EEL 510247 - Métodos Numéricos de Otimização I

1^a Lista de Exercícios

Agosto, 2017

Exercício 1 *(*) Considere o problema*

$$\min_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} f(x_1,x_2) = (x_1-2,4)^2 + 0,5x_2^4 + 2x_2^3 - 20x_2^2$$

1. *Quantas soluções possui este problema? Quais são elas?*
2. *As soluções são mínimos globais ou locais? Justifique.*
3. *Com base nos resultados anteriores responda: $f(x_1,x_2)$ é convexa? Justifique.*

Exercício 2 *(*) Considere o seguinte problema:*

$$\min \ f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 8$$

1. *Dê uma iteração do método de Newton para resolvê-lo. Tome como ponto inicial $\mathbf{x}^0 = (2,2)$ e use como passo de busca unidimensional $\alpha = 1$. Ao final da iteração, calcule o novo erro na condição para convergência e o novo valor de f.*
2. *Partindo do mesmo ponto iniciusado anteriormente, dê uma iteração do método do gradiente para resolver o problema usando o valor ótimo do passo da busca unidimensional. Ao final calcule o erro na condição de convergência e o novo valor de f.*
3. *Compare o progresso dos dois algoros. Suas ordens de convergência foram as previstas pela teoria? Justifique.*

Exercício 3 *: Encontre o ponto estacionário $\mathbf{x}^*$ da função*

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeito a

$$c_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 = 0$$
$$c_2(\mathbf{x}) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0$$

e determine a sua natureza (se é ponto de mínimo, de máximo ou ponto de sela). Verifique se o vetor gradiente de $f(\mathbf{x})$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores gradientes das restrições $c_1(\mathbf{x})$ e $c_2(\mathbf{x})$.

Exercício 4 *: Mostre que $\mathbf{x} = (1,0;1,0;1,0)$ é um ponto estacionário da função*

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 5x_1x_2$$

sujeito as restrições

$$c_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2^2 + 3x_2x_3 - 5 = 0$$
$$c_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_3^2 - 9 = 0$$

e determine a sua natureza.

Exercício 5 : *Verifique que a função*

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeito a

$$c_1(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_2 = 0$$
$$c_2(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 - 1 = 0$$

tem um mínimo em $\mathbf{x}^* = (2,0;1,0;0,0)$, *porém o gradiente da função objetivo não pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores gradientes das restrições.*

Exercício 6 :*(*) Encontre os dois pontos em uma elipse expressa por* $x_1^2 + 4x_2^2 = 4$ *que estão à mínima distância do ponto* $(1,0)$. *Formule o problema como um problema de minimização e encontre sua solução resolvendo as condições de estacionariedade do seu lagrangeano. [Dica: Para minimizar a distância d entre dois pontos, pode-se também minimizar* d^2 . *A expressão da distância entre dois pontos* (x_1, x_2) *and* (y_1, y_2) *é* $d^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ *]*

Exercício 7 : *Considere que* a, b *e* c *sejam escalares positivos. Calcule a alteração no valor ótimo do problema de otimização a seguir quando o lado direito da restrição é aumentado em 5%, isto é,* a *é alterado para* $a + \frac{5}{100}a$. *Dê a resposta em termos de* a, b *e* c.

$$\begin{array}{ll} \min_{x,y} & by - x^4 \\ s.a & x^2 + cy = a \end{array}$$

Exercício 8 : *Resolva o problema*

$$\begin{array}{ll} \max & x + y \\ s.a & x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \\ & x + y + z = 1 \end{array}$$

Exercício 9 : *Considere o problema*

$$\begin{array}{ll} \max_x & f(\mathbf{x}) \\ s.a & \mathbf{p}^t\mathbf{x} = c \end{array}$$

onde f *é côncava,* $x = [x_1, ..., x_n]^t$, $p = [p_1, ..., p_n]^t$ *com* $p_i > 0,\ i = 1, ..., n$ *e* c *é um escalar.*

- *Escreva as condições de primeira ordem para uma solução deste problema.*
- *Qual é a relação entre uma solução das condições de primeira ordem e a solução do problema?*

Aplicação a Sistemas Elétricos de Potência 1 *Determine a potência de saída de três geradores, que resulta no mínimo custo de geração de potência ativa, quando uma carga de 800 MW é suprida. Considere as perdas de transmissão desprezíveis. As curvas de custo de geração são quadráticas, dadas por*

$$C_1(P_1) = 300 + 7,3P_1 + 0,001P_1^2$$

$$C_2(P_2) = 150 + 7,8P_2 + 0,002P_2^2$$

$$C_3(P_3) = 75 + 7,5P_3 + 0,005P_3^2$$

não havendo restrição na geração de potência.