto" é omitido.

1.3 DERIVADAS E FUNÇÕES ANALÍTICAS

A definição que daremos para a derivada de uma função a valores complexos num ponto, será muito familiar em termos formais. Entretanto ficará

(*) Em geral N não depende somente de ε. Na convergência uniforme N depende somente de ε.

evidente que existem diferenças fundamentais entre funções a valores reais e a valores complexos no que diz respeito às derivadas.

Definição Seja $f(z)$ definida num domínio D e z_0 um ponto de D. A *derivada de $f(z)$ em z_0* é definida como o limite

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\right].$$

(Aqui h é um número complexo). Se esse limite existe, dizemos que $f(z)$ é *diferenciável em z_0*, e escrevemos o limite como $f'(z_0)$, ou $df/dz|_{z=z_0}$. Dizemos que $f(z)$ é diferenciável em D se $f(z)$ é diferenciável em cada ponto de D.

Exemplo 1.5 A função $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ é definida para todo z. Para qualquer z_0 e qualquer número complexo $h \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{[f(z_0+h)-f(z_0)]}{h} &= \frac{[(z_0+h)^2 - z_0^2]}{h},\\ &= \frac{(2z_0h+h^2)}{h},\\ &= 2z_0 + h,\end{aligned}$$

portanto,

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0}(2z_0+h) = 2z_0.$$

Este é exatamente o resultado que deveríamos esperar.

Exemplo 1.6 Se definirmos

$$f(z) = \begin{cases}\dfrac{|z|^5}{z^4}, & z \neq 0\\ 0, & z = 0\end{cases},$$

então $f(z)$ é contínua em $z = 0$. Para $z_0 = 0$ vemos que para h *real*,

$$\lim_{h\to 0}\frac{[f(0+h)-f(0)]}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1;$$

mas para $h = ir$ onde $r > 0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{[f(0+h)-f(0)]}{h} = \lim_{r\to 0}\left(\frac{r^5}{ir^5}\right) = \frac{1}{i} = -i.$$

Assim $f(z)$ não possui uma derivada em $z_0 = 0$. O que ocorre para todo $z_0 \neq 0$?

As propriedades usuais de diferenciação permanecem válidas para funções de uma variável complexa, e as demonstrações são formalmente as mesmas que aquelas para funções de uma variável real a valores reais.

Teorema 1.3 Hipótese: $f(z)$ e $g(z)$ estão definidas num domínio D e são diferenciáveis em $z_0 \in D$.

Conclusões

C1. $f(z)$ e $g(z)$ são ambas contínuas em z_0.

C2. Se para quaisquer números complexos α e β, $F(z) = \alpha f(z) + \beta g(z)$, então $F(z)$ é diferenciável em z_0, e

$$F'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0).$$

C3. Se $G(z) = f(z)g(z)$, então $G(z)$ é diferenciável em z_0, e $G'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$.

C4. Se $H(z) = f(z)/g(z)$, e $g(z_0) \neq 0$, então $H(z)$ é diferenciável em z_0, e

$$H'(z_0) = \frac{[g(z_0)f'(z_0) - f(z_0)g'(z_0)]}{[g(z_0)]^2}.$$

C5. Se $f(z) = c$ para algum número complexo c, então $f(z)$ é diferenciável em z_0, e $f'(z_0) = 0$.

Exemplo 1.7 Seja $f(z) = |z|^2$ para todo z. Podemos mostrar que $f(z)$ é diferenciável somente em $z_0 = 0$. De fato,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{[f(0+h) - f(0)]}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{|h|^2}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\bar{h} = 0.$$

Para todo $z_0 \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{[f(z_0+h) - f(z_0)]}{h} &= \frac{[|z_0+h|^2 - |z_0|^2]}{h} \\ &= \frac{(h\bar{z}_0 + \bar{h}z_0 + |h|^2)}{h} \\ &= \bar{z}_0 + \left(\frac{\bar{h}}{h}\right)z_0 + \bar{h}.\end{aligned}$$

Tomando h real e fazendo $h \to 0$, temos

$$\lim_{h\to 0}\frac{[f(z_0+h) - f(z_0)]}{h} = \bar{z}_0 + z_0.$$

Mas se $h = ir$, para r real, e $r \to 0$, então

$$\lim_{h\to 0}\frac{[f(z_0+h) - f(z_0)]}{h} = \bar{z}_0 - z_0.$$

Se $z_0 \neq 0$, então

$$\bar{z}_0 + z_0 \neq \bar{z}_0 - z_0,$$

e $f(z)$ não é diferenciável em z_0.

Esse exemplo fornece uma função com uma derivada em um ponto isolado. Existem diversas razões para sugerir que não deveríamos ficar impressionados demais com o fato de existir uma derivada num ponto só, e que deveríamos restringir nossa atenção a funções que possuam derivada em todo ponto de um domínio. O primeiro motivo advém das propriedades das séries de potências reais em suas regiões de convergência. Lembramos que se uma tal série de potências, no caso potências de $x - x_0$, tem um raio de convergência $r > 0$, então a função representada pela série tem uma derivada em todo ponto da região de convergência $|x - x_0| < r$. Entretanto, em geral, é difícil lidar de uma maneira prática com uma função conhecida apenas através de uma representação em série de potências com um raio de convergência positivo. Voltando nossa atenção a funções que são definidas e diferenciáveis num domínio, em lugar de diferenciáveis somente em pontos isolados, podemos eventualmente descobrir que estamos falando exatamente sobre aquelas funções que podem ser representadas por séries de potências com um raio de convergência positivo. O que aprendemos no processo é, entre outras coisas, que ele nos ajuda a trabalhar com funções definidas por séries de potências.

Uma segunda razão é que, ao tentar exibir condições sobre uma função $f(z)$ suficientes para garantir que ela seja diferenciável num ponto z_0, podemos ver a necessidade dela se comportar adequadamente em todo ponto numa vizinhança de z_0. Os detalhes aparecerão nos Teors. 1.4 e 1.5. Por essas razões damos a definição seguinte.

Definição Uma função $f(z)$ definida num domínio D contendo o ponto z_0, diz-se *analítica* em z_0 se para algum número $r > 0$, tal que o disco aberto $\{z:|z-z_0| < r\}$ está contido em D, $f(z)$ é diferenciável em cada ponto do disco.

Observamos que, apesar da definição de "analítica em z_0" sugerir que isso seja uma propriedade de $f(z)$ em um ponto, na realidade é uma propriedade de $f(z)$ numa vizinhança de um ponto. No Exp. 1.7 temos uma função que é diferenciável em $z_0 = 0$, mas não é analítica em $z_0 = 0$.

Seja $f(z)$ definida num domínio D, onde $z = x + iy$, $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$. Procuramos condições sobre $u(x,y)$ e $v(x,y)$ que garantam que $f(z)$ tem uma derivada em todo ponto de D. Vejamos, inicialmente, quais condições a diferenciabilidade impõe em $u(x,y)$ e $v(x,y)$.

Teorema 1.4 Hipótese: D é um domínio contendo $z_0 = x_0 + iy_0$ e $f(z)$ é uma função definida e contínua em D, tal que $f(z)$ é diferenciável em z_0.

Conclusões

C1. $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ e $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ têm derivadas parciais de primeira ordem em (x_0,y_0).

C2. As derivadas parciais de u e v em (x_0,y_0) satisfazem as equações

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -v_x. \tag{1.1}$$

Demonstração Uma vez que existe $f'(z_0)$, escrevemos

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{[f(z_0 + h)-f(z_0)]}{h}.$$

Primeiramente, tomamos h como sendo real; portanto

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{[u(x_0 + h,y_0)-u(x_0,y_0)]}{h} + \frac{i[v(x_0 + h,y_0)-v(x_0,y_0)]}{h}\right\}; \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{[u(x_0 + h,y_0)-u(x_0,y_0)]}{h}\right\} \\ &\qquad + i\lim_{h\to 0}\left\{\frac{[v(x_0 + h,y_0)-v(x_0,y_0)]}{h}\right\}. \end{aligned}$$

Cada limite aqui deve existir (pelo Teor. 1.1) e $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$.

Tomando agora $h = ir$, onde r é real, um argumento semelhante mostra que $f'(z_0) = v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0)$. Igualando as partes reais e imaginárias das expressões resultantes para $f'(z_0)$, obtemos (1.1).

As Eqs. de (1.1) são conhecidas como *equações de Cauchy-Riemann*: elas fornecem condições necessárias para que $f(z)$ tenha uma derivada em z_0. Entretanto elas não são suficientes para garantir que $f(z)$ tem uma derivada em z_0 — isto é, podemos construir uma função $f(z)$, definida num domínio contendo um ponto z_0, para a qual Re $f(z)$ e Im $f(z)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, que não tem derivada em z_0. (Veja o Prob. 1.20).

O Teor. 1.5 fornece condições suficientes para que $f(z)$ tenha uma derivada num ponto z_0. Elas não são as condições mais fracas possíveis, mas são facilmente verificadas na prática, e são suficientemente gerais para os nossos propósitos. A prova não é excitante, mas efetua uma revisão de algumas idéias importantes de cálculo.

Teorema 1.5 Hipóteses: $f(z)$ é definida num domínio D contendo o ponto $z_0 = x_0 + iy_0$.

H1. $u(x,y) = \text{Re } f(z)$ e $v(x,y) = \text{Im } f(z)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa vizinhança $|z - z_0| < r$ ao redor de z_0 em D.

H2. $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0).

Conclusão

$$f(z) \text{ é diferenciável em } z_0.$$

Demonstração Se $h = a + ib$, onde $0 < |h| < r$,

$$\frac{[f(z_0 + h) - f(z_0)]}{h}$$

$$= \frac{[u(x_0 + a, y_0 + b) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0 + a, y_0 + b) - v(x_0, y_0)]}{a + ib}$$

$$= \left\{\frac{u(x_0 + a, y_0 + b) - u(x_0, y_0 + b) + u(x_0, y_0 + b) - u(x_0, y_0)}{a + ib}\right\}$$

$$+ i\left\{\frac{v(x_0 + a, y_0 + b) - v(x_0, y_0 + b) + v(x_0, y_0 + b) - v(x_0, y_0)}{a + ib}\right\}$$

$$= \left(\frac{a}{a + ib}\right)\left\{\left[\frac{u(x_0 + a, y_0 + b) - u(x_0, y_0 + b)}{a}\right]\right.$$

$$\left. + i\left[\frac{v(x_0 + a, y_0 + b) - v(x_0, y_0 + b)}{a}\right]\right\}$$

$$+ \left(\frac{a}{a + ib}\right)\left\{\left[\frac{u(x_0, y_0 + b) - u(x_0, y_0)}{b}\right] + i\left[\frac{v(x_0, y_0 + b) - v(x_0 y_0)}{b}\right]\right\}$$

Se a ou b for zero, o desenvolvimento anterior se torna mais fácil.

Já que tanto $u(x,y)$ como $v(x,y)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em $|z - z_0| < r$, podemos usar o teorema do valor médio para derivadas a fim de encontrar números reais t_1, t_2, t_3, t_4, dependendo de h, tais que $0 < t_j < 1$, $j = 1, 2, 3, 4$, e

$$\frac{[f(z_0 + h) - f(z_0)]}{h} = \left(\frac{a}{a + ib}\right)[u_x(x_0 + t_1 a, y_0 + b) + iv_x(x_0 + t_2 a, y_0 + b)]$$

$$+ \left(\frac{b}{a + ib}\right)[u_y(x_0, y_0 + t_3 b) + iv_y(x_0, y_0 + t_4 b)].$$

Pondo

$$\begin{aligned}E_1(h) &= u_x(x_0 + t_1a, y_0 + b) - u_x(x_0, y_0),\\ E_2(h) &= v_x(x_0 + t_2a, y_0 + b) - v_x(x_0, y_0),\\ E_3(h) &= u_y(x_0, y_0 + t_3b) - u_y(x_0, y_0),\\ E_4(h) &= v_y(x_0, y_0 + t_4b) - v_y(x_0, y_0),\end{aligned}$$

então $\lim_{h\to 0} E_j(h) = 0$ para $j = 1, 2, 3, 4$, porque $\lim_{h\to 0} a = \lim_{h\to 0} b = 0$.

Reescrevemos

$$\begin{aligned}&\frac{[f(z_0 + h) - f(z_0)]}{h}\\ &= \left(\frac{a}{a + ib}\right)[u_x(x_0, y_0) + E_1(h) + iv_x(x_0, y_0) + iE_2(h)]\\ &+ \left(\frac{b}{a + ib}\right)[u_y(x_0, y_0) + E_3(h) + iv_y(x_0, y_0) + iE_4(h)],\\ &= \left(\frac{a}{a + ib}\right)[u_x(x_0, y_0) + E_1(h) + iv_x(x_0, y_0) + iE_2(h)]\\ &+ \left(\frac{b}{a + ib}\right)[-v_x(x_0, y_0) + E_3(h) + iu_x(x_0, y_0) + iE_4(h)],\end{aligned}$$

onde usamos a hipótese H2.

Reescrevendo

$$\begin{aligned}&\frac{[f(z_0 + h) - f(z_0)]}{h}\\ &= \left(\frac{1}{a + ib}\right)\Big\{(a + ib)u_x(x_0, y_0) + (ia - b)v_x(x_0, y_0)\\ &+ a[E_1(h) + iE_2(h)] + b[E_3(h) + iE_4(h)]\Big\}\\ &= u_x(x_0 y_0) + iv_x(x_0, y_0)\\ &+ \left(\frac{a}{a + ib}\right)[E_1(h) + iE_2(h)] + \left(\frac{b}{a + ib}\right)[E_3(h) + iE_4(h)].\end{aligned}$$

Desde que $\lim_{h\to 0} E_j(h) = 0, j = 1, 2, 3, 4$, dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um número $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ tal que, sempre que $|h| < \delta(\varepsilon, z_0)$, tenhamos $|E_j(h)| < \varepsilon/4$. Então para $|h| < \delta(\varepsilon, z_0)$,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{[f(z_0 + h) - f(z_0)]}{h} - [u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)]\right|\\ &\le \left(\frac{|a|}{|a + ib|}\right)[|E_1(h)| + |E_2(h)|] + \left(\frac{|b|}{|a + ib|}\right)[|E_3(h)| + |E_4(h)|]\\ &\le |E_1(h)| + |E_2(h)| + |E_3(h)| + |E_4(h)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Isso significa que $f'(z_0)$ existe e vale

$$u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

Exemplo 1.8 Seja $f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$, para todo z. Então $\operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y = u(x,y)$, e $\operatorname{Im} f(z) = e^x \operatorname{sen} y = v(x,y)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, satisfazendo as equações de Cauchy-Riemann em todo ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, e $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) = f(z_0)$. (Notemos que quando $z = x + i0, f(z) = f(x) = e^x$. Isto, juntamente com o fato de $f'(z) = f(z)$, certamente terá influência na definição de uma função exponencial no Cap. 2.)

Estaremos preocupados principalmente com funções que são analíticas em todos os pontos de um domínio, ou em todos exceto um número finito. Por esse motivo, reescrevemos rapidamente os Teors. 1.4 e 1.5.

Teorema 1.4′ Hipóteses: $f(z)$ é analítica num domínio D.

Conclusão

$u(x,y) = \text{Re}\, f(z)$ e $v(x,y) = \text{Im}\, f(z)$ têm derivadas parciais de primeira ordem que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em todo ponto de D.

Teorema 1.5′ Hipóteses: $f(z)$ é definida num domínio D.

H1. $u(x,y) = \text{Re}\, f(z)$ e $v(x,y) = \text{Im}\, f(z)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em todo ponto de D.

H2. $u_x(x,y) = v_y(x,y)$ e $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$ em todo ponto de D.

Conclusão

$$f(z) \text{ é analítica em } D.$$

No Teor. 1.4′, gostaríamos de concluir que as primeiras derivadas de $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são contínuas em todo ponto de D, já que se o caso for esse, os Teors. 1.4′ e 1.5′ seriam a recíproca um do outro. Esse é realmente o caso, embora tenhamos de acabar o Cap. 3 para estarmos capacitados a demonstrá-lo.

Há ainda um teorema que nos é familiar e que podemos examinar agora. Seu propósito é o de fornecer uma "regra da cadeia" conveniente para derivadas, e o de nos convencer de que (falando imprecisamente) "uma função analítica de uma função analítica é analítica".

Teorema 1.6 Hipóteses

H1. $g(z)$ é analítica num domínio D e tem imagem E.

H2. $f(w)$ é analítica num domínio que contém E.

Conclusões

C1. $F(z) = f[g(z)]$ é analítica em D.

C2. Para cada z_0 em D, $F'(z_0) = f'[g(z_0)]g'(z_0)$.

Demonstração É suficiente mostrar que C2 é verdadeira para um ponto arbitrário z_0 em D.

Como $f(w)$ é diferenciável em $w_0 = g(z_0)$, segue que

$$\lim_{k \to 0}[f(w_0 + k) - f(w_0)]/k = f'(w_0),$$

e portanto podemos escrever $f(w_0 + k) - f(w_0) = f'(w_0)k + E_1(k)k$, onde $\lim_{k \to 0} E_1(k) = 0$.

Se h é um número complexo qualquer, tal que $z_0 + h$ também está em D, seja $k = g(z_0 + h) - g(z_0)$. Já que $g(z)$ é diferenciável em z_0,

$$\lim_{h \to 0}[g(z_0 + h) - g(z_0)]/h = g'(z_0),$$

e escrevemos

$$k = g(z_0 + h) - g(z_0) = g'(z_0)h + E_2(h)h$$

onde $\lim_{h \to 0} E_2(h) = 0$.

$g(z)$ é também contínua em z_0, portanto, $\lim_{h \to 0} k = 0$. Isso significa que $\lim_{h \to 0} E_1(k) = \lim_{k \to 0} E_1(k) = 0$.

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{[F(z_0 + h) - F(z_0)]}{h} &= \frac{\{f[g(z_0 + h)] - f[g(z_0)]\}}{h}; = \frac{[f(w_0 + k) - f(w_0)]}{h};\\
&= \frac{[f'(w_0)k + E_1(k)k]}{h};\\
&= \frac{\{f'(w_0)[g'(z_0)h + E_2(h)h] + E_1(k)[g'(z_0)h + E_2(h)h]\}}{h};\\
&= f'(w_0)g'(z_0) + f'(w_0)E_2(h) + g'(z_0)E_1(k) + E_1(k)E_2(h).
\end{aligned}$$

Tomando agora os limites quando $h \to 0$, vemos que

$$F'(z_0) = f'[g(z_0)]g'(z_0).$$

Problemas

1.20. Mostre de duas maneiras que $f(z) = f(x + iy) = 3x + i4y$ não é diferenciável em $z = 0$.

1.21. Verifique que $f(z) = (|xy|)^{1/2}$ satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em $z = 0$, mas não possui derivada em $z = 0$.

1.22. Suponha que $f(z) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$. Encontre $f(z_0)$ num ponto qualquer $z_0 = x_0 + iy_0$. Se $z_0 = x_0 + i0$, o que vem a ser $f(z_0)$ e $f'(z_0)$?

1.23. Se n é um inteiro positivo e $f(z) = z^n$, verifique que $f'(z_0) = n z_0^{n-1}$, para todo z_0.

1.24. Suponha que seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, onde u e v, em coordenadas polares, possuem derivadas parciais contínuas de primeira ordem, em relação a r e θ, em algum ponto $z_0 = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, $z_0 \neq 0$. Mostre que se $u_r = (1/r)v_\theta$ e $v_r = -(1/r)u_\theta$, então $f(z)$ é analítica em z_0, e $f'(z_0) = (\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)(u_r + iv_r)$.

1.25. Se $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$, e $f(z) = r^{1/2}[\cos(\theta/2) + i \operatorname{sen}(\theta/2)]$, verifique que as equações do problema anterior estão satisfeitas e que

$$f'(z) = \left(\frac{1}{2} r^{1/2}\right)[\cos(\theta/2) - i\operatorname{sen}(\theta/2)].$$

1.26. Vimos que se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$, então $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$. Seja **a** um vetor unitário em z_0, formando um ângulo α com o eixo real positivo.

Mostre que

$$f'(z_0) = [D_a u(x_0, y_0) + iD_a v(x_0, y_0)](\cos\alpha - i \operatorname{sen} \alpha)$$

onde $D_a u(x_0, y_0)$, $D_a u(x_0, y_0)$ são as derivadas direcionais de u e v em (x_0, y_0) na direção de **a**. Escreva as equações obtidas para $f'(z_0)$, ao escolher $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi/2$.

1.27. Se $f(z)$ é definida para $|z - z_0| < r$ e $|f(z)|$ é constante aí, mostre que se $f(z)$ é analítica então deve ser constante.

1.28. Mostre que se $f(z)$ é definida, não constante, e a valores reais para $|z - z_0| < r$, então $f(z)$ não pode ser analítica em z_0. (Entretanto como no Exemplo 1.7, $f(z)$ pode ter uma derivada em z_0).

1.29. A função $f(z) = \bar{z}$ possui uma derivada em todo lugar? É analítica em todo lugar?

1.30. Se $f(z)$ é analítica num domínio D e $f'(z) = 0$ em todo ponto de D, mostre que $f(z)$ é identicamente constante em D.

1.4 FUNÇÕES HARMÔNICAS

Se D é um domínio em R^2 e se g é uma função a valores reais, definida em D, que possui derivadas parciais de segunda ordem em cada ponto de D, dizemos que g é *harmônica em D* se

$$\nabla^2 g(x,y) = g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y) = 0, \qquad (1.2)$$

em todo ponto (x,y) de D. Aqui $\nabla^2 g$ é o *Laplaciano de g*, e a Eq. (1.2) é conhecida como *equação de Laplace* em duas dimensões. Tais funções aparecem muito naturalmente quando lidamos com funções analíticas de uma variável complexa.

Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em um domínio D do plano complexo, sabemos que u e v possuem derivadas parciais de primeira ordem em cada ponto de D, mas não sabemos ainda se essas derivadas são contínuas ou se possuem derivadas parciais de primeira ordem. No momento, vamos assumir que u e v possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas em cada ponto onde $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica. O desenvolvimento do Cap. 3 nos mostrará que u e v têm estas propriedades.

Teorema 1.7 Hipóteses

H1. $f(z)$ é analítica num domínio D.

H2. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, onde u e v possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas em cada ponto de D.

Conclusão

$u(x,y)$ e $v(x,y)$ são harmônicas em D.

Demonstração Faremos a demonstração para $u(x,y)$ e deixaremos a cargo do leitor efetuar os detalhes para $v(x,y)$.

Em cada ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ de D, H1 implica que

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Assim,

$$u_{yy}(x_0,y_0) = -v_{xy}(x_0,y_0) = -v_{yx}(x_0,y_0) = -u_{xx}(x_0,y_0).$$

(Por que essas passagens são válidas?) Então

$$\nabla^2 u(x_0,y_0) = u_{xx}(x_0,y_0) + u_{yy}(x_0,y_0) = 0.$$

Porque v_{xy} são cont. v_{yx}

O leitor deve agora fazer uma pausa para verificar que as partes real e imaginária das funções definidas no Exemplo 1.8 e no Prob. 1.22 são realmente harmônicas.

Para funções harmônicas em domínios do $\mathbb{R}^2$, nosso trabalho com funções analíticas pode nos dar alguma informação adicional, de que funções harmônicas ocorrem aos pares, sendo que o "agente de ligação" em cada par é uma função analítica. Estabelecemos esta situação no Teor. 1.8, sem porém, dar a prova.

Teorema 1.8 Hipótese: $u(x,y)$ é harmônica num domínio simplesmente conexo D.

Conclusão

Existe uma função $f(z)$, analítica em D, tal que $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ em cada ponto de D.

Comentários

1. A parte imaginária de $f(z)$ aqui é também harmônica em D; ela é denominada *harmônica conjugada* de $\operatorname{Re} f(z)$. Assim o Teor. 1.8 pode ser enunciado novamente como segue: Se $u(x,y)$ é harmônica em D, existe uma função conjugada harmônica $v(x,y)$ de $u(x,y)$ tal que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em D.
2. O Teor. 1.8 pode deixar de ser verdadeiro se D não for simplesmente conexo. (Veja o Prob. 2.26.)

Podemos ilustrar um procedimento para encontrar uma harmônica conjugada de uma dada função harmônica, através de um exemplo. A justificativa do desenvolvimento deste procedimento constituiria boa parte do que é necessário para demonstrar o Teor. 1.8. Provavelmente, o leitor reconhecerá esse procedimento pelas discussões do Teorema de Green no plano ou pelos métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, exatas ou lineares.

Exemplo 1.9 $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ é harmônica para todo $z = x + iy$. Para qualquer z e qualquer domínio simplesmente conexo, contendo z, sabemos que existe uma função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, analítica neste domínio, satisfazendo $u_x(x,y) = v_y(x,y)$ e $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$.

Agora, se $u_x = -6xy = v_y$, então $v(x,y) = -3xy^2 + h(x)$, onde $h(x)$ é alguma função a valores reais de x. Também

$$v_x = -3y^2 + h'(x) = -u_y,$$

portanto,

$$u_y = 3y^2 - h'(x) = 3y^2 - 3x^2.$$

Então $h'(x) = 3x^2$, $h(x) = x^3 + k$, onde k é uma constante arbitrária. Pondo $v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + k$; $v(x,y)$ é harmônica e verifica-se facilmente que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (y^3 - 3x^2y) + i(x^3 - 3xy^2) + ik = z^3 + ik$ é analítica.

Problemas

1.31. Verifique que $u(x,y)$ é harmônica e encontre uma harmônica conjugada para $u(x,y)$.

a) $u(x,y) = y/(x^2 + y^2)$, $\quad (x,y) \neq (0,0)$.
b) $u(x,y) = \operatorname{sen} x \cosh y$
c) $u(x,y) = x^2 - y^2$.

1.32. Suponha que $u(x,y)$ seja harmônica num domínio D, e $v(x,y)$ seja uma harmônica conjugada para $u(x,y)$ em D. Para constantes reais c e k, as equações $u(x,y) = c$, $v(x,y) = k$ determinam famílias das assim chamadas *curvas de nível* para u e v.

Suponha que, para $c = c_0$, $k = k_0$, as curvas de nível $u(x,y) = c_0$, $v(x,y) = k_0$ se interceptem num ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ de D. Prove que se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em z_0, com $f'(z_0) \neq 0$, então as curvas de nível $u(x,y) = c_0$, $v(x,y) = k_0$ são ortogonais em z_0.

1.33. Se $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$, esboce algumas curvas de nível para cada função. Note que as curvas definidas por $u(x,y) = 0$ e $v(x,y) = 0$ se interceptam em (0,0), mas não são ortogonais. Por que isso não contradiz o problema anterior?

fácil

1.34. Suponha que D seja um domínio que não contém (0,0) e que $u(x,y)$ é uma função a valores reais com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em D. Mostre que, através da mudança de variáveis $\{x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta\}$, $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$ se torna

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \left(\frac{1}{r}\right)u_r + \left(\frac{1}{r^2}\right)u_{\theta\theta}.$$

Bibliografia

Carrier, F., M. Krook, e C. E. Pearson. *Functions of a Complex Variable.* New York: McGraw-Hill, 1966.

Churchill, R. *Introduction to Complex Variables and Applications* (2.ª edição). New York: McGraw-Hill, 1960.

Copson, E. T. *The Theory of Functions of a Complex Variable.* Londres: Oxford University Press, 1935.

Cunningham, J. *Complex Variable Methods in Science and Technology.* New York: D. Van Nostrand, 1965.

Hille, E. *Analytic Function Theory,* Vol. I. New York: Ginn, 1959.

Kaplan, W. *Introduction to Analytic Functions.* Reading, Mass.: Addison--Wesley, 1966.

Kober, H. *Dictionary of Conformal Representations.* New York: Dover, 1952.

Nehari, Z. *Introduction to Complex Analysis* (edição revista). Boston: Allyn and Bacon, 1968.

Pennisi, L. L. *Elements of Complex Variables.* New York: Holt, Rinehart and Winston, 1963.

Spiegel, M. R. *Theory and Problems of Complex Variables* (Schaum's Outline Series). New York: Schaum Publishing, 1964.

Respostas aos problemas

Capítulo 1

1.1. a) $2i, -i, -i$.
b) $2 + 2i, -2 + 2i, 1/2 - i/2$.
c) $6 + 8i, -117 + 44i, 3/25 - (4/25)i$.

1.2. a) $z_1 = 2^{1/2}[\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)]$,
$z_2 = 5^{1/2}[\cos(5.82) + i \operatorname{sen}(5.82)]$.
b) $z_1 + z_2 = 3$, $z_1 z_2 = 3 + i = 10^{1/2}[\cos(.32) + i \operatorname{sen}(.32)]$,
$z_1/z_2 = 1/5 + (3/5)i = (.632)[\cos(.46) + i \operatorname{sen}(.46)]$.
c) i) $2x - 4y = 3$;
ii) $32x^2 + 16xy + 20y^2 - 96x - 24y + 36 = 0$.

1.4. z_1 e z_2 devem estar na mesma reta pela origem.

1.6. O conjunto de pontos que estão do mesmo lado do que b em relação à mediatriz do segmento de reta que liga a a b.

1.7. a) $z = \cos(2\pi k/3) + i \operatorname{sen}(2\pi k/3)$, $k = 0, 1, 2$.
b) $z = \cos(\pi/5 + 2\pi k/5) + i \operatorname{sen}(\pi/5 + 2\pi k/5)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
c) $z = 3^{1/6}[\cos(\pi k/3) + i \operatorname{sen}(\pi k/3)]$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
d) $z = (1/2)[-1 \pm i\sqrt{11}]$.
e) $z = 2[\cos(\pi/6 + 2\pi k/3) + i \operatorname{sen}(\pi/6 + 2\pi k/3)]$, $k = 0, 1, 2$.

1.9. c) $[1 + \cos x - \cos nx - \cos(n-1)x]/(2 - 2\cos x)$.

1.10. (c) e (d) são abertos; todos são conexos; (c) e (d) são domínios; (c) é um domínio simplesmente conexo.

1.17. (b), (c) e (f) são compactos.

1.22. $f'(z_0) = \cos x_0 \cosh y_0 - i \operatorname{sen} x_0 \operatorname{senh} y_0$, $f(x_0) = \operatorname{sen} x_0$, $f'(x_0) = \cos x_0$.

1.29. Não; não.

1.31. a) $v(x,y) = x/(x^2 + y^2)$.
b) $v(x,y) = \cos x \operatorname{senh} y$.
c) $v(x,y) = 2xy$.

1.33. Se $f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $f'(0) = 0$.

Capítulo 2

2.3. $z = 2k\pi i$, k inteiro qualquer.

2.5. a) $z = \log 5 + i(\pi/2 + 2k\pi)$, k inteiro qualquer.
b) $z = (1/2)\log 2 + i(\pi/4 + 2k\pi)$, k inteiro qualquer.
c) $z = x + iy$, $y > 0$.

2.10. a) $z = \pm \cos^{-1}(4/\sqrt{31}) + 2k\pi - (i/2)\log 31$, k inteiro qualquer.
b) $z = \pm \cos^{-1}(2/3) + (2k + 1)\pi - i \log 3$, k inteiro qualquer.
c) $z = k\pi + (i/2)\log 5$, k inteiro qualquer.

2.12. a) $z = k\pi i$, k inteiro qualquer.
b) $z = (2k + 1)\pi i/2$, k inteiro qualquer.
c) $z = \log(2 \pm \sqrt{3}) + i(\pi/2 + 2k\pi)$, k inteiro qualquer.
d) $z = \log(4 \pm \sqrt{15}) + 2k\pi i$, k inteiro qualquer.
2.17. $x = \log[y + (y^2 + 1)^{1/2}]$.
2.18. a) $z = \text{Log}\,17 + 2k\pi i$, k inteiro qualquer.
b) $z = (1/2)\,\text{Log}\,3 + (2k + 1)\pi i/2$, k inteiro qualquer.
2.19. $(1/2)\,\text{Log}\,2 - i\pi/4$.
2.20. a) $\pm\exp(i\pi/4)$.
b) $2^{1/8}\exp[i(\pi/16 + k\pi/2)]$, $k = 0, 1, 2, 3$.
c) $2\exp(2k\pi i/3)$, $k = 0, 1, 2$.
d) $\exp(-\pi/2 - 2k\pi)$, k inteiro qualquer.

Capítulo 3

3.1. 0.
3.3. Sim.
3.6. $32\sqrt{2}$.
3.8. $1 + 2i/3$.
3.9. 0 se k é par, -2 se k é ímpar.
3.10. $a\,\text{Log}\,a - a + 1$.
3.11. $(2/3)(a^{3/2} - 1)$.
3.12. $2\pi i$ se $n = -1$, 0 nos outros casos.
3.13. 0 para todo n, se a está fora de C; 0 para todo $n \neq 1$, se a está no interior de C; $2\pi i$ se $n = 1$ e a está no interior de C.
3.14. a) 0.
b) $-\pi i$.
c) πi.
3.15. a) 0.
b) $-\pi i$.
c) πi.
3.16. Não; seja $f(z) = \text{Re}\,z$.
3.17. a) $-2\pi i$.
b) $2\pi i(e^2 - e)$.
c) $2\pi i$.
d) 0 se C não abrange o ponto 2; $2\pi i$ se C abrange o ponto 2.
e) 0 se $m \neq n$; $2\pi i$ se $m = n$.
3.21. 80/27.
3.22. No(s) ponto(s) de W mais distante(s) do eixo imaginário, do lado direito.
3.26. 2 em $z = \pm 1$; 0 em $z = \pm i$.

Capítulo 4

4.1. a) $\rho = \infty$; converge para todo z finito.
b) $\rho = \infty$; converge para todo z finito.

c) $\rho = 1$; $|z-2| < 1$.
d) $\rho = 0$; converge somente para $z = 1$.

4.2. a) $|2z + 3| < 3$.
b) $|z + 1| < \sqrt{2}$.
c) $|3z + 2| < 1$.

4.4. a) $|z| < 1$; $1 - \operatorname{Log}(1-z)$.
b) $|z| < 1$; $z(1 + z)/(1-z)^3$.
c) $|z| < 1$; $-\int_0^z (1/z) \operatorname{Log}(1-z)\, dz$.
d) $|3z + 2| < 1$; $(3z + 2)/(3z + 1)^2$.

4.6. $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$; $k - \operatorname{Log}[1 - \exp(2\pi i z)]$, onde

$$k = \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-2\pi(n + 1)]/(n + 1).$$

4.8. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}/(n + 1)$; $|z| < 1$.

4.9. a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$.
b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1}/(2n + 1)$.

4.10. a) $z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7!$
b) $1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6!$
c) $z - z^2/2 + z^3/3 - z^4/4$.
d) $z + z^2/2 + z^3/3 - z^5/120$.
e) $z + z^2 + z^3/3 - z^5/30$.
f) $e + ez + ez^2 + (2/3)ez^3$.
g) $-2z - 2z^3 - 2z^5 - 2z^7$.

4.11. $-\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}/(2n + 1)!$

4.12. $-\sum_{n=0}^{\infty} (z + 1)^n$.

4.13. $-1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$.

4.14. a) $1/4z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1}/2^{2n+2}$.
b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} z^{-2n-3}$.
c) $-1/6(z-2i) - i/6 + (5/36)(z-2i) + (i/9)(z-2i)^2 + \cdots$
d) $1/(z-2i)^3 - 6i/(z-2i)^4 - 30/(z-2i)^5 + 216i/(z-2i)^6 - \cdots$

4.15. a) $1/2 - (1/4)z - (3/8)z^2 + (3/16)z^3 + (13/32)z^4 - (13/64)z^5 \ldots$
b) $1/z^3 - 2/z^4 + 3/z^5 - 6/z^6 + 13/z^7 \ldots$
c) $1/z^3 - 2/z^4 - 5/z^5 + 10/z^6 - 11/z^7 \ldots$
d) $1/5(z + 2) - (4/25) + (9/125)(z + 2) - (12/625)(z + 2)^2 \ldots$

4.16. a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}/n!$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n}/n!$

4.17. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n-1}/(2n+1)!$; r pode ser arbitrariamente grande.

4.18. $(z-1)^2 + (z-1)^{-2}$.

4.21. a) Zero de ordem 1 em $z = 0$; pólo de ordem 1 em $z = -1$.

b) Nenhum zero; pólos simples em $z = \pm i$.

c) Zeros simples em $z = 2k\pi i$, k inteiro qualquer; nenhum pólo.

d) Nenhum zero; pólos simples em $z = 2k\pi i$, k inteiro qualquer.

e) Zeros simples em $z = \exp(2k\pi i/3)$, $k = 0, 1, 2$; pólos simples em $z = \operatorname{Log} 2 + 2m\pi i$, m inteiro qualquer.

f) Zeros de ordem 2 em $z = \pm 1$; pólo de ordem 2 em $z = 0$.

4.23. Sim.

4.24. $z = (2k+1)\pi/2$; k inteiro qualquer; ordem 1.

4.25. Pólo de ordem 2 em $z = 0$; pólo de ordem 1 em $z = k\pi$, para cada inteiro não-nulo k.

4.28. b) -1.

Capítulo 5

5.1. a) 1.

b) $1/4$ em $z = \pm 1$, $-1/4$ em $z = \pm i$.

c) $(-1)^k$ em $z = k\pi$, k inteiro qualquer.

d) $-1/$ em $z = (2k+1)/2$, k inteiro qualquer.

e) $e/2$ em $z = 1$, $-e^2$ em $z = 2$, $e^3/2$ em $z = 3$.

f) 1 em $z = 0$.

g) $1/2$ em $z = 0$.

h) -1 em $z = 0$, $e(1 - \operatorname{sen} 1 \cos 1)/\operatorname{sen}^3 1$ em $z = 1$.

5.2. a) πi.

b) 0.

c) 0.

d) $-\pi i$.

e) $2\pi i$.

f) 0.

5.4. $6\pi i$.

5.6. $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

5.7. $-10/\pi$.

5.13. a) $2\pi/3^{1/2}$.

b) $\pi/32$.

c) $2\pi \exp(-3^{1/2}) \cos 1/3^{1/2}$.

d) $\pi \exp(-\alpha/2^{1/2}) \operatorname{sen}(\alpha/2^{1/2})$.

5.14. $(\pi/8)(1 + e^{-4})$.

5.15. $\pi/2$ se $m > 0$, $-\pi/2$ se $m < 0$, 0 se $m = 0$.

6.14. $k_1/4 + 3k_2/4$.
6.15. $e^{-y} \cos x$.
6.16. $(2/\pi) \operatorname{Arg}(e^z) - 1$.
6.17. $1 + (1/\pi) \operatorname{Arg}(z + 1/z)$.
6.19. $g(z) = A + (B - A)\left[\dfrac{\operatorname{Log}|w| - \operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} b - \operatorname{Log} a}\right]$, onde $w = (z - 3^{1/2})/3^{1/2}z - 1)$.
6.20. $-\log|(z - i\alpha)/(z + i\alpha)|$.
6.21. $(4/\pi) \operatorname{Arg} z - 2 + 2 \log|(z - i)/(z + i)|$.
6.22. O centro se aproxima de i e o raio tende a 0.
6.23. $-\log|z/2 + 2/z|$.
6.24. $(2/\pi) \operatorname{Arg} z - 1 - 3 \log|z|$.
6.25. $2 - (4/\pi) \operatorname{Arg}[i(2 - i + z)/(2 + i - z)] + \log|(z - i)/2] - \log|2z/(5 + iz)|$.
6.26. $(2/\pi) \operatorname{Arg}[(z + 1)^2/(z - 1)^2] - (1/2) \log\left[\dfrac{25(1 + z)^2 + (7 - 24i)(1 - z)^2}{25(1 - z)^2 + (7 + 24i)(1 + z)^2}\right]$.

Capítulo 7

7.1. $H(w) = k(w + 1/w)$, $F(w) = k(1 - 1/\overline{w}^2)$; equipotenciais $u + u/(u^2 + v^2) =$ $=$ constante, formas aerodinâmicas $v - v/(u^2 + v^2) =$ constante.
7.2. $H(w) = k(1 + e^{-2w})^{1/2}$, $F(w) = -\overline{[ke^{-2w}/(1 + e^{-2w})^{1/2}]}$.
7.3. a) $-(1/2) \log\{[s^2 + r^2 - 2rs \cos(\phi - \theta)]/[1 + r^2s^2 - 2rs \cos(\phi - \theta)]\}$.

Capítulo 8

8.1. a) $w^{1/2}$,
b) $\pm i$.
8.2. a) $f'(z) = 2e^z$,
b) $f(z) = 2e^z - 1$.
8.3. a) $f'(z) = g'(z) + g(z)$, onde $f(0) = g(0)$.
8.5. $\pi/2$.
8.6. $G(z) = F'(z)$.
8.7. a) para todo z, exceto $\{z : z$ é real, $|z| \geq 1\}$.
b) $2\pi(1 - x^2)^{-1/2}$, $-1 < x < 1$.
c) $2\pi(1 - z^2)^{-1/2}$.
8.9. $\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \pi \operatorname{sen} \pi z$.

Índice

Este trabalho foi elaborado pelo processo de FOTOCOMPOSIÇÃO
Monophoto - no Departamento de Composição da Editôra
Edgard Blücher Ltda. - São Paulo - Brasil