Eliminação de Gauss - Cálculo da Matriz Inversa

Prof*a*. Cynthia de O. Laga Ferreira

Métodos Numéricos e Computacionais I - SME0305

Eliminação de Gauss

Considere o sistema

$$Ax = b,$$

onde A é uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ cujos elementos a_{ij} são reais ou complexos e x e b são vetores colunas de dimensão n, x é um vetor desconhecido e b é um vetor dado.

Suponha que todas as submatrizes principais A_k são não singulares, isto é, $det(A_k) \neq 0$, *para* $k = 1, 2, ..., n-1$. O método da eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema dado em um sistema triangular superior equivalente

$$\tilde{A}x = \tilde{b},$$

através de operações elementares sobre as linhas do sistema original. A solução deste sistema é calculada usando o algoritmo de substituições regressivas.

Descrição do Algoritmo

$$A_i^{(k+1)} \leftarrow A_i^{(k)} - m_{ik}A_k^{(k)},\ com\ m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},$$

$$b_i^{(k+1)} \leftarrow b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)}, k = 1, ..., n-1\ e\ i = k+1, ..., n$$

Vejamos como o algoritmo é aplicado na prática. Consideremos o caso de uma matriz 4x4.

1. Consideremos a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & \vdots & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & \vdots & b_3^{(1)} \\ a_{41}^{(1)} & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} & \vdots & b_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

2. Primeiro passo $m_{21} = \dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, $A_2^{(2)} = A_2^{(1)} - m_{21}A_1^{(1)}$, $b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - m_{21}b_1^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & \vdots & b_3^{(1)} \\ a_{41}^{(1)} & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} & \vdots & b_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

3. Segundo passo $m_{31} = \dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, $A_3^{(2)} = A_3^{(1)} - m_{31}A_1^{(1)}$, $b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - m_{31}b_1^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & \vdots & b_3^{(2)} \\ a_{41}^{(1)} & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} & \vdots & b_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

4. Terceiro passo $m_{41} = \dfrac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, $A_4^{(2)} = A_4^{(1)} - m_{41}A_1^{(1)}$, $b_4^{(2)} = b_4^{(1)} - m_{41}b_1^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & \vdots & b_3^{(2)} \\ 0 & a_{42}^{(2)} & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & \vdots & b_4^{(2)} \end{bmatrix}$$

5. Quarto passo $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, A_3^{(3)} = A_3^{(2)} - m_{32}A_2^{(2)}, b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - m_{32}b_2^{(2)}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} & \vdots & b_3^{(3)} \\ 0 & a_{42}^{(2)} & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & \vdots & b_4^{(2)} \end{bmatrix}$$

6. Quinto passo $m_{42} = \dfrac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, A_4^{(3)} = A_4^{(2)} - m_{42}A_2^{(2)}, b_4^{(3)} = b_4^{(2)} - m_{42}b_2^{(2)}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} & \vdots & b_3^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(3)} & a_{44}^{(3)} & \vdots & b_4^{(3)} \end{bmatrix}$$

7. Sexto passo $m_{43} = \dfrac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}}, A_4^{(4)} = A_4^{(3)} - m_{43}A_3^{(3)}, b_4^{(4)} = b_4^{(3)} - m_{43}b_3^{(3)}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} & \vdots & b_3^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(4)} & \vdots & b_4^{(4)} \end{bmatrix}$$

Função Matlab `x = eliminacao_gauss(A,b)`

```
% Resolver sistema Ax = b, usando Eliminacao de Gauss
 % Input:  Matriz quadrada A e vetor b.
 % Output:  Vetor solução x.
 function x=eliminacao_gauss(A,b)
 n=size(A,1);
  for k=1:n-1
    for i=k+1:n
      m = A(i,k)/A(k,k);
      A(i,:)  = A(i,:)  - m*A(k,:);
      b(i) = b(i) - m*b(k);
    end
  end
 x = backsub(A,b);
```

Exercício: Resolva o sistema abaixo pelo método da eliminação de Gauss

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Eliminação de Gauss X Decomposição LU

O método da eliminação de Gauss é equivalente ao método da decomposição LU no seguinte sentido:

Denotando por $[A|b]^{(1)}$ a matriz aumentada, o cálculo feito para a obtenção de $[A|b]^{(2)}$ é equivalente a multiplicar $[A|b]^{(1)}$ por uma matriz M_1, na qual

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -m_{n1} & & & 1 \end{bmatrix}, \text{ com } m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \text{ isto é,}$$

$$[A|b]^{(2)} = M_1 [A|b]^{(1)}.$$

Analogamente, tem-se

$$[A|b]^{(3)} = M_2 [A|b]^{(2)},$$

$$\text{com } M_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -m_{32} & & \\ & \vdots & \ddots & \\ & -m_{n2} & & 1 \end{bmatrix}, \text{ com } m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}. \text{ Consequentemente,}$$

$$[A|b]^{(n)} = M_{n-1}[A|b]^{(n-1)} = \underbrace{M_{n-1} \cdots M_1}[A|b]^{(1)}.$$

Portanto,

$$A^{(n)} = MA^{(1)} = MA = U,$$

onde U é a matriz triangular superior da decomposição LU. Como M é o produto de matrizes não singulares, M^{-1} existe e

$$M^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} \ldots M_{n-1}^{-1}.$$

Assim,

$$A = M^{-1} U.$$

É fácil verificar que

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & & & 1 \end{bmatrix} = L,$$

onde L é a matrix triangular inferior da decomposição LU.

Aplicação: cálculo da matriz inversa

Seja A uma matriz não singular, isto é, $det(A) \neq 0$ e $A^{-1} = \left[\begin{array}{ccccccccc} c_1 & \vdots & c_2 & \vdots & c_3 & \vdots & \cdots & \vdots & c_n \end{array} \right]$ a matriz inversa de A, onde c_j é uma coluna de A^{-1}. Considerando que $AA^{-1} = I$, temos

$$A \left[\begin{array}{ccccccccc} c_1 & \vdots & c_2 & \vdots & c_3 & \vdots & \cdots & \vdots & c_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccccccc} e_1 & \vdots & e_2 & \vdots & e_3 & \vdots & \cdots & \vdots & e_n \end{array} \right],$$

onde e_j é a j-ésima coluna da matriz identidade. Assim, calcular as colunas da matriz inversa de A é equivalente a resolver n sistemas lineares

$$Ac_j = e_j, \quad j = 1, ...n.$$

Podemos inverter uma matriz utilizando qualquer um dos métodos estudados até agora.

Exercícios:

1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine A^{-1} utilizando o método da eliminação de Gauss.

2) Considere o sistema $Ax = b$, dado por

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Determine a inversa de A pelo método da Eliminação de Gauss e resolva o sistema dado utilizando A^{-1}.