FICHA CATALOGRÁFICA

(Preparada pelo Centro de Catalogação-na-fonte,
Câmara Brasileira do Livro, SP)

	Boyer, Carl Benjamin, 1906-
B785h	História da matemática; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
	Bibliografia.
	1. Matemática – História I. Título.
	17. CDD-510.09
74-0677	18. -510.9

Índice para catálogo sistemático:

1. Matemática : História 510.09 (17.) 510.9 (18.)

Obra publicada
com a colaboração da

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

CARL B. BOYER
Professor de Matemática do Brooklyn College, EUA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Tradução
ELZA F. GOMIDE

Professora Assistente-Doutor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

EDITORA EDGARD BLUCHER LTDA.
EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

título original
A HISTORY OF MATHEMATICS

a edição em língua inglesa foi publicada por
JOHN WILEY & SONS, INC.

EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.
0 1000 CAIXA POSTAL 5450 — RUA PEIXOTO GOMIDE, 1400
END. TELEGRÁFICO: BLUCHERLIVRO — FONES (011)287-2043 E 288-5285
SÃO PAULO — SP — BRASIL

Impresso no Brasil *Printed in Brazil*

Conteúdo

Prefácio

Numerosas histórias da Matemática apareceram durante este século, muitas delas em inglês. Algumas são muito recentes como *A History of Mathematics*, de J. F. Scott[1]; uma nova produção neste campo deveria, portanto, ter características não existentes nos livros disponíveis. Na verdade, poucas das histórias publicadas são livros de texto, ao menos não no sentido que tem essa expressão nos Estados Unidos, e a *History* de Scott não é um desses. Pareceu-me, pois, que havia lugar para um livro novo — um que satisfizesse melhor às minhas preferências e talvez às de outros.

A History of Mathematics, em dois volumes, de David Eugene Smith[2], foi de fato escrita "a fim de fornecer um texto de História da Matemática elementar que pudesse ser usado por professores e estudantes", mas cobre uma área ampla demais num nível matemático demasiado elementar para a maior parte dos cursos superiores modernos, e faltam-lhe problemas de tipos variados. *A History of Mathematics*, de Florian Cajori[3], é até hoje um livro de referência muito útil, mas que não se adapta a uso em aulas, nem tão pouco o admirável *The Development of Mathematics* de E. T. Bell[4]. Atualmente o mais bem sucedido e apropriado parece ser *An Introduction to Mathematics* de Howard Eves[5], que utilizei, com grande satisfação, com pelo menos uma dúzia de classes desde que apareceu, em 1953. Ocasionalmente eu modifiquei a ordem dos tópicos no livro, procurando alcançar uma maior intensidade de sentimento histórico, e suplementei o material com mais referências às contribuições dos séculos dezoito e dezenove, usando para isso principalmente *A Concise History of Mathematics* de D. J. Struik[6].

O leitor deste livro, seja ele leigo, estudante, ou professor de um curso de História da Matemática, verificará que o nível de conhecimento matemático pressuposto é aproximadamente o de um estudante de curso superior de 2.º ou 3.º ano, mas o material pode também ser visto com proveito por leitores de preparo matemático superior ou inferior a esse. Cada capítulo termina com uma coleção de exercícios mais ou menos distribuídos em três categorias. Questões de tipo ensaio, destinadas a indicar a capacidade do leitor para organizar e exprimir com suas palavras o que foi discutido no capítulo. Seguem-se exercícios relativamente fáceis, que exigem provas de alguns teoremas mencionados no capítulo ou sua aplicação a várias situações. Finalmente, uns poucos exercícios marcados com asterisco, que ou são mais difíceis ou exigem métodos especiais que podem não ser familiares a todos os estudantes ou leitores. Os exercícios não fazem parte da exposição geral e podem ser dispensados pelo leitor, sem perda de continuidade.

Aqui e ali no texto há referências a notas de rodapé, em geral, de natureza bibliográfica, e no fim de cada capítulo há uma lista de leituras sugeridas. Há algumas referências à vasta literatura em periódicos do campo, pois não é cedo demais para que estudantes desse nível comecem a conhecer o rico material que se encontra em boas bibliotecas. Bibliotecas menores podem não dispor de todas essas fontes de referências mas convém que um estudante saiba da existência de domínios mais amplos de conhecimento fora de sua universidade. Há também referências a obras em outras linguas além do inglês: além de fornecer importantes fontes adicionais para os que conhecem tais línguas, tais referências podem ajudar a terminar o provincialismo lingüístico que, como

[1] Londres: Taylor and Francis, 1958
[2] Boston: Ginn and Company, 1923-1925
[3] New York: Macmillan, 1931, 2.ª edição
[4] New York: MacGraw-Hill, 1945, 2.ª edição
[5] New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964, 3.ª edição
[6] New York: Dover Publications, 1967, 3.ª edição

um avestruz, se refugia na falsa impressão de que tudo que merece ser lido apareceu, ou foi traduzido em inglês.

Esta obra difere do texto mais bem sucedido disponível até agora por aderir mais estritamente a um arranjo cronológico e por dar mais ênfase a elementos históricos. Há sempre a tentação, numa aula de História da Matemática, de supor que a finalidade principal do curso é ensinar Matemática. Uma quebra dos padrões de rigor matemático é então um pecado mortal, enquanto que um erro histórico é venial. Tentei evitar essa atitude, e o objetivo do livro é apresentar a História da Matemática com fidelidade não só para com a estrutura e exatidão matemáticas, mas também para com a perspectiva e detalhe históricos. Seria absurdo, num livro deste conteúdo, esperar que todas as datas, como todas as casas decimais, estejam corretas. Espera-se, porém, que as inadvertências que possam ter restado depois do estágio de correção de provas não farão violência ao senso histórico, entendido de modo amplo, ou a uma visão correta dos conceitos matemáticos. É preciso dar forte ênfase ao fato de que esta obra, em um único volume, de modo algum pretende apresentar o assunto completamente. Uma tal empresa exigiria o esforço coordenado de uma equipe, como a que produziu, em 1908, o quarto volume da *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, de Cantor; e levou a história até 1799. Numa obra de proporções modestas o autor deve usar critério na seleção do material a ser incluído, controlando relutantemente a tentação de citar a obra de todo matemático produtivo; raros leitores deixarão de notar aqui algo que considerarão como injustificável omissão. Em particular, o último capítulo busca apenas indicar algumas poucas das características salientes do século vinte. Para a História da Matemática talvez o que mais se deva desejar é que apareça um novo Felix Klein para completar, para o nosso século, o tipo de projeto que Klein tentou para o século dezenove, mas não viveu o suficiente para concluir.

Uma obra publicada é até certo ponto como um *iceberg*, pois, o que se vê é apenas uma pequena fração do todo. Nenhum livro aparece sem que o autor nele esbanje tempo e sem que receba encorajamento e apoio de outros, demasiado numerosos para serem citados individualmente. No meu caso, o débito começa com os muitos estudantes interessados a quem ensinei a História da Matemática, principalmente no Brooklin College, mas também na Yeshiva University, University of Michigan, University of California (Berkeley) e University of Kansas. Na University of Michigan, principalmente graças ao estímulo do Professor Phillips S. Jones, e no Brooklin College com o auxílio do Diretor Walter H. Mais e dos Professores Samuel Borofsky e James Singer, eu às vezes tive minha carga didática reduzida para poder trabalhar no manuscrito deste livro. Amigos e colegas no campo da História da Matemática, tais como o Professor Dirk J. Struik do Massachusetts Institute of Technology, Professor Kenneth O. May na University of Toronto, Professor Howard Eves na University of Maine e Professor Morris Kline na New York University, fizeram muitas sugestões valiosas para a preparação do livro, e essas foram grandemente apreciadas. Material em livros e artigos de outros foi livremente usado, com pouco reconhecimento, além de uma fria referência bibliográfica, e aproveito esta oportunidade para exprimir a esses autores minha calorosa gratidão. Bibliotecas e editores ajudaram muito, fornecendo informações e ilustrações necessárias ao texto; em particular foi um prazer trabalhar com a John Wiley and Sons. Finalmente, devo exprimir profunda gratidão a uma esposa muito compreensiva, Dra. Marjorie N. Boyer, por sua paciência em tolerar os problemas ocasionados pelo desenvolvimento de mais um livro dentro da família.

Carl B. Boyer

Brooklin, New York
Janeiro 1968

Capítulo **1**

Origens primitivas

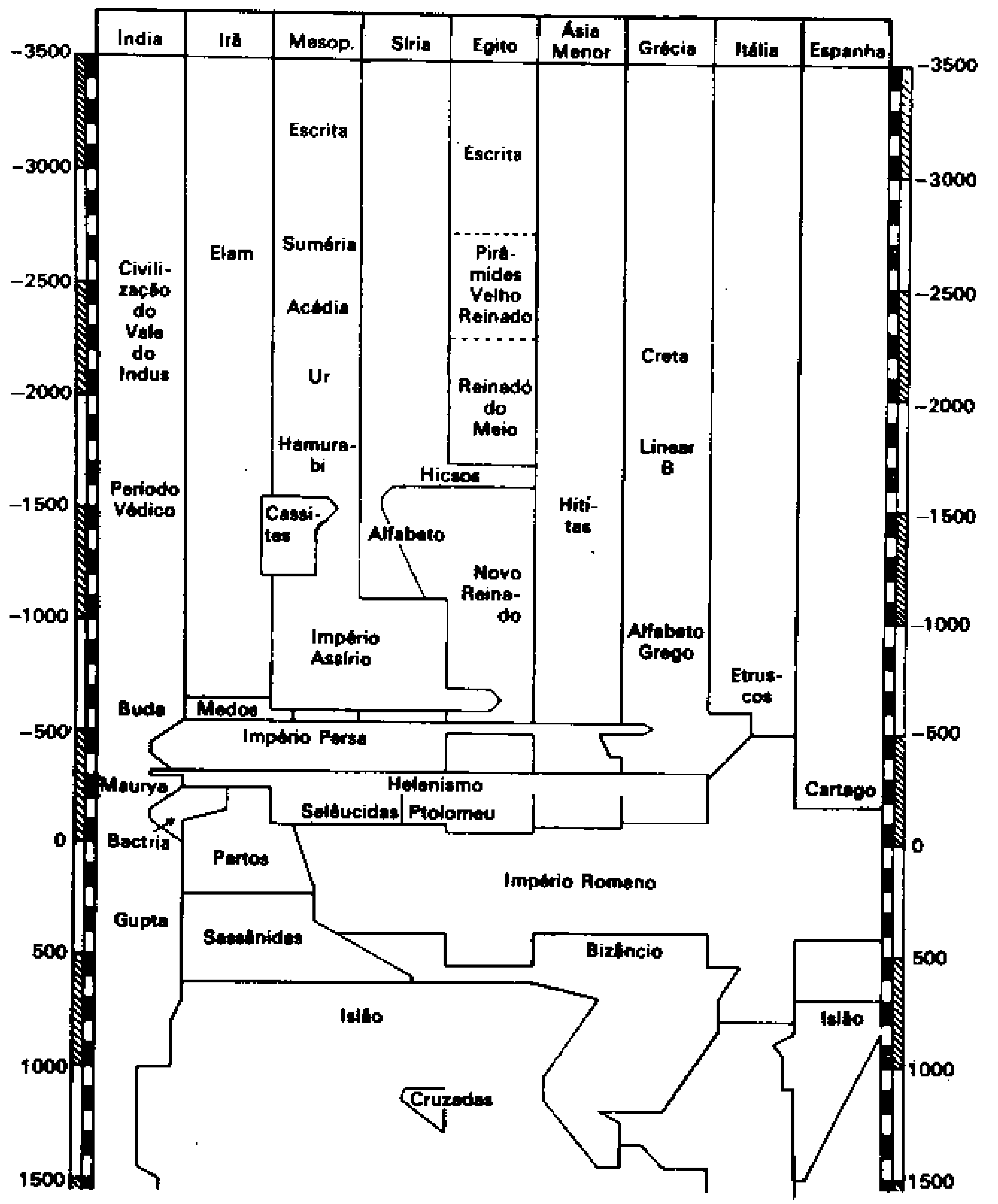
Trouxeste-me um homem que não sabe contar seus dedos?

Do *Livro dos mortos*

1 Os matemáticos do século vinte desempenham uma atividade intelectual altamente sofisticada, que não é fácil de definir, mas boa parte do que hoje se chama matemática deriva de idéias que originalmente estavam centradas nos conceitos de número, grandeza e forma. Definições antiquadas da matemática como uma "ciência do número e grandeza" já não são válidas, mas sugerem as origens dos diversos ramos da matemática. Noções primitivas relacionadas com os conceitos de número, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana, e vislumbres de noções matemáticas se encontram em formas de vida que podem datar de milhões de anos antes da humanidade. Darwin no *Descent of Man* (1871) observou que alguns animais superiores possuem capacidades como memória e imaginação, e hoje é ainda mais claro que as capacidades de distinguir número, tamanho, ordem e forma — rudimentos de um sentido matemático — não são propriedades exclusivas da humanidade. Experiências com corvos, por exemplo, mostraram que pelo menos alguns pássaros podem distinguir conjuntos contendo até quatro elementos[1]. Uma percepção de diferenças de padrões em seus ambientes claramente existe em muitas formas inferiores de vida, e isso tem parentesco com a preocupação de um matemático com forma e relação.

2 Em certa época pensou-se que a matemática se ocupava do mundo que nossos sentidos percebem, e foi somente no século dezenove que a matemática pura se libertou das limitações sugeridas por observações da natureza. É claro que a matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem, e se há validade no princípio biológico da "sobrevivência do mais apto" a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento no homem de conceitos matemáticos. A princípio as noções primitivas de número, grandeza e forma podiam estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhanças — a diferença entre um lobo e muitos, a desigualdade de tamanho entre uma sardinha e uma baleia, a dissemelhança entre a forma redonda da lua e a retilínea de um pinheiro. Gradualmente deve ter surgido, da massa de experiências caóticas, a realização de que há analogias: e dessa percepção de semelhanças em número e forma nasceram a ciência e a matemática. As próprias diferenças parecem indicar semelhanças, pois o contraste entre um lobo e muitos, entre um carneiro e um rebanho, entre uma árvore e uma floresta, sugerem que um lobo, um carneiro e uma árvore têm algo em comum — sua unicidade. Do mesmo modo se observaria que certos grupos, como os pares, podem ser postos em correspondência um a um. As mãos podem ser relacionadas com os pés, os olhos, as orelhas ou as narinas. Essa percepção de uma propriedade abstrata que certos grupos têm em comum e que nós chamamos número, representa um grande passo no caminho para a matemática moderna. É improvável que isso tenha sido a descoberta de um indivíduo ou de uma dada tribo; é mais provável que a percepção tenha sido gradual, e pode ter-se desenvolvido tão cedo no desenvolvimento cultural do homem quanto o uso do fogo, talvez há 300 000 anos. Que o desenvolvimento do conceito de número foi um processo longo e gradual é sugerido pelo fato de que certas línguas, o grego inclusive, conservaram na sua gramática uma distinção tripartite entre um e dois e mais de dois, ao passo que a maior parte das línguas atuais só fazem a dis-

[1]Veja Levi Conant, *The Number Concept, Its Origin and Development* (1923). cf. H. Kalmus, "Animals as Mathematicians", *Nature* **202** (1964), 1156-1160



Esquema cronológico representando a extensão de algumas civilizações antigas e medievais. (Reproduzido, com permissão, de O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*)

tinção em "número" entre singular e plural. Evidentemente nossos mais antigos antepassados a princípio contavam só até dois, qualquer conjunto, além desse nível era dado como "muitos". Mesmo hoje muitos povos primitivos ainda contam objetos dispondo-os em grupos de dois.

2 A idéia de número finalmente tornou-se suficientemente ampla e vívida para que se sentisse a necessidade de exprimir a propriedade de algum modo, presumivelmente a princípio somente na linguagem de sinais. Os dedos de uma mão podem facilmente ser usados para indicar um conjunto de dois, três, quatro ou cinco objetos, não sendo o número um geralmente reconhecido inicialmente como um verdadeiro número. Usando os dedos das duas mãos podem ser representadas coleções contendo até dez elementos; combinando dedos das mãos e dos pés pode-se ir até vinte. Quando os dedos humanos eram inadequados, podiam ser usados montes de pedras para representar uma correspondência com os elementos de um outro conjunto. Quando o homem primitivo usava tal método de representação, ele freqüentemente amontoava as pedras em grupos de cinco, pois os

quíntuplos lhe eram familiares por observação da mão e pé humanos. Como Aristóteles observou há muito tempo, o uso hoje difundido do sistema decimal é apenas o resultado do acidente anatômico de que quase todos nós nascemos com dez dedos nas mãos e dez nos pés. Do ponto de vista matemático é um tanto inconveniente que o homem de Cro-Magnon e seus descendentes não tivessem quatro ou seis dedos em uma mão.

Embora historicamente contar pelos dedos, ou o uso de contar por cinco e dez, pareça ter surgido mais tarde que a contagem por dois e três, os sistemas quinário e decimal quase invariavelmente ganharam do binário e do ternário. Um estudo de várias centenas de tribos entre os índios americanos, por exemplo, mostrou que quase um terço usava a base decimal e aproximadamente um outro terço usava um sistema quinário ou quinário-decimal; menos de um terço tinha um esquema binário e os que usavam um sistema ternário formavam menos de um por cento do grupo. O sistema vigesimal, com base vinte, ocorria em cerca de 10 por cento das tribos[2].

Grupos de pedras são demasiado efêmeros para conservar informação: por isso o homem pré-histórico às vezes registrava um número fazendo marcas num bastão ou pedaço de osso. Poucos desses registros existem hoje, mas na Tchecoslováquia foi achado um osso de lobo com profundas incisões, em número de cinqüenta e cinco; estavam dispostos em duas séries, com vinte e cinco numa e trinta na outra, com os riscos em cada série, dispostos em grupos de cinco. Tais descobertas arqueológicas fornecem provas de que a idéia de número é muito mais antiga do que progressos tecnológicos como o uso de metais ou de veículos com rodas. Precede a civilização e a escrita, no sentido usual da palavra, pois artefatos com significado numérico, tais como o osso acima descrito, vêm de um período cerca de trinta mil anos atrás. Outras evidências referentes às primitivas idéias do homem sobre números podem ser encontradas na linguagem atual. Ao que parece as palavras *eleven* (onze) e *twelve* (doze) significavam originalmente "um a mais" e "dois a mais", indicando a predominância antiga do sistema decimal. No entanto, sugeriu-se que talvez a palavra indo-germânica para oito derivaria de uma forma dual para quatro, e que o *novem* latino para nove pode se relacionar com *novus* (novo) no sentido de ser o começo de uma nova seqüência. Talvez tais palavras possam ser interpretadas como sugeridoras da persistência, por algum tempo, de uma escala quaternária ou octonária, como o *quatre-vingts* francês de hoje parece ser um remanescente de um sistema vigesimal.

3 O homem difere de outros animais de modo mais acentuado pela sua linguagem, cujo desenvolvimento foi essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato; no entanto palavras que exprimem idéias numéricas apareceram lentamente. *Sinais* para números provavelmente precederam as *palavras* para números, pois é mais fácil fazer incisões num bastão do que estabelecer uma frase bem modulada para identificar um número. Se o problema da linguagem não fosse tão difícil talvez sistemas rivais do decimal tivessem feito maiores progressos. A base cinco, por exemplo, foi uma das que deixaram a mais antiga evidência escrita palpável; mas quando a linguagem se tornou formalizada, o dez já predominava. As línguas modernas são construídas quase sem exceção em torno da base dez, de modo que o número treze, por exemplo, não é descrito como três e cinco/e cinco, mas como três e dez. A demora no desenvolvimento da linguagem para exprimir abstrações como o número também pode ser percebida no fato que as expressões verbais numéricas primitivas invariavelmente se referem a coleções concretas específicas — como "dois peixes" ou "dois bastões" — e mais tarde uma tal frase seria adotada convencionalmente para indicar todos os conjuntos de dois objetos. A tendência da linguagem de se desenvolver do concreto para o abstrato pode ser percebida em muitas das medidas de comprimento em uso atualmente. A altura de um cavalo é medida em "palmos" e as palavras "pé" e "ell" (ou elbow, cotovelo) também derivaram de partes do corpo.

[2] W. C. Eels, "Number Systems of North American Indians", *American Mathematical Monthly*, **20** (1913), 293. Cf. também D. J. Struik, "Stone Age Mathematics", *Scientific American*, **179** (dezembro, 1948), 44-49

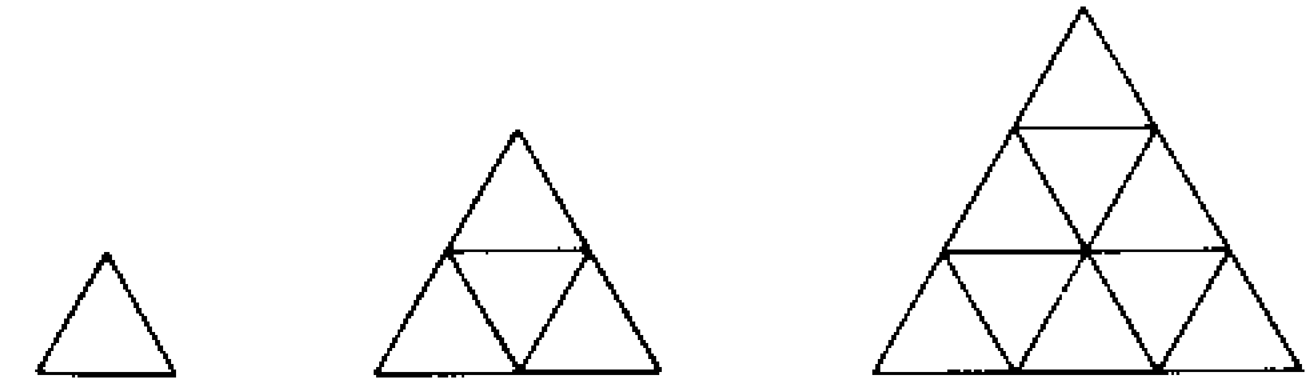
Os milhares de anos que foram necessários para que o homem fizesse a distinção entre os conceitos abstratos e repetidas situações concretas mostram as dificuldades que devem ter sido experimentadas para se estabelecer uma base ainda que muito primitiva para a matemática. Além disso, há um grande número de perguntas não respondidas com relação à origem da matemática. Supõe-se usualmente que surgiu em resposta a necessidades práticas, mas estudos antropológicos sugerem a possibilidade de uma outra origem. Foi sugerido[3] que a arte de contar surgiu em conexão com rituais religiosos primitivos e que o aspecto ordinal precedeu o conceito quantitativo. Em ritos cerimoniais representando mitos da criação era necessário chamar os participantes à cena segundo uma ordem específica, e talvez a contagem tenha sido inventada para resolver esse problema. Se são corretas as teorias que dão origem ritual à contagem, o conceito de número ordinal pode ter precedido o de número cardinal. Além disso, uma tal origem indicaria a possibilidade de que o contar tenha uma origem única, espalhando-se subseqüentemente a outras partes da terra. Esse ponto de vista, embora esteja longe de ser provado, estaria em harmonia com a divisão ritual dos inteiros em ímpares e pares, os primeiros considerados como masculinos e os últimos, como femininos. Tais distinções eram conhecidas em civilizações em todos os cantos da terra, e mitos relativos a números masculinos e femininos se mostraram notavelmente persistentes.

O conceito de número inteiro é o mais antigo na matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica. A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para os inteiros. Entre as tribos primitivas parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de usar frações. Para necessidades quantitativas o homem prático pode escolher unidades suficientemente pequenas para eliminar a necessidade de usar frações. Portanto não houve um progresso ordenado de frações binárias para quinárias para decimais, e as frações decimais foram essencialmente um produto da idade moderna da matemática, não do período primitivo.

4 Afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de por seus registros e pensamentos em forma escrita. Para informações sobre a pré-história dependemos de interpretações baseadas nos poucos artefatos que restaram, de evidência fornecida pela moderna antropologia, e de extrapolação retroativa, conjetural, a partir dos documentos que sobreviveram. Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria que tinham em mente tinha raízes mais antigas. Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria. Podemos considerar as idéias de Heródoto e Aristóteles como representando duas teorias opostas quanto às origens da matemática, um acreditando que a origem fosse a necessidade prática, outro que a origem estivesse no lazer sacerdotal e ritual. O fato dos geômetras egípcios serem às vezes chamados "estiradores de corda" (ou agrimensores) pode ser tomado como apoio de qualquer das duas teorias, pois cordas eram indubitavelmente usadas tanto para traçar as bases de templos como para realinhar demarcações apagadas de terras. Não podemos contradizer com segurança nem Heródoto nem Aristóteles quanto à motivação que produziu a matemática, mas é claro que ambos subestimaram a idade do assunto. O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de

[3]Veja A. Seidenberg "The Ritual Origin of Counting", *Archive for History of Exact Sciences*, 2 (1962), 1-40

Figura 1.1



congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar. Além disso seqüências simples em desenhos como os da Fig. 1.1 sugerem uma espécie de teoria dos grupos aplicada bem como proposições geométricas e aritméticas. O esquema torna evidente que as áreas dos triângulos estão entre si como os quadrados sobre um lado, ou, por contagem, que as somas de números ímpares consecutivos, começando com a unidade, são quadrados perfeitos. Para o período pré-histórico não há documentos, portanto é impossível acompanhar a evolução da matemática desde um desenho específico até um teorema familiar. Mas idéias são como sementes resistentes, e às vezes a origem presumida de um conceito pode ser apenas a reaparição de uma idéia muito mais antiga que ficara esquecida.

A preocupação do homem pré-histórico com configurações e relações pode ter origem em seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas, motivos que muitas vezes propelem a matemática de hoje. Gostaríamos de pensar que ao menos alguns dos antigos geômetras trabalharam pela pura satisfação de fazer matemática, não como auxílio prático à mensuração; mas há outras alternativas. Uma é que a geometria, como a contagem, tivesse origem em rituais primitivos. Os mais antigos resultados geométricos encontrados na Índia formam o que se chamou os *Sulvasutras*, ou "regras da corda". Tratava-se de relações simples que aparentemente se aplicavam à construção de templos e altares. Pensa-se usualmente que a motivação geométrica dos "estiradores de corda" no Egito era mais prática do que a dos seus colegas na Índia; mas sugeriu-se[4] que tanto a geometria da Índia como a egípcia podem provir de uma fonte comum — uma protogeometria relacionada com ritos primitivos mais ou menos do modo como a ciência se desenvolveu a partir da mitologia e a filosofia da teologia. Devemos ter em mente que a teoria da origem da geometria numa secularização de práticas rituais não está de modo nenhum provada. O desenvolvimento da geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem. Podemos fazer conjeturas sobre o que levou os homens da Idade da Pedra a contar, medir, e desenhar. Que os começos da matemática são mais antigos que as mais antigas civilizações é claro. Ir além e identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo, no entanto, é confundir conjetura com história. É melhor suspender o julgamento nessa questão e ir adiante, ao terreno mais firme da história da matemática encontrada em documentos escritos que chegaram até nós.

BIBLIOGRAFIA

Conant, Levi, *The Number Concept. Its Origin and Development* (New York: Macmillan, 1923)

Eels, W. C., "Number Systems of North American Indians," *American Mathematical Monthly*, 20 (1913), 293

Kalmus, H., "Animals as Mathematicians," *Nature*, 202 (1964), 1156-1160

Menninger, Karl, *Zahlwort und Ziffer: Eine Kulturgeschichte der Zahlen*, 2.ª edição (Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1957-1958, 2 volumes)

Seidenberg, A., "The Ritual Origin of Geometry," *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1962), 488-527

Seidenberg, A., "The Ritual Origin of Counting," *Archive for History of Exact Sciences*, 2 (1962), 1-40

Smeltzer, Donald, *Man and Number* (New York: Emerson Books, 1958)

[4]A. Seidenberg, "The Ritual Origin of Geometry", *Archive for History of Exact Sciences*, 1(1962), 488-527

Smith, D. E., *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 volumes; edição em brochura, New York: Dover, 1958)

Smith, D. E., e Jekuthiel Ginsburg, *Numbers and Numerals* (Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1958).

Struik, D. J., "Stone Age Mathematics," *Scientific American*, 179 (Dezembro, 1948), 44-49

EXERCÍCIOS

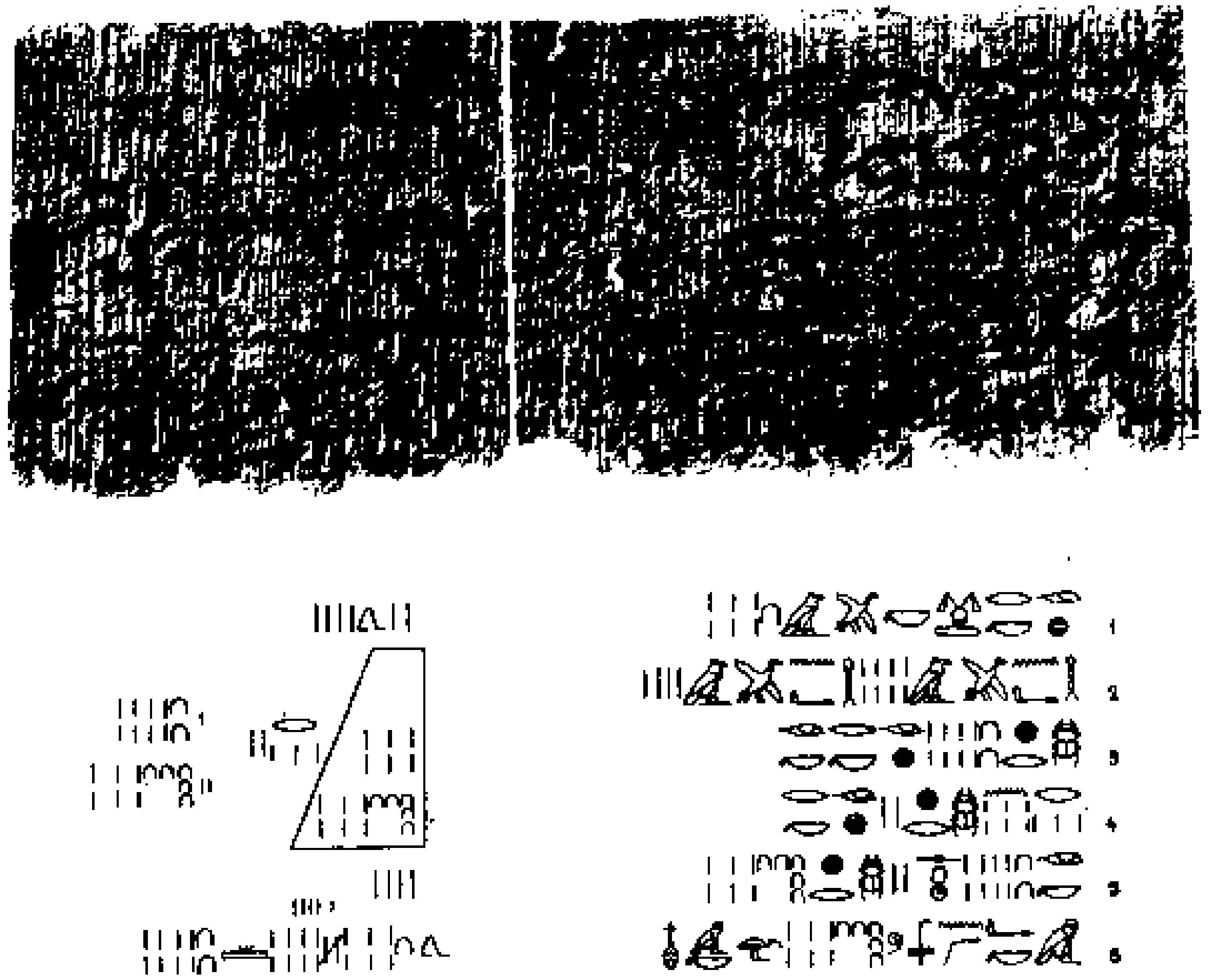
1. Descreva o tipo de evidência em que um relato da matemática pré-histórica pode se basear, citando exemplos específicos.
2. Que provas existem, se é que existem, de que a matemática começou com o advento do homem? Você acha que a matemática é anterior ao homem?
3. Faça uma lista de evidências na linguagem do uso, em certo período, de bases diferentes de dez.
4. Quais as vantagens e desvantagens das bases dois, três, quatro, cinco, dez, vinte e sessenta? Você acha que isso influenciou o homem primitivo em sua escolha de uma base?
5. Se você tivesse que escolher uma base de numeração, qual seria? Por quê?
6. O que acha que surgiu primeiro, nomes para números ou símbolos para números? Por quê?
7. Por que há poucos vestígios de escalas de seis a nove?
8. Quais você julga terem sido as primeiras figuras geométricas planas e sólidas estudadas conscientemente e sistematicamente? Por quê?
9. O que você julga ter influído mais no aparecimento da geometria primitiva, interesse pela astronomia ou necessidade de demarcar terras? Explique.
10. Qual das seguintes divisões do tempo o homem pré-histórico provavelmente mais observou: o ano, o mês, a semana, o dia, a hora? Explique.

Capítulo **2**

Egito

> Sesóstris ... repartiu o solo do Egito entre seus habitantes ... Se o rio levava qualquer parte do lote de um homem ... o rei mandava pessoas para examinar, e determinar por medida a extensão exata da perda ... Por esse costume, eu creio, que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para a Grécia.
>
> *Heródoto*

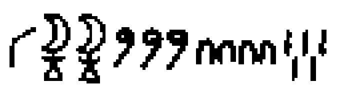
1 É costume dividir o passado da humanidade em eras e períodos, com particular referência a níveis e características culturais. Tais divisões são úteis, embora devamos ter sempre em mente que são apenas uma estrutura superposta arbitrariamente para nossa conveniência e que as divisões no tempo que sugerem não são fossos intransponíveis. A Idade da Pedra, um longo período que precede o uso de metais, não teve um fim abrupto. Na verdade, o tipo de cultura que representou terminou muito mais tarde na Europa do que em certas partes da Ásia e da África. O surgimento de civilizações caracterizadas pelo uso de metais teve lugar primeiro em vales de rios, como os do Egito, Mesopotâmia, Índia e China; por isto nós designaremos a parte mais antiga do período histórico pelo nome de "estágio potâmico". Os registros cronológicos das civilizações nos vales dos rios Indo e Yang-tse não merecem confiança, mas dispomos de informação razoavelmente segura sobre os povos que viveram ao longo do Nilo e no crescente fértil dos rios Tigre e Eufrates. Antes do quarto milênio A. C. uma forma primitiva de escrita estava em uso tanto no vale mesopotâmio como no Nilo. Lá os primitivos registros pictográficos, por um processo de gradual convencionalização, evoluíram para uma ordem linear de símbolos mais simples. Na Mesopotâmia, onde o barro era abundante, marcas em forma de cunha eram feitas com um estilete sobre tabletas moles que depois eram cozidas em fornos ou



Reprodução (*alto*) de uma parte do Papiro de Moscou mostrando o problema do volume de um tronco de pirâmide quadrada, juntamente com a transcrição hieroglífica (*abaixo*) ao calor do sol. Esse tipo de escrita chama-se cuneiforme (da palavra latina *cuneus*, cunha) por causa da forma dos sinais. O significado a ser transmitido em cuneiforme era determinado pelos arranjos das marcas em cunha. Documentos cuneiformes tinham grande durabilidade; por isso muitos milhares de tais tabletas sobreviveram até nossos dias, muitos datando de cerca de 4 000 anos.

Naturalmente, só uma fração dessas se referem a temas relacionados com matemática. Além disso, até há cerca de um século a mensagem nas tabletas permaneceu muda, pois a escrita não fora decifrada. Na década de 1870 foi feito um progresso significativo na leitura quando se descobriu que a Rocha Behistun trazia uma narração trilingue da vitória de Dario sobre Cambises, a inscrição sendo em persa, elamítico e babilônico. O conhecimento do persa conseqüentemente forneceu a chave para a leitura do assírio, língua proximamente aparentada com o babilônico, mais antigo. Mesmo depois desta importante descoberta, a decifração e análise das tabletas com conteúdo matemático avançou devagar, e foi só no segundo quarto do século vinte que a percepção das contribuições matemáticas da Mesopotâmia se tornou apreciável, devido em grande parte à obra pioneira de Fr. Thureau-Dangin na França e Otto Neugebauer na Alemanha e América[1].

2 Os escritos egípcios enquanto isso tinham tido melhor sorte do que os babilônios num particular. A Pedra de Rosetta, trilingue, desempenhando papel análogo ao da Rocha Behistun, tinha sido descoberta em 1799 pela expedição de Napoleão. Essa grande peça, achada em Rosetta, antigo porto de Alexandria, continha uma mensagem em três escritas: grega, demótica e hieroglífica. Sabendo o grego, Champollion na França e Thomas Young na Inglaterra fizeram rápido progresso na decifração dos hieroglifos (isto é "inscrições sagradas") egípcios. Agora as inscrições nas tumbas e monumentos no Egito podiam ser lidas, embora tais documentos cerimoniais não sejam a melhor fonte de informação quanto a idéias matemáticas. A numeração hieroglífica egípcia foi facilmente decifrada. O sistema, pelo menos tão antigo quanto as pirâmides, datando de cerca de 5 000 anos atrás baseava-se, como seria de esperar, na escala de dez. Usando um esquema iterativo simples e símbolos diferentes para a primeira meia dúzia de potências de dez, números maiores que um milhão foram incisos em pedra, madeira e outros materiais. Um traço vertical representava uma unidade, um osso de calcanhar invertido indicava 10, um laço como uma letra C maiúscula valia 100, uma flor de lotus 1 000, um dedo dobrado 10 000, um peixe era usado para indicar 100 000 e uma figura ajoelhada (talvez Deus do Sem-fim) 1 000 000. Por repetição desses símbolos o número 12 345, por exemplo, se escrevia como



Às vezes os dígitos menores eram colocados à esquerda, e às vezes os dígitos eram dispostos verticalmente. Os próprios símbolos ocasionalmente eram colocados com orientação invertida, de modo que o laço tanto podia ser convexo para a direita como para a esquerda.

As inscrições egípcias revelam familiaridade com grandes números desde tempos remotos. Um museu em Oxford possui um cetro real de mais de 5 000 anos sobre o qual aparece um registro de 120 000 prisioneiros e 1 422 000 cabras capturadas[2]. Esses números podem ser exagerados, mas de outras considerações fica claro, no entanto, que os egípcios eram louvavelmente precisos no contar e medir. As pirâmides exibem tão alto grau de precisão na construção e orientação que lendas mal-fundamentadas surgiram em torno delas. A sugestão, por exemplo, de que a razão do perímetro da base da "Grande Pirâmide" (de Khufu ou Quéops) para a altura foi conscientemente posta no valor 2π está claramente em desacordo com o que sabemos da geometria dos egípcios[3]. No entanto, as pirâmides e os corredores dentro delas eram orientados tão precisamente que

[1]Veja, por exemplo, O. Neugebauer, *Vorgriechische Mathematik*, (Berlin: Springer, 1934). Para um relato mais geral veja seu *The Exact Sciences in Antiquity* (1957)

[2]J. E. Quibell, *Hierakonpolis* (Londres: B. Quaritch, 1900). Ver especialmente Fig. 26B

[3]Noel F. Wheeler, "Pyramids and Their Purpose", *Antiquity*, 9 (1935), 5-21, 161-189, 292-304

foram feitas tentativas para descobrir sua idade pelo indice de variação da posição da estrela polar.

Os Egípcios começaram cedo a se interessar pela astronomia e observaram que a inundação anual do Nilo tinha lugar pouco depois que Sirius, a estrela do cão, se levantava a leste logo antes do sol. Observando que esses surgimentos heliacais de Sirius, o anunciador da inundação, eram separados por 365 dias, os egípcios estabeleceram um bom calendário solar feito de doze meses de trinta dias cada um e mais cinco dias de festa. Mas este ano oficial era curto demais, por um quarto de dia, por isso as estações avançavam de cerca de um dia cada quatro anos até que, após um ciclo de cerca de 1 460 anos, as estações novamente estavam afinadas com o calendário. Como se sabe, pelo sábio romano Censorinus, autor do *De die natale* (238 D. C.) que o calendário estava de acordo com as estações em 139 D. C., sugeriu-se, por extrapolação para trás, que o calendário foi instituído no ano 4241, três ciclos antes. Cálculos mais precisos (baseados no fato que o ano não tem exatamente 365 1/4 dias) modificaram a data para 4 228, mas outros estudiosos acham que a extrapolação para além de dois ciclos é injustificada e sugerem uma origem em cerca de 2 773 A. C.

3 Há um limite para a quantidade de informação matemática que se pode retirar de calendários e pedras tumulares, e nossas idéias sobre a contribuição egípcia seriam muito imprecisas se dependêssemos somente de material de origem cerimonial e astronômica. A matemática é muito mais do que contar e medir, os aspectos que são tratados em inscrições hieroglíficas. Felizmente temos outras fontes de informação. Um certo número de papiros egípcios de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três e meio milênios. O mais extenso dos de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento, que está agora no British Museum, (exceto uns poucos fragmentos, que estão no Brooklin Museum). Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind; por isso é conhecido como Papiro Rhind, ou, menos freqüentemente, chamado Papiro Ahmes em honra do escriba que o copiou por volta de 1650 A. C.[4] O escriba conta que o material provém de um protótipo do Reino do Meio de cerca de 2000 a 1800 A. C., e é possível que parte desse conhecimento tenha provindo de Imhotep, o quase lendário arquiteto e médico do Faraó Zoser, que superintendeu a construção de sua pirâmide há cerca de 5 000 anos. De qualquer modo a matemática egípcia parece ter ficado estagnada por cerca de 2 000 anos, após um início bastante auspicioso.

Os numerais e outros assuntos no Papiro de Rhind não são escritos na forma hieroglífica descrita acima, mas numa escrita mais cursiva, melhor adatada ao uso de pena e tinta sobre folhas de papiro preparadas e conhecidas como hierática ("sagrada", para distingui-la da demótica ou popular, ainda posterior). A numeração continua decimal, mas o tedioso princípio repetitivo da numeração hieroglífica foi substituído pela introdução de sinais especiais para representar dígitos e múltiplos de potências de dez. Quatro, por exemplo, não é mais usualmente representado por quatro riscos verticais, mas por uma barra horizontal; sete não é escrito como sete riscos, mas um único símbolo, semelhante a uma foice. Em hieroglifos o número vinte e oito aparecia como, mas em hierático é simplesmente. Observe-se que o símbolo = para o dígito menor oito (ou dois quatros) aparece à esquerda em vez de à direita. O princípio de ciferização, introduzido pelos egípcios há cerca de 4 000 anos e usado no Papiro de Rhind, representou uma importante contribuição à numeração, e é um dos fatores que faz do sistema em uso hoje o instrumento eficaz que é.

4 Os homens da Idade da Pedra não usavam frações mas com o advento de culturas mais avançadas durante a Idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações. As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação

[4]Há duas boas edições em inglês, uma de T. E. Peet, publicada em Londres em 1923, outra de A. B. Chace e outros, publicada em dois volumes em Oberlin, Ohio, em 1927-1929. O volume I desta última contém uma exposição geral extensa da matemática egípcia por R. C. Archibald, uma tradução com comentário do Papiro Ahmes e uma muito extensa bibliografia de artigos sobre a matemática egípcia

especial para frações unitárias — isto é, com numerador um. O recíproco de qualquer inteiro era indicado simplesmente colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado. A fração 1/8 aparecia então como , e 1/20 como . Na notação hierática, dos papiros, o oval alongado é substituído por um ponto, colocado sobre a cifra para o inteiro correspondente (ou sobre a cifra da direita no caso do recíproco de um número multidígito). No Papiro Ahmes, por exemplo, a fração 1/8 aparece como e 1/20 como. Tais frações eram manipuladas livremente no tempo de Ahmes, mas a fração geral parece ter sido um enigma para os egípcios. Eles se sentiam à vontade com a fração 2/3, para a qual tinham um sinal hierático ; ocasionalmente usavam sinais especiais para frações da forma $n/(n+1)$, os complementos das frações unitárias. Atribuíam à fração 2/3 um papel especial nos processos aritméticos de modo que para achar o terço de um número primeiro achavam os dois terços e tomavam depois a metade disso. Conheciam e usavam o fato de dois terços da fração unitária $1/p$ ser a soma de duas frações unitárias $1/2p$ e $1/6p$; também tinham percebido que o dobro da fração $1/2p$ é a fração $1/p$. No entanto, parece que tirando a fração 2/3, os egípcios consideravam a fração racional própria geral da forma m/n não como uma "coisa" elementar, mas como parte de um processo incompleto. A fração 3/5, para nós uma única fração irredutível, era pensada pelos escribas egípcios como soma de três frações unitárias 1/3 e 1/5 e 1/15. Para facilitar a redução de frações próprias "mistas" à soma de frações unitárias, o Papiro de Rhind começa com uma tabela fornecendo $2/n$ como soma de frações unitárias, para todos os valores ímpares de n de 5 a 101. O equivalente de 2/5 é dado como 1/3 mais 1/15; 2/11 é escrito como 1/6 mais 1/66; e 2/15 é expresso como 1/10 mais 1/30. O último item da tabela decompõe[5] 2/101 em 1/101 mais 1/202 mais 1/303 mais 1/606. Não se percebe por que uma forma de decomposição era preferida a outra, dentre a infinidade possível. Sugeriu-se que alguns dos itens na tabela para $2/n$ eram obtidos usando o equivalente da fórmula

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ou de

$$\frac{2}{p \cdot q} = \frac{1}{p \cdot \frac{p+q}{2}} + \frac{1}{q \cdot \frac{p+q}{2}}$$

Porém, nenhum desses processos fornece a combinação para 2/15 que aparece na tabela. Recentemente foi sugerido [6] que a escolha na maior parte dos casos era ditada pela preferência dos egípcios pelas frações derivadas das frações "naturais" 1/2 e 1/3 e 2/3 por sucessivas divisões ao meio. Assim quando eles querem exprimir 2/15 como soma de frações unitárias, podem bem começar por tomar a metade de 1/15 e depois ver se ao resultado 1/30 eles podem somar uma fração unitária para formar 2/15; ou poderiam usar a relação conhecida

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{6p}.$$

para chegar ao mesmo resultado 2/15 = 1/10 + 1/30. Um problema no Papiro de Rhind menciona especificamente o segundo método para achar dois terços de 1/5 e afirma que se procede de modo semelhante com outras frações. Passagens como essa indicam que os egípcios tinham alguma percepção de regras gerais e métodos de alcance mais amplo

[5]Uma lista de decomposições de $2/n$ desde $n = 5$ até $n = 101$ é dada em B. L. van der Waerden, *Science Awakening* (1961) e em Kurt Vogel, *Vorgriechische Mathematik*, Vol. 1, *Vorgeschichte und Ägypten* (por volta de 1958). Uma clara explicação das frações egípcias aparece também em O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*. As três obras contêm excelentes exposições sobre a matemática egípcia

[6]Veja Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity*, pp. 74 e seguintes

que o caso específico tratado, e isso representa um passo importante no desenvolvimento da matemática. Para a decomposição de 2/5 o processo de dividir ao meio é inadequado; mas começando com um terço de 1/5 encontra-se a decomposição dada por Ahmes, 2/5 = 1/3 + 1/15. No caso de 2/7 aplica-se duas vezes a divisão por dois a 1/7 para obter o resultado 2/7 = 1/4 + 1/28; sucessivas divisões por dois fornecem também a decomposição de Ahmes 2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104. A obcessão egípcia com dividir por dois e tomar a terça parte se percebe no último caso da tabela $2/n$ para $n = 101$, pois não é nada claro porque a decomposição $2/n = 1/n + 1/2n + 1/3n + 1/2 \cdot 3 \cdot n$ é melhor que $1/n + 1/n$. Talvez um dos objetivos da decomposição de $1/2n$ fosse chegar a frações unitárias menores que $1/n$.

5 A tabela para $2/n$ no Papiro Ahmes é seguida de uma curta tabela para $n/10$ para n entre 1 e 9, as frações sendo novamente expressas em termos das favoritas — frações unitárias e a fração 2/3. A fração 9/10, por exemplo, é decomposta como 1/30 mais 1/5 mais 2/3. Ahmes tinha começado sua obra garantindo que ela forneceria um "estudo completo e minucioso de todas as coisas . . . e o conhecimento de todos os segredos", e por isso a parte principal do material que se segue às tabelas para $2/n$ e $n/10$ consiste de oitenta e quatro problemas sobre questões variadas. Os seis primeiros requerem a divisão de um ou dois ou seis ou sete ou oito ou nove pães entre dez homens, e o escriba usa a tabela para $n/10$ que acabou de dar. No primeiro problema o escriba tem um trabalho considerável para mostrar que está correto dar a cada homem um décimo de um pão. Se um homem recebe 1/10 de um pão, dois homens receberão 2/10 ou 1/5 e quatro receberão 2/5, ou seja, 1/3 + 1/15 de um pão. Portanto oito homens receberão 2/3 + 2/15, ou 2/3 + 1/10 + 1/30 de um pão, e oito homens mais dois homens terão 2/3 + 1/5 + + 1/10 + 1/30, ou um pão inteiro. Ahmes parece ter tido alguma espécie de equivalente de nosso mínimo múltiplo comum, que lhe permitiu terminar a demonstração. Na divisão de sete pães por dez homens, o escriba poderia ter escolhido 1/2 + 1/5 de pão para cada um, mas a predileção por 2/3 levou-o a 2/3 mais 1/30 de pão para cada um[7].

A operação aritmética fundamental no Egito era a adição, e nossas operações de multiplicação e divisão eram efetuadas no tempo de Ahmes por sucessivas "duplações". Nossa palavra "multiplicação", na verdade, sugere o processo egípcio. Uma multiplicação de, digamos, 69 por 19 seria efetuada somando 69 com ele mesmo para obter 138, depois adicionando a si próprio para alcançar 276, novamente duplicando para obter 552 e mais uma vez, dando 1 104, que é, naturalmente, dezesseis vezes 69. Como 19 = 16 + 2 + 1, o resultado da multiplicação de 69 por 19 é 1 104 + 138 + 69 — isto é, 1 311. Ocasionalmente usava-se também uma multiplicação por dez, pois isto é natural na notação hieroglífica decimal. Multiplicação de combinações de frações unitárias também era parte da aritmética egípcia. O Prob. 13 no Papiro Ahmes, por exemplo, pede o produto de 1/16 + 1/112 por 1 + 1/2 + 1/4; o resultado 1/8 é achado corretamente. Para a divisão, inverte-se o processo de duplicação, e o *divisor* é dobrado sucessivamente, em vez do *multiplicando*. Que os egípcios tinham alcançado grande virtuosidade na aplicação do processo de duplicação e do conceito de fração unitária é evidente pelos cálculos nos problemas do Papiro Ahmes. O Prob. 70 requer o quociente da divisão de 100 por 7 + 1/2 + 1/4 + 1/8; o resultado, 12 + 2/3 + 1/42 + 1/126 é obtido assim: dobrando o divisor sucessivamente, primeiro obtemos 15 + 1/2 + 1/4, depois 31 + 1/2, e finalmente 63, que é oito vezes o divisor. Além disso, dois terços do divisor sabe-se dar 5 + 1/4. Portanto o divisor, quando multiplicado por 8 + 4 + 2/3 dará 99 3/4, faltando 1/4 para o produto 100 que se quer. Aqui um ajuste inteligente é feito. Como oito vezes o divisor dá 63, resulta que o divisor quando multiplicado por 2/63 produzirá 1/4. Da tabela para $2/n$ sabe-se que 2/63 é 1/42 + 1/126, portanto o quociente procurado é 12 + 2/3 + + 1/42 + 1/126. Incidentalmente, esse processo usa a comutatividade da multiplicação, princípio evidentemente familiar aos egípcios.

[7]Para mais detalhes, veja R. J. Gillings, "Problems 1 to 6 of the Rhind Mathematical Papyrus", *The Mathematics Teacher*, **55** (1962), 61-69

Muitos dos problemas de Ahmes mostram conhecimento de manipulações equivalentes à regra de três. O problema 72 pergunta qual o número de pães de força 45 que são equivalentes a 100 de força 10, e a solução é apresentada como $100/10 \times 45$ ou 450 pães. Nos problemas sobre pães ou cerveja a força ou *pesu* é o inverso da densidade de grão, sendo o quociente do número de pães ou de unidades de volume dividido pela quantidade de grão. São numerosos os problemas sobre pães e cerveja no Papiro Ahmes. O Prob. 63, por exemplo, pede que sejam repartidos 700 pães entre quatro pessoas, sendo que as quantidades que devem receber estão na proporção prolongada $2/3:1/2:1/3:1/4$. A solução é encontrada fazendo o quociente de 700 pela soma das frações na proporção. Nesse caso o quociente de 700 por 1 3/4 é encontrado multiplicando 700 pelo recíproco do divisor, que é $1/2 + 1/14$. O resultado é 400; calculando 2/3 e 1/2 e 1/3 e 1/4 disto são obtidas as parcelas de pão requeridas.

Os problemas egípcios descritos até agora são de tipo digamos, aritmético, mas há outros que merecem a designação de algébricos. Não se referem a objetos concretos, específicos, como pães e cerveja, nem exigem operações entre números conhecidos. Em vez disso, pedem o que equivale a soluções de equações lineares, da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$, onde *a*, *b* e *c* são conhecidos e *x* é desconhecido. A incógnita é chamada de "aha". O Prob. 24, por exemplo, pede o valor de aha sabendo que aha mais um sétimo de aha dá 19. A solução de Ahmes não é a dos livros modernos, mas é característica de um processo conhecido como "método de falsa posição", ou "regra de falso". Um valor específico, provavelmente falso, é assumido para aha, e as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre esse número suposto. O resultado é então comparado com o resultado que se pretende, e usando proporções chega-se à resposta correta. No problema 24 o valor tentado para a incógnita é 7, de modo que $x + 1/7\,x$ é 8, em vez de 19 como se queria. Como $8(2 + 1/4 + 1/8) = 19$, deve-se multiplicar 7 por $2 + 1/4 + 1/8$ para obter a resposta: Ahmes achou $16 + 1/2 + 1/8$. Então conferiu sua resposta mostrando que se a $16 + 1/2 + 1/8$ somarmos um sétimo disto (que é $2 + 1/4 + 1/8$) de fato obteremos 19. Aqui notamos outro passo significativo no desenvolvimento da matemática, pois a verificação é um exemplo simples de prova. Embora o método de falsa posição fosse o geralmente usado por Ahmes, há um problema (Prob. 30) em que a equação $x + 2/3\,x + 1/2\,x + 1/7\,x = 37$ é resolvida fatorando o primeiro membro e dividindo 37 por $1 + 2/3 + 1/2 + 1/7$, o resultado sendo $16 + 1/56 + 1/679 + 1/776$.

Muitos dos cálculos com "aha" no Papiro de Rhind são evidentemente exercícios para jovens estudantes. Embora uma grande parte deles seja de natureza prática, em algumas ocasiões o escriba parece ter tido em mente enigmas ou recreações matemáticas. Assim o Prob. 79 cita apenas "sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2 401 espigas de trigo, 16 807 hecates". É presumível que o escriba estava tratando de um problema, talvez bem conhecido, em que em cada uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o número de medidas de grão poupadas, mas a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão. Este divertimento no Papiro de Ahmes parece um antepassado do versinho infantil:

Quando ia a Sto. Ives,
encontrei um homem com sete mulheres;
cada mulher tinha sete sacos,
cada saco tinha sete gatos,
cada gato tinha sete gatinhos.
Gatinhos, gatos, sacos e mulheres,
quantos iam a Sto. Ives?[*]

[*] As I was going to St. Ives,/I met a man with seven wives;/Every wife had seven sacks,/Every sack had seven cats,/Every cat had seven kits./Kits, cats, sacks, and wives,/How many were going to St. Ives?

7 O historiador grego Heródoto nos diz que o apagamento das demarcações pelas inundações do Nilo tornou necessários os mensuradores. Os conhecimentos dos "estiradores de corda" egípcios eram evidentemente admirados por Demócrito, um matemático de competência e um dos fundadores de uma teoria atômica, e hoje suas realizações parecem ser demasiado valorizadas, em parte em conseqüência da precisão admirável da construção das pirâmides. Diz-se freqüentemente que os egípcios antigos conheciam o teorema de Pitágoras, mas não há traço disto nos papiros que chegaram até nós. Há no entanto alguns problemas geométricos no Papiro Ahmes. O Prob. 51 mostra que a área de um triângulo isósceles era achada tomando a metade do que chamaríamos base e multiplicando isso pela altura. Ahmes justifica seu método para achar a área sugerindo que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retângulos, um dos quais pode ser deslocado de modo que os dois juntos formam um retângulo. O trapézio isósceles é tratado de modo semelhante no Prob. 52, em que a base maior é 6, a menor é 4, e a distância entre elas é 20. Tomando a metade da soma das bases, "de modo a fazer um retângulo", Ahmes multiplica isso por 20 para achar a área. Em transformações como essa, em que triângulos e trapézios isósceles são transformados em retângulos, vemos o início de uma teoria de congruências e da idéia de prova em geometria, mas os egípcios não foram além. Uma deficiência séria em sua geometria era a falta de uma distinção claramente estabelecida entre relações que são exatas e as que são apenas aproximações. Um documento de Edfu que se preservou, datando de cerca de 1 500 anos depois de Ahmes, dá exemplos de triângulos, trapézios, retângulos, e quadriláteros mais gerais; a regra para achar a área do quadrilátero geral é fazer o produto das medidas aritméticas de lados opostos. Imprecisa como é a regra, o autor do documento deduziu dela um corolário — que a área do triângulo é a metade da soma de dois lados multiplicada pela metade do terceiro lado. Este é um notável exemplo de busca de relações entre figuras geométricas, bem como de uso do conceito de zero como substituto de uma grandeza na geometria.

A regra egípcia para achar a área do círculo tem sido considerada um dos maiores sucessos da época. No Prob. 50 o escriba Ahmes assume que a área de um campo circular com diâmetro de nove unidades é a mesma de um quadrado com lado de oito unidades. Comparando com a fórmula moderna $A = \pi r^2$ vemos que a regra egípcia equivale aproximadamente a atribuir a π o valor 3 1/6 uma aproximação bastante elogiável; mas novamente não há sinal de que Ahmes soubesse que as áreas de seu círculo e seu quadrado não eram *exatamente* iguais. É possível que o Prob. 48 dê alguma sugestão sobre como os egípcios chegaram à sua área do círculo. Nesse problema o escriba formou um octógono a partir de um quadrado de lado nove unidades dividindo os lados em três e cortando os quatro triângulos isósceles dos cantos, cada um tendo área 4 1/2 unidades. A área do octógono, que não difere muito da de um círculo inscrito no quadrado, é sessenta e três unidades, o que não está longe da área do quadrado com lado de oito unidades. Que o número $4(8/9)^2$ desempenhava papel comparável ao de nossa constante π parece ser confirmado pela regra egípcia para calcular a circunferência do círculo, segundo a qual a razão da área de um círculo para a circunferência é igual à da área do quadrado circunscrito para seu perímetro. Essa observação representa uma relação geométrica muito mais precisa e matematicamente significativa do que a aproximação relativamente boa para π. O grau de precisão na aproximação não é afinal, uma boa medida das realizações matemáticas ou arquitetônicas, e não devemos dar ênfase demais a esse aspecto da obra dos egípcios. A percepção de inter-relações entre figuras geométricas, revelada pelos egípcios, foi, de outro lado, muito freqüentemente esquecida. No entanto, é aqui que eles mais se aproximaram da atitude de seus sucessores, os gregos. Não se conhece teorema ou demonstração formal na matemática egípcia, mas algumas comparações geométricas feitas no vale do Nilo, como essas sobre perímetros e áreas de círculos e quadrados, estão entre as primeiras afirmações precisas da história, referentes a figuras curvilíneas.

8 O Prob. 56 do Papiro de Rhind tem especial interesse por conter rudimentos de trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes. Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e pode ter sido essa preocupação

a levar os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de co-tangente de um ângulo. Na tecnologia moderna é usual medir o grau de inclinação de uma reta por uma razão entre segmentos verticais e horizontais que é recíproca da usada no Egito. A palavra egípcia *seqt* significava o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura. O seqt correspondia assim, exceto quanto a unidades de medida, ao termo usado hoje pelos arquitetos para indicar a inclinação de uma parede. A unidade de comprimento vertical era o cúbito; mas para medir a distância horizontal a unidade usada era a "mão" medindo um sétimo do cúbito. Portanto, o seqt da face de uma pirâmide era o quociente do afastamento horizontal pelo vertical, o primeiro medido em mãos, o segundo em cúbitos. No Prob. 56 pede-se o seqt de uma pirâmide que tem 250 cúbitos de altura e uma base quadrada com lado de 360 cúbitos. O escriba começa dividindo 360 por 2 depois divide o resultado por 250, obtendo 1/2 + 1/5 + 1/50. Multiplicando o resultado por 7,, deu o resultado de 5 1/25 em mãos por cúbitos. Em outros problemas sobre pirâmides no Papiro Ahmes o seqt dá 5 1/4, o que está mais de acordo com o da grande Pirâmide de Quéops, com lado de base 440 cúbitos e altura 280, o seqt sendo 5 1/2 mãos por cúbito.

Há muitas estórias sobre relações geométricas presumidas entre dimensões na Grande Pirâmide, algumas obviamente falsas. Por exemplo, a que diz que havia a intenção de o perímetro da base ser precisamente igual à circunferência de um círculo cujo raio é a altura da pirâmide não está de acordo com a obra de Ahmes. A razão entre perímetro e altura é de fato bem próxima de 44/7 que é o dobro do valor 22/7 freqüentemente usado hoje para π; mas devemos lembrar que o valor para π dado por Ahmes é 3 1/6 não 3 1/7. Que o valor de Ahmes foi usado também por outros egípcios se verifica num rolo de papiro da décima-segunda dinastia (o Papiro Kahun, agora em Londres) em que o volume de um cilindro é calculado multiplicando a altura pela área da base, a área da base sendo determinada pela regra de Ahmes.

Muito de nossa informação sobre a matemática egípcia vem do Papiro Rhind ou de Ahmes, o mais extenso documento matemático do antigo Egito; mas há também outras fontes[8]. Além do Papiro Kahun já mencionado, há um Papiro de Berlim do mesmo período, duas pranchas de madeira de Akhmin (Cairo) de cerca de 2 000 A. C., um rolo de couro contendo listas de frações unitárias e datando do fim do período dos hicsos, e um importante papiro chamado Golonishev ou de Moscou, comprado no Egito em 1893. O Papiro de Moscou tem quase o comprimento do Rhind mas só um quarto da largura. Foi escrito, menos cuidadosamente que a obra de Ahmes, por um escriba desconhecido da décima segunda dinastia (1890 A. C. aproximadamente). Contém vinte e cinco exemplos, quase todos da vida prática e não diferindo muito dos de Ahmes, exceto dois que têm significado especial. Associada ao Prob. 14 do Papiro de Moscou há uma figura que parece um trapézio (ver Fig. 2.1) mas os cálculos associados a ela mostram que o que se quer representar é o tronco de uma pirâmide. Acima e abaixo da figura estão sinais para dois e quatro respectivamente e no interior estão os símbolos hieráticos para seis e cinqüenta e seis. As instruções ao lado tornam claro que o problema pergunta qual o volume de um tronco de pirâmide quadrada com altura de seis unidades se as arestas das bases superior e inferior medem duas e quatro unidades respectivamente. O escriba indica que se deve tomar os quadrados dos números dois e quatro e adicionar à soma desses quadrados o produto de dois por quatro, o resultado sendo vinte e oito. Esse é então multiplicado por um terço de seis; e o escriba conclui com as palavras, "Veja, é 56; você achou-a corretamente". Isto é, o volume do tronco foi calculado de acordo com a fórmula moderna $V = h(a^2 + ab + b^2)/3$, onde h é a altura e a e b são os lados das bases quadradas. Essa fórmula não aparece escrita em nenhum lugar, mas em substância era evidentemente conhecida pelos egípcios. Se, como se faz no documento de Edfer, toma-se $b = 0$, a fórmula se reduz à fórmula familiar, um terço da base vezes a altura, para o volume da pirâmide. Como os egípcios chegaram a esses resultados não se sabe. Uma origem

[8]Um bom registro dessas aparece na obra de Archibald citada na nota de rodapé 4

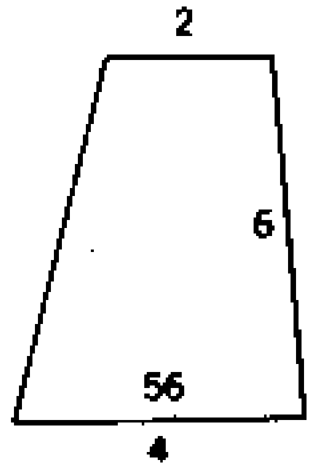


Figura 2.1

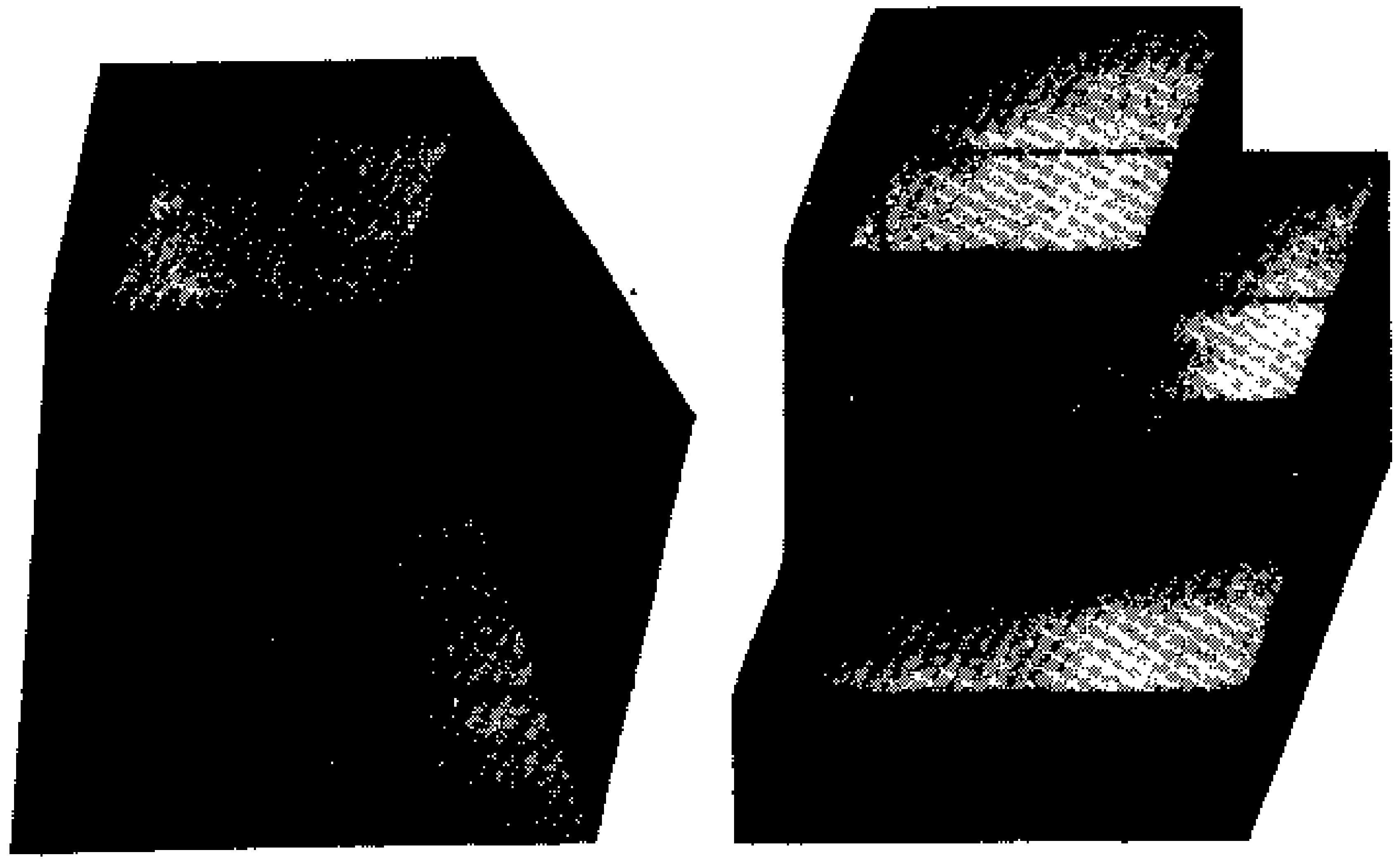


Figura 2.2

empírica para a regra sobre o volume da pirâmide parece possível, mas não para o do tronco. Para esse uma base teórica é mais provável; sugeriu-se que os egípcios tenham procedido nesse caso como nos do triângulo isósceles e do trapézio — podem, mentalmente, ter decomposto o tronco em paralelepípedos, prismas e pirâmides[9]. Substituindo as pirâmides e prismas por blocos retangulares iguais, um agrupamento plausível dos blocos leva à fórmula egípcia. Por exemplo, poder-se-ia começar com uma pirâmide de base quadrada e com o vértice diretamente sobre um dos vértices da base. Uma decomposição evidente do tronco seria a em quatro partes mostrada na Fig. 2.2 — um paralelepípedo retângulo tendo volume b^2h, dois prismas triangulares, cada um com volume $b(a-b)h/2$ e uma pirâmide de volume $(a-b)^2h/3$. Os prismas podem ser juntados num paralelepípedo retângulo de dimensões b, $a-b$ e h, e a pirâmide pode ser pensada como um paralelepípedo retangular de dimensões $a-b$ e $a-b$ e $h/3$. Dividindo os paralelepípedos mais altos de modo que todas as alturas sejam $h/3$, pode-se facilmente dispor os blocos de modo a formar camadas, cada uma de altura $h/3$ e tendo secções com áreas a^2 e ab e b^2 respectivamente.

O Prob. 10 no Papiro de Moscou apresenta uma questão mais difícil de interpretar que a do Prob. 14. Aqui o escriba pede a área da superfície do que parece ser um cesto com um diâmetro 4 1/2. Procede como se usasse o equivalente da fórmula $S = (1 - 1/9)^2(2x)x$ onde x é 4 1/2, obtendo como resposta 32 unidades. Como $(1 - 1/9)^2$ é a aproximação egípcia para $\pi/4$, a resposta 32 corresponderia à superfície de um hemisfério de diâmetro 4 1/2; e essa foi a interpretação dada ao problema em 1930[10]. Um tal resultado, precedendo de cerca de 1 500 anos o mais antigo cálculo conhecido de uma superfície hemisférica, seria assombroso, e de fato, parece que seria bom demais para ser verdadeiro. Análise posterior [11] indica que a "cesta" pode ter sido um teto — algo como o de um hangar em forma de meio cilindro de diâmetro 4 1/2 e comprimento 4 1/2. O cálculo nesse caso não exige mais que o conhecimento do comprimento de um

[9]Van der Waerden, *Science Awakening*, p. 35. cf. R. J. Gillings, "The Volume of a Truncated Pyramid in Ancient Egypt", *Mathematics Teacher*, 57 (1964), 552-555

[10]Veja W. W. Struve, "Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau", *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte A, *Quellen*, I (1930)

[11]Veja van der Waerden, *Science Awakening*, p. 34. cf. no entanto, R. J. Gillings, "The Area of the Curved Surface of a Hemisphere in Ancient Egypt", *The Australian Journal of Science*, 30 (1967), 113-116, em que o autor conclui que o escriba do Papiro de Moscou estava, de fato, calculando corretamente com a superfície curva do hemisfério, no Prob. 10

semicírculo, e a obscuridade do texto permite oferecer interpretações ainda mais primitivas, inclusive a possibilidade de ser o cálculo apenas uma avaliação grosseira da área de um teto de celeiro em forma de cúpula. De qualquer forma, parece que temos aqui uma estimativa primitiva da área de uma superfície curva.

Durante muito tempo se supôs que os gregos aprenderam os rudimentos de geometria com os egípcios, e Aristóteles argüiu que a geometria teria surgido no vale do Nilo porque lá os sacerdotes tinham o lazer necessário para desenvolver o conhecimento teórico. Que os gregos de fato emprestaram do Egito alguma matemática elementar é provável, pois o uso de frações unitárias persistiu na Grécia e em Roma até boa parte do período medieval, mas evidentemente a extensão desse empréstimo foi exagerada. O conhecimento revelado nos papiros é quase todo prático e o elemento principal nas questões eram cálculos. Quando parecem entrar elementos teóricos, o objetivo pode ter sido o de facilitar a técnica e não a compreensão. Mesmo a geometria egípcia, outrora louvada aparece na verdade mais como um ramo da aritmética aplicada. Onde entram relações de congruência elementares, o motivo aparentemente é o de fornecer artifícios de mensuração e não o de conseguir melhor compreensão. As regras de cálculo raramente são motivadas e dizem respeito apenas a casos concretos específicos. Os papiros de Ahmes e Moscou, nossas principais fontes de informação, podem ter sido apenas manuais destinados a estudantes, mas indicam a direção e as tendências do ensino de matemática no Egito; outras evidências fornecidas por inscrições sobre monumentos, fragmentos de outros papiros matemáticos, e documentos de ramos aparentados da ciência servem para confirmar a impressão geral. É verdade que nossos dois principais papiros matemáticos são de época bastante antiga, mil anos antes do surgimento da matemática grega, mas a egípcia parece ter permanecido notavelmente uniforme durante sua longa história. Em todos os seus estágios, era construída em torno da operação de adição, uma desvantagem que conferia aos cálculos dos egípcios um peculiar primitivismo, combinado com uma ocasional e assombrosa complexidade. O fértil vale do Nilo tem sido descrito como o maior oásis do mundo no maior deserto do mundo. Regado por um dos rios mais "bem-educados" do mundo e geograficamente protegido em larga extensão da invasão estrangeira, era um abrigo para um povo pacífico que levava uma vida calma e sem desafios. O amor aos deuses benevolentes, o respeito à tradição, a preocupação com a morte e as necessidades dos mortos, tudo isso encorajou um alto grau de estagnação. A geometria pode ter sido uma dádiva do Nilo, como Heródoto acreditava, mas os egípcios pouco a aproveitaram. A matemática de Ahmes era a de seus antepassados e descendentes. Para realizações matemáticas mais progressistas devemos examinar o vale fluvial mais turbulento conhecido como Mesopotâmia.

BIBLIOGRAFIA

Chace, A. B., L. S. Bull, H. P. Manning e R. C. Archibald, eds. *The Rhind Mathematical Papyrus* (Oberlin, Ohio, 1927-1929, 2 vols.). Contém uma completa bibliografia de obras sobre a matemática egípcia publicadas no período de 1706 até 1927, bem como uma extensa exposição da matemática egípcia

Gillings, R. J., "Problems 1 to 6 of the Rhind Mathematical Papyrus", *The Mathematics Teacher*, **55** (1962), 61-69. Continuações se encontram em volumes posteriores do periódico

Guggenbuhl, Laura, "Mathematics in Ancient Egypt: A Checklist", *The Mathematics Teacher*, **58** (1965), 630-634

Neugebauer, O., *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung* (Berlin: Springer, 1926)

Neugebauer, O., *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª edição (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957; edição em brochura New York; Harper Torchbook)

Parker, R. A., *The Calendars of Ancient Egypt* (Chicago: University of Chicago Press, 1950)

Struve, W. W., "Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau", *Quellen and Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte A, *Quellen*, **I** (1930)

Van der Waerden, B. L., "Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung", *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte B, *Studien*, **IV** (1937-1938), 359-382

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, traduzido para o inglês por Arnold Dresden (New York: Oxford University Press, 1961; edição em brochura New York: Wiley, 1963)

Vogel, Kurt, *Vorgriechische Mathematik*, Vol. I, *Vorgeschichte und Ägypten* (edição em brochura, Hannover: Hermann Schroedel, por volta de 1958)

Wheeler, Noel F., "Pyramids and Their Purpose," *Antiquity*, **9** (1935), 5-21, 161-189, 292-304

EXERCÍCIOS

1. Descreva a evidência em que se baseia nossa avaliação da matemática egípcia. Você acha provável que isso seja modificado pela descoberta de novos documentos? Explique.
2. Você acha que a astronomia foi um fator mais importante que a demarcação de terra no surgimento da matemática egípcia? Explique.
3. Que significa etmologicamente a palavra "geometria"? O uso dessa palavra é justificável à luz da origem histórica do assunto? Explique.
4. Quais são, na sua opinião, as três mais importantes deficiências da matemática egípcia? Explique por que as considera as mais significativas.
5. Quais são, na sua opinião, as três mais importantes contribuições do Egito ao desenvolvimento da matemática? Explique por que as considera importantes.
6. Escreva o número 7 654 em forma hieroglífica egípcia. Em que difere isso do modo pelo qual Ahmes escrevia esse número?
7. Exprima 2/103 como soma de duas frações unitárias diferentes, e escreva-as em notação hieroglífica egípcia. Em que a forma hierática difere dessa?
8. Resolva pelo método da falsa posição a equação $x + 1/2\,x - 16$. (Esse é o Prob. 25 no Papiro Ahmes.)
9. Resolva o seguinte problema do Papiro Ahmes (Prob. 40): Divida cem pães entre cinco homens de modo que as partes estejam em progressão aritmética e que a sétima parte da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores.
10. Resolva à maneira egípcia as equações simultâneas $x^2 + y^2 = 100$, $y = 3x/4$, tiradas de um papiro de Berlim do antigo Egito. (Use o método de "dupla falsa", começando com um valor suposto para x, calculando o y correspondente pela segunda equação, e ajustando os valores de modo a satisfazer a primeira.)
11. Por duplicação e mediação (sucessivas multiplicações e divisões por dois) ache $101 \div 16$, exprimindo o resultado em hieroglifos egípcios.
12. Ache algebricamente a fórmula egípcia para o volume do tronco de pirâmide quadrada, a partir da fórmula para volume da pirâmide, usando proporções conhecidas da geometria elementar. Você acha que os egípcios poderiam ter encontrado sua fórmula desse modo? Explique.
13. Até que ponto é correto dizer que os egípcios conheciam a área do círculo? Explique claramente.
14. Por que você acha que os egípcios preferiam a decomposição $2/15 = 1/10 + 1/30$ à alternativa $2/15 = 1/12 + 1/20$?
15. Mostre que se n é um múltiplo de três, $2/n$ pode ser decomposto na soma de duas frações unitárias, uma sendo a metade de $1/n$.
16. Mostre que se n é múltiplo de cinco, $2/n$ pode ser decomposto na soma de duas frações unitárias, uma sendo um terço de $1/n$.
17. Justifique o método de resolução usado por Ahmes no Prob. 63. (Ver texto.)
18. Justifique o fato de Ahmes assumir que a razão da área do círculo para sua circunferência é igual à razão da área do quadrado circunscrito para o perímetro desse quadrado.
19. Se o seqt de uma pirâmide é 5 palmos (ou mãos) e 1 dedo por cúbito, e se o lado da base é 140 cúbitos, qual é a altura? (Prob. 57 no Papiro Ahmes.) Há cinco dedos num palmo.
20. Use o método egípcio de divisão para resolver o seguinte problema do Papiro Ahmes (Prob. 31): Uma quantidade e seus dois terços, sua metade e seu um sétimo juntos fazem 33. Ache essa quantidade. [A resposta dada é $14 + 1/4 + 1/56 + 1/97 + 1/194 + 1/388 + 1/679 + 1/776$.]

Capítulo 3

Mesopotâmia

Quanto um deus está além de outro deus?

De um texto astronômico babilônico antigo.

O quarto milênio antes de nossa era foi um período de notável progresso cultural trazendo o uso da escrita, da roda, e dos metais. Como no Egito durante a primeira dinastia, que começou pelo fim desse maravilhoso milênio, também no vale mesopotâmio havia por essa época uma civilização de alto nível. Ali os sumérios tinham construído casas e templos decorados com cerâmica e mosaicos artísticos em desenhos geométricos. Governantes poderosos uniram os principados locais num império que realizou vastas obras públicas, como um sistema de canais para irrigar a terra e controlar as inundações. O relato bíblico da inundação no tempo de Noé tem uma contrapartida mais antiga na lenda relativa ao herói sumeriano Utnapischtun e a inundação da região entre os rios Tigre e Eufrates, onde o fluxo dos rios era imprevisível, ao contrário do que ocorria no Nilo. A Bíblia nos diz que Abraão vinha da cidade de Ur, um aldeamento sumério onde o Eufrates desaguava no Golfo Pérsico, pois nessa época os rios não se reuniam como agora, antes de chegar ao Golfo. O tipo de escrita cuneiforme desenvolvido pelos sumérios durante o quarto milênio, muito antes dos dias de Abraão, pode ser a mais antiga forma de comunicação escrita, pois provavelmente é anterior à hieroglífica egípcia, que pode derivar dela. Embora nada tenham em comum, é uma coincidência interessante que as origens da escrita e dos veículos com rodas sejam aproximadamente contemporâneas.

As civilizações antigas da Mesopotâmia são freqüentemente chamadas babilônias, embora tal designação não seja inteiramente correta. A cidade de Babilônia não foi a princípio, nem foi sempre em períodos posteriores, o centro da cultura associada com os dois rios, mas a convenção sancionou o uso informal do nome "babilônica" para a região durante o período de cerca de 2000 até aproximadamente 600 A. C. Quando em 538 A. C. a Babilônia foi dominada por Ciro da Pérsia, a cidade foi poupada mas o império babilônio terminou. A matemática "babilônia", no entanto, continuou através do período selêucida na Síria, quase até o surgimento do cristianismo. Ocasionalmente a área entre os rios é também designada como Caldéia, porque os caldeus, provenientes do sul da Mesopotâmia, foram dominantes durante certo tempo, principalmente durante o fim do sétimo século A. C., em toda a região entre os rios. Então, como hoje, a Terra dos Dois Rios estava aberta a invasões de várias direções o que fazia do Crescente Fértil um campo de batalha, com a hegemonia mudando freqüentemente. Uma das invasões mais significativas foi a dos acadianos semíticos sob Sargão I (2276-2221 A. C. aproximadamente) ou Sargão, o Grande. Ele estabeleceu um império que se estendeu do Golfo Pérsico ao sul, até o Mar Negro ao norte e das estepes da Pérsia a leste, até o Mediterrâneo a oeste. Sob Sargão começou uma gradual absorção pelos invasores da cultura suméria indígena, inclusive da escrita cuneiforme. Invasões e revoltas posteriores trouxeram estirpes de várias raças — amoritas, cassitas, elamitas, hititas, assírios, medos, persas, e outros — ao poder político em épocas diversas, mas permaneceu um grau suficientemente alto de unidade cultural na área para que se possa chamar simplesmente de mesopotâmica essa civilização. Em particular, o uso da escrita cuneiforme formou um forte laço. Leis, registros de impostos, estórias, lições de escola, cartas pessoais — tais coisas e muitas outras eram incisas em tabletas de barro mole com um estilete, e as tabletas eram então cozidas ao sol ou em fornos. Tais documentos, felizmente, eram muito menos vulneráveis aos estragos do tempo que os papiros egípcios; por isso se dispõe hoje de muito mais documentação

sobre a matemática da Mesopotâmia que sobre a do Egito. Só de um local, a área da antiga Nipur, temos umas 50 000 tabletas. As bibliotecas universitárias em Columbia, Pennsylvania e Yale, entre outras, têm grandes coleções de tabletas antigas da Mesopotâmia, algumas delas matemáticas. Apesar da quantidade de documentos disponíveis, no entanto, a escrita hieroglífica egípcia foi decifrada antes da cuneiforme, nos tempos modernos. Algum progresso na leitura da escrita babilônia tinha sido feito no começo do século dezenove por Grotefend, mas somente no segundo quarto do século vinte começaram a aparecer, nas histórias da antiguidade, exposições substanciais da matemática mesopotâmica[1].

O uso antigo da escrita na Mesopotâmia é atestado por centenas de tabletas de barro encontradas em Uruk e datando de cerca de 5 000 anos atrás. Por essa época a escrita tinha atingido o ponto em que formas estilizadas convencionais eram usadas para muitas coisas: ≈ para água, ⌓ para olho, e combinações dessas para indicar choro. Gradualmente o número de símbolos tornou-se menor, de modo que de uns 2 000 símbolos inicialmente usados só um terço restou ao tempo da conquista acadiana. Desenhos primitivos deram lugar a combinações de cunhas: água ficou 𒀀 e olho 𒅆. A princípio o escriba escrevia do alto para baixo em colunas da direita para a esquerda; mais tarde, por conveniência, a tableta era girada de 90° em sentido anti-horário, e o escriba escrevia da esquerda para a direita em linhas horizontais de cima para baixo. O estilete, que anteriormente fora um prisma triangular, foi substituído por um cilindro circular reto — ou antes, por dois de raios diferentes. Nos primeiros tempos, a ponta do estilete era apoiada verticalmente sobre o barro para representar dez unidades e obliquamente para uma, usando o estilete menor; de modo análogo, uma impressão oblíqua com o maior indicava sessenta unidades e uma vertical indicava 3 600. Combinações dessas eram usadas para os números intermediários.

Quando os acadianos adotaram a escrita suméria, léxicos foram compilados dando equivalentes nas duas línguas, e as formas das palavras e numerais se tornaram menos variadas. Milhares de tabletas do tempo da dinastia Hamurabi (1800-1600 A. C. aproximadamente) ilustram um sistema numérico que estava bem estabelecido. O sistema decimal, comum à maioria das civilizações tanto antigas quanto modernas, tinha sido submerso da Mesopotâmia sob uma notação que dava a base sessenta como fundamental. Muito se escreveu sobre os motivos para essa mudança; sugeriu-se que considerações astronômicas podem ter sido determinantes ou que o sistema sexagesimal pode ter sido a combinação natural de dois mais antigos, um decimal outro em base seis. Parece mais provável, porém, que a base sessenta fosse adotada conscientemente e legalizada no interesse da metrologia, pois uma grandeza de sessenta unidades pode ser facilmente subdividida em metades, terços, quartos, quintos, sextos, décimos, dozeavos, quinzeavos, vigésimos e trigésimos, fornecendo assim dez possíveis subdivisões. Qualquer que tenha sido a origem o sistema sexagesimal de numeração teve vida notavelmente longa, pois até hoje restos permanecem, infelizmente para a consistência, nas unidades de tempo e medida dos ângulos, apesar da forma fundamentalmente decimal de nossa sociedade.

2 A numeração cuneiforme babilônia, para os inteiros menores, seguia as mesmas linhas que a hieroglífica egípcia, com repetições dos símbolos para unidades e dezenas. Se o arquiteto egípcio, esculpindo na pedra escrevia cinqüenta e nove como ∩∩∩∩∩|||||||||, o escriba mesopotâmio podia analogamente representar o mesmo número numa tableta de barro por quatorze marcas em cunha — cinco cunhas largas colocadas de lado ou "parênteses em ângulo", cada um representando dez unidades, e nove cunhas verticais finas, cada uma valendo uma unidade, todas justapostas num grupo bem arrumado como 𒐐𒐝. Para além do número cinqüenta e nove porém, os sistemas egípcio e babilônio divergiam

[1]Veja especialmente O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity* (1957) e B. L. van der Waerden, *Science Awakening* (1961). Ver também O. Neugebauer e A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts* (American Oriental Series, Vol. 29, 1945). Uma boa exposição auxiliar e mais referências se encontram em R. C. Archibald, "Outline of the History of Mathematics", (American Mathematical Monthly, 56, 1949, n.º 1, suplemento)

marcadamente. Talvez fosse a inflexibilidade do material de escrita mesopotâmio, talvez fosse uma centelha de inspiração o que fez com que os babilônios percebessem que seus dois símbolos para unidades e dezenas bastavam para representar qualquer inteiro, por maior que fosse, sem excessiva repetição. Isso se tornou possível pela invenção que fizeram, há cerca de 4 000 anos, da notação posicional — o mesmo princípio que assegura a eficácia de nossa forma numeral. Isto é, os antigos babilônios viram que seus símbolos podiam ter função dupla, tripla, quádrupla ou em qualquer grau, simplesmente recebendo valores que dependessem de suas posições relativas na representação de um número. As cunhas no símbolo cuneiforme para cinqüenta e nove são agrupadas bem juntas de modo a formar quase o equivalente de uma única cifra. Um espaçamento adequado entre grupos de cunhas pode estabelecer posições, lidas da direita para a esquerda, que correspondem a potências crescentes da base; cada grupo tem então um "valor local" que depende de sua posição. Nosso número 222 usa o mesmo algarismo três vezes, com significado diferente de cada vez. Uma vez vale duas unidades, depois duas dezenas, e finalmente duas centenas (isto é, duas vezes o quadrado da base dez). De modo exatamente análogo os babilônios fizeram uso múltiplo de um símbolo como 𒐖. Quando escreviam 𒐖 𒐖 𒐖, separando claramente os três grupos de duas cunhas cada, entendiam que o grupo da direita representava duas unidades, o segundo o dobro de sua base, sessenta, e o da esquerda o dobro do quadrado da base. O numeral, portanto, indicava $2(60)^2 + 2(60) + 2$ (ou 7322 em nossa notação).

Há uma abundância de material relativo à matemática na Mesopotâmia, mas estranhamente provém de dois períodos muito separados no tempo. Há uma quantidade de tabletas dos primeiros séculos do segundo milênio A. C. (a idade da Babilônia antiga), e muitas também dos últimos séculos do primeiro milênio A. C. (período selêucida). A maior parte das contribuições importantes para a matemática remontam ao período mais antigo, mas há uma contribuição de que não há evidência anterior a quase 300 A. C. Os babilônios parecem a princípio não ter tido um modo claro de indicar uma posição "vazia" — isto é, não tinham o símbolo *zero*, embora às vezes deixassem um espaço vazio para indicar o zero. Isto significava que as formas escritas dos números 122 e 7202 eram muito parecidas, pois 𒐖 𒐖 podia significar ou $2(60) + 2$ ou $2(60)^2 + 2$. Muitas vezes o contexto eliminava a ambigüidade; mas a falta de um símbolo zero, como o que nos permite distinguir imediatamente entre 22 e 202 deve ter sido muito inconveniente. Ao tempo da conquista por Alexandre, o Grande, no entanto, um símbolo especial, consistindo de duas pequenas cunhas colocadas obliquamente, foi inventado para servir para marcar o lugar onde um numeral faltasse. Dessa época em diante, enquanto a cuneiforme foi usada, o número 𒐖 ⩘ 𒐖, ou $2(60)^2 + 0(60) + 2$, era imediatamente distinguível de 𒐖 𒐖, ou $2(60) + 2$.

O símbolo babilônio para o zero aparentemente não terminou de todo com a ambigüidade, pois parece ter sido usado só para posições intermediárias. Não há tabletas em existência, onde apareça em posição terminal. Isto significa que jamais conseguiram um sistema posicional absoluto. A posição era só relativa; portanto, o símbolo 𒐖 𒐖 podia representar $2(60) + 2$ ou $2(60)^2 + 2(60)$ ou $2(60)^3 + 2(60)^2$ ou qualquer um de infinitos outros números em que apareçam só duas posições sucessivas com dois.

3 Se a matemática mesopotâmia, como a do vale do Nilo, se baseasse na adição de inteiros e frações unitárias, a invenção da notação posicional não teria grande significado na época. Não é muito mais difícil escrever 98 765 em notação hieroglífica que em cuneiforme, e esse é muito mais difícil de escrever que a escrita hierática. O segredo da clara superioridade da matemática babilônia sobre a dos egípcios indubitavelmente está em que os que viviam "entre os dois rios" deram o passo muito feliz de estender o princípio da posição às frações. Isto é, a notação 𒐖 𒐖 era usada não só para $2(60) + 2$, mas também para $2 + 2(60)^{-1}$ ou para $2(60)^{-1} + 2(60)^{-2}$ e outras tais frações. Isso significava que os babilônios dominavam o poder de computação que a moderna notação decimal para frações nos confere. Para o estudioso babilônio, como para o engenheiro moderno, a adição ou a multiplicação de 23,45 e 9,876 não eram essencialmente mais difíceis que as mesmas

operações entre os inteiros 2 345 e 9 876; e os mesopotâmios rapidamente exploraram essa importante descoberta. Uma tableta da Babilônia antiga, da coleção de Yale (N.º 7289) contém o cálculo da raiz quadrada de dois até três casas sexagesimais, a resposta sendo escrita como 𒁹𒐏𒐚𒌋𒁹. Em caracteres modernos esse número pode ser adequadamente escrito como 1;24,51,10 onde se usa ponto e vírgula para separar a parte inteira da fracionária, e uma vírgula para separar posições sexagesimais. Essa forma será usada neste capítulo para denotar números em notação sexagesimal. Esse valor babilônio para $\sqrt{2}$ é aproximadamente 1,414222, diferindo por cerca de 0,000008 do valor verdadeiro. A precisão nas aproximações era relativamente fácil de conseguir para os babilônios com sua notação para frações, a melhor que qualquer civilização tenha possuído até a Renascença.

4 A eficácia da computação babilônia não resultou somente de seu sistema de numeração. Os matemáticos mesopotâmios foram hábeis no desenvolver processos algorítmicos, entre os quais um para extrair a raiz quadrada freqüentemente atribuído a homens que viveram bem mais tarde. Às vezes é atribuído ao sábio grego Arquitas (428-365 A. C.) ou a Heron de Alexandria (100 D. C. aproximadamente); ocasionalmente é chamado algoritmo de Newton. Esse processo babilônio é tão simples quanto eficiente. Seja $x = \sqrt{a}$ a raiz desejada e seja a_1, uma primeira aproximação dessa raiz; seja b_1 uma segunda aproximação dada pela equação $b_1 = a/a_1$. Se a_1 é pequeno demais, b_1 é grande demais e vice-versa. Logo a média aritmética $a_2 = (1/2)(a_1 + b_1)$ é uma nova aproximação plausível. Como a_2 é sempre grande demais, a seguinte, $b_2 = a/a_2$ será pequena demais e toma-se a média aritmética $a_3 = (1/2)(a_2 + b_2)$ para obter um resultado ainda melhor; o processo pode ser continuado indefinidamente. O valor de $\sqrt{2}$ na tableta 7289 de Yale é o de a_3, onde $a_1 = 1;30$. No algoritmo babilônio para raiz quadrada acha-se um processo iterativo que poderia ter levado os matemáticos do tempo a descobrir processos infinitos, mas eles não levaram adiante a pesquisa das implicações de tais problemas.

O algoritmo acima descrito é equivalente à aproximação por dois termos da série binomial, familiar aos babilônios. Se se procura $\sqrt{a^2 + b}$, a aproximação $a_1 = a$ leva a $b_1 = (a^2 + b)/a$ e $a_2 = (a_1 + b_1)/2 = a + b/(2a)$, o que concorda com os dois primeiros termos na expansão de $(a^2 + b)^{1/2}$ e fornece uma aproximação encontrada em textos da Babilônia antiga. Apesar da eficiência de sua regra para raízes quadradas, os escribas mesopotâmios parecem ter imitado matemáticos aplicados modernos, recorrendo freqüentemente às tabelas disponíveis em toda parte. Na verdade, uma boa parte das tabletas cuneiformes encontradas são "textos tabelas", inclusive de multiplicação, de recíprocos, de quadrados e cubos e raízes quadradas e cúbicas, escribas, é claro, em sexagesimais cuneiformes. Uma dessas, por exemplo, contém o equivalente do que aparece na tabela abaixo.

2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7,30
9	6,40
10	6
12	5

O produto de elementos de uma mesma linha é sempre 60, a base da numeração babilônia, e a tabela aparentemente era considerada uma tabela de recíprocos. A sexta linha, por exemplo, diz que o recíproco de 8 é $7/60 + 30/(60)^2$. Deve-se notar que faltam os recíprocos de 7 e 11 na tabela, porque os recíprocos desses números "irregulares" são sexagesimais infinitos, como em nosso sistema decimal os de 3, 6, 7, e 9. Novamente os babilônios se defrontavam com o problema da infinidade, mas não o tratavam sistematicamente. Num dado momento, no entanto, um escriba mesopotâmio parece dar um majorante e um minorante para o recíproco do número irregular 7, colocando-o entre 0;8,34,16,59 e 0;8,34,18. Pensando no gosto deles por cálculos multiposicionais, é tantalizante não encontrar uma percepção da simples periodicidade de três posições na representação sexagesimal de 1/7, uma descoberta que poderia ter levado à consideração de séries infinitas.

É claro que as operações aritméticas fundamentais eram tratadas pelos babilônios de modo não muito diferente do usado hoje, e com facilidade comparável. A divisão não era efetuada pelo incômodo processo de duplicação dos egípcios, mas por uma fácil multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor, usando os itens apropriados nas tabelas. Assim como hoje o quociente de 34 por 5 é achado facilmente multiplicando 34 por 2 e colocando vírgula, na antiguidade o mesmo processo era realizado achando o produto de 34 por 12 e colocando uma casa sexagesimal, dando 6 48/60. Tabelas de recíprocos, em geral, forneciam os de números "regulares" apenas, isto é, os que são produtos de fatores dois, três e cinco, embora haja algumas exceções. Uma tabela contém as aproximações $1/59 = 0;1,1,1$ e $1/61 = 0;0,59,0,59$. Aqui temos os análogos sexagesimais das expressões decimais $1/9 = 0{,}11\overline{1}$ e $1/11 = 0{,}09\overline{09}$, frações unitárias em que o denominador é a base mais ou menos um; mas parece novamente que os babilônios não observaram ou pelo menos não consideraram significativas, as expansões infinitas periódicas nessa situação[2].

Entre as tabletas babilônias encontram-se tabelas contendo potências sucessivas de um dado número, semelhantes às nossas tabelas de logaritmos, ou mais propriamente, de antilogaritmos. Tabelas exponenciais (ou logarítmicas) foram encontradas em que são dadas as dez primeiras potências para as bases 9, 16, 1,40 e 3,45 (todos quadrados perfeitos). A questão posta num problema, a que potência deve ser elevado um certo número para fornecer um número dado, equivale à nossa, qual o logaritmo de um número dado num sistema com um certo número como base. As diferenças principais entre as tabelas antigas e as nossas, além de linguagem e notação, são que não é usado um número único, sistematicamente, como base em variadas situações e que as lacunas entre os números que constam das tabelas antigas são muito maiores que nas nossas. Também, suas "tabelas de logaritmos" não eram usadas para fins gerais de cálculo, mas para resolver certas questões bem específicas.

Apesar das grandes lacunas em suas tabelas exponenciais, os matemáticos babilônios não hesitavam em interpolar por partes proporcionais para obter valores intermediários aproximados. A interpolação linear parece ter sido comumente usada na Mesopotâmia antiga, e a notação posicional é conveniente para a regra de três. Vê-se um exemplo claro do uso prático da interpolação em tabelas exponenciais num problema que pergunta quanto tempo levaria uma quantia em dinheiro para dobrar, a 20 por cento ao ano; a resposta dada é 3;47,13,20. Parece inteiramente claro que o escriba usou interpolação linear entre os valores para $(1;12)^3$ e $(1;12)^4$, usando a fórmula para juros compostos $a = P(1+r)^n$, onde r é 20 por cento ou 12/60, e tirando valores de uma tabela exponencial com potências de 1;12.

Uma tabela que os babilônios achavam muito útil não é geralmente incluída nos manuais de hoje. É uma tabulação dos valores de $n^3 + n^2$ para valores inteiros de n, tabela essencial na álgebra babilônia; esse assunto atingiu nível consideravelmente mais alto na Mesopotâmia que no Egito. Muitos textos de problemas do período Babilônio antigo mostram que a solução da equação quadrática completa não constituía dificuldade séria para os babilônios, pois tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis. Podiam transportar termos em uma equação somando iguais a iguais, e multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores. Somando $4ab$ a $(a-b)^2$ podiam obter $(a+b)^2$, pois muitas fórmulas simples de fatoração lhes eram familiares. Não usavam letras para quantidades desconhecidas, pois o alfabeto não fora inventado, mas palavras como "comprimento", "largura", "área" e "volume" serviam bem

[2]Além das referências mencionadas na nota de rodapé 1 deste capítulo, veja também Kurt Vogel, *Vorgriechische Mathematik*, Vol. II, *Die Mathematik der Babylonier* (1959)

nesse papel. Que tais palavras possam ter sido usadas num sentido abstrato é sugerido pelo fato de os babilônios não hesitarem em somar um "comprimento" com uma "área", ou uma "área" com um "volume". Tais problemas tomados literalmente, não podiam ter base em mensuração.

A álgebra egípcia tratara muito de equações lineares mas os babilônios evidentemente as acharam demasiado elementares para merecer muita atenção. Um problema pede o peso x de uma pedra se $(x + x/7) + (1/11)(x + x/7)$ é um mina; a resposta é dada simplesmente como 48;7,30 gin, onde 60 gin formam um mina. Em outro problema num texto da Babilônia antiga, achamos duas equações lineares simultâneas em duas incógnitas, chamadas respectivamente "primeiro anel de prata" e "segundo anel de prata". Se as denotarmos por x e y, em nossa notação as equações são $x/7 + y/11 = 1$ e $6x/7 = 10y/11$. A resposta é dada laconicamente em termos da regra

$$\frac{x}{7} = \frac{11}{7+11} + \frac{1}{72} \quad \text{e} \quad \frac{y}{11} = \frac{7}{7+11} - \frac{1}{72}.$$

Em outro par de equações o método de resolução está incluído no texto. Aqui 1/4 da largura + comprimento = 7 mãos e comprimento + largura = 10 mãos. A solução é achada primeiro substituindo cada "mão" por 5 "dedos" e então observando que uma largura de 20 dedos e um comprimento de 30 dedos satisfazem a ambas as equações. Em seguida, porém, a solução é achada por um outro método equivalente a uma eliminação por combinação. Exprimindo todas as dimensões em termos de mãos, e fazendo comprimento e largura iguais a x e y respectivamente, as equações ficam $y + 4x = 28$ e $x + y = 10$. Subtraindo a segunda da primeira tem-se o resultado $3x = 18$; daí $x = 6$ mãos ou 30 dedos e $y = 20$ dedos.

6 A solução de uma equação quadrática com três termos parece ter sido demasiado difícil para os egípcios, mas Neugebauer em 1930 revelou que tais equações tinham sido tratadas eficientemente pelos babilônios em alguns dos mais antigos textos de problemas. Por exemplo, um problema pede o lado de um quadrado se a área menos o lado dá 14,30. A solução desse problema, equivalente a resolver $x^2 - x = 870$ é expressa assim:

> Tome a metade de 1, que é 0;30, e multiplique 0,30 por 0;30, o que dá 0;15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15. Isto é o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado.

A solução, é claro, equivale exatamente à fórmula $x = \sqrt{(p/2)^2 + q} + p/2$ para uma raiz da equação $x^2 - px = q$—a fórmula quadrática que qualquer aluno de ginásio conhece. Em outro texto a equação $11x^2 + 7x = 6;15$ foi reduzida ao tipo padrão $x^2 + px = q$ multiplicando primeiro tudo por 11, para obter $(11x)^2 + 7(11)x = 1{,}8;45$. Essa é uma quadrática em forma normal para a incógnita $y = 11x$, e a solução para y é achada facilmente pela regra familiar $y = \sqrt{(p/2)^2 + q} - p/2$ e dela se calcula o valor de x. Essa solução é um notável exemplo de uso de transformações algébricas.

Até os tempos modernos não havia idéia de resolver uma equação quadrática da forma $x^2 + px + q = 0$, onde p e q são positivos, pois a equação não tem raiz positiva. Por isso as equações quadráticas na antiguidade e na Idade Média, e mesmo no começo do período moderno, foram classificadas em três tipos

1) $x^2 + px = q$,
2) $x^2 = px + q$,
3) $x^2 + q = px$.

Todos esses tipos são encontrados em textos do período Babilônio antigo, de uns 4 000 anos atrás. Os dois primeiros estão exemplificados nos problemas dados acima; o terceiro aparece freqüentemente em textos de problemas, onde é tratado como equivalente ao sistema simultâneo $x + y = p$, $xy = q$. Tão numerosos são os problemas em que se pede achar dois números dados seu produto e ou sua soma ou sua diferença, que eles parecem ter sido para os antigos, tanto babilônios quanto gregos, uma espécie de forma "normal" à qual as quadráticas se reduzem. Então, transformando as equações simultâneas $xy = a$ e $x \pm y = b$ no par de equações lineares $x \pm y = b$ e $x \pm y = b^2 \pm 4a$, os valores de x e y são achados por uma adição e uma subtração. Uma tableta cuneiforme de Yale, por exemplo, pede a solução do sistema $x + y = 6;30$ e $xy = 7;30$. As instruções do escriba são essencialmente as seguintes. Primeiro ache

$$\frac{x+y}{2} = 3;15,$$

depois

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 10;33,45.$$

Então

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = 3;3,45$$

e

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = 1;45.$$

Daí

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right) = 3;15 + 1;45$$

e

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right) = 3;15 - 1;45.$$

Das duas últimas equações é evidente que $x = 5$ e $y = 1\ 1/2$. Como as quantidades x e y entram simetricamente nas equações dadas, pode-se interpretar os valores de x e y como as duas raízes da equação quadrática $x^2 + 7;30 = 6;30x$. Outro texto pergunta qual o número que somado com seu recíproco dá $2;0,0,33,20$. Isso leva a uma equação quadrática do tipo 3 e novamente temos duas soluções, $1;0,45$ e $0;59,15,33,20$.

A redução babilônia de uma equação quadrática da forma $ax^2 + bx = c$ à forma normal $y^2 + by = ac$ pela substituição $y = ax$ mostra o grau extraordinário de flexibilidade da álgebra mesopotâmia. Essa facilidade, junto com a idéia de valor posicional, explica em grande parte a superioridade dos babilônios em matemática. Não há registro no Egito de resolução de uma equação cúbica, mas entre os babilônios há muitos exemplos. Cúbicas puras, como $x^3 = 0;7,30$ eram resolvidas por referência direta às tabelas de cubos e raízes cúbicas, onde a solução $x = 0;30$ era encontrada. A interpolação linear dentro das tabelas era usada para achar aproximações para valores não constantes na tabela. As cúbicas mistas na forma padrão $x^3 + x^2 = a$ eram resolvidas de modo semelhante, por referência às tabelas disponíveis, que davam valores para a combinação $n^3 + n^2$ para valores inteiros de n entre 1 e 30. Com a ajuda dessas tabelas viam facilmente que a solução, por exemplo, de $x^3 + x^2 = 4,12$ é igual a 6. Para casos ainda mais gerais de equações de terceiro grau, como $144x^3 + 12x^2 = 21$, os babilônios usavam seu método de substituição. Multiplicando ambos os membros por 12 e usando $y = 12x$, a equação fica $y^3 + y^2 = 4,12$, da qual se acha $y = 6$, donde x é 1/2 ou 0;30. Cúbicas da forma $ax^3 + bx^2 = c$ são redutíveis à forma babilônia normal multiplicando tudo por a^2/b^2 para obter $(ax/b)^3 + (ax/b)^2 = ca^2/b^3$, cúbica do tipo padrão na incógnita ax/b. Lendo na tabela o valor dessa incógnita, determina-se o valor de x. Se os babilônios eram ou não capazes de reduzir a cúbica geral de quatro termos $ax^3 + bx^2 + cx = d$ à sua forma normal, não se sabe. Que não é demasiado improvável que pudessem reduzi-la é indicado pelo fato de que basta a resolução de uma quadrática para levar a equação em quatro termos à forma em três termos $px^3 + qx^2 = r$, da qual, como vimos, se obtém facilmente a forma normal. Não há porém evidência que sugira que os matemáticos mesopotâmios de fato realizaram tal redução da equação cúbica geral.

A solução de equações quadráticas e cúbica na Mesopotâmia é um feito notável, admirável não tanto pelo alto nível de habilidade técnica quanto pela maturidade e flexibilidade dos conceitos algébricos envolvidos. Com o simbolismo moderno é fácil ver que $(ax)^3 + (ax)^2 = b$ é essencialmente o mesmo tipo de equação que $y^3 + y^2 = b$; mas reconhecer isso sem nossa notação é uma realização de significado muito maior para o desenvolvimento da matemática que até o louvado princípio posicional na aritmética, que devemos à mesma civilização. A álgebra babilônia tinha atingido um tal nível de abstração que as equações $ax^4 + bx^2 = c$ e $ax^8 + bx^4 = c$ eram reconhecidas como sendo apenas equações quadráticas disfarçadas — isto é, quadráticas em x^2 e x^4.

8 As realizações dos babilônios no domínio da álgebra são admiráveis, mas os motivos que impulsionaram essa obra não são fáceis de entender. Era suposição comum que virtualmente toda a ciência e a matemática pré-helênicas eram puramente utilitárias; mas que espécie de situação da vida real na Babilônia antiga podia levar a problemas envolvendo a soma de um número e seu recíproco, ou a diferença entre uma área e um comprimento? Se o motivo era utilitário, então o culto do imediatismo era menos forte que hoje, pois conexões diretas entre o objetivo e a prática na matemática babilônia não são nada aparentes. Que pode ter havido tolerância para com a matemática por si mesma, se não encorajamento, é sugerido por uma tableta (N.º 322) na Plimpton Collection na Columbia University[3]. A tableta data do período babilônio antigo (1900 a 1600 A. C. aproximadamente) e as tabelas que contém podiam facilmente ser tomadas por um registro de negócios. No entanto, a análise mostra que há profundo significado matemático na teoria dos números, e que talvez se relacionasse com uma espécie de prototrigonometria. Plimpton 322 era parte de uma tableta maior, como se vê pela quebra ao longo da margem esquerda, e a parte que resta contém quatro colunas de números dispostos em quinze filas horizontais. A coluna da direita contém os números de um a quinze, e sua finalidade é evidentemente a de identificar a ordem dos itens nas outras três colunas dispostas como segue.

1,59,0,15	1,59	2,49	1
1,56,56,58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2
1,55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
1,53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
1,48,54,1,40	1,5	1,37	5
1,47,6,41,40	5,19	8,1	6
1,43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
1,41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
1,38,33,36,36	8,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45,0	1,15,0	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
1,27,0,3,45	2,41	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
1,23,13,46,40	56	1,46	15

A tableta não está em condições tão perfeitas que todos os números possam ainda ser lidos, mas o esquema de construção da tabela é claramente discernível, o que tornou possível determinar os itens que faltam por causa de pequenas fraturas. Para entender o que a tabela provavelmente significava para os babilônios consideremos o triângulo retângulo ABC (Fig. 3.1). Se os números na segunda e terceira colunas (da esquerda para a direita) forem considerados como os lados a e c respectivamente, a primeira coluna a esquerda contem em cada caso o quadrado da razão de c para b. Assim, a coluna da esquerda

[3]Maior descrição dessa tableta se encontra em Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity*, pp. 36-40. Uma boa exposição também se acha em Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics* (1964), pp. 35-37. Uma interpretação da possível motivação para o texto de tabela é dada por D. J. de Solla Price, "The Babylonian 'Pythagorean Triangle' Tablet", *Centaurus*, **10** (1964), 219-231

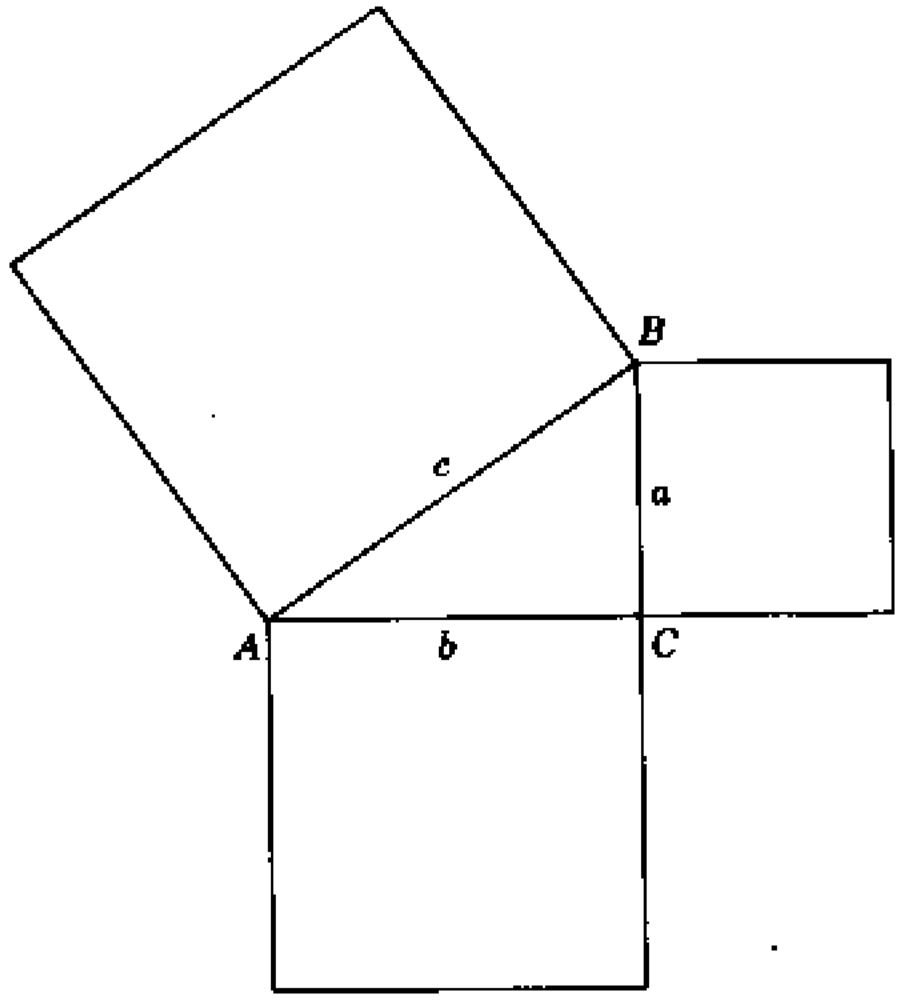
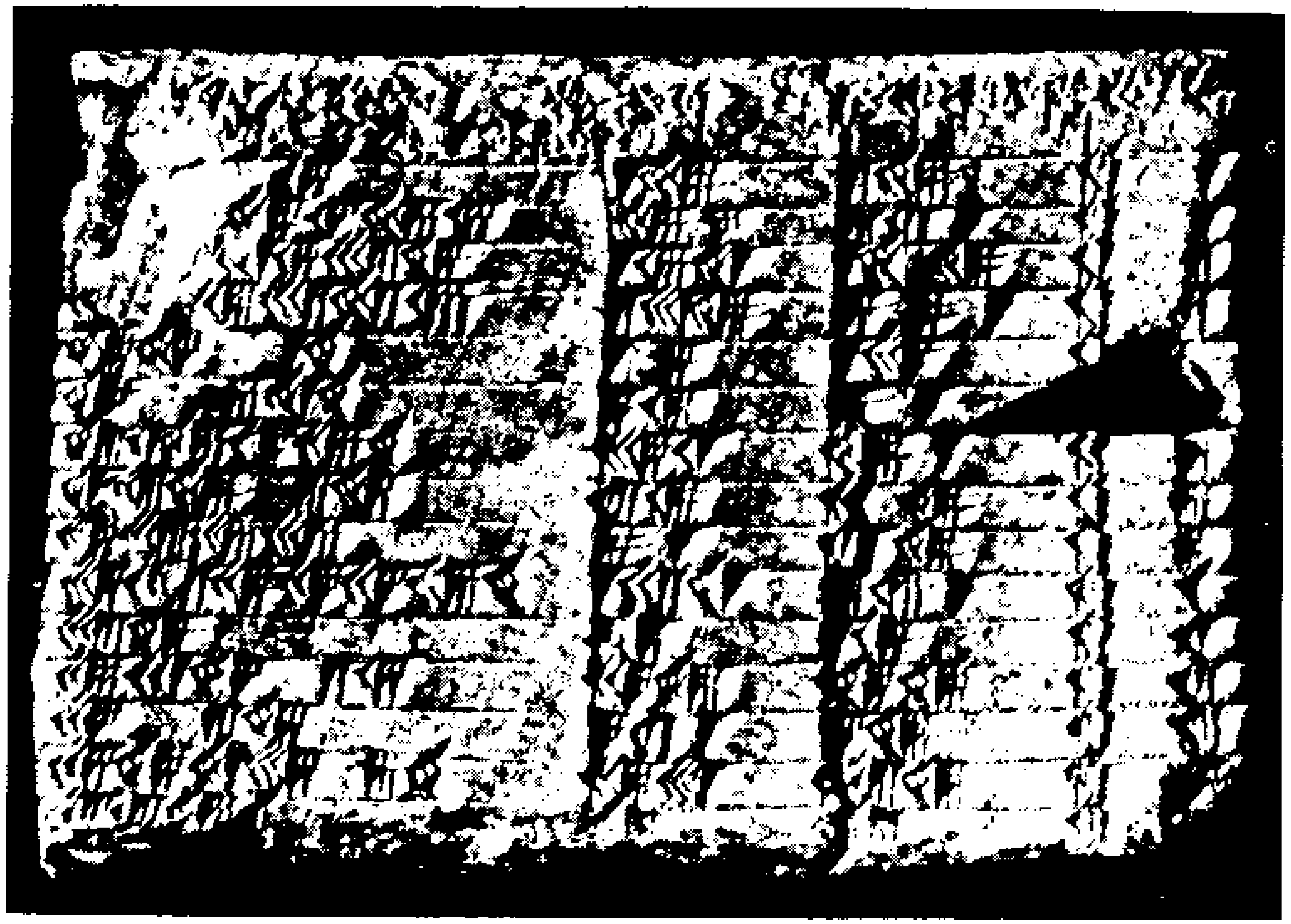


Figura 3.1

é uma curta tabela de valores de $\sec^2 A$, mas não devemos assumir que os babilônios conheciam nosso conceito de secante. Nem egípcios, nem babilônios introduziram uma medida de ângulos no sentido moderno. No entanto, as linhas de números em Plimpton 322 não estão dispostas ao acaso, como um olhar superficial poderia fazer pensar. Se a primeira vírgula na coluna um for substituída por ponto e vírgula, ficará evidente que os números dessa coluna decrescem do alto para baixo. Além disso, o primeiro número é muito próximo de $\sec^2 45°$, e o último número na coluna é aproximadamente $\sec^2 31°$, os números intermediários sendo próximos dos valores de $\sec^2 A$ quando A decresce por graus de 45° a 31°. Isso evidentemente não pode ser fruto do acaso. Não só o arranjo foi cuidadosamente planejado, mas as dimensões do triângulo também seguem uma regra. Os que construíram a tabela evidentemente começaram com dois inteiros sexagesimais regulares, que chamaremos p e q, com $p > q$, então formaram a tripla de números $p^2 - q^2$ e $2pq$ e $p^2 + q^2$. Os três inteiros assim obtidos formam um triângulo pitagórico, em que o quadrado do maior é igual à soma dos quadrados dos outros dois. Portanto esses números podem ser usados como dimensões do triângulo retângulo ABC, com $a = p^2 - q^2$ e $b = 2pq$ e $c = p^2 + q^2$. Restringindo-se a valores de p menores que 60 e a valores correspondentes de q tais que $1 < p/q < 1 + \sqrt{2}$ — isto é, a triângulos retângulos para os quais $a < b$ — os babilônios presumivelmente verificaram que havia exatamente 38 pares possíveis de valores de p e q satisfazendo às condições, e para esses aparentemente formaram as 38 correspondentes triplas pitagóricas. Só as 15 primeiras, dispostas em ordem decrescente para o quociente $(p^2 + q^2)/2pq$, estão incluídas na tabela da tableta, mas é provável que o escriba pretendesse continuar a tabela no outro lado da tableta. Sugeriu-se também[4] que a parte da Plimpton 322 quebrada do lado esquerdo continha quatro colunas adicionais em que estavam tabulados os valores de p e q e $2pq$ e o que chamaríamos hoje $\tan^2 A$.

A tableta Plimpton 322 poderia dar a impressão de um exercício em teoria dos números, mas é provável que esse aspecto do assunto fosse apenas auxiliar para o problema de medir áreas de quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo. Os babilônios não gostavam de trabalhar com recíprocos de números irregulares, pois esses não podiam ser expressos exatamente em frações sexagesimais finitas. Portanto, estão interessados em valores de p e q que lhes forneçam inteiros regulares para os lados dos triângulos retângulos de formas variadas, desde o isósceles até um com valor pequeno para a razão a/b. Por exemplo, os números na primeira linha são obtidos partindo de $p = 12$ e $q = 5$, com valores correspondentes $a = 119$ e $b = 120$ e $c = 169$. Os valores de a e c são exatamente

[4]Veja a explicação dada por Price (cuja sugestão estamos seguindo aqui) no artigo citado na nota de rodapé 3 deste capítulo



Plimpton 322

os que se encontram na segunda e na terceira posição a partir da esquerda na primeira linha da tabela; a razão $c^2/b^2 = 28\,561/14\,400$ é o número 1; 59,0,15 que aparece na primeira posição dessa linha[5]. A mesma relação é encontrada nas outras quatorze linhas; os babilônios fizeram os cálculos tão precisamente que a razão c^2/b^2 na décima linha é expressa como uma fração com oito casas sexagesimais, equivalentes a cerca de quatorze casas em nossa notação.

Tão grande parte da matemática babilônia depende de tabelas de recíprocos que não é de admirar que os itens em Plimpton 322 se aparentem com relações recíprocas. Se $a = 1$, então $1 = (c + b)(c - b)$, de modo que $c + b$ e $c - b$ são recíprocos. Se começarmos com $c + b = n$ onde n é qualquer sexagesimal regular, então $c - b = 1/n$; donde $a = 1$ e $b = 1/2(n - 1/n)$ e $c = 1/2(n + 1/n)$ são uma tripla fracionária pitagórica que pode ser facilmente convertida numa tripla pitagórica de inteiros multiplicando cada um dos três por $2n$. Todas as triplas na tableta Plimpton podem ser calculadas facilmente com esse artifício.

A exposição da álgebra babilônia que acabamos de dar é bem representativa, mas não pretende ser exaustiva. Há nas tabletas babilônias muitas outras coisas, embora não tão extraordinárias quanto as da tableta Plimpton 322. Por exemplo, numa tableta a progressão geométrica $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9$ é somada e em outra a soma da série de quadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$ é achada. Perguntamo-nos se os babilônios conheciam as fórmulas gerais para a soma de uma progressão geométrica e a soma dos n primeiros quadrados perfeitos. É possível que sim, e conjeturou-se que teriam percebido que a soma dos n primeiros cubos perfeitos é igual ao quadrado da soma dos n primeiros inteiros[6]. No entanto, deve-se ter em mente que as tabletas mesopotâmicas se assemelham

[5]Vogel, na *Vorgriechische Mathematik*, II, 37-41, interpreta esse número, e também os outros nessa coluna, como a^2/b^2 em vez de c^2/b^2 — isto é, como $\tan^2 A$ em vez de $\sec^2 A$. A diferença entre essas funções é sempre 1, e as cunhas de unidade na coluna à esquerda estão quase todas quebradas: mas uma inspeção cuidadosa da margem parece confirmar a interpretação desta coluna como quadrados de secantes

[6]Veja Archibald, *Outline of the History of Mathematics*, p. 11

aos próprios papiros egípcios em que só são dados casos específicos, sem formulações gerais.

Até há alguns anos atrás costumava-se dizer que os babilônios eram melhores que os egípcios na álgebra mas que tinham contribuído menos na geometria. A primeira metade da afirmação é claramente confirmada pelo que vimos acima; tentativas de justificar a segunda metade da comparação se limitam em geral à medida do círculo ou ao volume do tronco de pirâmide[7]. No vale mesopotâmio a área do círculo era achada em geral tomando três vezes o quadrado do raio, e em precisão isso é bem inferior à medida egípcia. No entanto, a contagem de casas decimais nas aproximações para π não é uma medida adequada da estatura geométrica de uma civilização, e uma descoberta recente anulou até esse fraco argumento. Em 1936 um grupo de tabletas matemáticas foi desenterrado em Susa, a uns trezentos quilômetros de Babilônia, e essas incluem resultados geométricos significativos. Seguindo o gosto mesopotâmio de fazer tabelas e listas, uma tableta do grupo de Susa compara as áreas e os quadrados dos lados de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e sete lados. A razão da área do pentágono, por exemplo, para o quadrado do lado é dada como 1;40, um valor que está correto a dois algarismos significativos. Para o hexágono e heptágono as razões são expressas como 2;37,30 e 3;41 respectivamente. Na mesma tableta o escriba dá 0;57,36 como razão entre o perímetro do hexágono regular e a circunferência do círculo circunscrito; e disso podemos concluir imediatamente[8] que o escriba babilônio tinha tomado 3;7,30 ou 3 1/8 como aproximação para π. Isso é pelo menos tão bom quanto o valor adotado no Egito. Além disso, nós o encontramos num contexto mais elaborado do que no Egito, pois a tableta de Susa é um bom exemplo de comparação sistemática de figuras geométricas. Fica-se quase tentado a ver nela a genuína origem da geometria, mas é importante notar que não era tanto o contexto geométrico que interessava aos babilônios quanto as aproximações numéricas que usavam na mensuração. A geometria para eles não era uma disciplina matemática no nosso sentido, mas uma espécie de álgebra ou aritmética aplicada em que números são ligados a figuras.

Há algum desacordo quanto a se os babilônios tinham ou não o conceito de figuras semelhantes, embora pareça provável. A semelhança de todos os círculos parece tomada como evidente na Mesopotâmia, como no Egito, e os muitos problemas sobre medidas de triângulos em tabletas cuneiformes parecem implicar uma noção de semelhança. Uma tableta no museu de Bagdá tem um triângulo ABC (Fig. 3.2) com lados $a = 60$ e $b = 45$ e $c = 75$ e está subdividido em quatro triângulos menores ACD, CDE, DEF, e EFB. As áreas desses são dadas como 8,6 e 5,11;2,24 e 3,19;3,56,9,36 e 5,53;53,39,50,24 respectivamente. Desses valores o escriba obteve o comprimento de AD como 27, aparentemente usando uma espécie de "fórmula de semelhança" equivalente a nosso teorema de que áreas de figuras semelhantes estão entre si como os quadrados de lados correspondentes. Os comprimentos de CD e BD são dados como 36 e 48 respectivamente, e por aplicação da "fórmula de semelhança" aos triângulos BCD e DCE o comprimento de CE é calculado[9] dando 21;36. O texto se quebra no meio do cálculo de DE.

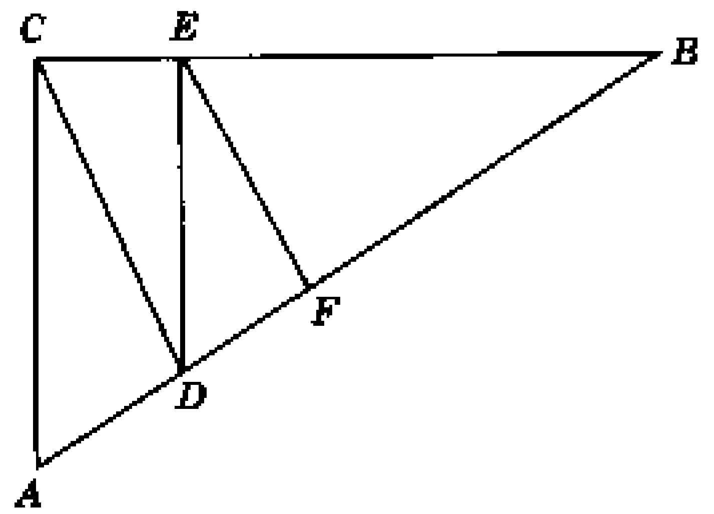


Figura 3.2

[7]Veja, por exemplo, George Sarton, *A History of Science*, vol. I (Cambridge, Mass,: Harward University Press, 1952), pp. 73-74

[8]Veja Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity* (2), p. 47

[9]Veja Vogel, *Vorgriechische Mathematik*, II, 78-79

10 Medidas eram o ponto central na geometria algebrizada do vale mesopotâmio, mas um defeito grave, como na geometria egípcia, era que a distinção entre medidas exatas e aproximadas não era tornada clara. A área de um quadrilátero era achada tomando o produto das médias aritméticas dos pares de lados opostos, sem nenhum aviso de que isso na maior parte dos casos era apenas uma aproximação grosseira. Também, o volume de um tronco de cone ou pirâmide era achado às vezes tomando a média aritmética das bases e multiplicando pela altura; às vezes, para um tronco de pirâmide quadrada com áreas a^2 e b^2 para as bases aplicava-se a fórmula

$$V = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 h.$$

No entanto, para esse tronco os babilônios usavam também uma regra equivalente a

$$V = h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

fórmula correta e que se reduz à conhecida pelos egípcios.

Não se sabe se os resultados egípcios e assírios eram sempre obtidos independentemente, mas de qualquer forma esses últimos foram decididamente maiores que os primeiros, tanto na geometria quanto na álgebra. O teorema de Pitágoras, por exemplo, não aparece em forma nenhuma nos documentos egípcios encontrados, mas tabletas até do período babilônio antigo mostram que na Mesopotâmia o teorema era largamente usado. Um texto cuneiforme da coleção de Yale, por exemplo, contém um diagrama de um quadrado e suas diagonais em que o número 30 está escrito ao longo de um lado e os números 42;25,35 e 1;24,51,10 ao longo da diagonal. O último número é evidentemente a razão entre os comprimentos da diagonal e do lado, e está expressa tão precisamente que concorda com $\sqrt{2}$ a cerca de 1 milionésimo. A precisão do resultado foi possível graças ao conhecimento do teorema de Pitágoras. Às vezes, em cálculos menos precisos, os babilônios usavam 1;25 como aproximação grosseira dessa razão. Mais significativa que a precisão dos valores, no entanto, é a implicação de que a diagonal de *qualquer* quadrado podia ser achada multiplicando o lado por $\sqrt{2}$. Assim, parece haver alguma idéia de princípios gerais, apesar de que esses são expressos exclusivamente em casos especiais.

O conhecimento babilônio do teorema de Pitágoras não se limitava ao caso do triângulo retângulo isósceles. Num texto babilônio antigo aparece um problema em que uma escada ou prancha de comprimento 0;30 está apoiada a uma parede; a questão é, de quanto a extremidade inferior se afastará da parede se a superior escorregar para baixo de uma distância de 0;6 unidades? A resposta é encontrada corretamente usando o teorema de Pitágoras. Mil e quinhentos anos depois problemas semelhantes, alguns com novos requintes, ainda estavam sendo resolvidos no vale mesopotâmio. Uma tableta selêucida, por exemplo, propõe o seguinte problema. Uma vara está apoiada a uma parede. Se o topo escorrega de três unidades quando a extremidade inferior se afasta da parede de nove unidades, qual o comprimento da vara? A resposta é dada corretamente como sendo quinze unidades.

Textos de problemas antigos em cuneiforme fornecem grande número de problemas do que poderíamos chamar geometria, mas que os babilônios provavelmente consideravam como aritmética aplicada. Um problema de herança típico pede a divisão de uma propriedade em forma de triângulo reto entre seis irmãos. A área é dada como 11,22,30 e um dos lados é 6,30; as retas divisórias devem ser equidistantes e paralelas ao outro lado do triângulo. Pede-se para achar as diferenças entre as porções. Outro texto dá as bases de um trapézio isósceles como sendo 50 e 40 unidades, e o comprimento dos lados como sendo 30; pede-se a altura e a área[10].

[10]Esses problemas e outros se encontram em Van der Waerden, *Science Awakening*, pp. 76-77

Os babilônios antigos conheciam outras importantes relações geométricas. Como os egípcios, sabiam que a altura de um triângulo isósceles bissecta a base. Daí, dado o comprimento de uma corda num círculo de raio conhecido, sabiam achar o apótema. Diferentemente dos egípcios, conheciam o fato que o ângulo inscrito num semicírculo é reto, proposição geralmente conhecida como teorema de Tales, apesar de Tales ter vivido bem mais de um milênio depois dos babilônios terem começado a usá-la. Esta denominação errônea de um teorema bem conhecido da geometria é sintomático da dificuldade em avaliar a influência da matemática pré-helênica sobre culturas posteriores. As tabletas cuneiformes tinham uma permanência que não podia ser igualada por documentos de outras civilizações, pois papiro e pergaminho não resistem bem aos estragos do tempo. Além disso, textos cuneiformes continuaram a ser incisos até o surgimento da era cristã; mas seriam eles lidos pelas civilizações vizinhas, especialmente os gregos? O centro do desenvolvimento matemático estava se deslocando da Mesopotâmia para o mundo grego meia dúzia de séculos antes de nossa era, mas reconstruções da matemática grega primitiva são arriscadas devido ao fato de praticamente não restarem documentos matemáticos do período pré-helenístico. É importante por isso, ter-se em mente as características gerais da matemática egípcia e babilônia de modo a poder fazer-se ao menos conjeturas plausíveis quanto às analogias que possam tornar-se aparentes entre contribuições pré-helênicas e as atividades e atitudes de povos de período posterior.

1 São evidentes muitas deficiências da matemática pré-helênica. Os papiros e tabletas encontrados contêm casos específicos e problemas apenas, sem formulações gerais, e pode-se perguntar se essas civilizações antigas realmente percebiam os princípios unificadores que estão no centro da matemática. Um estudo posterior é um pouco confortante, pois as centenas de problemas de tipos semelhantes em tabletas cuneiformes parecem ser exercícios que os escolares deviam resolver de acordo com certos métodos ou regras aceitos. Que não tenham sobrevivido enunciados dessas regras não significa necessariamente que a generalidade das regras ou princípios escapasse ao pensamento antigo. Se não estivesse presente ali uma regra, a similaridade entre os problemas seria difícil de explicar. Tão grandes coleções de problemas parecidos não podiam resultar do acaso.

Mais grave, talvez, do que a falta de enunciados explícitos de regras é a ausência de distinções claramente marcadas entre resultados exatos e aproximados. A omissão nas tabelas de casos envolvendo sexagesimais irregulares parece implicar certa percepção de tais distinções, mas nem egípcios nem babilônios parecem ter levantado a questão de quando a área de um quadrilátero (ou de um círculo) está calculada exatamente ou só aproximadamente. Questões sobre resolubilidade ou não de um problema não parecem ter sido levantadas; nem se investigou a natureza da prova. A palavra "prova" significa várias coisas em diferentes níveis e épocas; por isso é arriscado afirmar categoricamente que os povos pré-helênicos não tivessem noção de prova, nem sentissem a necessidade de prova. Há indícios de que esses povos ocasionalmente percebiam que certos métodos de calcular áreas e volumes podiam ser justificados por redução a problemas mais simples de área e volume. Além disso, os escribas pré-helênicos não raro verificavam ou "provavam" suas divisões por multiplicação; ocasionalmente verificavam o método usado num problema por meio de uma substituição que confirmava a correção da resposta. No entanto, não há frases explícitas do período pré-helênico que indiquem que é percebida a necessidade de provas ou que há preocupação com questões de princípios lógicos. A falta de tais expressões freqüentemente levou a um juízo de que as civilizações pré-helênicas não tinham verdadeira matemática, apesar do alto nível evidente de habilidade técnica.

Os críticos assinalam o que consideram uma ausência de abstração na matemática egípcia e babilônia. A linguagem dos documentos parece de fato ficar sempre próxima de casos concretos, como vimos; mas isto, também pode ser enganador. Na Mesopotâmia as palavras "comprimento" e "largura" deveriam talvez ser interpretadas como interpretamos as letras x e y, pois os escribas em cuneiforme podem bem ter passado de exemplos específicos a abstrações gerais. Como senão assim explicar a adição de um comprimento a uma área? Também no Egito o uso da palavra para quantidade não é incompatível com a interpretação abstrata que lhe atribuímos hoje.

Avaliações das civilizações pré-helênicas freqüentemente assinalam o fato de que não havia atividade intelectual claramente discernível de espécie caracteristicamente unificada comparável ao que mais tarde recebeu o nome de "matemática"; mas aqui também é fácil ser excessivamente dogmático. Pode ser verdade que a geometria ainda não se havia cristalizado a partir de uma matriz tosca de experiência espacial que incluía toda espécie de coisas que podiam ser medidas; mas é difícil não perceber na preocupação babilônia e egípcia com os números e suas aplicações algo muito próximo do que usualmente, em épocas posteriores, chamou-se álgebra.

As culturas pré-helênicas também têm sido estigmatizadas como puramente utilitárias, com pouco ou nenhum interesse pela matemática por ela mesmo. Aqui, também, está envolvido um julgamento, mais do que prova indiscutível. Então, como agora, a vasta maioria da humanidade se preocupava com problemas imediatos de sobrevivência. O lazer era muito mais raro do que hoje, mas mesmo assim havia no Egito e na Babilônia problemas que têm as características de matemática de recreação. Se um problema pede a soma de gatos e medidas de trigo, ou de um comprimento e uma área, não se pode negar a quem o perpetrou ou um certo humor ou uma procura de abstração. Naturalmente muito da matemática pré-helênica era prática, mas certamente não toda. A verdade provavelmente jaz entre os extremos recentemente publicados por dois historiadores da matemática. Um deles[11] afirma que a matemática babilônia se orientava unicamente a fins práticos; o outro defende ponto de vista diametralmente oposto, que a matemática suméria não era usada para a resolução de problemas da vida prática, mas somente para o prazer ou exultação do espírito[12].

Um leitor prudente pode assumir com segurança que nenhuma dessas posições extremas pode ser sustentada impunentemente. Na prática de cálculos, que se estendeu por um par de milênios, as escolas de escribas usaram muito material de exercícios, freqüentemente, talvez, como puro divertimento.

BIBLIOGRAFIA

Archibald, R. C., *Outline of the History of Mathematics*, 6.ª edição (Herbert Ellsworth Slaught Memorial Papers, N.º 2, Buffalo, N.Y.: The Mathematical Association of America, 1949)

Bruins, E. M., e M. Rutten, *Textes mathématiques de Suse* (Paris, 1961)

Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, 2.ª edição (New York: Holt, 1964)

Kugler, F. X., *Sternkunst und Sterndienst in Babel* (Münster in Westphalia: Aschendoeff, 1907-1935, 2 volumes e 3 suplementos)

Neugebauer, O., *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª edição (Providence R. I.: Brown University Press, 1957; edição em brochura, New York: Harper)

Neugebauer, O., *Mathematische Keilschift-Texte* (Berlin: Springer, 1935-1937, 3 volumes). Este é o Vol. II of *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Parte A, *Quellen*. Ver também numerosos artigos por Neugebauer e outros em *Quellen und Studien*, Parte B, *Studien*, I-IV (1928-1938)

Neugebauer, O., *Vorgriechische Mathematik* (Berlin- Springer, 1934)

Neugebauer, O., e A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts* (New Haven, Conn.: Yale University Press, 1945)

Thureau-Dangin, F., *Textes mathématiques Babyloniens* (Leiden: Brill, 1938)

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, traduzido por Arnold Dresden (New York: Oxford University Press, 1961; edição em brochura, New York: Wiley, 1963)

Vogel, Kurt, *Vorgriechische Mathematik*, Vol. II, *Die Mathematik der Babylonier* (edição em brochura, Hannover: Hermann Schroedel, cerca de 1959)

[11]M. Cipolla, *Storia della matematica dai primordia a Leibniz* (Mozara: Società editrice siciliana, 1949), p. 23

[12]Citado de Ettore Bortolotti por Ettore Carruccio em sua *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought* (Chicago; Aldine, 1964), p. 15

EXERCÍCIOS

1. O que você considera como as quatro contribuições mais significativas dos mesopotâmios à matemática? Justifique a resposta.

*2. O que você considera como as quatro principais fraquezas da matemática mesopotâmia? Justifique a resposta.

3. Compare, quanto ao significado e possível influência em civilizações posteriores, a geometria e trigonometria dos babilônios com a dos egípcios.

*4. Descreva as vantagens e desvantagens relativas das notações para números dos babilônios e egípcios.

5. Escreva o número 10 000 em notação babilônia.

6. Escreva o número 0,0862 em notação babilônia.

7. Use o algoritmo babilônio para raiz quadrada para achar a raiz quadrada de dois, com seis casas decimais, e compare com o valor babilônio 1;24,51,10.

8. Verifique que se $(c/a)^2$ é 1;33,45 e $b = 45$ e $c = 1{,}15$ então a, b, c formam uma tríada pitagórica.

9. Verifique que os parâmetros $p = 9$ e $q = 4$ levam aos valores na linha 5 da tableta Plimpton 322.

*10. Mostre que se p e q são números positivos tais que $p^2 - q^2 < 2pq$, então $1 < p/q < 1 + \sqrt{2}$.

11. De quanto a aproximação babilônia 3;41 difere do valor exato para a razão da área do heptágono regular para o quadrado do lado?

*12. Os babilônios avaliaram a razão da área do hexágono regular para o quadrado do lado como sendo 2;37,30. Qual a diferença com a razão correta?

13. Resolva o seguinte problema babilônio antigo: as áreas somadas de dois quadrados dão 1 000, e o lado de um quadrado é 10 menos que dois terços do lado do outro. Ache os lados.

*14. Ache como uma fração sexagesimal até a primeira casa a razão da área de um pentágono regular para o quadrado do lado e compare sua resposta com o valor 1;40 dado pelos babilônios.

15. Resolva o seguinte problema babilônio antigo: um lado de uma propriedade em forma de triângulo reto mede 50 unidades. Paralelamente ao outro lado e a 20 unidades do outro lado traça-se uma reta que corta uma área trapezoidal retangular de 5,20 unidades. Ache os comprimentos dos lados paralelos desse trapezóide.

16. Verifique o resultado de um cálculo babilônio antigo em que a área de um trapézio isósceles cujos lados são 30 unidades e cujas bases são 14 e 50 é dada como 12,48.

17. Resolva o seguinte problema babilônio antigo: dez irmãos recebem 1;40 minas de prata e irmão recebeu sobre irmão uma diferença constante. Se o oitavo irmão recebeu 6 shekels, ache quanto recebeu cada um. (Há 60 shekels em um mina.)

18. Ache o comprimento da escada no problema descrito no texto.

19. Resolva o problema dos seis irmãos descrito no texto.

20. Uma tableta da Babilônia antiga desenterrada em Susa pede o raio do círculo circunscrito a um triângulo cujos lados são 50, 50 e 60. Resolva o problema.

21. Mostre que a representação sexagesimal de 1/7 tem periodicidade de três casas. Quantas casas há na periodicidade em representação decimal?

*22. Outra tableta de Susa pede os lados x e y de um retângulo se $xy = 20{,}0$ e $x^3d = 14{,}48{,}53{,}20$, onde d é o comprimento da diagonal. Resolva o problema.

Capítulo **4**

A Jônia e os pitagóricos

Para Tales ... a questão primordial não era *o que sabemos*, mas *como o sabemos*.

Aristóteles

1 A atividade intelectual das civilizações potâmicas no Egito e Mesopotâmia tinha perdido sua verve bem antes da era cristã; mas quando a cultura nos vales dos rios estava declinando, e o bronze cedendo lugar ao ferro na fabricação de armas, vigorosas culturas novas estavam surgindo ao longo de todo o litoral do Mediterrâneo. Para indicar essa mudança nos centros de civilização, o intervalo entre aproximadamente 800 A. C. e 800 D. C. é às vezes chamado Idade Talássica (isto é, a "idade do mar"). Não houve, é claro, uma quebra brusca marcando a transição da liderança intelectual dos vales dos rios Nilo, Tigre e Eufrates para a beira do Mediterrâneo, pois o tempo e a história fluem continuamente, e as condições em variação são associadas a causas antecedentes. Os estudiosos egípcios e babilônios continuaram a produzir textos em papiro e cuneiforme durante muitos séculos após 800 A. C.; mas enquanto isso uma nova civilização se preparava rapidamente para assumir a hegemonia cultural, não só na região mediterrânea mas, finalmente, também nos principais vales fluviais. Para indicar a fonte da nova inspiração, a primeira parte da Idade Talássica é chamada era Helênica e conseqüentemente as culturas mais antigas são ditas pré-helênicas.

Os gregos de hoje ainda se chamam helenos, o nome usado por seus antigos antepassados, que se estabeleceram ao longo das costas do Mediterrâneo. A história grega pode ser recuada até o segundo milênio A. C. quando, como invasores iletrados, vindos do norte, abriram caminho até o mar. Não trouxeram tradição matemática ou literária consigo; no entanto, tiveram desejo ansioso de aprender, e não demoraram a melhorar o que lhes ensinaram. Por exemplo, tomaram, talvez dos fenícios, um alfabeto existente, consistindo só de consoantes, e lhe acrescentaram vogais. O alfabeto parece ter-se originado entre os mundos babilônio e egípcio, talvez na região da Península do Sinai, por um processo de redução drástica do número de símbolos cuneiformes ou hieráticos. Esse alfabeto chegou às novas colônias — gregas, romanas e cartaginesas — graças à atividade dos mercadores. Supõe-se que alguns rudimentos de cálculo viajaram pelas mesmas rotas, mas as partes mais exóticas da matemática sacerdotal podem ter permanecido restritas a seus domínios de origem. Logo porém, mercadores, negociantes e estudiosos gregos se dirigiram aos centros de cultura no Egito e Babilônia. Ali entraram em contato com a matemática pré-helênica; mas não estavam dispostos a apenas receber antigas tradições, e se apropriaram tão completamente do assunto que logo ele tomou forma drasticamente diferente.

Os primeiros Jogos Olímpicos se realizaram em 776 A. C., e por esse tempo uma maravilhosa literatura grega já se tinha desenvolvido, evidenciada pelas obras de Homero e Hesíodo. Da matemática grega da época nada sabemos. Presumivelmente estava em atraso comparada com o desenvolvimento de formas literárias, pois essas se prestam melhor à continuidade da transmissão oral. Passaram-se ainda quase dois séculos até haver alguma citação, mesmo indireta, da matemática grega. Então, durante o sexto século A. C., apareceram dois homens, Tales e Pitágoras, que tiveram na matemática o papel de Homero e Hesíodo na literatura. Quase tudo o que se relata neste capítulo se centra em Tales e Pitágoras, mas uma palavra de advertência é necessária. Homero e Hesíodo são figuras um tanto nebulosas, mas pelo menos temos uma tradição consistente que lhes atribui certas obras primas literárias que, primeiro transmitidas oralmente de geração a geração, finalmente foram escritas e preservadas para a posteridade. Tales e Pitágoras também são figuras imprecisas historicamente, embora menos que Homero e Hesíodo; mas no que se refere as suas obras, o paralelo com Homero e Hesíodo cessa. Não sobreviveu nenhuma obra de qualquer deles, nem se sabe se Tales ou Pitágoras jamais compuseram tal obra. O que fizeram deve ser reconstruído com base numa tradição, não muito digna de confiança, que se formou em torno desses dois matemáticos antigos. Certas frases-chave lhes são atribuídas, tais como "Conhece a ti mesmo" no caso de Tales e "Tudo é número", de Pitágoras — mas nada mais específico. No entanto, as mais antigas referências gregas à história da matemática, que não sobreviveram, atribuem a Tales e Pitágoras um bom número de descobertas matemáticas definidas. Esboçamos essas contribuições neste capítulo, mas o leitor deve entender que é sobre tradições persistentes e não sobre documentos históricos que o relato se baseia.

O mundo grego por muitos séculos teve seu centro entre os mares Egeu e Jônio, mas a civilização helênica não estava só localizada ali. Em 600 A. C. colônias gregas podiam ser encontradas ao longo das margens do Mar Negro e Mediterrâneo e foi nessas regiões afastadas que um novo impulso se manifestou na matemática. Para isto os colonistas da beira-mar, especialmente na Jônia, tinham duas vantagens: tinham o espírito ousado e imaginativo típico de pioneiros e estavam mais próximos dos dois principais vales de rio de que se podia extrair conhecimentos. Tales de Mileto (624-548 A. C. aproximadamente) e Pitágoras de Samos (580-500 A. C. aproximadamente) tinham ainda mais uma vantagem: estavam em condição de viajar aos centros antigos de conhecimento e lá adquirir informação de primeira mão sobre astronomia e matemática. No Egito diz-se que aprenderam geometria; na Babilônia, sob o esclarecido governante caldeu Nabucodonosor, Tales provavelmente entrou em contato com tabelas e instrumentos astronômicos. Diz a tradição que em 585 A. C. Tales assombrou seus contemporâneos ao predizer o eclipse solar desse ano. A veracidade dessa tradição é muito discutível, especialmente porque um eclipse solar é visível só em pequena parte da Terra e não é provável que houvesse na Babilônia tabelas de eclipses solares que permitissem a Tales fazer tal predição. É bem provável, de outro lado, que o gnômon ou relógio de sol viesse à Grécia da Babilônia e talvez o relógio de água do Egito. Os gregos não hesitavam nada em absorver elementos de outras culturas, de outra forma não teriam aprendido tão depressa como passar à frente de seus predecessores; mas a tudo o que tocavam davam mais vida.

O que se sabe de fato sobre a vida e obra de Tales é realmente muito pouco. Seu nascimento e sua morte são datados com base no fato de que o eclipse de 585 A. C. provavelmente ocorreu quando estava em plena maturidade, digamos 40 anos, e diz-se que ele tinha 78 anos quando morreu. No entanto, as sérias dúvidas sobre a autenticidade da história do eclipse tornam tais extrapolações arriscadas, e abalam nossa confiança quanto às descobertas cuja paternidade é atribuída a Tales. A opinião antiga é unânime em considerar Tales como um homem de rara inteligência e como o primeiro filósofo — por acordo geral o primeiro dos Sete Sábios. Era considerado um "discípulo dos egípcios e caldeus", hipótese que parece plausível. A proposição agora conhecida como teorema de Tales — que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto — pode ter sido aprendida por Tales durante suas viagens à Babilônia. No entanto, a tradição vai mais longe e lhe atribui uma espécie de demonstração do teorema. Por isso Tales foi freqüentemente saudado como o primeiro matemático verdadeiro — originador da organização dedutiva da geometria. Esse fato, ou lenda, foi ornamentado acrescentando-se a esse teorema quatro outros seguintes, que se dizia, provados por Tales.

1. Um círculo é bissectado por um diâmetro.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais.
4. Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes.

Não há documento antigo que possa ser apontado como prova desse feito, no entanto a tradição é persistente. O mais perto que se pode chegar de evidência digna de confiança nesse ponto é por uma menção datando de 1 000 anos depois do tempo de Tales. Um discípulo de Aristóteles chamado Eudemo de Rodes (viveu por volta de 320 A. C.) escreveu uma história da matemática. Essa perdeu-se, mas antes de desaparecer, alguém resumiu ao menos parte dela. O original desse resumo também se perdeu, mas durante o quinto século de nossa era, informação extraída do sumário foi incorporada pelo filósofo neo-platônico Proclus (410-485) nas páginas iniciais de seu *Comentário sobre o primeiro livro de Os elementos de Euclides*. Após observações introdutórias sobre a origem da geometria no Egito, o *Comentário* de Proclus diz que Tales

> ... primeiro foi ao Egito e de lá introduziu esse estudo na Grécia. Descobriu muitas proposições ele próprio, e instruiu seus sucessores nos princípios que regem muitas outras, seu método de ataque sendo em certos casos mais geral, em outros mais empírico[1].

É principalmente dessa citação em terceira mão que vêm as designações de Tales como o primeiro matemático. Proclus mais adiante em seu *Comentário*, novamente baseando-se em Eudemus, atribui a Tales os quatro teoremas mencionados acima. Há outras referências a Tales em fontes antigas, mas quase todas descrevem suas atividades mais práticas. Diógenes Laertius, seguido por Plínio e Plutarco, relata que ele mediu a altura das pirâmides do Egito observando os comprimentos das sombras no momento em que a sombra de um bastão vertical é igual à sua altura[2]. Heródoto, o historiador, conta a estória da predição do eclipse solar; o filósofo Aristóteles relata que Tales fez uma fortuna monopolizando as prensas de azeite num ano em que a colheita de azeitonas prometia ser abundante. Outras lendas ainda descrevem Tales como mercador de sal, defensor do celibato ou estadista de visão. Tais referências, no entanto, não trazem mais provas relativas à importante questão de saber se Tales arranjou de fato, ou não, um certo número de teoremas geométricos numa seqüência dedutiva. A estória de que calculou a distância de um navio no mar por proporcionalidade de lados de triângulos semelhantes é inconclusiva, pois os princípios que regem tal cálculo eram conhecidos há tempos no Egito e na Mesopotâmia. Tais estórias não provam a conjetura ousada de ter Tales criado a geometria demonstrativa; mas de qualquer forma Tales é o primeiro homem da história a quem foram atribuídas descobertas matemáticas específicas[3]. Sabemos agora que uma grande massa de material matemático era familiar aos babilônios um milênio antes do tempo de Tales, no entanto entre os gregos era aceito que Tales tinha feito progressos definidos. Parece razoável supor, à luz das afirmações de Proclus, que Tales deu uma contribuição à organização racional do assunto. Que foram os gregos que acrescentaram à geometria o elemento novo da estrutura lógica é quase universalmente admitido hoje, mas permaneceu a grande questão de saber se esse passo crucial foi dado por Tales ou por outros mais tarde — talvez dois séculos mais tarde até. Quanto a esse ponto não se pode fazer um juízo definitivo sem que apareça nova evidência sobre o desenvolvimento da matemática grega.

3 Pitágoras é uma figura pouco menos discutida que Tales, pois foi mais completamente envolto em lenda e apoteose. Tales era um homem de negócios, mas Pitágoras era um profeta e um místico, nascido em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso, não longe de Mileto, o lugar do nascimento de Tales. Embora alguns relatos afirmem que Pitágoras foi discípulo de Tales, isto é improvável dada a diferença de meio século entre suas idades. Alguma semelhança nos seus interesses pode ser facilmente explicada pelo fato de Pitágoras ter também viajado pelo Egito e Babilônia — possivelmente indo até a Índia. Durante suas peregrinações ele evidentemente absorveu não só informação matemática

[1] Tirada da tradução de T. L. Heath, *History of Greek Mathematics* (1921), I, 128. Cf. Ivor Thomas, ed., *Selections illustrating the History of Greek Mathematics* (1939-1941), I, 147

[2] Para um relato completo veja Heath, obra citada, I, 128-140

[3] B. L. van der Waerden, em *Science Awakening*, p. 80, aceita a conjetura de que Tales usava deduções: O. Neugebauer, em *Exact Sciences in Antiquity*, pp. 142, 143, 148, rejeita-a

e astronômica como também muitas idéias religiosas. Pitágoras, incidentalmente, foi praticamente contemporâneo de Buda, Confúncio e Lao-Tse, de modo que esse século foi crítico no desenvolvimento da religião bem como da matemática. Quando voltou ao mundo grego, Pitágoras estabeleceu-se em Crotona na costa sudeste do que agora é a Itália, mas era então chamada Magna Grécia. Lá ele fundou uma sociedade secreta que se assemelhava um pouco a um culto órfico, exceto por suas bases matemáticas e filosóficas.

Se Pitágoras permanece uma figura muito obscura isto se deve em parte à perda de documentos daquela época. Várias biografias de Pitágoras foram escritas na antiguidade, inclusive uma de Aristóteles, mas se perderam. Uma outra dificuldade para caracterizar claramente a figura de Pitágoras provém do fato de que a ordem que ele fundou era comunitária além de secreta. Conhecimento e propriedade eram comuns, por isso a atribuição de descobertas não era feita a um membro específico da escola. É melhor, por isso, não falar na obra de Pitágoras mas antes das contribuições dos pitagóricos, embora na antiguidade fosse usual dar todo o crédito ao mestre.

A escola pitagórica era politicamente conservadora e tinha um código de conduta rígido. O vegetarianismo era imposto a seus membros, aparentemente porque o pitagorismo aceitava a doutrina da metempsicose, ou transmigração das almas, com a preocupação conseqüente de que se podia matar um animal que fosse a nova moradia da alma de um amigo morto. Entre outros tabus da escola havia o de comer feijões (ou melhor, lentilhas). Talvez a mais notável característica da ordem pitagórica fosse a confiança que mantinha no estudo da matemática e da filosofia como base moral para a conduta. As próprias palavras "filosofia" (ou "amor à sabedoria") e matemática (ou "o que é aprendido") supõe-se terem sido criadas pelo próprio Pitágoras para descrever suas atividades intelectuais. Diz-se que ele estabeleceu duas categorias de conferências, uma só para membros da escola ou ordem, outras para os da comunidade mais ampla. Presume-se que foi nas conferências da primeira categoria que Pitágoras apresentou as contribuições que fez à matemática, quaisquer que fossem essas. Tendo descrito, na citação acima, a obra geométrica de Tales, Proclus diz em seguida:

> Pitágoras, que veio depois dele, transformou essa ciência numa forma liberal de instrução, examinando seus princípios desde o início e investigando os teoremas de modo imaterial e intelectual. Descobriu a teoria das proporcionais e a construção de figuras cósmicas[4].

Mesmo que não aceitemos essa afirmação totalmente, é evidente que os pitagóricos desempenharam um papel importante, talvez o crucial, na história da matemática. No Egito e na Mesopotâmia os elementos de aritmética e geometria eram essencialmente exercícios de aplicação de processos numéricos a problemas específicos, fossem eles referentes a cerveja ou pirâmides ou heranças de terras. Havia pouco de estrutura intelectual, e talvez nada que se parecesse com uma discussão filosófica de princípios. Presume-se em geral que Tales deu algum passo nessa direção, embora a tradição apóie a opinião de Eudemo e Proclus de que a nova ênfase na matemática se deve principalmente aos pitagóricos. Para eles a matemática se relacionava mais com o amor à sabedoria do que com as exigências da vida prática; e essa foi sua tendência a partir daí. Até onde pitagóricos foram nessa direção não é nada claro, e pelo menos um conhecedor eminente do assunto[5] considera todos os relatos de contribuições matemáticas importantes pelos pitagóricos como não-históricos. De fato é difícil separar história e lenda no que se refere ao homem, pois ele representava tantas coisas para o povo — filósofo, astrônomo, matemático, abominador de feijões, santo, profeta, milagreiro, mágico, charlatão. Que foi uma das figuras mais influentes da história é difícil negar, pois seus seguidores, seja iludidos, seja inspirados, espalharam suas crenças por quase todo o mundo grego. A purificação da alma dos pitagóricos era realizada em parte por um regime físico estrito e em parte

[4]Ver Ivor Thomas, obra citada, I, 149. Cf. também Heath, obra citada I, 141, e van der Waerden, obra citada, p. 90

[5]Veja Neugebauer, obra citada, p. 148

por ritos que lembram os dos adoradores de Orfeu e Dionísio; mas as harmonias e mistérios da filosofia e da matemática também eram partes essenciais desses rituais. Nunca antes ou depois a matemática teve um papel tão grande na vida e na religião como entre os pitagóricos. Se, pois, é impossível atribuir descobertas específicas ao próprio Pitágoras, ou mesmo coletivamente aos pitagóricos, é entretanto importante entender o tipo de atividade com que, segundo a tradição, a escola estava associada.

4 Dizia-se que o lema da escola pitagórica era "Tudo é número". Lembrando que os babilônios tinham associado várias medidas numéricas às coisas que os cercavam, desde os movimentos nos céus até o valor de seus escravos, podemos perceber nesse lema uma forte afinidade com a Mesopotâmia. Mesmo o teorema, a que o nome de Pitágoras ainda está ligado, muito provavelmente veio dos babilônios. Sugeriu-se, como justificativa para chamá-lo teorema de Pitágoras, que foram os pitagóricos os primeiros a dar uma demonstração dele; mas não há meios de se verificar essa conjetura. As lendas de que Pitágoras sacrificou um boi (cem bois segundo outras versões) ao descobrir o teorema são implausíveis, tendo em vista as regras vegetarianas da escola. Além disso, são repetidas, com idêntica incredibilidade, em conexão com vários outros teoremas. É razoável supor que os membros mais antigos da escola pitagórica tinham familiaridade com propriedades geométricas conhecidas pelos babilônios; mas quando o sumário de Eudemo-Proclus lhes atribui a construção das "figuras cósmicas" (isto é, sólidos regulares) há lugar para dúvidas. O cubo, o octaedro e o dodecaedro podiam ter sido observados em cristais, como o da pirita (dissulfito de ferro); mas em *Os elementos* XIII está dito que os pitagóricos só conheciam três dos poliedros regulares: o tetraedro, o cubo e o dodecaedro. Conhecimento dessa última figura é plausível, dada a descoberta perto de Pádua de um dodecaedro de pedra etrusco datando de antes de 500 A. C. Não é improvável portanto que, mesmo que os pitagóricos não conhecessem o octaedro e o icosaedro, conhecessem algumas propriedades do pentágono regular. A estrela de cinco pontas (formada traçando as cinco diagonais de uma face pentagonal de um dodecaedro regular) era, ao que se diz, o símbolo especial da escola pitagórica. O pentágono estrelado tinha aparecido antes na arte babilônia, e é possível que aqui também tenhamos um elo de ligação entre a matemática pré-helênica e a pitagórica.

Uma das questões tantalizantes quanto à geometria pitagórica diz respeito à construção do pentagrama ou pentágono estrelado. Se começamos com um polígono regular $ABCDE$ (Fig. 4.1) e traçamos as cinco diagonais, essas diagonais se cortam em pontos $A'B'C'D'E'$, que formam outro pentágono regular. Observando que o triângulo BCD', por exemplo, é semelhante ao triângulo isósceles BCE e observando também os muitos pares de triângulos congruentes no diagrama, não é difícil ver que os pontos $A'B'C'D'E'$ dividem as diagonais de um modo notável. Cada um deles divide uma diagonal em dois segmentos desiguais, tais que a razão da diagonal toda para o maior é igual à deste para o menor. Essa subdivisão das diagonais é a bem conhecida "secção áurea" de um segmento, mas esse nome só foi usado uns dois mil anos depois — mais ou menos pela época em que Kepler escrevia liricamente:

> A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de jóia preciosa.

Para os gregos antigos esse tipo de subdivisão logo se tornou tão familiar que não se achava necessário ter um nome especial para ela; por isso a designação "divisão de um segmento em média e extrema razão" em geral é substituída simplesmente pela palavra "secção".

Uma das propriedades importantes da "secção" é que, por assim dizer, ela se autopropaga. Se um ponto P_1, divide um segmento RS (Fig. 4.2) em média e extrema razão, sendo RP_1 o segmento maior e se sobre esse segmento maior marcamos o ponto P_2 tal que $RP_2 = P_1S$, então o segmento RP_1 por sua vez ficará subdividido em média e extrema razão pelo ponto P_2. Novamente, se marcarmos em RP_2 o ponto P_3 tal que $RP_3 = P_2P_1$,

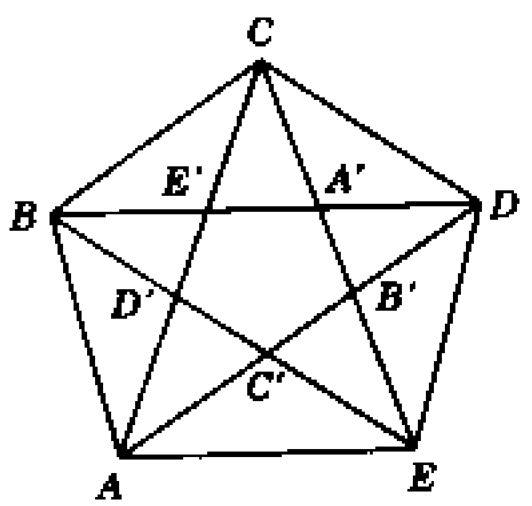


Figura 4.1

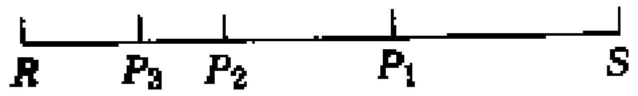


Figura 4.2

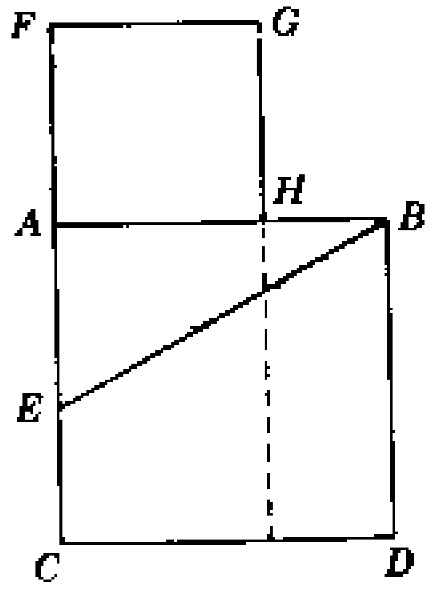


Figura 4.3

o segmento RP_2 ficará subdividido em média e extrema razão por P_3. Esse processo iterativo, é claro, pode ser repetido tantas vezes quanto se queira, obtendo-se segmentos RP_n cada vez menores divididos em média e extrema razão por P_{n+1}. Se os pitagóricos observaram ou não esse processo sem fim, ou dele tiraram conclusões significativas, não se sabe. Mesmo a questão mais fundamental de saber se os pitagóricos de cerca de 500 A. C. sabiam dividir um segmento em média e extrema razão não pode ser respondida com segurança, embora fosse muito provável que sim. A construção equivale à resolução de uma equação quadrática. Para mostrar isso, seja $RS = a$ e $RP_1 = x$ na Fig. 4.2. Então, pela propriedade da secção áurea $a:x = x:(a-x)$ e multiplicando médios e extremos temos a equação $x^2 = a^2 - ax$. Essa é uma equação quadrática do tipo 1 na classificação do Cap. 3, e Pitágoras podia ter aprendido dos babilônios como resolvê-la algebricamente. No entanto, se a é um número racional, não há um número x racional que satisfaça à equação. Teria Pitágoras percebido isso? Parece improvável. Talvez os pitagóricos tenham usado, em vez do método algébrico de resolução dos babilônios, um processo geométrico análogo ao que se encontra em *Os elementos* II, 11 e VI, 30 de Euclides. Para dividir um segmento de reta AB em média e extrema razão, Euclides construía primeiro sobre AB o quadrado $ABCD$ (Fig. 4.3). Então bissectava AC pelo ponto E, traçava EB e prolongava a reta CEA até F tal que $EF = EB$. Completado o quadrado $AFGH$ o ponto H será o ponto procurado, pois pode-se ver imediatamente que $AB:AH = AH:HB$. Se pudéssemos saber que tipo de solução, se é que tinham alguma, os pitagóricos adotavam para o problema da secção áurea, avançaríamos bastante no esclarecimento do nível e características da matemática pré-socrática. Se a matemática pitagórica começou sob a influência babilônia, com sua forte fé nos números, como (e quando) aconteceu que esta cedeu lugar à ênfase familiar sobre a geometria pura, que está tão firmemente instalada na posição central nos tratados clássicos?

5 Supõe-se usualmente que a maior parte do conteúdo dos dois primeiros livros de *Os elementos* é devida aos pitagóricos. Isso pressuporia um alto nível de realização, implicando em desenvolvimento bastante rápido do assunto depois dos dias de Tales e Pitágoras. Essa idéia exige fé no que se chamou "o milagre grego", pelo qual os relativamente iletrados recém-vindos à cena mediterrânea dominaram o material herdado de seus vizinhos e rapidamente subiram a novos cumes, estabelecendo de passagem o molde dedutivo essencial dos teoremas. Recentemente dúvidas sérias foram levantadas quanto a essa visão tradicional por aqueles que chamam a atenção para os conceitos aritméticos relativamente primitivos dos pitagóricos. Se, por exemplo, o mais importante matemático pitagórico do começo do quarto século A. C., Arquitas de Tarento (428-365 A. C.) podia afirmar que só a aritmética e não a geometria fornecia provas satisfatórias[6], não parece haver muita razão para atribuir o surgimento do método axiomático na geometria aos pitagóricos de um século ou dois antes. De outro lado, pode-se argüir que Arquitas representava somente um ponto de vista, insistindo na ortodoxa numerologia pitagórica que outros tinham abandonado ou modificado. Certamente tinha havido mudança de

[6]Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity*, p. 148

atitude na astronomia pitagórica, e podemos assumir que tivessem havido modificações comparáveis na matemática.

Misticismo sobre números não é criação dos pitagóricos. O número sete, por exemplo, era objeto de especial respeito, presumivelmente por causa das sete estrelas errantes, ou planetas, das quais a semana derivou. Os pitagóricos não eram os únicos a imaginar que os números ímpares tinham atributos masculinos e femininos os pares — com a concomitante crença (não destituída de preconceito), encontrada ainda em Shakespeare, de que "há divindade nos números ímpares". Muitas civilizações primitivas partilharam vários aspectos da numerologia, mas os pitagóricos levaram a extremos a adoração dos números, baseando neles sua filosofia e modo de viver. O número um, diziam eles, é o gerador dos números e o número da razão; o dois é o primeiro número par, ou feminino, o número da opinião; três é o primeiro número masculino verdadeiro, o da harmonia, sendo composto de unidade e diversidade; quatro é o número da justiça ou retribuição indicando o ajuste de contas; cinco é o número do casamento, união dos primeiros números verdadeiros feminino e masculino; e seis é o número da criação. Cada número por sua vez tinha seus atributos peculiares. O mais sagrado era o dez ou o *tetractys*, pois representava o número do universo, inclusive a soma de todas as possíveis dimensões geométricas. Um ponto gera as dimensões, dois pontos determinam uma reta de dimensão um, três pontos não alinhados determinam um triângulo com área de dimensão dois, e quatro pontos não coplanares determinam um tetraedro com volume de dimensão três; a soma dos números que representam todas as dimensões é, portanto, o adorado número dez. É um tributo à abstração da matemática pitagórica que a veneração do número dez evidentemente não era ditada pela anatomia da mão ou pé humanos.

6 Na Mesopotâmia a geometria não tinha sido muito mais do que uma aplicação dos números à extensão espacial; ao que parece, a princípio era mais ou menos o mesmo para os pitagóricos, mas com uma modificação. Número no Egito significava o domínio dos números naturais e frações unitárias; entre os babilônios o corpo das frações racionais. Na Grécia a palavra número era usada só para os inteiros. Uma fração não era considerada como um ente único mas como uma razão ou relação entre inteiros. (A matemática grega nos seus estágios iniciais freqüentemente chegou mais perto da matemática "moderna" de hoje do que da aritmética usual das gerações que nos precederam.) Como Euclides mais tarde o disse (*Os elementos* V, 3), "Uma razão é uma relação de tamanho entre grandezas de mesma espécie". Um tal ponto de vista, que focaliza a atenção sobre a conexão entre pares de números, tende a por em relevo os aspectos teóricos do conceito de número e a reduzir a ênfase no papel do número como instrumento de cálculo ou aproximação de medidas. A aritmética agora podia ser considerada uma disciplina intelectual, além de uma técnica, e a transição para esse ponto de vista parece ter sido feita na escola pitagórica. Se a tradição merece confiança, os pitagóricos não só fizeram da aritmética um ramo da filosofia; parecem ter feito dela uma base para a unificação de todos os aspectos do mundo que os rodeava. Por meio de configurações de pontos, ou unidades sem extensão, associavam números com extensão geométrica; isso por sua vez levou-os à aritmética celeste. Filolaus (morreu em 390 A. C. aproximadamente), um pitagórico posterior que partilhava da veneração pelo *tetractys* ou década, escreveu que ele era "grande, todo-poderoso e gerador de tudo, o começo e o guia da vida divina e terrestre"[7]. Essa visão do número dez como o perfeito, o símbolo da saúde e da harmonia, parece ter inspirado o primeiro sistema astronômico não geocêntrico. Filolaus postulou que no centro do universo havia um fogo central em torno do qual a terra e os sete planetas (o Sol e a Lua inclusive) giravam uniformemente. Como isso fazia chegar somente a nove o número de corpos celestes (além da esfera de estrelas fixas), o sistema de Filolaus assumia a exis-

[7]Para uma exposição particularmente ampla do pitagoreanismo ver Eduard Zeller, *A History of Greek Philosophy from the Earliest Period to the Time of Socrates* (1881), I. 306-533. Sobre o tetractys ver especialmente pp. 428 e seguintes. Uma descrição mais longa do papel do *tetractys* é dada em pp. 180-188 de Thomas Taylor, *The Theoretic Arithmetic of the Pythagoreans* (Los Angeles, EUA, 1934) mas esse livro deve ser lido com cautela

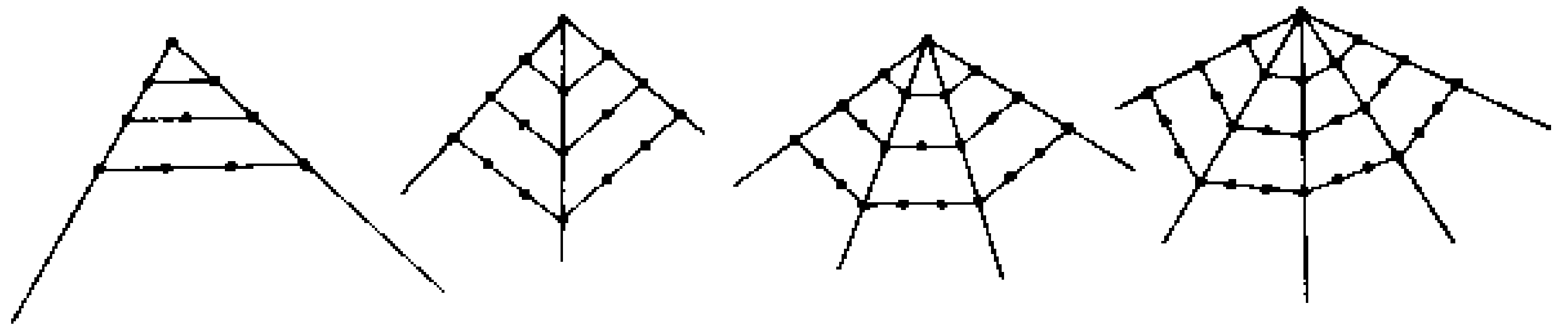


Figura 4.4

tência de um décimo corpo — uma "contraterra" colinear com a Terra em sua revolução diária em torno do fogo central. O Sol dava uma volta por ano em torno do fogo, e as estrelas fixas eram estacionárias. A Terra em seu movimento conservava sempre a mesma face não habitada voltada para o fogo central, por isso nem o fogo nem a contraterra eram jamais vistos. O postulado do movimento circular uniforme que os pitagóricos adotaram iria dominar o pensamento dos astrônomos por mais de 2 000 anos. Copérnico, quase 2 000 anos depois, aceitou-o sem discussão e era aos pitagóricos que Copérnico se reportava para mostrar que sua doutrina de uma Terra móvel não era tão nova ou revolucionária.

Quão completamente os pitagóricos fizeram entrar os números em suas idéias é bem ilustrado por sua preocupação com os números figurativos. Embora nenhum triângulo possa ser formado com menos de três pontos, é possível ter triângulos de maior número de pontos, como seis, dez, ou quinze (veja Fig. 4.4). Números como três, seis, dez, e quinze ou, em geral, números dados pela fórmula

$$N = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

eram chamados triangulares; e o desenho triangular para o número dez, o sagrado *tetractys*, competia com o pentágono quanto à veneração na teoria dos números pitagóricos. Havia, é claro, uma infinidade de outras categorias de números privilegiados. Números quadrados sucessivos são formados pela seqüência $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1)$, em que cada número impar por sua vez era considerado como uma configuração de pontos semelhante a um gnômon (o relógio de sombra babilônio) colocado em torno de dois lados da precedente configuração de pontos em forma de quadrado (veja Fig. 4.4). Daí o termo gnômon (aparentado à palavra para saber) veio a ser ligado aos próprios números impares. A seqüência de números pares, $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$, produz o que os gregos chamaram "números oblongos", cada um dos quais é o dobro de um número triangular. Configurações pentagonais de pontos ilustravam os números pentagonais dados pela seqüência

$$N = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2},$$

e os números hexagonais provinham da seqüência

$$1 + 5 + 9 + \ldots + (4n-3) = 2n^2 - n.$$

De modo semelhante eram designados números poligonais de todas as ordens; o processo naturalmente se estende facilmente ao espaço tridimensional, em que se lida com números poliedrais. Encorajado por essas idéias, Filolaus, ao que se conta, afirmou que

> Todas as coisas que podem ser conhecidas têm número; pois não é possível que sem número qualquer coisa possa ser concebida ou conhecida.

A frase de Filolaus parece ter sido artigo de fé da escola pitagórica, daí surgindo estórias sobre a descoberta, por Pitágoras, de algumas leis simples da música. Conta-se que Pitágoras observou que quando os comprimentos de cordas vibrantes podem ser expressos como razões de números inteiros simples, como dois para três (para a quinta) ou três para quatro (para a quarta), os tons serão harmoniosos. Em outras palavras, se uma corda produz a nota dó quando tocada, então uma semelhante com o dobro do

comprimento produzirá o dó uma oitava abaixo; e os tons entre essas notas são emitidos por cordas cujos comprimentos são dados por razões intermediárias: 16:9 para ré, 8:5 para mi, 3:2 para fá, 4:3 para sol, 6:5 para lá e 16:15 para si, em ordem ascendente. Aqui temos talvez as mais antigas leis quantitativas da acústica — talvez as mais antigas leis quantitativas da física. Tão audazmente imaginativos eram os pitagóricos antigos que eles extrapolaram apressadamente para concluir que os corpos celestes em seus movimentos também emitiam tons harmoniosos, a "harmonia das esferas". A ciência pitagórica, como a matemática pitagórica, parece ter sido uma estranha mistura de pensamento lúcido e fantástica especulação. A doutrina da terra esférica é freqüentemente atribuída a Pitágoras, mas não se sabe se essa conclusão[8] era baseada em observação (talvez de novas constelações quando Pitágoras viajava para o sul) ou em imaginação. A própria idéia de que o universo é um "cosmos", ou todo harmoniosamente ordenado, parece ser uma contribuição pitagórica relacionada com essas idéias — uma idéia que na época tinha pouca base de observação direta mas que foi enormemente frutífera no desenvolvimento da astronomia. Quando sorrimos das fantasias numéricas dos antigos devemos também lembrar-nos do impulso que deram ao desenvolvimento tanto da matemática quanto da ciência. Os pitagóricos foram dos primeiros a acreditar que as operações da natureza podiam ser entendidas por meio da matemática.

8 Proclus, talvez citando Eudemo, atribuiu a Pitágoras duas descobertas matemáticas específicas: (1) a construção dos sólidos regulares e (2) a teoria das proporcionais. Embora haja dúvida sobre até que ponto isso deve ser tomado literalmente, há forte probabilidade de que a afirmação esteja de acordo com a direção do pensamento pitagórico. A teoria das proporções claramente se ajusta ao esquema de interesses matemáticos dos gregos antigos, e não é difícil achar uma provável fonte de inspiração. Conta-se que Pitágoras soube na Mesopotâmia das três médias aritmética, geométrica e a subcontrária (mais tarde chamada harmônica) — e da "proporção áurea" que relaciona duas delas: o primeiro de dois números está para sua média aritmética como a média harmônica está para o segundo número. Essa relação é a essência do algoritmo babilônio para extração de raiz quadrada, portanto o relato é ao menos plausível. Em algum momento, porém os pitagóricos generalizaram esse trabalho acrescentando sete novas médias para perfazer dez ao todo. Se b é a média de a e c, onde $a < c$ então as três quantidades estão relacionadas por uma das equações seguintes

$$\begin{array}{llll}
(1) & \dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{a}; & (6) & \dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{c}{b}; \\[2ex]
(2) & \dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{b}; & (7) & \dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{c}{a}; \\[2ex]
(3) & \dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{c}; & (8) & \dfrac{c-a}{c-b} = \dfrac{c}{a}; \\[2ex]
(4) & \dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{c}{a}; & (9) & \dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{b}{a}; \\[2ex]
(5) & \dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{b}{a}; & (10) & \dfrac{c-a}{c-b} = \dfrac{b}{a}.
\end{array}$$

As três primeiras equações são, naturalmente, as equações para as médias aritmética, geométrica e harmônica respectivamente.

É difícil atribuir uma data ao estudo pitagórico das médias, e problemas semelhantes surgem a propósito da classificação dos números. O estudo das proporções ou da igualdade de razões presumivelmente formava de início uma parte da aritmética ou teoria dos

[8] A tradição que atribui o conceito de terra esférica aos pitagóricos foi questionada. Ver W. A. Heidel, *The Frame of the Ancient Greek Maps with a Discussion of the Sphericity of the Earth* (New York: Amer. Geog. Soc., 1937)

números pitagórica. Mais tarde as quantidades *a*, *b* e *c* que entravam em tais proporções seriam provavelmente olhadas como grandezas geométricas; mas o período em que teve lugar essa mudança não é claro. Além dos números poligonais mencionados acima e da distinção entre ímpares e pares, os pitagóricos começaram em dado momento a falar em número ímpar-ímpar ou par-ímpar, conforme fosse o produto de dois números ímpares ou de um ímpar e um par, de modo que às vezes o termo par era reservado às potências inteiras de dois. Pelo tempo de Filolaus a distinção entre números primos e compostos parece ter-se tornado importante. Espeusipus, sobrinho de Platão e seu sucessor como chefe da Academia, afirmava que dez era "perfeito" para os pitagóricos porque, entre outras coisas, é o menor inteiro n para o qual há exatamente tantos primos entre 1 e n quanto não-primos. (Ocasionalmente os números primos eram chamados lineares por serem usualmente representados por pontos em uma dimensão apenas.) Os neopitagóricos às vezes excluíam o dois da lista dos primos dizendo que um e dois não são números verdadeiros, mas geradores de números ímpares e pares. A supremacia dos ímpares era considerada provada pelo fato de ímpar + ímpar ser par, enquanto que par + par permanece par.

Tem sido atribuída aos pitagóricos a regra para triadas pitagóricas dadas por $(m^2-1)/2$, m, $(m^2+1)/2$, onde m é um inteiro ímpar; mas como essa regra se relaciona de perto com os exemplos babilônios, talvez não seja uma descoberta independente. Também são atribuídas aos pitagóricos, com dúvidas quanto ao período em questão, as definições de números perfeitos abundantes e deficientes, conforme a soma dos divisores próprios do número seja igual a, maior que ou menor que o número em questão. Segundo essa definição, seis é o menor número perfeito, vinte e oito vindo em seguida. Que isso seja provavelmente um desenvolvimento mais tardio no pensamento pitagórico é sugerido pela veneração do dez em lugar do seis. Por isso a doutrina aparentada dos números "amigáveis" é também provavelmente uma noção posterior. Dois inteiros *a* e *b* se dizem "amigáveis" se *a* é a soma dos divisores próprios de *b* e *b* a dos divisores próprios de *a*. O menor tal par é o dos inteiros 220 e 284.

O quadro da matemática pitagórica que apresentamos baseia-se principalmente em relatos de comentadores que viveram muitos séculos depois e que estavam, quase sem exceção, interessados em aspectos filosóficos do pensamento. Embora pareça plausível supor, com os comentadores, que os pitagóricos foram responsáveis em grande parte pela visão abstrata que fez da matemática uma disciplina intelectual, o nível de sofisticação durante o sexto e o quinto séculos A. C. pode não ter sido tão alto quanto diz a tradição. Deve ter sido uma tentação para os seguidores posteriores de uma escola filosófica, como a pitagórica, exagerar as realizações do fundador e dos primeiros membros da seita. É muito provável que elementos de primitivismo estivessem presentes, durante os primeiros estágios do pitagorismo, mas não fossem relatados. É evidente também que o tipo de atitude, quanto à matemática, representado pelos pitagóricos era quase certamente atípico do pensamento grego no todo. Os helenos eram famosos como negociantes astutos e deve ter havido um nível inferior de aritmética ou computação que satisfazia às necessidades da vasta maioria dos gregos. Atividades numéricas desse nível não mereceriam a atenção dos filósofos e registros de aritmética prática não apareceriam nas bibliotecas dos estudiosos. Portanto, se nem fragmentos restam das obras mais sofisticadas dos pitagóricos, é claro que não é razoável esperar que manuais de aritmética comercial sobrevivessem aos estragos do tempo. Por isso não é possível dizer como os processos comuns da aritmética eram efetuados na Grécia de há 2 500 anos. O melhor que se pode fazer é descrever os sistemas de numeração que parecem ter estado em uso.

De modo geral, parecem ter existido dois sistemas principais de numeração na Grécia: um, provavelmente o mais antigo, é conhecido como notação ática (ou herodiânica); o outro é chamado sistema jônio (ou alfabético). Ambos, quanto aos inteiros, são em base dez, mas o primeiro é mais primitivo, sendo baseado num simples esquema de iteração como o encontrado na numeração hieroglífica primitiva do Egito e depois nos numerais romanos. No sistema ático os números de um a quatro eram representados por riscos verticais repetidos. Para o número cinco adotou-se um novo símbolo — a primeira letra Π (ou Γ) da palavra para cinco, *pente*. (Só maiúsculas eram usadas na época, tanto em obras literárias como na matemática, as letras minúsculas sendo uma invenção do período antigo final ou medieval inicial.) Para números de seis a nove, o sistema ático combinava o símbolo Γ com riscos unitários, de modo que oito, por exemplo, era escrito ΓIII. Para potências inteiras positivas da base (dez), as letras iniciais das palavras correspondentes eram usadas — Δ para *deka* (dez), H para *hekaton* (cem), X para *khilioi* (mil), e M para *myrioi* (dez mil). Exceto quanto à forma dos símbolos, o sistema ático se parecia com o romano; mas tinha uma vantagem. Ao passo que o mundo latino adotou símbolos distintos para 50 e 500, os gregos escreviam esses números combinando as letras para 5, 10 e 100, usando 𐅄 (ou 5 vezes 10) para 50, e 𐅅 (ou 5 vezes 100) para 500. Da mesma forma escreviam 𐅆 para 5 000 e 𐅇 para 50 000. Na escrita ática o número 45.678, por exemplo, apareceria como

MMMM𐅆𐅅H𐅄ΔΔΓIII

10 O sistema ático (conhecido também como herodiano por estar descrito num fragmento atribuído a Herodian, um gramático do segundo século) aparece em inscrições de várias datas de 454 a 95 A. C.[9], mas pelo início da Idade Alexandrina, mais ou menos ao tempo do Ptolomeu Filadelfo, foi sendo substituído pelos numerais, iônios ou alfabéticos. Esquemas alfabéticos semelhantes foram usados em várias épocas por povos semíticos, hebreus, sírios, aramaicos e árabes entre outros — bem como por outras culturas, como a gótica, mas ao que parece foram emprestados da notação grega. O sistema jônio provavelmente começou a ser usado desde o quinto século A. C., talvez desde o oitavo século A. C. Uma razão para colocar a origem da notação relativamente cedo é que o esquema usava vinte e sete letras do alfabeto — nove para os inteiros menores que 10, nove para os múltiplos de 10 inferiores a 100 e nove para os múltiplos de 100 inferiores a 1 000. O alfabeto grego clássico contém somente vinte e quatro letras; por isso foi usado um alfabeto mais antigo que incluia três letras adicionais arcaicas — F (vau ou digama ou stigma) ϙ (koppa) e ϡ (sampi) — para estabelecer a seguinte associação entre letras e números.

A	B	Γ	Δ	E	F	Z	H	Θ	I	K	Λ	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
Ξ	O	Π	ϙ	P	Σ	T	Υ	Φ	X	Ψ	Ω	ϡ	
60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	

Como as três letras arcaicas ocupam as posições no esquema de numeração que tinham no alfabeto mais antigo, sugeriu-se que a notação jônia foi introduzida antes que as três letras fossem abandonadas — digamos no oitavo século A. C.; essa sugestão se torna menos convincente quando consideramos o longo intervalo de tempo entre a suposta introdução e o triunfo final do sistema no terceiro século A. C.[10] A vantagem evidente da concisão do sistema alfabético deveria levar a uma aceitação mais rápida do sistema do que o intervalo indicado de meio milênio. A numeração jônia tem a mesma relação com a ática que a hierática egípcia com a hieroglífica, e a superioridade da escrita cursiva sobre a hieroglífica, mais desajeitada, tinha sido evidente para os escribas.

Após a introdução das minúsculas na Grécia, a associação entre letras e números ficou

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
ξ	ο	π	ϙ	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ	
60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	

[9] Ver Heath, obra citada, I, 30. Veja também James Gow, *A Short History of Greek Mathematics* (Cambridge, 1884)

[10] Para outras discussões e referências, ver C. B. Boyer, "Fundamental Steps in the Development of Numeration", *Isis* 35 (1944) 153-168

Como essas formas são mais familiares hoje, nós as usaremos aqui. Para os primeiros nove múltiplos de mil o sistema jônio adotou as primeiras nove letras do alfabeto, um uso parcial do princípio posicional; mas para maior clareza essas letras eram precedidas por um risco ou acento

,α	,β	,γ	,δ	,ε	,ς	,ζ	,η	,θ
1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000	9 000

Dentro desse sistema qualquer número inferior a 10 000 podia ser escrito facilmente com apenas quatro símbolos. O número 8 888, por exemplo, apareceria como, ,ηωπη ou como ηωπη, com o acento às vezes omitido, quando o contexto fosse claro. O uso das mesmas letras para milhares e para unidades deveria ter sugerido aos gregos o completo esquema posicional na aritmética decimal, mas não parece que eles tenham percebido as vantagens de uma tal idéia. Que tinham mais ou menos em mente um tal princípio é evidente não só pelo uso das letras de α a θ para unidades e milheiros, mas também pelo fato de serem os símbolos dispostos em ordem de grandeza, do menor à direita ao maior à esquerda. Ao chegar a 10 000, que para os gregos era o início de uma nova contagem ou categoria (assim como nós freqüentemente separamos os milhares das potências menores por um ponto), a notação jônia adotava um princípio multiplicativo. Um símbolo para um inteiro de 1 a 9 999, quando colocado acima da letra M, ou depois dela, separado do resto do número por um ponto, indicava o produto do inteiro pelo número 10 000 — a miríade grega. Assim o número 88 888 888 apareceria como M,ηωπη· ηωπη. Se aparecessem números ainda maiores, o mesmo princípio seria aplicado à dupla miríade, 100 000 000 ou 10^8.

As notações gregas primitivas para os inteiros não eram excessivamente incômodas e serviam bem aos seus objetivos. Era no uso de frações que o sistema era fraco. Como os egípcios, os gregos se sentiram tentados a usar frações unitárias, e para estas tinham uma representação simples. Escreviam o denominador e depois simplesmente o seguiam de um sinal diacrítico ou acento para distingui-lo do inteiro correspondente. Assim 1/34 se escreveria λδ'. Isso, é claro, podia ser confundido com o número 30 1/4, mas podia-se supor que o contexto ou palavras explicativas, esclarecessem a situação. Em séculos posteriores frações comuns gerais e frações sexagesimais passaram a ser usadas; serão discutidas adiante em conexão com a obra de Arquimedes, Ptolomeu e Diofante, pois existem documentos que, se não datam do tempo desses homens, são cópias de obras escritas por eles — uma situação muito diferente da referente aos matemáticos do período helênico.

A história da matemática durante o tempo de Tales e dos pitagóricos depende necessariamente, em grau indesejável, de conjeturas e inferências, pois faltam inteiramente documentos da época. Há muito mais incerteza quanto à matemática grega de 600 A. C. a 450 A. C. do que acerca da álgebra babilônia ou da geometria egípcia de cerca de 1 700 A. C. Nem mesmo artefatos matemáticos dos primeiros tempos da Grécia se preservavam. É evidente que algum tipo de ábaco era usado nos cálculos, mas a natureza e a maneira de operar de tal ábaco devem ser inferidas do ábaco romano e de algumas referências casuais em autores gregos. Heródoto, escrevendo no começo do quinto século A. C. diz que, ao contar com pedrinhas, a mão dos gregos ia da esquerda para a direita e a dos egípcios da direita para a esquerda. Um vaso de um período um pouco posterior mostra um coletor de tributos com um ábaco que era usado não só para múltiplos decimais inteiros do dracma mas para subdivisões não decimais. Começando da esquerda, as colunas designam miríades, milhares, centenas e dezenas de dracmas, respectivamente, sendo os símbolos expressos em notação herodiana. Depois, seguindo a coluna de unidades para dracmas, há colunas para abdos (seis abdos = um dracma), para meio abdo, e quarto de abdo. Aqui vemos como as civilizações antigas evitaram o uso excessivo de frações: simplesmente subdividiam as unidades de comprimento, peso e dinheiro tão eficazmente que podiam calcular em termos de múltiplos inteiros das subdivisões. Essa é sem dúvida a explicação da popularidade, na antiguidade, das subdivisões duodecimais e sexagesimais, pois o sistema decimal aqui fica em forte desvantagem. Frações decimais

eram raramente usadas, seja pelos gregos seja por outros povos do Ocidente, antes do período da Renascença. O ábaco pode facilmente ser adaptado a qualquer sistema de numeração ou qualquer combinação de sistemas; é provável que o uso amplamente difundido do ábaco explique ao menos em parte o desenvolvimento estranhamente tardio de uma notação posicional consistente para inteiros e frações. Quanto a isso, a Idade Pitagórica pouco ou nada contribuiu. A visão dos pitagóricos parece ter sido tão completamente abstrata e filosófica que detalhes técnicos de computação não tinham importância nenhuma para eles. Tais técnicas eram relegadas a uma disciplina à parte, chamada logística. Essa tratava da enumeração das coisas, em vez da essência e propriedades do número em si, questões que pertenciam à aritmética. Isto é, os gregos antigos fizeram uma distinção clara entre simples cálculo de um lado e o que hoje se chama teoria dos números do outro. Se uma distinção tão nítida foi ou não uma desvantagem para o desenvolvimento histórico da matemática pode ser discutível, mas não é fácil negar aos matemáticos jônios e pitagóricos antigos o papel primordial para o estabelecimento da matemática como uma disciplina racional. É por isso que Tales é freqüentemente chamado o primeiro matemático, e que Pitágoras, é conhecido como o pai da matemática. A extensão em que aceitaremos tais apelações literalmente, em vista da falta de provas documentárias, dependerá de nossa confiança na tradição. É evidente que a tradição pode ser muito inexata, mas é raro ser totalmente mal orientada.

BIBLIOGRAFIA

Allman, G. J., *Greek Geometry from Thales to Euclid* (Dublin: Dublin University Press, 1889)

Clagett, Marshall, *Greek Science in Antiquity* (New York: Abelard-Schuman, cerca de 1955; 2.ª edição em brochura, New York: Collier, 1966)

Dantzig, Tobias, *The Bequest of the Greeks* (New York: Scribner's, 1955)

Freeman, Kathleen, *Ancilla to the Pre-Socratic Philosophers* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948)

Gow, James, *A Short History of Greek Mathematics* (reimpressão, New York: Hafner, 1923)

Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon, 1921, 2 vols.)

Heath, T. L., *Manual of Greek Mathematics* (New York: Oxford University Press, 1931; edição em brochura, New York: Dover, 1963)

Loria, Gino, *Historie des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique* (Paris: Gauthier-Villars, 1929)

Michel, Paul-Henri, *De Pythagore à Euclide* (Paris, 1950)

Neugebauer, O., *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª edição (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957; edição em brochura, New York: Harper)

Tannery, Paul, *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons* (Paris, 1887)

Thomas, Ivor, ed., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (2 vols., Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1939-1941)

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, traduzido por Arnold Dresden (New York: Oxford University Press, 1961; edição em brochura, New York: Wiley, 1963)

Zeller, Eduard: *A History of Greek Philosophy from the Earliest Period to the Time of Socrates*, traduzido por S. F. Alleyne (Londres: Longmans, Green, 1881, 2 volumes)

EXERCÍCIOS

1. Prove dois teoremas atribuídos a Tales e diga, justificando, se acha ou não que ele possa ter usado raciocínio semelhante.

2. Prove o teorema de Pitágoras. Acha que Pitágoras usou seu método? Explique.

3. Teon de Smirna, um neoplatonista e neopitagórico do segundo século descobriu, ao que se diz, que a soma de dois números triangulares consecutivos é um quadrado. Prove esse teorema.

4. Quais são os quatro primeiros números heptagonais (correspondendo a polígonos regulares de sete lados)?

5. Escreva os números 3 456 e 4 567 e sua soma na notação ática primitiva e no sistema jônio ou alfabético.

6. Prove que se três números a, b, c estão em progressão aritmética nessa ordem e se A, B, C são seus recíprocos respectivamente, então B é a média harmônica de A e C.

7. Filolaus chamou o cubo uma "harmonia geométrica", por causa do número de suas faces, arestas e vértices. Justifique essa designação, à luz da teoria pitagórica das proporções.

8. Mostre que 1 184 e 1 210 são números amigáveis.

9. Mostre, à maneira dos pitagóricos, que um número oblongo é a soma de dois números triangulares iguais.

10. Prove cuidadosamente que as diagonais de um pentágono se dividem mutuamente em média e extrema razão.

11. Usando régua e compasso apenas, construa um pentágono regular, sendo dado o seu lado.

12. Usando régua e compasso apenas, construa um pentágono regular, sendo dada uma diagonal.

13. Num círculo dado inscreva um pentágono regular usando apenas régua e compasso.

14. Todos os números poligonais são da forma $P_m = an^2 + bn$ onde m é o número de lados e n é a ordem. Usando esse fato, ache a e b para os números octogonais ($m = 8$) e verifique geometricamente para $n = 3$.

15. Ache o quinto número pentagonal e o sexto hexagonal.

16. 4 567 é um número heptagonal? Justifique sua resposta.

17. Mostre que se $a > b > c$, as três equações

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}, \quad \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$$

definem b respectivamente como média aritmética, geométrica e harmônica de a e c.

*18. Todos os números poliedrais são da forma $P_m = an^3 + bn + c$, onde m é o número de faces e n a ordem. Use esse fato para achar a e b e c para os números tetraedrais ($m = 4$) e verifique geometricamente para $n = 4$.

*19. Números poliedrais podem ser calculados somando números poligonais sucessivos de mesmo tipo. Mostre como generalizar o processo para definir números politópicos no espaço n-dimensional e ache três números politópicos não-triviais.

Capítulo 5

A Idade Heróica

Eu preferia descobrir uma causa a ganhar o reino da Pérsia

Demócrito

1 Os relatos sobre as origens da matemática grega se concentram nas chamadas escolas jônia e pitagórica e no representante principal de cada uma — Tales e Pitágoras — embora as reconstruções de seu pensamento se baseiem em narrações fragmentárias e tradições elaboradas nos séculos posteriores. Até certo ponto essa situação permanece durante todo o quinto século A. C. Praticamente não existem documentos matemáticos ou científicos até os dias de Platão no quarto século A. C. No entanto, durante a segunda metade do quinto século circularam relatos persistentes e consistentes sobre um punhado de matemáticos que evidentemente estavam intensamente preocupados com problemas que formaram a base da maior parte dos desenvolvimentos posteriores na geometria. Por isso, chamaremos esse período a "Idade Heróica da Matemática", pois raramente, antes ou depois, homens com tão poucos recursos atacaram problemas de tal significado matemático. A atividade matemática já não se centrava quase inteiramente em duas regiões quase em extremidades opostas do mundo grego; floresceu à volta do Mediterrâneo todo. No que agora é o sul da Itália havia Arquitas de Tarento (nasceu em 428 A. C. aproximadamente) e Hipasus de Metapontum (viveu por volta de 400 A.C.); em Abdera na Trácia achamos Demócrito (nasceu em 460 A. C. aproximadamente); mais perto do centro do mundo grego, na peninsula ática, havia Hípias de Elis (nasceu em 460 A. C. aproximadamente), e em Atenas viveram em tempos diferentes durante a segunda metade, a crítica, do quinto século A. C., três matemáticos de outras regiões: Hipócrates de Chios (viveu por volta de 430 A. C.), Anaxágoras de Clazomene (morreu em 428 A. C.), e Zeno de Eléa (viveu por volta de 450 A. C.). Através da obra desses sete homens descreveremos as mudanças fundamentais por que passou a matemática um passo antes do ano 400 A. C.

2 O quinto século A. C. foi um período crucial na história da civilização ocidental, pois iniciou-se com a derrota dos invasores persas e terminou com a rendição de Atenas a Esparta. Entre esses dois acontecimentos situa-se a grande Idade de Péricles, com suas realizações na literatura e na arte. A prosperidade e a atmosfera intelectual de Atenas durante esse século atraíram estudiosos de todas as partes do mundo grego, e uma síntese de vários aspectos foi conseguida. Da Jônia vieram homens como Anaxágoras, de espírito prático; do sul da Itália vieram outros, como Zeno, com inclinações metafísicas mais fortes. Demócrito de Abdera defendeu uma visão materialista do mundo, enquanto que Pitágoras, na Itália, sustentava atitudes idealistas na ciência e na filosofia. Em Atenas encontravam-se devotos entusiastas de antigos e novos ramos do conhecimento, da cosmologia à ética. Havia um ousado espírito de livre investigação, que às vezes entrava em conflito com os usos estabelecidos. Em particular, Anaxágoras foi preso em Atenas por impiedade, ao assegurar que o Sol não era uma divindade, mas uma grande pedra incandescente, grande como todo o Peloponeso, e que a Lua era uma terra habitada que emprestava do Sol a sua luz. Representa bem o espírito de pesquisa racional, pois considerava como objetivo de sua vida o estudo da natureza do universo, uma decisão que nele derivava da tradição iônia de que Tales fora um dos fundadores. O entusiasmo intelectual de Anaxágoras foi compartilhado com seus compatriotas através do primeiro ***best-seller*** científico — um livro *Sobre a natureza* que podia ser comprado em Atenas por apenas uma dracma. Anaxágoras foi professor de Péricles que fez com que seu mentor fosse afinal libertado da prisão. Sócrates foi, a princípio, atraído pelas idéias científicas

de Anaxágoras, mas o provocador de Atenas achou o ponto de vista naturalístico menos satisfatório que a busca de verdades éticas.

A ciência grega tinha raízes numa curiosidade altamente intelectual que é freqüentemente contrastada com o utilitarismo imediatista do pensamento pré-helênico; Anaxágoras claramente representava o motivo grego típico — o desejo de saber. Na matemática também a atitude grega diferia fortemente da das culturas potâmicas anteriores. O contraste era claro já nas contribuições geralmente atribuídas a Tales e Pitágoras, e continuou aparente nos relatos, mais dignos de confiança, sobre o que se passou em Atenas durante a Idade Heróica. Anaxágoras era primariamente um filósofo da natureza mais do que um matemático, mas sua mente inquiridora levou-o a tomar parte na investigação de questões matemáticas. Conta-nos Plutarco que, enquanto Anaxágoras esteve preso, ocupou-se com uma tentativa de quadrar o círculo. Aqui temos a primeira menção de um problema que iria fascinar os matemáticos por mais de 2 000 anos[1]. Não há outros detalhes quanto à natureza do problema ou as regras que o condicionam. Mais tarde ficou entendido que o quadrado procurado de área exatamente igual à do círculo, deveria ser construído só com régua e compasso. Aqui vemos um tipo de matemática muito diferente da dos egípcios e babilônios. Não se trata de aplicação prática de uma ciência de números a um aspecto da experiência comum, mas de uma questão teórica envolvendo uma distinção clara entre bom grau de aproximação e exatidão de pensamento. O problema matemático que Anaxágoras atacou era de tão pouco interesse para um tecnologista quanto os que ele levantou em relação à estrutura da matéria. No mundo grego a matemática era aparentada mais de perto à filosofia que a negócios práticos, e esse parentesco permaneceu até hoje.

Anaxágoras faleceu em 428 A. C., o ano em que nasceu Arquitas, um ano antes do nascimento de Platão e um ano antes da morte de Péricles. Diz-se que Péricles morreu da peste que matou talvez um quarto da população de Atenas, e que a profunda impressão criada por esta catástrofe talvez tenha originado um segundo problema matemático famoso. Diz-se que uma delegação fora enviada ao oráculo de Apolo em Delos para perguntar como a peste poderia ser combatida e que o oráculo respondeu que o altar de Apolo, cúbico, deveria ser duplicado. Os Atenienses, ao que se diz, obedientemente dobraram as dimensões do altar, mas isto não adiantou para afastar a peste. É claro, o altar tivera seu volume multiplicado por oito e não por dois. Essa, diz a lenda, era a origem do problema da "duplicação do cubo", que a partir daí foi geralmente designado como "problema deliano" — dada a aresta de um cubo, construir só com régua e compasso a aresta de um segundo cubo tendo o dobro do volume do primeiro. Mais ou menos na mesma época circulava em Atenas um terceiro problema célebre — dado um ângulo arbitrário, construir por meio de régua e compasso apenas um ângulo igual a um terço do ângulo dado. Esses três problemas — quadratura do círculo, duplicação do cubo, trissecção do ângulo — são conhecidos daí então como os "três problemas famosos (ou clássicos)" da antiguidade. Mais de 2 200 anos depois seria provado que todos os três são impossíveis de resolver só com régua e compasso. No entanto, a maior parte da matemática grega e muito da investigação matemática posterior, foi motivada por esforços para conseguir o impossível — ou, à falta disso, para modificar as regras. A Idade Heróica fracassou em seu objetivo imediato, sob as regras, mas seus esforços foram coroados por brilhante sucesso em outros pontos.

Um pouco mais jovem que Anaxágoras, e proveniente da mesma parte da Grécia aproximadamente, era Hipócrates de Chios. Não deve ser confundido com seu contemporâneo ainda mais famoso o médico Hipócrates de Cos. Tanto Cos como Chios são ilhas do grupo do Dodecaneso; mas Hipócrates de Chios, em 430 A. C. aproximadamente, deixou sua terra natal por Atenas, na qualidade de mercador. Aristóteles conta que Hipócrates era menos astuto que Tales e que perdeu seu dinheiro em Bizâncio por fraude; outros dizem que foi atacado por piratas. De qualquer modo, o incidente nunca foi lamentado por sua vítima, pois considerava que isso foi sua sorte já que, em conseqüência ele se voltou para o estudo da geometria, em que conseguiu notável sucesso — uma estória típica da Idade Heróica. Proclus escreveu que Hipócrates compôs uma obra *Elementos da geometria*, antecipando-se por mais de um século à mais conhecida *Os elementos* de Euclides. No entanto, o texto de Hipócrates — bem como outro que se diz ter sido escrito por Leon, da escola platônica — se perdeu, embora Aristóteles o tenha conhecido. Na verdade, nenhum tratado matemático do quinto século se conservou; mas temos um fragmento referente a Hipócrates, que Simplício (viveu por volta de 520) diz ter copiado literalmente da *História da matemática* (hoje perdida) de Eudemo. Essa breve menção, o que de mais próximo temos de uma fonte original sobre a matemática do tempo, descreve uma parte da obra de Hipócrates que trata da quadratura de lunas. Uma luna é uma figura limitada por dois arcos circulares de raios diferentes; o problema de sua quadratura certamente se originou do da quadratura do círculo. O fragmento atribui a Hipócrates o teorema seguinte.

[1]Veja E. W. Hobson, *Squaring the Circle* (por volta de 1913), p. 14. Essa obra foi várias vezes reimpressa. A veracidade da afirmação de Plutarco foi questionada recentemente. Sobre a obra de Anaxágoras, veja D. E. Gershenson e D. A. Greenberg, *Anaxagoras and the Birth of Physics* (New York: Blaisdell, 1964)

Segmentos de círculo semelhantes estão na mesma razão que os quadrados de suas bases.

O relato de Eudemo diz que Hipócrates provou isso, mostrando primeiro que as áreas dos círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros. Aqui Hipócrates usa a linguagem e conceito de proporção que desempenhou papel tão grande no pensamento pitagórico. Na verdade alguns pensam que Hipócrates se tornou um pitagórico. A escola pitagórica de Crotona fora suprimida (talvez por causa de seu caráter secreto, talvez por causa de suas tendências políticas conservadoras), mas o fato de seus adeptos se espalharem pelo mundo grego servia simplesmente para ampliar a influência da escola. Essa influência certamente foi sentida, direta ou indiretamente, por Hipócrates.

O teorema de Hipócrates sobre as áreas de círculos parece ser o mais antigo enunciado sobre mensuração curvilínea no mundo grego. Eudemo acreditava que Hipócrates tinha dado uma prova do teorema, mas uma demonstração rigorosa parece improvável nessa época (digamos 430 A. C.). A teoria das proporções provavelmente estava feita só para grandezas comparáveis. A prova dada em Euclides XII, 2 provém de Eudoxos, que viveu numa época intermediária entre o tempo de Hipócrates e o de Euclides. No entanto, assim como muito do conteúdo dos primeiros dois livros de Euclides parece provir dos pitagóricos, também parece razoável supor que ao menos as formulações de muito do que está nos livros III e IV de *Os elementos* provinham da obra de Hipócrates. Além disso, se Hipócrates de fato deu prova de seu teorema sobre áreas de círculos, ele pode ter sido quem introduziu na matemática o método indireto de demonstração. Isto é, a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão dos quadrados de seus diâmetros, ou não é. Por *reductio ad absurdum* a partir da segunda possibilidade, prova-se a única alternativa.

Desse teorema Hipócrates deduziu a primeira quadratura rigorosa de uma área curvilínea, da história da matemática. Começou com um semicírculo circunscrito a um triângulo isósceles retângulo e sobre a base (hipotenusa) construiu um segmento semelhante aos segmentos circulares sobre os lados do triângulo (Fig. 5.1). Como os segmentos estão entre si como os quadrados de suas bases, resulta, usando o teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo, que a soma dos dois segmentos circulares menores é igual ao segmento maior. Portanto, a diferença entre o semicírculo sobre AC e o segmento $ADCE$ é igual ao triângulo ABC. Logo a luna $ABCD$ é exatamente igual ao triângulo ABC; como o triângulo ABC é igual ao quadrado sobre a metade de AC, conseguiu-se a quadratura da luna[2].

Eudemo descreve também uma quadratura de lunas de Hipócrates baseada num trapézio isósceles $ABCD$ inscrito num círculo de modo que o quadrado sobre o lado maior (base) AD seja igual à soma dos quadrados sobre os três lados menores iguais AB e BC e CD (Fig. 5.2). Então se construirmos sobre AD um segmento circular $AEDF$ semelhante aos que estão sobre os três lados iguais, a luna $ABCDE$ é igual ao trapézio $ABCDF$.

[2]Uma excelente exposição das quadraturas de Hipócrates encontra-se em B. L. van der Waerden, *Science Awakening* (1961), pp. 131 e seguintes

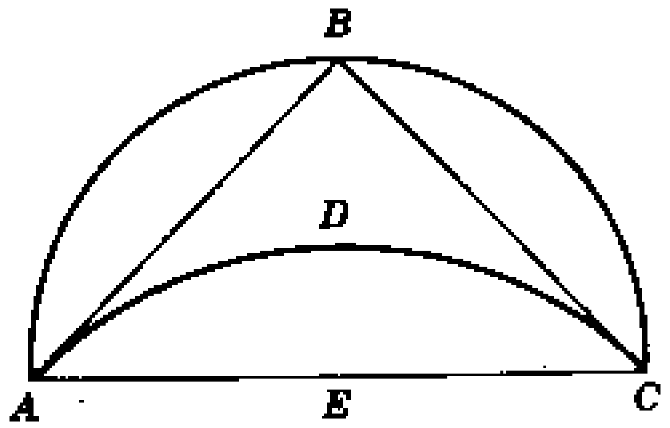


Figura 5.1

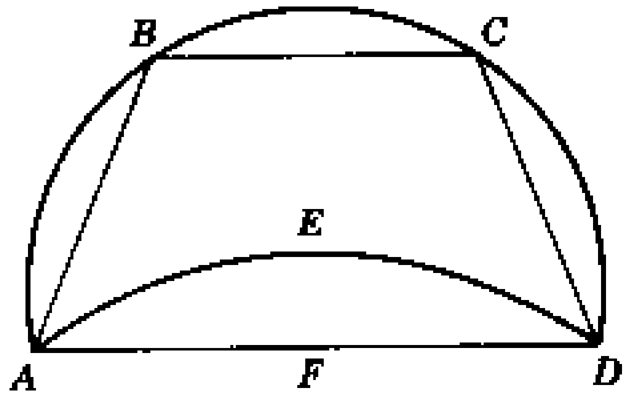


Figura 5.2

O fato de que outros estudiosos, além de Simplicius, também se referem a esse trabalho indica que estamos sobre terreno firme, historicamente falando, ao descrever a quadratura de lunas de Hipócrates. Simplicius viveu no sexto século, mas apoiou-se não só em Eudemo (viveu por volta de 320 A. C.), mas também em Alexandre de Afrodisias (viveu por volta de 200 D. C.) um dos mais importantes comentadores de Aristóteles. Alexandre descreve duas quadraturas além das mencionadas acima. (1) Se construirmos semicírculos sobre a hipotenusa e lados de um triângulo retângulo isósceles (Fig. 5.3), então as lunas criadas sobre os lados menores juntas igualam o triângulo. (2) Se sobre o diâmetro de um semicírculo construirmos um trapézio com três lados iguais (Fig. 5.4) e se sobre os três lados iguais construirmos três semicírculos, então a área do trapézio

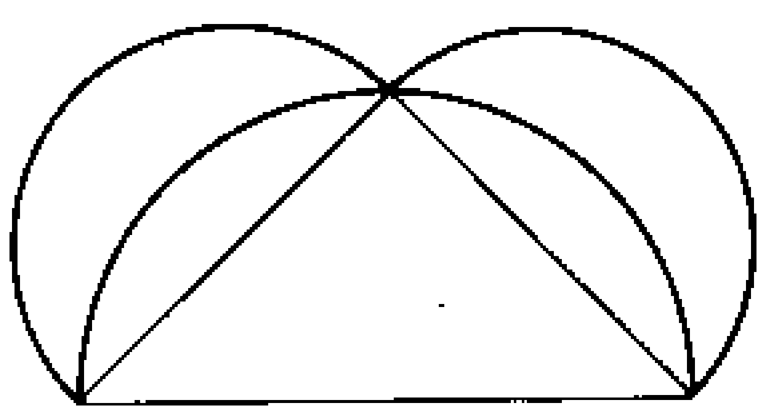


Figura 5.3

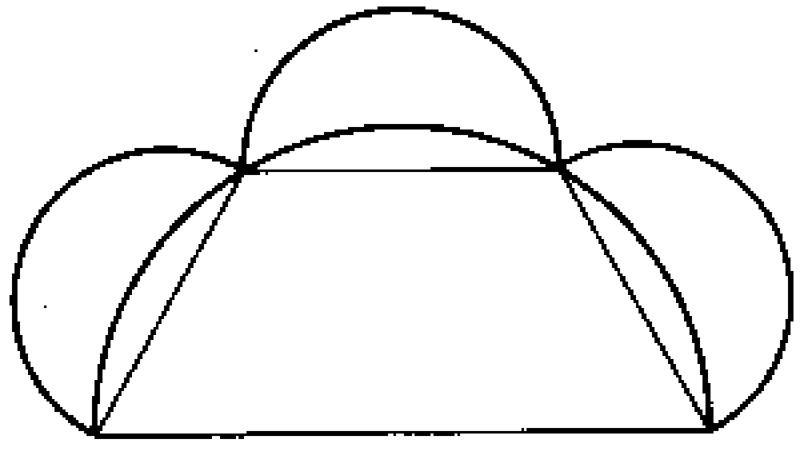


Figura 5.4

é igual à soma de quatro áreas curvilíneas: as três lunas iguais e um semicírculo sobre um dos lados iguais do trapézio. Da segunda dessas quadraturas resultaria que se as lunas pudessem ser quadradas, o semicírculo — logo o círculo — também poderia. Essa conclusão parece ter encorajado Hipócrates, bem como seus contemporâneos, a pensar que algum dia se conseguiria quadrar o círculo.

As quadraturas de Hipócrates são significativas não tanto como tentativas de quadrar o círculo mas como indicações do nível da matemática na época; mostram que os matemáticos atenienses eram hábeis no tratar transformações de áreas e proporções. Em particular, evidentemente não havia dificuldade em converter um retângulo de lados a e b num quadrado. Isso exige achar a média proporcional, ou geométrica, entre a e b. Isto é, se $a:x = x:b$, os geômetras de então construíam facilmente x. Era natural, pois, que tentassem generalizar a questão inserindo *dois* meios entre duas grandezas dadas a e b. Isto é, dados dois segmentos a e b, esperavam construir dois outros x e y tais que $a:x = x:y = y:b$. Diz-se que Hipócrates percebeu que esse problema contém o da duplicação do cubo; pois se $b = 2a$, as proporções, por eliminação de y, levam à conclusão que $x^3 = 2a^3$.

Há três opiniões quanto ao que Hipócrates deduziu de suas quadraturas de lunas. Alguns acham que ele acreditou poder quadrar todas as lunas, logo também o círculo; outros acham que ele percebia as limitações de sua obra, que lidava só com certos tipos de lunas. E pelo menos um estudioso afirmou que Hipócrates sabia não ter quadrado o círculo mas tentou enganar seus compatriotas, fazendo-os acreditar que tinha tido sucesso[3]. Há outras dúvidas, também, quanto às contribuições de Hipócrates, pois foi-lhe atribuído, com alguma incerteza, o primeiro uso de letras em figuras geométricas. É interessante notar que embora tenha feito avanços em dois ou três problemas famosos, parece

[3]Veja o artigo de Björnbo, "Hippocrates" em Pauly-Wissowa, *Real-Enzyklopädie der klassischen Altertumswissenschaft*, Vol. VIII, p. 1 796

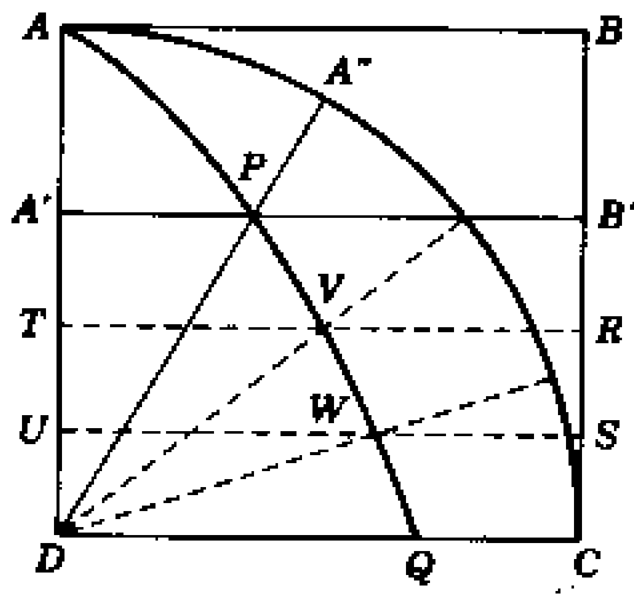
não ter feito progressos na trissecção do ângulo, problema estudado um pouco depois por Hípias de Elis.

6 Pelo fim do quinto século A. C. existia em Atenas um grupo de mestres profissionais muito diferente dos pitagóricos. Os discípulos de Pitágoras estavam proibidos de aceitar pagamento para partilhar seus conhecimentos com outros. Os sofistas, no entanto, abertamente se sustentavam dando aulas aos seus concidadãos — não só orientando-os em esforço intelectual honesto, como na arte de "fazer o pior parecer o melhor". Até certo ponto a acusação de superficialidade feita contra os sofistas era justificada; mas isto não deve ocultar o fato de serem os sofistas em geral muito bem informados em muitos assuntos e de terem alguns deles feito contribuições reais. Entre esses estava Hípias, nascido em Elis, que estava em atividade em Atenas na segunda metade do quinto século A. C. É um dos mais antigos matemáticos de que temos informação de primeira mão, pois nos diálogos de Platão encontramos muita coisa sobre ele. Lemos, por exemplo que Hípias se gabava de ter ganho mais dinheiro que quaisquer dois outros sofistas juntos. Diz-se que escreveu muito, sobre assuntos, indo desde a matemática até a oratória, mas nada se preservou. Tinha uma notável memória, gabava-se de imensa cultura, e era hábil em artesanato. A esse Hípias (havia muitos outros com o mesmo nome) aparentemente devemos a introdução na matemática da primeira curva além do círculo e da reta. Proclus e outros comentadores lhe atribuem a curva conhecida depois por trissetriz ou quadratriz de Hípias[4]. Essa é traçada assim: no quadrado $ABCD$ (Fig. 5.5) seja o lado AB deslocado para baixo uniformemente a partir de sua posição presente até coincidir com DC, e suponhamos que esse movimento leve exatamente o mesmo tempo que o lado DA leva para girar em sentido horário de sua posição presente até coincidir com DC. Se as posições dos dois segmentos são dadas em um instante fixado qualquer por $A'B'$ e DA'' respectivamente, e se P é o ponto de intersecção de $A'B'$ e DA'', o lugar descrito por P durante esses movimentos será a trissetriz de Hípias — a curva APQ na figura. Dada essa curva, faz-se a trissecção de um ângulo com facilidade. Por exemplo, se PDC é o ângulo a ser trissectado, simplesmente trissectamos os segmentos $B'C$ e $A'D$, com os pontos, R, S, T e U. Se as retas TR e US cortam a trissetriz em V e W respectivamente, as retas VD e WD, pela propriedade da trissetriz, dividirão o ângulo PDC em três partes iguais.

A curva de Hípias é geralmente chamada de quadratriz pois pode ser usada para quadrar o círculo. Se Hípias sabia ou não dessa aplicação não pode ser decidido agora. Foi conjeturado que Hípias sabia desse método de quadratura mas não podia prová-lo. Como a quadratura por meio da curva de Hípias foi especificamente dada mais tarde por Dinóstrato, deixaremos a descrição desse trabalho para o próximo capítulo.

Hípias viveu pelo menos tanto quanto Sócrates (morreu em 399 A. C.) e da pena de Platão temos uma descrição pouco lisonjeira dele como típico sofista — vaidoso, cheio de si e ganancioso. Diz-se que Sócrates descreveu Hípias como bonito e culto, mas vaidoso e superficial. O diálogo de Platão sobre *Hípias* satiriza essa exibição de conhecimento, e nos *Memorabilia* de Xenofonte encontra-se uma descrição nada elogiosa de Hípias, como

Figura 5.5



[4]Um excelente relato disso se encontra em Kathleen Freeman, *The Pre-Socratic Philosophers. A Companion to Diels, Fragmente der Vorsokratiker* (1949), pp. 381-391. Veja também o artigo sobre Hípias em Pauly-Wissowa, obra citada, VIII, pp. 1 707 e seguintes

alguém que se considera profundo conhecedor de tudo desde história e literatura até artes manuais e ciência. Ao julgar essas descrições, no entanto, devemos lembrar que Platão e Xenofonte se opunham totalmente aos sofistas em geral. Também é bom ter em mente que tanto Protágoras "o pai dos sofistas", quanto Sócrates, o arquioponente do movimento, eram contrários à matemática e às ciências. Quanto ao caráter, Platão contrasta Hípias e Sócrates, mas pode-se estabelecer praticamente o mesmo contraste comparando Hípias com outro contemporâneo — o matemático pitagórico Arquitas de Tarento.

Diz-se que Pitágoras se retirou para Metapontum no fim de sua vida e morreu lá em 500 A. C. aproximadamente. A tradição diz que não deixou obras escritas, mas suas idéias foram levadas adiante por um grande número de discípulos entusiastas. O centro em Crotona foi abandonado quando um grupo político rival, de Sibaris, surpreendeu e assassinou muitos dos chefes, mas os que escaparam ao massacre levaram as doutrinas da escola a outras partes do mundo grego. Entre os que receberam ensinamentos dos refugiados estava Filolaus de Tarento, e diz-se que ele escreveu a primeira exposição do pitagorismo — tendo-lhe sido dada permissão, diz a estória, a fim de reparar sua fortuna abalada. Aparentemente foi desse livro que Platão tirou seu conhecimento da ordem pitagórica. O fanatismo pelo número, que era tão característico da irmandade, era evidentemente partilhado por Filolaus e foi de seu relato que derivou muito da fabulação em torno do *tetractys*, assim como o conhecimento da cosmologia pitagórica. O esquema cósmico de Filolaus, ao que se diz, foi modificado por dois dos pitagóricos posteriores, Ecfantus e Hicetas, que abandonaram o fogo central e a contraterra e explicaram a noite e o dia colocando a Terra girando no centro do universo. Os extremismos de adoração pelo número de Filolaus também parecem ter sofrido alguma modificação, especialmente das mãos de Arquitas, um discípulo de Filolaus em Tarento.

A seita pitagórica tinha exercido forte influência intelectual através de toda a Magna Grécia, com matizes políticos que podem ser descritos como de uma "internacional reacionária", ou talvez melhor como cruzamento entre orfismo e franco-maçonaria. Em Crotona os aspectos políticos eram particularmente observáveis, mas nos centros mais afastados, como Tarento, o impacto era sobretudo intelectual. Arquitas acreditava firmemente na eficácia do número; como governante da cidade, com poderes autocráticos, era justo e moderado, pois considerava a razão como uma força trabalhando pelo aperfeiçoamento da sociedade. Por muitos anos sucessivos foi eleito general e nunca foi derrotado; no entanto era bondoso e amava as crianças, para as quais diz-se que inventou o "chocalho de Arquitas". Talvez também a pomba mecânica de madeira, que dizem ter ele fabricado, tivesse sido feita para divertir as crianças.

Arquitas continuou a tradição pitagórica, pondo a aritmética acima da geometria, mas seu entusiasmo pelo número tinha menos da componente religiosa e mística do que se encontrava em Filolaus. Escreveu sobre a aplicação das médias aritmética, geométrica e subcontrária à música e provavelmente foi Filolaus ou Arquitas o responsável pela mudança do nome da última para "média harmônica". Entre seus enunciados a esse respeito encontra-se a observação de que entre dois inteiros que estão na razão $n:(n+1)$ não pode existir um inteiro que seja uma média geométrica. Arquitas deu mais atenção à música que seus predecessores, e achava que ela devia ter um papel mais importante que a literatura na educação das crianças. Entre suas conjeturas há uma que atribui diferenças de tom a variações do movimento resultantes do fluxo que causa o som. Arquitas parece ter dado considerável atenção ao papel da matemática no aprendizado, e foi-lhe atribuída a designação dos quatro ramos no *quadrivium* matemático — aritmética (ou números em repouso), geometria (ou grandezas em repouso), música (ou números em movimento) e astronomia (ou grandezas em movimento). Esses temas, juntos com o *trivium* consistindo de gramática, retórica e dialética (que Aristóteles atribuía a Zeno), constituíram mais tarde as sete artes liberais; portanto o papel proeminente que a matemática desempenhou na educação se deve em não pequena medida a Arquitas.

8 É provável que Arquitas tivesse acesso a um tratado mais antigo sobre os elementos da matemática, e o processo iterativo para achar a raiz quadrada, freqüentemente conhecido

pelo seu nome, tinha sido usado bem antes na Mesopotâmia. No entanto Arquitas contribuiu também com resultados originais. A sua contribuição mais notável foi uma solução tridimensional do problema de Delos, que pode ser mais facilmente descrita, ainda que anacronisticamente, em linguagem de geometria analítica. Seja a a aresta do cubo a ser duplicado, e seja $(a, 0, 0)$ o centro de três círculos mutuamente ortogonais de raio a e cada um situado num plano perpendicular a um eixo coordenado. Sobre o círculo perpendicular ao eixo $0x$ construa-se um cone circular com vértice $(0, 0, 0)$; sobre o círculo no plano xy construa-se um cilindro circular reto; seja o círculo no plano xz girado em torno do eixo $0z$ para gerar um toro. As equações dessas três superfícies são respectivamente $x^2 = y^2 + z^2$ e $2ax = x^2 + y^2$ e $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$. Essas três superfícies se encontram num ponto cuja coordenada x é $a\sqrt[3]{2}$, portanto, fornece a aresta do cubo que se queria.

O resultado de Arquitas impressiona, quando se considera que ele obteve sua solução sem ajuda de coordenadas. No entanto, a sua mais importante contribuição à matemática foi sua intervenção junto ao tirano Dionísio para salvar a vida de seu amigo Platão, o qual permaneceu até o fim de sua vida profundamente penetrado na veneração pitagórica pelo número e pela geometria e a supremacia de Atenas no mundo matemático do quarto século A. C. resultou principalmente do entusiasmo de Platão, o "forjador de matemáticos". No entanto, antes de expor o papel de Platão é necessário discutir a obra de um pitagórico anterior — um apóstata chamado Hipasus.

De Hipasus de Metapontum (ou Crotona), aproximadamente contemporâneo de Filolaus, diz-se ter sido inicialmente um pitagórico, que foi depois expulso da confraria. Uma estória diz que os pitagóricos lhe erigiram um túmulo, como se estivesse morto, outra que sua apostasia foi punida pela morte num naufrágio. A causa exata da ruptura não é conhecida, em parte por causa da regra de segredo, mas três possibilidades foram sugeridas. Segundo uma, Hipasus foi expulso por insubordinação política, tendo chefiado um movimento democrático contra a conservadora regra pitagórica. Uma segunda atribui a expulsão a indiscrições relativas à geometria do pentágono ou do dodecaedro, talvez uma construção de uma dessas figuras. Uma terceira explicação mantém que a expulsão foi relacionada com a revelação de uma descoberta matemática de significação devastadora para a filosofia pitagórica — a da existência de grandezas incomensuráveis.

9 Era um artigo de fé fundamental do pitagorismo que a essência de tudo, na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, pode ser explicado em termos de *arithmos*, ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões. Os diálogos de Platão mostram, no entanto, que a comunidade matemática grega fora assombrada por uma descoberta que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos inteiros. Tratava-se da descoberta que na própria geometria os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo simples propriedades básicas. Não bastam, por exemplo, para comparar a diagonal de um quadrado ou de um cubo ou de um pentágono com seu lado. Os segmentos são incomensuráveis, não importa quão pequena se tome a unidade de medida. Quando ou como foi feita a descoberta não se sabe, mas muita tinta se gastou em apoio de uma ou outra hipótese. Argumentos antigos a favor de uma origem hindu da descoberta[5] não têm base e parece improvável que o próprio Pitágoras conhecesse o problema de incomensurabilidade. A sugestão mais plausível é que a descoberta fosse feita por pitagóricos em algum momento antes de 410 A. C.[6] Alguns a atribuem especifi-

[5] Veja Heinrich Vogt, "Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt"? *Bibliotheca Mathematica* (3), **7** (1906-1907), pp. 6-23; também Leopold von Schroeder, *Pythagoras und die Inder* (Leipzig, 1884)

[6] Veja especialmente Heinrich Vogt, "Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts", *Bibliotheca Mathematica* (3), **10** (1910), pp. 97-155, e o artigo do mesmo autor, "Zur Entdeckungsgeschichte des Irrationalen", *Bibliotheca Mathematica* (3), **14** (1914), pp. 9-29. Cf. Heath, *History of Greek Mathematics* (1921), 1, 157

camente a Hipasus de Metapontum durante a primeira parte do último quarto do quinto século A. C.[7] enquanto que outros a colocam meio século mais tarde.

As circunstâncias que rodearam a primeira percepção da incomensurabilidade são tão incertas quanto a época da descoberta. Comumente se supõe que a percepção veio em conexão com a aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo isósceles. Aristóteles se refere a uma prova da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com seu lado, indicando que se baseava na distinção entre pares e ímpares[8]. Uma tal prova é fácil de construir. Sejam d e l a diagonal e o lado do quadrado, e suponhamos que sejam comensuráveis — isto é, que a razão d/l é racional e igual a p/q, onde p e q são inteiros sem fator comum. Do teorema de Pitágoras sabemos que $d^2 = l^2 + l^2$; donde $(d/l)^2 = p^2/q^2 = 2$ ou $p^2 = 2q^2$. Logo p^2 deve ser par, e então p é par, portanto q deve ser ímpar. Fazendo $p = 2r$ e substituindo na equação $p^2 = 2q^2$ vem $4r^2 = 2q^2$, ou $q^2 = 2r^2$. Então q^2 deve ser par; logo q é par. Mas tínhamos provado acima que q deve ser ímpar e um inteiro não pode ser ao mesmo tempo par e ímpar. Resulta pois, pelo método indireto, que a hipótese de serem d e l comensuráveis deve ser falsa.

Nessa prova o grau de abstração é tão alto que a possibilidade de ter sido a base da descoberta original da incomensurabilidade tem sido questionada. Mas há outros modos pelos quais a descoberta pode ter sido feita. Entre esses, a simples observação de que quando se traçam as cinco diagonais de um pentágono, elas formam um pentágono regular menor (Fig. 5.6) e as diagonais do segundo pentágono por sua vez formam um terceiro pentágono regular, que é ainda menor. Esse processo pode ser continuado indefinidamente, resultando em pentágonos tão pequenos quanto se queira e levando à conclusão de que a razão da diagonal para o lado num pentágono regular não é racional. A irracionalidade dessa razão é uma conseqüência do argumento discutido em conexão com a Fig. 4.2 em que se viu que a secção áurea se repete indefinidamente. Foi talvez essa propriedade que levou à revelação, talvez por Hipasus, da incomensurabilidade? Não ficaram documentos que resolvam a questão, mas a sugestão é plausível. Nesse caso não seria $\sqrt{2}$ mas $\sqrt{5}$ que primeiro revelou a existência de grandezas incomensuráveis, pois a solução da equação $a:x = x:(a-x)$ leva a $(\sqrt{5}-1)/2$ como sendo a razão entre o lado de um pentágono regular e a diagonal. A razão da diagonal do cubo para uma aresta é $\sqrt{3}$ e aqui também o espectro da incomensurabilidade ergue sua feia cabeça.

Uma prova geométrica análoga à que serve para a razão da diagonal do pentágono para seu lado pode também ser fornecida para a razão da diagonal de um quadrado para seu lado. Se no quadrado $ABCD$ (Fig. 5.7) se leva sobre a diagonal AC o segmento $AP = AB$ e em P se levanta a perpendicular PQ, a razão de CQ para PC será igual à de AC para AB. Novamente, se em CQ se leva $QR = QP$ e se constrói RS perpendicular a CR, a razão da hipotenusa para o lado será ainda igual à de antes. Esse processo também pode ser continuado indefinidamente, fornecendo uma prova de que nenhuma unidade de comprimento, por pequena que seja, pode ser achada de modo que a hipotenusa e um lado sejam comensuráveis.

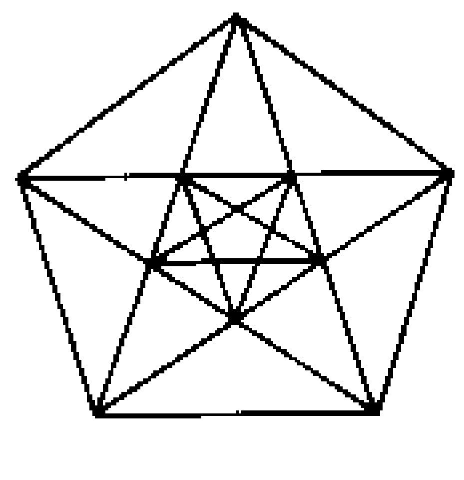


Figura 5.6

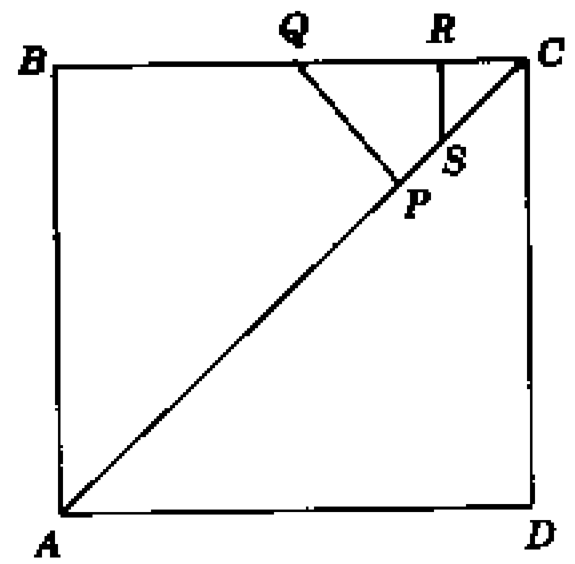


Figura 5.7

[7]Veja Kurt von Fritz, "The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum", *Annals of Mathematics* (2), 46 (1945) pp. 242-264

[8]Veja H. G. Zeuthen, "Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationelles" *Oversigt over der Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs. Forhandlinger*, 1915, pp. 333-362

11 A doutrina pitagórica de que "Números formam o céu todo" enfrentava agora um problema realmente sério: mas não era o único, pois a escola enfrentava também os argumentos dos vizinhos eleáticos, um movimento filosófico rival. Os filósofos jônios da Ásia Menor tinham procurado identificar um primeiro princípio para todas as coisas. Tales julgara achá-lo na água, outros preferiam pensar no ar ou fogo como elemento básico Os pitagóricos tinham tomado direção mais abstrata, postulando que o número em toda sua pluralidade era a matéria básica dos fenômenos, esse atomismo numérico, lindamente ilustrado na geometria dos números figurativos, tinha sido atacado pelos seguidores de Parmênides de Elea (viveu por volta de 450 A. C.). O artigo de fé básico dos eleáticos era a unidade e permanência do ser, visão que contrastava com as idéias pitagóricas de multiplicidade e mudança. Dentre os discípulos de Parmênides o mais conhecido foi Zeno o Eleático (viveu por volta de 450 A. C.) que enunciou argumentos para provar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade. O método adotado por Zeno era dialético, antecipando Sócrates nesse modo indireto de argumento: partindo das premissas de seus oponentes, ele as reduzia ao absurdo.

Os pitagóricos tinham assumido que o espaço e o tempo podem ser pensados como consistindo de pontos e instantes; mas o espaço e o tempo têm também uma propriedade, mais fácil de intuir do que de definir, conhecida como "continuidade". Os elementos terminais, que constituíam uma pluralidade, de um lado eram supostos como possuindo as características da unidade geométrica — o ponto — e de outro como possuindo certas características de unidades numéricas. Aristóteles descrevia um ponto pitagórico como uma "unidade tendo posição" ou "unidade considerada no espaço". Sugeriu-se[9] que foi contra tal visão que Zeno propôs seus paradoxos, dos quais aqueles sobre o movimento são citados mais freqüentemente. Na forma em que chegaram a nós, através de Aristóteles e outros, quatro parecem ter causado maior perturbação: (1) a *Dicotomia* (2) o *Aquiles* (3) a *Flecha* (4) o *Estádio*. O primeiro diz que antes que um objeto possa percorrer uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas antes disto, deve percorrer o primeiro quarto; e antes disso, o primeiro oitavo e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões. O corredor que quer pôr-se em movimento precisa fazer infinitos contatos num tempo finito; mas é impossível exaurir uma coleção infinita, logo é impossível iniciar o movimento. O segundo paradoxo é semelhante ao primeiro apenas a subdivisão infinita é progressiva em vez de regressiva. Aqui Aquiles aposta corrida com uma tartaruga que sai com vantagem e é argumentado que Aquiles por mais depressa que corra, não pode alcançar a tartaruga, por mais devagar que ela caminhe. Pois, quando Aquiles chegar à posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado um pouco; e quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais. E o processo continua indefinidamente, com o resultado que Aquiles nunca pode alcançar a lenta tartaruga.

A *Dicotomia* e o *Aquiles* argumentam que o movimento é impossível sob a hipótese de subdivisibilidade indefinida do espaço e do tempo; a *Flecha* e o *Estádio*, de outro lado, argumentam que também é impossível, sob a hipótese contrária — de que a subdivisibilidade do tempo e do espaço termina em indivisíveis. Na *Flecha* Zeno argumenta que um objeto em vôo sempre ocupa um espaço igual a si mesmo; mas aquilo que sempre ocupa um espaço igual a si mesmo não está em movimento. Logo a flecha que voa está sempre parada, logo seu movimento é uma ilusão.

O mais discutido dos paradoxos sobre movimento e o mais complicado de descrever é o do *Estádio* (ou *Stadium*), mas o argumento pode ser descrito como segue. Sejam A_1, A_2, A_3, A_4 corpos de igual tamanho, estacionários; sejam B_1, B_2, B_3, B_4 corpos de mesmo tamanho que os A, que se movem para a direita de modo que cada B passa por um A num instante — o menor intervalo de tempo possível. Sejam C_1, C_2, C_3, C_4 também do mesmo tamanho que os A e os B, e movendo-se uniformemente para a es-

[9]Veja Paul Tannery, *La géométrie grecque* (1887) pp. 217-261. Para uma opinião diferente, ver B. L. van der Waerden, "Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik", *Mathematische Annalen*, 117 (1940), 141-161

querda com relação aos A de modo que cada C passa por um A num instante do tempo. Suponhamos que num dado momento os corpos ocupem as seguintes posições relativas.

A_1	A_2	A_3	A_4

B_1	B_2	B_3	B_4

C_1	C_2	C_3	C_4

Então passado um único instante, isto é, após uma subdivisão indivisível do tempo, as posições serão

A_1	A_2	A_3	A_4

B_1	B_2	B_3	B_4

C_1	C_2	C_3	C_4

É claro então que C_1 terá passado por dois dos B; logo o instante não pode ser o intervalo de tempo mínimo, pois podemos tomar como uma unidade nova e menor o tempo que C_1 leva para passar por um B.

Os argumentos de Zeno[10] parecem ter influênciado profundamente o desenvolvimento da matemática grega, influência comparável à da descoberta dos incomensuráveis, com a qual talvez se relacione. Originalmente, nos círculos pitagóricos, as grandezas eram representadas por pedrinhas ou cálculos, de onde vem nossa palavra calcular, mas na época de Euclides surge completa mudança de ponto de vista. As grandezas não são associadas a números ou pedras, mas a segmentos de reta. Em *Os elementos* os próprios inteiros são representados por segmentos. O reino dos números continuava a ser discreto, mas o mundo das grandezas contínuas (e esse continha a maior parte da matemática pré-helênica e pitagórica) era algo à parte dos números e devia ser tratado por métodos geométricos. Essa foi talvez a conclusão de maior alcance da Idade Heróica e não é improvável que se deveu em grande parte a Zeno de Elea e Hipasus de Metapontum.

2 Em geral se considera que o elemento dedutivo foi introduzido na matemática por Tales, mas recentemente se argüiu, contra essa tese, que a matemática dos sexto e quinto século A. C. era demasiado primitiva para admitir tal contribuição. Os que sustentam essa opinião às vezes se referem aos argumentos de Zeno e Hipasus como possível inspiração para o método dedutivo. Certamente as dúvidas e problemas levantados nessa questão seriam campo fértil para o surgimento da dedução e não seria absurdo considerar o fim do quinto século A. C. como um *terminus ante quem* para a forma racional dedutiva que nos é tão familiar. Pode ser oportuno indicar agora, portanto, que há várias hipóteses quanto às causas que levaram à transformação das receitas matemáticas dos pré-helênicos para a estrutura dedutiva que apareceu na Grécia. Alguns sugeriram[11] que Tales em suas viagens notara discrepâncias na matemática pré-helênica, como as regras egípcia e babilônia para a área do círculo, e que ele e seus primeiros sucessores viram, portanto, a necessidade de um método estritamente racional. Outros, mais conservadores, colocam a forma dedutiva muito mais tarde, talvez até no início do quarto século, após a descoberta do incomensurável[12]. Outras sugestões encontram as causas fora da matemática. Uma, por exemplo, vê no desenvolvimento sóciopolítico das cidades-estado da Grécia o surgimento da dialética e a conseqüente exigência de base racional para a matemática e outros estudos; outra sugestão um tanto semelhante é que a dedução pode ter provindo da lógica, nas tentativas de convencer um oponente de uma conclusão, procurando premissas das quais a conclusão segue necessariamente[13].

[10]A bibliografia sobre os paradoxos é enorme. Entre os tratamentos históricos mais informativos está o de Florian Cajori "History of Zeno's Arguments on Motion", *American Mathematical Monthly*, **22** (1915), pp. 1-6, 39-47, 77-82, 109-115, 145-149, 179-186, 215-220, 253-258, 292-297. Para fontes de informação, ver *Zeno of Elea* (texto, tradução e notas por H. D. P. Lee; 1936)

[11]Veja Van der Waerden, *Science Awakening* (1961), p. 89

13 Quer a dedução tenha penetrado na matemática no sexto século A. C. ou no quarto, quer a incomensurabilidade tenha sido descoberta antes ou depois de 400 A. C., não pode haver dúvida de que a matemática grega sofreu modificações drásticas na época de Platão. A dicotomia entre número e grandezas contínuas exigia um novo método para tratar a álgebra babilônia que os pitagóricos tinham herdado. Os velhos problemas em que, dada a soma e o produto de dois lados de um retângulo se pediam as dimensões, tinha que ser tratado de modo diferente dos algoritmos numéricos dos babilônios. Uma "álgebra geométrica" tomara o lugar da antiga "álgebra aritmética", e nessa nova álgebra não podia haver somas de segmentos com áreas ou de áreas com volumes. De agora em diante devia haver estrita homogeneidade dos termos de uma equação e as formas normais mesopotâmicas, $xy = A$, $x \pm y = b$, deviam ser interpretadas geometricamente. A conclusão óbvia, a que o leitor pode chegar eliminando y, é que se deve construir sobre um segmento dado b um retângulo cuja altura desconhecida x deve ser tal que a área do retângulo, excede a área dada A pelo quadrado x^2 ou (no caso do sinal menos) é inferior a A pelo quadrado x^2 (Fig. 5.8). Dessa forma os gregos construíram a solução de equações quadráticas pelo processo conhecido como "a aplicação de áreas", uma parte da álgebra geométrica completamente estudada em *Os elementos* de Euclides. Além disso, a inquietação resultante das grandezas incomensuráveis levou a se evitar razões, o quanto possível, na matemática elementar. A equação linear $ax = bc$, por exemplo, era considerada como uma igualdade entre as áreas ax e bc e não como uma proporção igualdade entre as razões $a:b$ e $c:x$. Conseqüentemente, ao construir a quarta proporcional, x nesse caso, era usual construir um retângulo $OCDB$ com lados $b = OB$ e $c = OC$ (Fig. 5.9) e então ao longo de OC marcar $OA = a$. Completa-se o retângulo $OAEB$ e traça-se a diagonal OE que corta CD em P. É claro agora que CP é o segmento x desejado, pois o retângulo $OARS$ tem área igual à do retângulo $OCDB$. Só no Livro V de *Os elementos* é que Euclides atacou a difícil questão da proporcionalidade.

A álgebra geométrica grega parece ao leitor atual excessivamente artificial e difícil; aos que a usaram e tornaram-se hábeis no trato de suas operações, deve ter parecido um instrumento conveniente. A lei distributiva $a(b + c + d) = ab + ac + ad$ era sem dúvida muito mais evidente para um estudioso grego que para o estudante que se inicia na álgebra hoje, pois o primeiro podia facilmente representar as áreas dos retângulos nesse teorema, que diz simplesmente que o retângulo sobre a e a soma dos segmentos b, c, d é igual à soma dos retângulos sobre a e cada um dos segmentos b, c, d tomados separadamente (Fig. 5.10). Também a identidade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ se torna evidente com um diagrama que mostra os três quadrados e os dois retângulos iguais na identidade (Fig. 5.11); e uma diferença de dois quadrados $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ pode

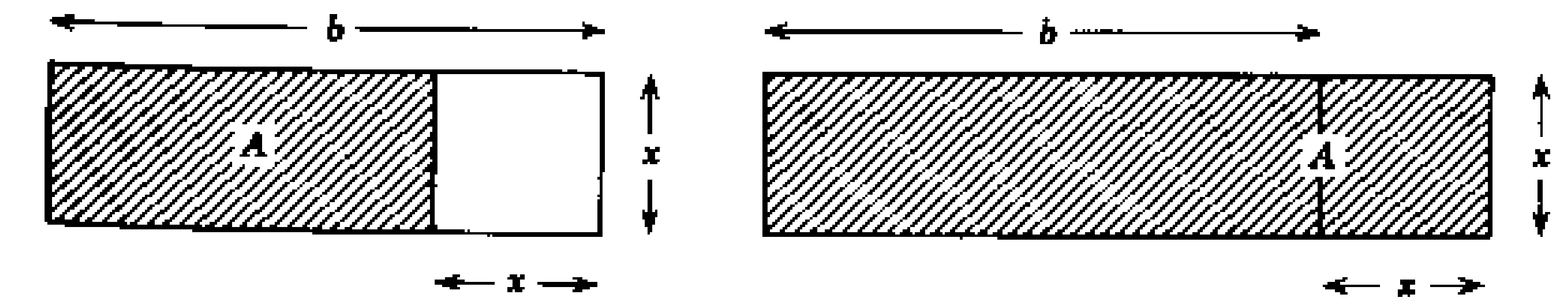


Figura 5.8

[12]Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, pp. 148-149

[13]Veja Arpád Szabó, "Anfänge des euklidischen Axiomensystems", *Archive for History of Exact Sciences*, **1** (1960), 37-106

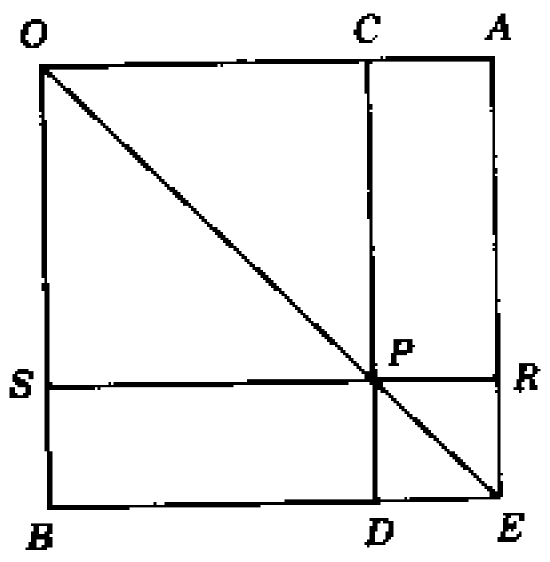


Figura 5.9

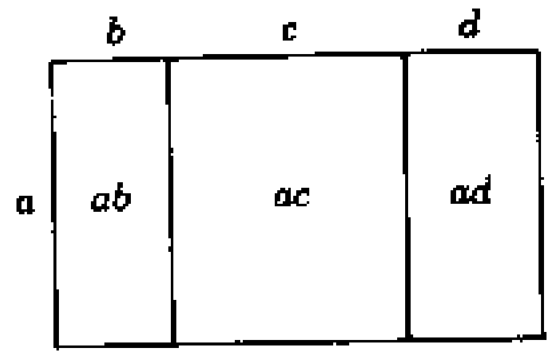


Figura 5.10

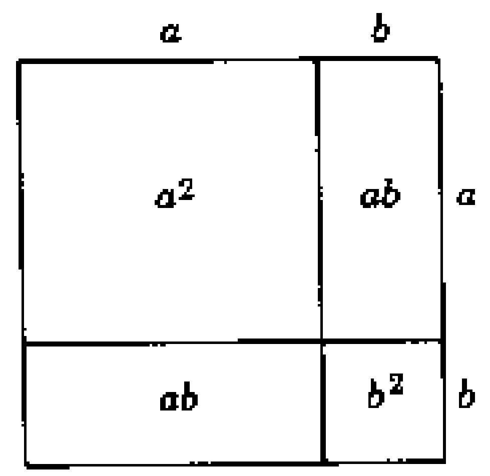


Figura 5.11

ser representada de modo semelhante (Fig. 5.12). Somas, diferenças, produtos e quocientes de segmentos podem facilmente ser construídos com régua e compasso. Raízes quadradas também não causam dificuldade na álgebra geométrica. Se quisermos achar um segmento x, tal que $x^2 = ab$, simplesmente seguimos o processo indicado nos textos de geometria elementar de hoje. Coloca-se sobre uma reta o segmento ABC onde $AB = a$ e $BC = c$ (Fig. 5.13). Com AC como diâmetro constrói-se um semicírculo (com centro O) e em B levanta-se a perpendicular BP, que é o segmento x desejado. É interessante que aqui também a prova dada por Euclides, provavelmente seguindo a linha anterior de evitar razões, usa áreas em vez de proporções. Se em nossa figura fizermos $PO = AO = CO = r$ e $BO = s$, Euclides diria essencialmente que $x^2 = r^2 - s^2 = (r-s)(r+s) = ab$.

A Idade Heróica da matemática produziu meia dúzia de grandes figuras, e entre essas deve ser incluído um homem que é mais conhecido como filósofo da química. Demócrito de Abdera (aproximadamente 460 A. C. — 370 A. C.) é célebre hoje como proponente de uma doutrina materialista atômica, mas em seu tempo adquiriu também reputação como geômetra. Diz-se que viajou mais do que qualquer outro em seu tempo — para Atenas, Egito, Mesopotâmia e talvez Índia — adquirindo tanto conhecimento quanto possível; mas seus próprios sucessos em matemática foram tais que ele se gabava de que nem os "estiradores de corda" do Egito o superavam. Escreveu muitas obras de matemática, das quais nenhuma se preservou, mas temos os títulos de algumas: *Sobre os números*, *Sobre a geometria*, *Sobre tangências*, *Sobre representações* e *Sobre irracionais*. Tão grande era sua fama que em séculos posteriores muitos tratados de química e matemática lhe foram atribuídos injustificadamente. Em particular, antigos tratados de alquimia por um pseudo-Demócrito não devem ser atribuídos ao nosso abderita; mas outros livros, *Sobre o pitagorismo*, *Sobre a ordem do mundo* e *Sobre ética*, podem ter sido genuínos. Seu material científico era considerado claro, mas era revestido de um estilo literário; Cícero escreveu a respeito de Demócrito que ele tinha um ritmo que o fazia mais poético do que os poetas. No entanto da massa de escritos atribuídos a Demócrito somente umas poucas palavras restaram.

A chave para a matemática de Demócrito sem dúvida é encontrada em sua doutrina física do atomismo. Todos os fenômenos deviam ser explicados, ele argüia, em termos de átomos rígidos infinitamente pequenos e variados (em tamanho e forma) que se movem incessantemente no espaço vazio. A criação de nosso mundo, e de inúmeros outros também, resultou de uma ordenação ou coagulação dos átomos em grupos com certas semelhanças.

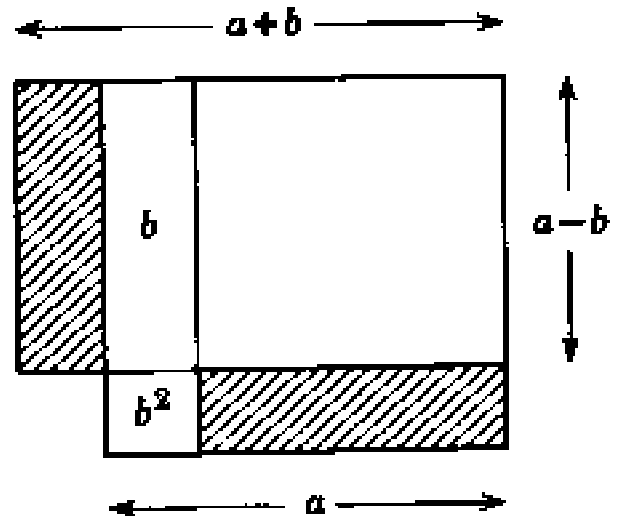


Figura 5.12

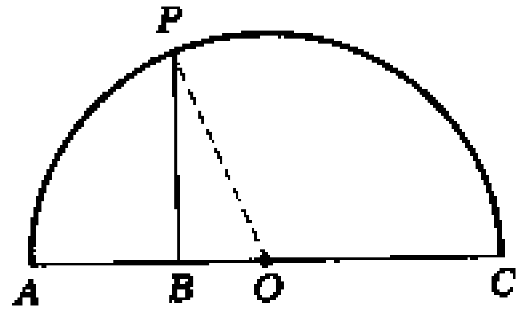


Figura 5.13

Não era uma teoria nova, pois, tinha sido proposta antes por Leucipo; portanto, os oponentes de Demócrito (e eram muitos) o acusaram de plagiador, inclusive de Anaxágoras e Pitágoras. O atomismo físico de Leucipo e Demócrito pode de fato ter sido sugerido pelo atomismo geométrico dos pitagóricos e não é de surpreender que os problemas matemáticos que mais interessavam a Demócrito fossem aqueles que exigissem alguma forma de tratamento infinitesimal. Os egípcios, por exemplo, sabiam que o volume da pirâmide é um terço da base vezes a altura, mas uma prova disto quase certamente estava acima de suas possibilidades, pois exige um ponto de vista equivalente ao do cálculo integral. Arquimedes mais tarde escreveu que esse resultado era devido a Demócrito, mas que esse não o provou rigorosamente. Isso cria um enigma, pois, se Demócrito acrescentou alguma coisa ao conhecimento egípcio aqui, só pode ter sido alguma espécie de prova, ainda que inadequada. Talvez Demócrito tenha mostrado que um prisma triangular pode ser dividido em três pirâmides triangulares que são, duas a duas, de mesma altura e de áreas da base iguais e depois deduziu, assumindo que pirâmides de mesma altura e bases iguais são iguais, o teorema egípcio familiar.

Essa pressuposição só pode ser justificada por aplicação de técnicas infinitesimais. Se, por exemplo, pensamos em duas pirâmides de mesma base e altura como compostas de uma infinidade de secções infinitamente finas e iguais em correspondência biunívoca (um artifício usualmente chamado princípio de Cavalieri em honra do geômetra do século dezessete), ela parece ficar justificada. Um tal nebuloso atomismo pode ter estado na base do pensamento de Demócrito, embora isto não tenha sido provado. De qualquer forma, depois dos paradoxos de Zeno e da percepção dos incomensuráveis, tais argumentos baseados em uma infinidade de infinitésimos já não eram aceitos. Arquimedes, conseqüentemente, podia bem achar que Demócrito não tinha dado uma prova rigorosa. O mesmo juízo se aplicaria ao teorema, também atribuído por Arquimedes a Demócrito, que diz que o volume de um cone é um terço do volume do cilindro circunscrito. Esse resultado era provavelmente considerado por Demócrito como um corolário do teorema sobre a pirâmide, pois o cone seria essencialmente uma pirâmide cuja base é um polígono regular com uma infinidade de lados.

O atomismo geométrico de Demócrito logo se deparou com certos problemas. Se a pirâmide ou o cone, por exemplo, é feita de infinitas secções infinitamente finas, triangulares ou circulares, paralelas à base, a consideração de duas quaisquer lâminas adjacentes cria um paradoxo. Se são iguais em área, então como todas serão iguais, a totalidade será o prisma ou o cilindro, não uma pirâmide ou um cone. Se, por outro lado, secções adjacentes são desiguais, a totalidade será uma pirâmide em degraus, ou cone em degraus, não a figura de superfície lisa que se tem em mente. Esse problema se aparenta com as dificuldades com incomensuráveis e com os paradoxos do movimento. Talvez em seu *Sobre os irracionais*, Demócrito tenha analisado as dificuldades encontradas aqui, mas não há como saber que direção tomaram suas tentativas. Sua extrema impopularidade nas duas escolas filosóficas dominantes do século seguinte, as de Platão e Aristóteles, pode ter encorajado o abandono das idéias de Demócrito. No entanto, o principal legado matemático da Idade Heróica pode ser condensado em seis problemas: quadratura do círculo, duplicação do cubo, trissecção do ângulo, razão de grandezas incomensuráveis, paradoxos do movimento e validade dos métodos infinitesimais. Até certo ponto eles podem ser associados, embora não exclusivamente, com homens estudados neste capítulo: Hipócrates, Arquitas, Hípias, Hipasus, Zeno e Demócrito. Outras épocas deviam produzir uma comparável coleção de talentos, mas talvez nunca mais em qualquer época se faria um ataque tão audacioso a tantos problemas matemáticos fundamentais com recursos metodológicos tão insuficientes. É por isto que chamamos esse período, de Anaxágoras a Arquitas, a Idade Heróica.

BIBLIOGRAFIA

Allman, G. J., *Greek Geometry from Thales to Euclid* (Dublin: Dublin University Press, 1889)

Cajori, Florian, "History of Zeno's Arguments on Motion," *American Mathematical Monthly*, **22** (1915), 1-6, 39-47, 77-82, 109-115, 145-149, 179-186, 215-220, 253-258, 292-297

Freeman, Kathleen, *The Pre-Socratic Philosophers*, 2.ª edição (Oxford: Blackwell, 1949)

Gow, James, *A Short History of Greek Mathematics* (reimpressão, New York: Hafner, 1923)

Heath, T. L., *History of Greek Mathematics* (New York: Oxford University Press, 1921, 2 volumes)

Hobson, E. W., *Squaring the Circle* (Cambridge, por volta de 1913)

Lee, H. D. P., ed., *Zeno of Elea* (Cambridge: Cambridge University Press, 1936)

Michel, Paul-Henri, *De Pythagore à Euclide* (Paris: Société d'Edition "Les Belles Lettres," 1950)

Neugebauer, O., *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª edição, (Providence R.I.: Brown University Press, 1957; edição em brochura, New York: Harper)

Szabó, Arpád, "The Transformation of Mathematics into Deductive Science and the Beginnings of its Foundation on Definitions and Axioms." *Scripta Mathematica*, **27** (1964), 27-48, 113-139

Tannery, Paul, *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons* (Paris, 1887)

Thomas, Ivor, ed., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1939-1941, 2 volumes)

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening* (traduzido por Arnold Dresden, New York: Oxford University Press, 1961; edição em brochura, New York: Wiley, 1963)

Von Fritz, Kurt, "The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum," *Annals of Mathematics* (2), **46** (1945), 242-264

EXERCÍCIOS

1. Justifique as duas quadraturas atribuídas por Alexandre de Afrodisias a Hipócrates.
2. Trace um ângulo de 60° e use a trissectriz de Hípias para dividi-lo em sete partes iguais.
3. Prove cuidadosamente que os segmentos em que as diagonais de um pentágono regular se dividem mutuamente são incomensuráveis com a diagonal.
4. Qual você acredita ter sido descoberta antes, a irracionalidade de $\sqrt{2}$ ou de $\sqrt{5}$? Justifique sua resposta em termos de evidência histórica.
5. Usando apenas régua e compasso, construa o segmento x tal que $ax = b^2$, onde a e b são quaisquer segmentos dados.
6. Dados os segmentos a e b e usando régua e compasso apenas, construa x e y se $x + y = a$ e $xy = b^2$.
7. Dados os segmentos a, b e c construa x e y se $x - y = a$ e $xy = bc$.
8. Resolva a equação $x^2 + ax = b^2$ construindo um segmento que satisfaça à condição dada.
9. Dado um segmento unitário (de comprimento l), construa um segmento de comprimento $\sqrt{3} + (4/5)$.
10. Mostre que em coordenadas polares a equação da trissectriz de Hípias é $\pi r \operatorname{sen} \theta = 2a\theta$. Esboce o ramo principal dessa curva para $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ e diga por que Hípias não traçou esse ramo completo.
11. As diagonais de um hexágono regular são incomensuráveis com um lado? Explique completamente e indique se sua conclusão poderia ter sido obtida na antiguidade.

*12. Mostre com todos os passos necessários que a construção de Arquitas duplica o cubo.

Capítulo **6**

A Idade de Platão e Aristóteles

Eu, de boa vontade, morreria queimado como Faeton, se esse fosse o preço a pagar para alcançar o Sol e saber qual sua forma, tamanho e substância.

Eudoxo

1 A Idade Heróica se situa principalmente no quinto século A. C. e desse período quase nenhuma evidência direta restou sobre o desenvolvimento da matemática. As histórias de Heródoto e Tucídides e as peças de Ésquilo, Eurípedes e Aristófanes até certo ponto se preservaram, mas quase não há uma linha do que foi escrito pelos matemáticos da época. Fontes matemáticas de primeira mão do quarto século A. C. são quase igualmente raras, mas essa falta é suprida em grande parte pelas exposições escritas por filósofos que estavam *au courant* da matemática de seu tempo. Temos a maior parte do que Platão escreveu a cerca de metade da obra de Aristóteles; com os escritos desses dois líderes intelectuais do quarto século A. C. como guia, podemos dar uma exposição muito mais digna de fé do que aconteceu em seu tempo, do que podemos fazer quanto à Idade Heróica.

Incluímos Arquitas entre os matemáticos da Idade Heróica, mas num certo sentido ele é na verdade uma figura de transição na matemática durante o tempo de Platão. Foi um dos últimos pitagóricos, tanto literal quanto figuradamente. Podia acreditar ainda que o número era o que há de mais importante na vida e na matemática, mas a onda do futuro ia elevar a geometria à posição de supremacia, em grande parte devido ao problema da incomensurabilidade. De outro lado, diz-se que foi Arquitas quem estabeleceu o *quadrivium* — aritmética, geometria, música e astronomia — como o núcleo de uma educação liberal e nisto suas opiniões iriam dominar muito do pensamento pedagógico até nossos dias. As sete artes liberais, que permaneceram intocáveis por dois milênios, eram constituídas pelo *quadrivium* de Arquitas mais o *trivium* da gramática, da retórica e da dialética de Zeno. Por isso pode-se com alguma justiça sustentar que os matemáticos da Idade Heróica foram responsáveis por muito, quanto à orientação nas tradições educacionais do Ocidente, especialmente na forma transmitida pelos filósofos do quarto século A. C.[1]

2 O quarto século A. C. iniciou-se com a morte de Sócrates, um filósofo que adotou o método dialético de Zeno e repudiou o pitagorismo de Arquitas. Sócrates reconhecia que na juventude fora atraído por questões como por que a soma 2 + 2 é igual ao produto 2 × 2, bem como pela filosofia da natureza de Anaxágoras; porém, percebendo que nem a matemática nem a ciência podiam satisfazer seu desejo de conhecer a essência das coisas, ele se entregou à sua característica busca do homem.

No *Phaedo* de Platão, o diálogo em que as últimas horas de Sócrates são tão magnificamente descritas, vemos como profundas dúvidas metafísicas impediam que Sócrates se dedicasse à matemática ou à ciência da natureza.

> Não posso me convencer de que, quando se soma um a um, o um a que foi feita a adição se transforma em dois, ou que duas unidades somadas façam dois em conseqüência da adição. Não posso entender como quando separadas cada uma era um e não dois e agora, quando reunidas, a simples justaposição ou encontro delas seja causa de se tornarem dois[2].

[1] O estabelecimento definitivo desse particular grupo de sete artes liberais no entanto só se deu no quarto século de nossa era, e a divisão delas no *trivium* e *quadrivium* só se tornou tradicional com o renascimento carolingiano. Marshall Clagett, em *Greek Science in Antiquity*, 2.ª edição, New York, EUA: Collier, 1966, p. 185, escreve que o uso do termo latino *quadrivium* parece vir de Boécios (aproximadamente 480-524)

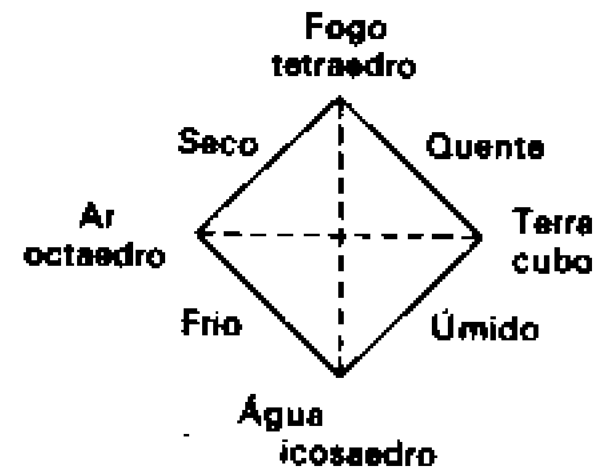
[2] *Dialogues of Plato* (1875), I, 476-477

Platão e Aristóteles na "Escola de Atenas" de Rafael

Por isso, a influência de Sócrates no desenvolvimento da matemática foi ínfima, se não negativa. Isso torna ainda mais surpreendente que seu discípulo e admirador, Platão, se tornasse a inspiração para a matemática do quarto século A. C. Nesse capítulo vamos nos concentrar nas realizações matemáticas de meia dúzia de homens que viveram entre a morte de Sócrates em 399 A. C. e a morte de Aristóteles em 322 A. C. Os seis homens cujo trabalho descreveremos (além do de Platão e Aristóteles) são Teodoro de Cirene (viveu por volta de 390 A. C.), Teaetetus (morreu em 368 A. C.), Eudoxo de Cnido (morreu por volta de 355 A. C.), Menaecmus (viveu por volta de 350 A. C.) e seu irmão Dinóstrato (viveu por volta de 350 A. C.) e Autolicus de Pitane (viveu por volta de 330 A. C.).

Esses seis matemáticos não estavam espalhados pelo mundo grego, como os do quinto século A. C.; estavam associados, mais ou menos de perto, com a Academia de Platão em Atenas. Embora o próprio Platão não tenha dado contribuição específica digna de nota a resultados matemáticos técnicos, ele era o centro da atividade matemática da época e guiava e inspirava seu desenvolvimento. Sobre as portas de sua escola lia-se:

"Que ninguém que ignore a geometria entre aqui"; seu entusiasmo pelo assunto fez com que se tornasse conhecido não como matemático mas como "o criador de matemáticos". É claro que a alta opinião, que tinha da matemática, Platão não recebeu de Sócrates; na verdade, os primeiros diálogos platônicos raramente mencionam a matemática. Quem converteu Platão a uma visão matemática foi certamente Arquitas, um amigo a quem ele visitou na Sicília em 388 A. C. Talvez tenha sido aqui que ele soube dos cinco sólidos regulares, que eram associados aos quatro elementos de Empédocles num esquema



cósmico que fascinou os homens por séculos. Talvez a veneração dos pitagóricos pelo dodecaedro tenha sido o que levou Platão a considerá-lo o quinto e último sólido regular, como um símbolo do universo. Platão pôs suas idéias sobre os sólidos regulares num diálogo entitulado *Tímaeus*, presumivelmente do nome de um pitagórico, que serve como principal interlocutor. Não se sabe se Tímaeus de Locri realmente existiu ou se Platão o inventou como um personagem através do qual enunciou as idéias pitagóricas que ainda eram influentes no que hoje é o sul da Itália. Os poliedros regulares freqüentemente foram chamados "corpos cósmicos" ou "sólidos platônicos" devido à maneira pela qual Platão no *Tímaeus* os aplicou à explicação de fenômenos científicos. Embora esse diálogo, escrito provavelmente quando Platão estava perto dos setenta anos, seja a mais antiga evidência definida da associação dos quatro elementos com os sólidos regulares, muito dessa fantasia deve-se aos pitagóricos. Proclus atribui a construção das figuras cósmicas a Pitágoras; mas o escoliasta Scridas relatou que o amigo de Platão, Teaetetus, nascido em 414 A. C. aproximadamente e filho de um dos mais ricos patrícios da Ática foi o primeiro a escrever sobre eles. Um escólio (de data incerta) ao Livro XIII de *Os elementos* de Euclides afirma que somente três dos cinco sólidos regulares eram devidos aos pitagóricos e que foi através de Teaetetus que o octaedro e o icosaedro se tornaram conhecidos. Parece provável que, em qualquer caso, Teaetetus tenha feito um dos estudos mais extensos dos cinco sólidos regulares e a ele provavelmente se deve o teorema que diz que há cinco e somente cinco poliedros regulares. Talvez seja também o responsável pelos cálculos, que se encontram em *Os elementos*, das razões das arestas dos sólidos regulares para o raio da esfera circunscrita.

Teaetetus era um jovem ateniense que morreu em 369 A. C. de uma combinação de ferimentos recebidos em batalha e disenteria, e o diálogo que tem seu nome foi um tributo comemorativo de Platão a seu amigo. No diálogo, travado supostamente trinta anos antes, Teaetetus discutiu com Sócrates e Teodoro a natureza das grandezas incomensuráveis. Supõe-se que essa discussão tomou mais ou menos a forma que encontramos no início do Livro X de *Os elementos*. Aqui são feitas distinções não só entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis, mas entre aquelas que, sendo incomensuráveis em comprimento, são ou não são incomensuráveis em quadrado. Raízes como $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são incomensuráveis em comprimento mas são comensuráveis em quadrado, pois seus quadrados têm razão 3 para 5. As grandezas $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ e $\sqrt{1+\sqrt{5}}$, de outro lado, são incomensuráveis tanto em comprimento quanto em quadrado.

4 O diálogo, que Platão compôs em memória de seu amigo Teaetetus, contém informação sobre outro matemático a quem Platão admirava e que contribuiu para o desenvolvimento inicial da teoria das grandezas incomensuráveis. Falando da então recente descoberta do que chamamos irracionalidade de $\sqrt{2}$, Platão no Teaetetus diz que seu mestre, Teodoro de Cirene — de quem Teaetetus também fora aluno —, tinha sido o

primeiro a provar a irracionalidade das raízes quadradas dos inteiros não-quadrados de 3 a 17 inclusive. Não se sabe como ele o fez, nem por que parou na $\sqrt{17}$. A prova, em qualquer dos casos, poderia ser construída na linha da que Aristóteles deu para $\sqrt{2}$ e que foi interpolada em versões posteriores do Livro X de *Os elementos*. Referências em obras históricas antigas indicam que Teodoro fez descobertas em geometria elementar que mais tarde foram incorporadas em *Os elementos* de Euclides; mas as obras de Teodoro se perderam.

5 Platão é importante na história da matemática principalmente por seu papel como inspirador e guia de outros, e talvez a ele se deva a distinção clara que se fez na Grécia antiga entre aritmética (no sentido de teoria dos números) e logística (a técnica de computação). Platão considerava a logística adequada para negociantes e guerreiros, que "precisam aprender a arte dos números, ou não saberão dispor suas tropas". O filósofo, de outro lado, deve conhecer a aritmética "porque deve subir acima do mar das mudanças e captar o verdadeiro ser". Além disso, diz Platão na *República*, "a aritmética tem um efeito muito grande de elevar a mente, compelindo-a a raciocinar sobre o número abstrato". Os pensamentos de Platão sobre o número eram tão elevados que chegam ao domínio do misticismo e evidente fantasia. No último livro da *República* ele se refere a um número que ele chama "o senhor de melhores e piores nascimentos". Tem havido muita especulação sobre esse "número platônico", e uma teoria é que seja o número $60^4 = 12\,960\,000$ — importante na numerologia babilônica e possivelmente transmitido a Platão através dos pitagóricos. Nas *Leis*, o número de cidadãos no estado ideal é dado como 5 040 (isto é, $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$). Esse é às vezes chamado o número nupcial de Platão e muitas teorias foram elaboradas quanto ao que Platão teria em mente.

Assim como Platão via na aritmética uma clara separação entre os aspectos teóricos e computacionais, também na geometria ele defendia a causa da matemática pura contra a visão materialista do artesão ou técnico. Plutarco, em sua *Vida de Marcelo*, fala da indignação de Platão em face do uso de aparatos mecânicos em geometria. Aparentemente Platão considerava tal uso "pura e simples corrupção e aniquilação do que há de bom na geometria, que assim dava vergonhosamente as costas aos objetos desmaterializados da inteligência pura". Platão, conseqüentemente, pode ter sido o grande responsável pela restrição, que prevalecia nas construções geométricas gregas, às que podem ser efetuadas só com régua e compasso. A razão desta limitação provavelmente não foi a simplicidade dos instrumentos usados na construção de retas e círculos, mas antes a simetria das configurações. Qualquer dos infinitos diâmetros de um círculo é um eixo de simetria da figura; qualquer ponto de uma reta pode ser considerado um centro de simetria, assim como qualquer reta perpendicular a uma reta dada é uma reta em relação à qual a reta dada é simétrica. A filosofia platônica, com sua apostatização de idéias, naturalmente acharia um papel privilegiado para a reta e o círculo entre as figuras geométricas. De modo um tanto semelhante Platão glorificou o triângulo. As faces dos cinco sólidos regulares, segundo Platão não eram simples triângulos, quadrados e pentágonos. Por exemplo, cada uma das faces de um tetraedro, que é um triângulo equilátero, é feita de seis triângulos retângulos menores, formados com suas alturas. Por isso, ele pensava no tetraedro regular como feito de vinte e quatro triângulos retângulos escalenos em que a hipotenusa é o dobro de um dos lados; o octaedro regular contém 8×6 ou 48 de tais triângulos, e o icosaedro 20×6, ou 120. Também o hexaedro (cubo) é construído de vinte e quatro triângulos retângulos isósceles, pois cada face quadrada fica dividida em quatro triângulos retângulos quando se traçam as diagonais.

Ao dodecaedro Platão tinha atribuído papel especial como representante do universo, dizendo enigmaticamente que "Deus usou-o para o todo" (*Timaeus*, 55C)[3]. Platão considerava o dodecaedro como composto de 360 triângulos retângulos escalenos, pois, quando em cada uma das faces pentagonais são traçadas as cinco diagonais e as cinco medianas, cada uma das doze faces conterá trinta triângulos retângulos. A associação

[3]Referências aqui e em outros lugares, a menos que seja feita menção expressa, são aos diálogos de Platão e são do *Dialogues*, traduzidos para o inglês por Benjamin Jowett (Oxford, EUA, 1871, 4 volumes)

dos quatro primeiros sólidos regulares, com os tradicionais quatro elementos universais, forneceu a Platão, no *Timaeus*, uma teoria da matéria harmoniosamente unificada, de acordo com a qual tudo era construído de triângulos retângulos ideais. Toda a fisiologia, bem como as ciências da matéria inerte, está baseada, no Timaeus, nesses triângulos. O crescimento normal do corpo, por exemplo, é explicado como segue.

> Quando a criatura toda é jovem e os triângulos de seus corpos constituintes estão por assim dizer recém-saídos da oficina, as suas juntas estão firmemente unidas... Assim, como quaisquer triângulos que compõem seu alimento e bebida... são mais velhos e fracos que os seus próprios, com seus triângulos recém-feitos, a criatura os domina e os corta em pedaços e assim o animal cresce.

Na velhice, ao contrário, os triângulos do corpo estão tão afrouxados pelo uso "que não podem mais cortar à sua semelhança os triângulos do alimento quando eles entram, mas são eles próprios facilmente divididos pelos intrusos vindos de fora" e a criatura se desgasta[4].

6 A Pitágoras se atribui o ter tornado a matemática uma disciplina liberal, mas Platão teve grande influência para que se tornasse parte essencial do currículo para a educação de homens de estado. Influenciado talvez por Arquitas, Platão acrescentaria às matérias do quadrivium uma nova, a estereometria, pois acreditava que a geometria dos sólidos não tivera a ênfase necessária. Platão discutiu também os fundamentos da matemática, esclareceu algumas definições e reorganizou as hipóteses. Frisou que o raciocínio usado na geometria não se refere às figuras visíveis desenhadas, mas às idéias absolutas que elas representam. Os pitagóricos tinham definido um ponto como "unidade com posição" mas Platão preferia pensar num ponto como início de um segmento de reta. A definição de reta como "comprimento sem largura" parece originária da escola de Platão, assim como a idéia de que a reta "jaz uniformemente com seus pontos". Na aritmética Platão deu ênfase não só à distinção entre números pares e ímpares como entre as categorias "par vezes par", "ímpar vezes par" e "ímpar vezes ímpar". Embora nos seja dito que Platão deu contribuições aos axiomas da matemática, não temos uma exposição de suas premissas.

Poucas contribuições matemáticas específicas são atribuídas a Platão. Uma fórmula para triplas pitagóricas $(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$, onde n é qualquer número natural, tem o nome de Platão, mas é apenas uma versão ligeiramente modificada de um resultado já conhecido pelos babilônios e pitagóricos. Talvez seja mais genuinamente significativa a atribuição do chamado método analítico a Platão. Numa demonstração matemática começa-se com o que é dado, ou de modo geral nos axiomas e postulados ou mais especificamente nos problemas a resolver. Avançando passo a passo, chega-se à afirmação a ser provada. Platão parece ter observado que com freqüência convém pedagogicamente, quando a cadeia de raciocínios que leva das premissas à conclusão não é evidente, inverter o processo. Começa-se com a proposição a ser provada e dela deduz-se uma conclusão que se sabe ser válida. Se, então, é possível inverter os passos nesse raciocínio, o resultado é uma demonstração da proposição. É improvável que Platão tenha sido o primeiro a notar a eficácia do ponto de vista analítico, pois qualquer investigação prévia de um problema equivale a isso. O que Platão provavelmente fez foi formalizar o método, ou talvez dar-lhe um nome.

O papel de Platão na história da matemática causa ainda disputas acirradas. Alguns[5] o consideram um pensador excepcionalmente profundo e incisivo; outros o representam como um *flautista de Hamerlin* da matemática, que seduzia os homens a abandonar os problemas do trabalho do mundo para se perderem em especulações vadias[6]. De qualquer forma, poucos negariam que Platão teve uma tremenda influência sobre o desenvolvimento da matemática. A Academia Platônica de Atenas tornou-se o centro matemático do mundo, e dessa escola provieram os principais mestres e pesquisadores durante

[4]*Timaeus* 81B-81D. Tradução para o inglês de F. M. Cornford, *Plato's Cosmology* (1937), p. 329

[5]Veja, por exemplo, François Lasserre, *The Birth of Mathematics in the Age of Plato* (1964)

[6]Lancelot Hogben, *Science for the Citizen* (New York; 1938), p. 64. Cf. George Sarton, *A History of Science* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1952), Vol. I, pp. 431 e seguintes

os meados do quarto século A. C. Desses o maior foi Eudoxo de Cnido (408-355? A. C.), que foi um discípulo de Platão e tornou-se o mais célebre matemático e astrônomo de seu tempo.

7 Às vezes lemos referências à "reforma platônica" da matemática e embora a frase tenda a exagerar as mudanças que tiveram lugar então, a obra de Eudoxo foi tão significativa que cabe a ela a palavra "reforma". Na juventude de Platão a descoberta do incomensurável causou um verdadeiro escândalo lógico, pois pareceu arruinar teoremas envolvendo proporções. Duas quantidades, como a diagonal e o lado do quadrado, são incomensuráveis quando sua razão não é igual à de algum número (inteiro) para um outro número (inteiro). Como então comparar as razões de grandezas incomensuráveis? Se Hipócrates realmente provou que as áreas de círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros, deve ter tido algum modo de manejar proporções ou igualdade de razões. Não sabemos como o fez, ou se ele, até certo ponto, antecipou Eudoxo, que deu uma nova definição, geralmente aceita, de razões iguais. Aparentemente os gregos usaram a idéia que quatro quantidades estão em proporção, $a:b = c:d$, se as duas razões $a:b$ e $c:d$ têm a mesma subtração mútua; isto é, se em cada razão, a quantidade menor cabe um igual número inteiro de vezes na maior e o resto em cada caso cabe um igual número inteiro de vezes na menor e o novo resto no precedente o mesmo número inteiro de vezes e assim por diante. Uma tal definição é incômoda e foi um brilhante feito de Eudoxo descobrir a teoria de proporções usada no Livro V de *Os elementos* de Euclides. A palavra razão denotava essencialmente um conceito não definido na matemática grega, pois a "definição" de Euclides de razão, como uma espécie de relação de tamanho entre duas grandezas de mesmo tipo é inteiramente inadequada. Tem mais sentido o enunciado de Euclides segundo o qual se diz que duas grandezas estão numa razão se é possível achar um múltiplo de cada uma que seja maior que a outra. Isto é essencialmente o enunciado do "axioma de Arquimedes" — uma propriedade que o próprio Arquimedes atribuiu a Eudoxo. O conceito de razão de Eudoxo exclui pois o zero e esclarece o que se entende por grandezas de mesma espécie. Um segmento de reta, por exemplo, não pode ser comparado, em termos de razão, com uma área; nem uma área com um volume.

Após essas observações preliminares sobre razões, Euclides dá na Definição 5 do Livro V a célebre formulação de Eudoxo.

> Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente[7].

Isto é, $a/b = c/d$ se, e somente se, dados inteiros m e n sempre que $ma < nb$, então $mc < nd$; ou se $ma = nb$, então $mc = nd$; ou se $ma > nb$, então $mc > nd$.

A definição de Eudoxo de igualdade de razões se assemelha ao processo de multiplicação cruzada em uso hoje para frações — $a/b = c/d$ se e somente se, $ad = bc$ — processo equivalente a reduzir ao mesmo denominador. Para mostrar que 3/6 é igual a 4/8 por exemplo, multiplicamos 3 e 6 por 4 para obter 12 e 24 e multiplicamos 4 e 8 por 3, obtendo o mesmo par de números 12 e 24. Se tivéssemos usado 7 e 13 como multiplicadores, obtendo o par 21 e 42 no primeiro caso e 52 e 104 no segundo e assim como 21 é menor que 52 também 42 é menor que 104. (Aqui permutamos o segundo e o terceiro termos na definição de Eudoxo, para ficar de acordo com as operações comumente usadas hoje, mas em qualquer caso valem relações semelhantes.) Nosso exemplo aritmético não faz justiça à sutileza e eficiência da idéia de Eudoxo, porque a aplicação aqui é trivial. Para formar uma apreciação melhor de sua definição seria conveniente substituir a, b, c, d por radicais, ou melhor, tomar a, b como volumes de esferas e c, d como cubos de seus raios. Aqui a multiplicação cruzada perde o sentido e não é evidente que a definição de Eudoxo se aplica. Na verdade a definição não está longe das definições de

[7]*The Thirteen Books of Euclid's Elements*, editado por T. L. Heath (Cambridge, 1908, 3 volumes), II, 114

número real dadas no século dezenove, pois divide a coleção dos números racionais m/n em duas classes, conforme $ma \leq nb$ ou $ma > nb$. Porque existem infinitos números racionais, os gregos, por implicação, se defrontavam com o conceito que desejavam evitar, o de conjunto infinito; mas pelo menos era possível agora dar demonstrações satisfatórias dos teoremas sobre proporções.

8 Uma crise resultante do incomensurável fora enfrentada com sucesso, graças à imaginação de Eudoxo; mas restava um problema não resolvido, o da comparação de configurações curvas e retilíneas. Aqui, também, parece ter sido Eudoxo quem forneceu a chave. Matemáticos anteriores parecem ter sugerido que se tentasse inscrever e circunscrever figuras retilíneas dentro e por fora da figura curva, e ir multiplicando-se indefinidamente o número de lados; mas não sabiam como terminar o argumento, pois não conheciam o conceito de limite. Segundo Arquimedes foi Eudoxo quem forneceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes chamado axioma de Arquimedes e que serviu de base para o método de exaustão, o equivalente grego do cálculo integral. O lema, ou axioma, diz que, dadas duas grandezas que têm uma razão (isto é, nenhuma delas sendo zero), pode-se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra. Esse enunciado eliminava um nebuloso argumento sobre segmentos de reta indivisíveis, ou infinitésimos fixos, que às vezes aparecia. Excluía também a comparação entre o chamado ângulo de contingência (formado por uma curva C e sua tangente T num ponto P de C) com ângulos retilíneos ordinários. O ângulo de contingência parecia ser uma grandeza diferente de zero, no entanto não satisfaz ao axioma de Eudoxo com relação às medidas de ângulos retilíneos.

Do axioma de Eudoxo (ou Arquimedes) é fácil, por uma *reductio ad absurdum*, provar uma proposição que formava a base do método de exaustão dos gregos, da seguinte forma.

> Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie[8].

Esta proposição, que chamaremos de "propriedade de exaustão" equivale à formulação moderna seguinte. Se M é uma grandeza dada, ε uma grandeza prefixada de mesma espécie e r é uma razão tal que $1/2 \leq r < 1$, então podemos achar um inteiro N tal que $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo inteiro $n > N$. Isto é, a propriedade de exaustão equivale a dizer que $\lim_{n \to \infty} M(1-r)^n = 0$. Ainda mais, os gregos usaram essa propriedade para provar teoremas sobre as áreas e volumes de figuras curvilíneas. Em particular, Arquimedes atribuiu a Eudoxo a primeira prova satisfatória de que o volume do cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e mesma altura, o que parece indicar que o método de exaustão vem de Eudoxo. Se é assim, então é a Eudoxo (e não a Hipócrates) que devemos provavelmente as provas encontradas em Euclides dos teoremas sobre áreas de círculos e volumes de esferas. Tinham já sido feitas, antes, sugestões fáceis de que a área do círculo podia ser esgotada inscrevendo nele um polígono regular e aumentando indefinidamente o número de lados, mas foi o método de exaustão que tornou esse processo rigoroso. (Deve-se notar que a frase "método de exaustão" não era usada pelos gregos antigos, sendo uma invenção moderna; mas está tão firmemente estabelecida na história da matemática que continuaremos a fazer uso dela.) Como ilustração do modo pelo qual Eudoxo provavelmente aplicava o método, damos aqui, em notação um tanto modernizada, a prova de que áreas de círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros. A prova tal como está em *Os elementos* de Euclides, XII, 2, é provavelmente a de Eudoxo.

[8]Veja *Elements of Euclid* (Editado por T. L. Heath, reimpresso, New York: Dover, 3 volumes 1956), III, 14. O axioma, é claro, vale ainda se substituirmos metade por um terço, ou um quarto, ou qualquer fração própria

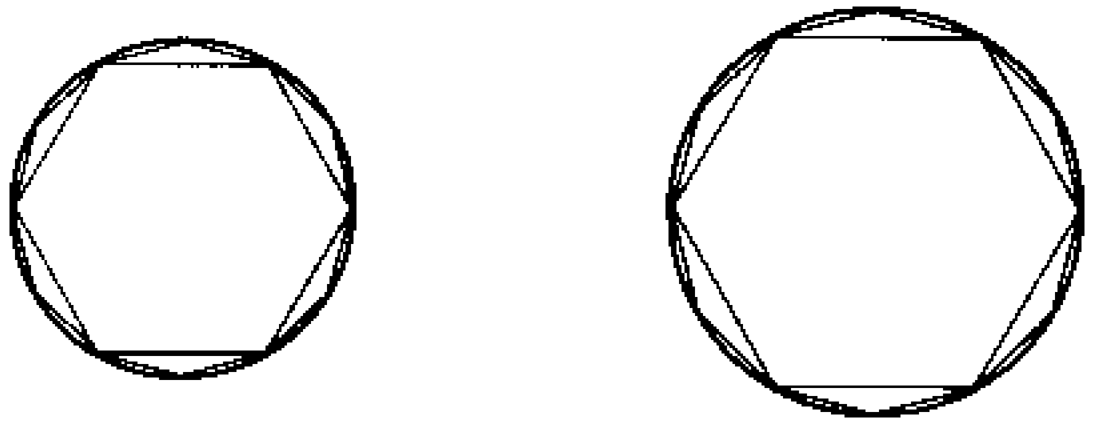


Figura 6.1

Sejam c e C os círculos, com diâmetros d e D e áreas a e A. Queremos provar que $a/A = d^2/D^2$. A prova estará completa se procedermos indiretamente, mostrando que não são verdadeiras as outras duas possibilidades, isto é, $a/A < d^2/D^2$ e $a/A > d^2/D^2$. Suponhamos pois primeiro que $a/A > d^2/D^2$. Então existe uma grandeza $a' < a$ tal que $a'/A = d^2/D^2$. Seja $a - a'$ a grandeza prefixada $\varepsilon > 0$. Vamos inscrever nos círculos c e C polígonos regulares de áreas p_n e P_n, com o mesmo número n de lados, e consideremos as áreas intermediárias, fora dos polígonos mas dentro dos círculos (Fig. 6.1). Se dobrarmos o número de lados é evidente que estaremos subtraindo dessas áreas intermediárias mais da metade. Logo, pelo processo de exaustão, dobrando sucessivamente o número de lados (isto é, fazendo crescer n), as áreas intermediárias podem ser reduzidas até que $a - p_n < \varepsilon$. Então, como $a - a' = \varepsilon$, temos $p_n > a'$. Agora, de teoremas anteriores sabemos que $p_n/P_n = d^2/D^2$ e como supusemos que $a'/A = d^2/D^2$, temos $p_n/P_n = a'/A$. Logo, se $p_n > a'$ devemos concluir que $P_n > A$. Mas como P_n é a área de um polígono *inscrito dentro* do círculo de área A, é evidente que P_n não pode ser maior que A. Como uma falsa conclusão implica que uma premissa é falsa, está excluída a possibilidade que $a/A > d^2/D^2$. De modo análogo mostramos ser impossível que $a/A < d^2/D^2$ e com isso provamos o teorema que diz que as áreas dos círculos são proporcionais aos quadrados sobre seus diâmetros.

9 A propriedade que acabamos de demonstrar parece ter sido o primeiro teorema preciso relativo a figuras curvilíneas; aponta Eudoxo como o provável originador do cálculo integral, a maior contribuição à matemática dos membros da Academia Platônica. Eudoxo, além disso, não era apenas um matemático e na história da ciência é conhecido como o pai da astronomia científica. Diz-se que Platão propôs a seus associados que tentassem dar uma representação geométrica dos movimentos do Sol, da Lua e dos cinco planetas conhecidos. É claro, era aceito tacitamente que tais movimentos se comporiam de movimentos circulares uniformes. Apesar de tal restrição, Eudoxo conseguiu dar para cada um dos sete corpos celestiais uma representação satisfatória por meio de uma composição de esferas concêntricas com a terra como centro e com raios variáveis, cada uma girando uniformemente em torno de um eixo fixo em relação à superfície da esfera seguinte, em ordem de grandeza crescente. Para cada planeta, portanto, Eudoxo deu um sistema conhecido por seus sucessores como "esferas homocêntricas"; esses esquemas geométricos foram combinados por Aristóteles na bem conhecida cosmologia peripatética, das esferas cristalinas, que prevaleceu durante quase 2 000 anos.

Eudoxo foi sem dúvida o melhor matemático da Idade Helênica, mas todas as suas obras se perderam[9]. É possível que a estimativa aristotélica para a circunferência da terra — cerca de 400 000 estados ou 60 000 quilômetros — seja devida a Eudoxo, pois Arquimedes refere que Eudoxo tinha calculado que o diâmetro do Sol era nove vezes o da Terra. Em seu esquema astronômico Eudoxo tinha visto que por uma combinação de movimentos circulares ele podia descrever os movimentos dos planetas em órbitas que se enrolavam ao longo de uma curva chamada *hippopede*. Essa curva, que se assemelha a um oito traçado sobre uma esfera, é obtida como intersecção de uma esfera com um cilindro tangente internamente à esfera — uma das poucas curvas novas reconhecidas pelos gregos. Havia, na época, duas maneiras de definir curvas: (1) por combinações de

[9]Para uma exposição extensa e bem fundamentada do que Eudoxo provavelmente fez, veja O. Becker, "Eudoxus-Studien", *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte B, II (1933), 311-333, 369-387; III (1936), 236-244, 370-410

movimentos uniformes e (2) como intersecções de superfícies geométricas familiares. A *hippopede* de Eudoxo é um bom exemplo de uma curva que pode ser obtida das duas maneiras. Proclus, que escreveu cerca de 800 anos depois do tempo de Eudoxo, conta que Eudoxo tinha descoberto muitos teoremas gerais de geometria e tinha aplicado o método platônico de análise ao estudo da *secção* (provavelmente a secção áurea); mas a teoria das proporções e o método de exaustão são ainda as grandes contribuições que justificam sua fama.

10 Eudoxo deve ser lembrado na história da matemática, não só por seu próprio trabalho, mas também pelo de seus discípulos. Na Grécia a continuidade da tradição era mantida por um forte elo indo de mestre a discípulo. Assim Platão aprendeu de Arquitas, Teodoro e Teaetetus; a influência platônica por sua vez passou de Eudoxo aos irmãos Menaecmus e Dinóstrato, que atingiram ambos a eminência em matemática. Vimos que Hipócrates de Chios tinha mostrado que a duplicação do cubo podia ser conseguida desde que se pudesse encontrar e usar curvas com as propriedades expressas na proporção aumentada $a/x = x/y = y/2a$; vimos também que os gregos tinham somente dois processos para descobrir curvas novas. Foi, portanto, uma realização importante de Menaecmus o ter descoberto que curvas com a propriedade desejada estavam à disposição. Na verdade, havia uma família de curvas adequadas, que podiam ser obtidas de uma mesma fonte, cortando um cone circular reto por um plano perpendicular a um elemento do cone. Isto é, parece ter descoberto as curvas que mais tarde foram chamadas, elipse, parábola e hipérbole.

De todas as curvas, além de círculos e retas, que deveriam ser visíveis pela experiência diária, a elipse deveria ser a mais evidente, pois está presente sempre que um círculo é olhado obliquamente ou sempre que um tronco cilíndrico é serrado diagonalmente. No entanto a primeira descoberta da elipse parece ter sido feita por Menaecmus como um simples subproduto da pesquisa em que a parábola e a hipérbole é que ofereciam as propriedades necessárias à solução do problema de Delos. Começando com um cone circular reto simples tendo um ângulo reto no vértice (isto é, um ângulo gerador de 45°), ele descobriu que cortando-o por um plano perpendicular a um elemento, a curva de intersecção é tal que, em linguagem de geometria analítica atual, sua equação pode ser escrita na forma $y^2 = lx$, onde l é uma constante que depende da distância do plano ao vértice. Não sabemos como Menaecmus deduziu essa propriedade, mas ela depende apenas de teoremas de geometria elementar. Seja ABC o cone e seja ele cortado segundo a curva EDG por um plano perpendicular ao elemento ADC do cone (Fig. 6.2). Então, por um ponto P qualquer da curva, faça-se passar um plano horizontal, que cortará o cone segundo o círculo PVR e seja Q o outro ponto de intersecção da curva (parábola) com o círculo. Das simetrias envolvidas resulta que a reta $PQ \perp RV$ em O. Logo OP é a média proporcional entre RO e OV. Além disso, da semelhança dos triângulos OVD e BCA segue-se que $OV/DO = BC/AB$ e da semelhança dos triângulos $R'DA$ e ABC resulta $R'D/AR' = BC/AB$. Se $OP = y$ e $OD = x$ são coordenadas do ponto P, temos $y^2 = RO \cdot OV$,

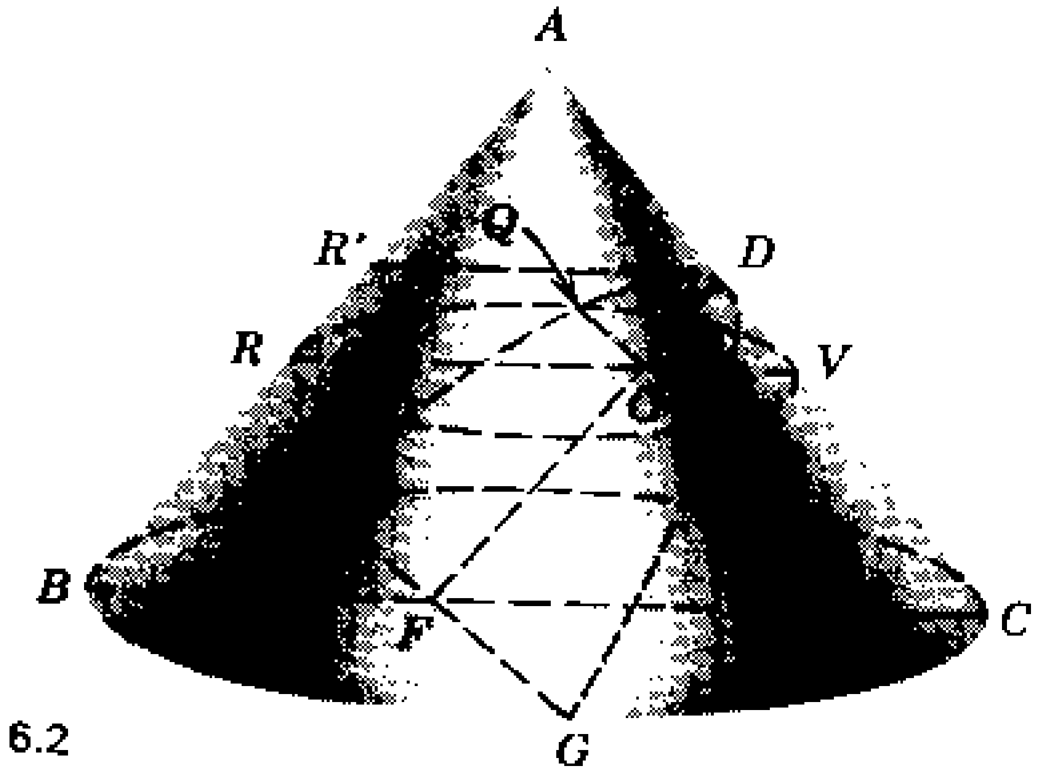


Figura 6.2

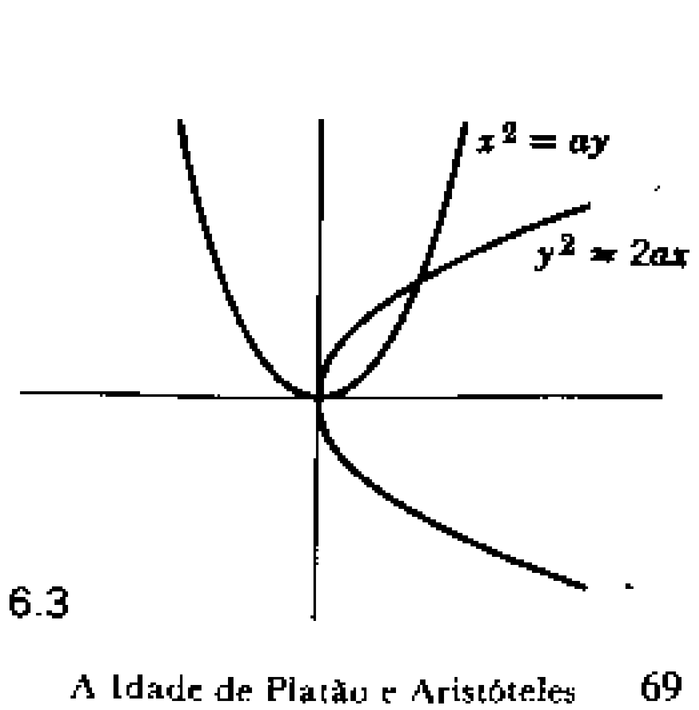


Figura 6.3

ou substituindo

$$y^2 = R'D \cdot OV = AR' \cdot \frac{BC}{AB} \cdot DO \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{AR' \cdot BC^2}{AB^2} \cdot x$$

Como os segmentos AR', BC, e AB são os mesmos para todos os pontos P da curva $EQDPG$, podemos escrever a equação da curva, uma "secção de cone circular retângulo", como $y^2 = lx$, onde l é uma constante, mais tarde chamada o *latus rectum* da curva. De modo semelhante podemos achar uma equação da forma $y^2 = lx - b^2x^2/a^2$ para uma "secção de cone acutângulo" e uma equação da forma $y^2 = lx + b^2x^2/a^2$ para uma "secção de cone obtusângulo", onde a e b são constantes e o plano de corte é perpendicular a um elemento do cone circular reto, acutângulo ou obtusângulo.

Menaecmus aparentemente deduziu essas propriedades das secções cônicas e outras mais. Como esse material tem forte ar de uso de coordenadas, como foi ilustrado acima, foi algumas vezes sustentado que ele dispunha da geometria analítica[10]. Tal opinião é apenas parcialmente justificável, pois certamente Menaecmus não sabia que uma equação em duas quantidades incógnitas determina uma curva. Na verdade, o conceito geral de equação em quantidades incógnitas era estranho ao pensamento grego. Foram as deficiências de notações algébricas que mais fortemente operaram para impedir que os gregos construíssem uma verdadeira geometria de coordenadas.

Menaecmus não poderia prever quantas belas propriedades o futuro desvendaria. Tinha esbarrado nas cônicas numa busca bem sucedida por curvas com as propriedades adequadas à duplicação do cubo. Em termos de notação moderna é fácil chegar à solução. Deslocando o plano de secção (Fig. 6.2) podemos achar uma parábola com qualquer *latus rectum*. Se, então, quisermos duplicar um cubo de aresta a, determinamos sobre um cone retângulo duas parábolas, uma com latus rectum a, outra com latus rectum $2a$. Se agora as colocarmos com vértices na origem e eixos segundo o dos x e o dos y respectivamente, o ponto de intersecção das duas curvas terá coordenadas (x, y) satisfazendo a proporção continuada $a/x = x/y = y/2a$ (Fig. 6.3) — isto é, $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a\sqrt[3]{4}$. A abscissa x é pois a aresta do cubo procurado.

É provável que Menaecmus soubesse que a duplicação também pode ser efetuada por meio de uma hipérbole retangular mais uma parábola. Se a parábola de equação $y^2 = (a/2)x$ e a hipérbole $xy = a^2$ são colocadas sobre um mesmo sistema de coordenadas, o ponto de intersecção terá coordenadas $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a/\sqrt[3]{2}$, a abscissa x sendo o lado do cubo procurado. Menaecmus provavelmente conhecia muitas das propriedades hoje familiares das secções cônicas, inclusive as assíntotas da hipérbole, que lhe permitiriam operar com os equivalentes das equações modernas que usamos acima. Proclus diz que Menaecmus foi um daqueles que "tornaram toda a geometria mais perfeita"; mas pouco sabemos do que fez realmente. Sabemos que Menaecmus ensinou Alexandre, o Grande, e a lenda atribui a Menaecmus o célebre comentário, quando seu real discípulo lhe pediu um atalho mais curto para a geometria: "Rei, para viajar pelo país há estradas reais e estradas para os cidadãos comuns; mas na geometria há só uma estrada para todos." Entre as principais autoridades, quanto à atribuição a Menaecmus da descoberta das secções cônicas, há uma carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu Energetes, citada 700 anos depois por Eutocius, em que várias duplicações do cubo são mencionadas. Entre elas, uma com a desajeitada construção de Arquitas e outra "cortando o cone nas tríadas de Menaecmus".

12 Dinóstrato, irmão de Menaecmus, era também um matemático, e se um irmão "resolveu" o problema da duplicação do cubo, o outro "resolveu" o da quadratura do círculo. A quadratura tornou-se uma questão simples quando foi observada uma notável propriedade da extremidade Q da trissectriz de Hípias, aparentemente por Dinóstrato. Se a equação da trissectriz (Fig. 6.4) é $\pi r \operatorname{sen} \theta = 2a\theta$, onde a é o lado do quadrado $ABCD$ associado à curva, então o limite de r quando θ tende a zero é $2a/\pi$. Isso é evidente para quem co-

[10]Veja J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods* (1940), pp. 117-119, e H. G. Zeuthen, "Sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité", *Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, Oversigt*, 1888, pp. 127-144

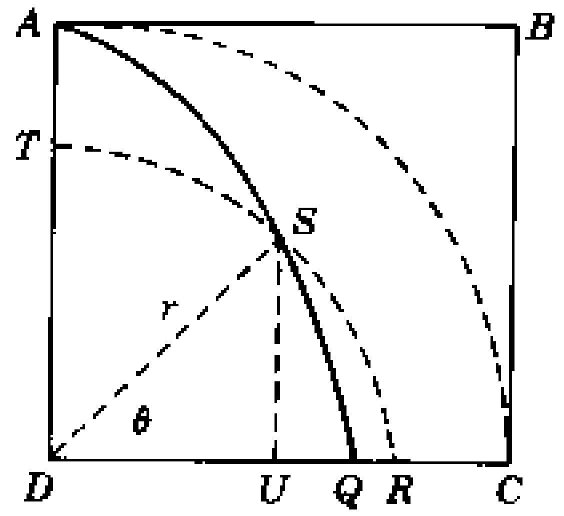


Figura 6.4

nhece rudimentos de cálculo e se lembra do fato que $\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta/\theta = 1$ para a medida em radianos. A prova, tal como é dada por Papus e provavelmente devida a Dinóstrato, baseia-se unicamente em considerações de geometria elementar. O teorema de Dinóstrato diz que o lado a é a média proporcional entre o segmento DQ e o arco do quarto de círculo AC, isto é, $\widehat{AC}/AB = AB/DQ$. Usando uma prova indireta tipicamente grega, estabelecemos o teorema por destruição das alternativas. Suponhamos primeiro que $\widehat{AC}/AB = AB/DR$ onde $DR > DQ$. Então seja S a intersecção do círculo de centro D e raio DR com a trissectriz e T a intersecção do mesmo círculo com o lado AD do quadrado. De S baixemos a perpendicular SU ao lado CD. Conforme Dinóstrato sabia os arcos de círculo correspondentes são proporcionais aos raios logo $\widehat{AC}/AB = \widehat{TR}/DR$; e como por hipótese $\widehat{AC}/AB = AB/DR$, resulta que $\widehat{TR} = AB$. Mas pela propriedade que define a trissectriz sabemos que $\widehat{TR}/\widehat{SR} = AB/SU$. Logo, como $\widehat{TR} = AB$, deve seguir-se que $\widehat{SR} = SU$, o que é evidentemente falso, pois a perpendicular é mais curta que qualquer outro segmento ou curva indo de S à reta DC. Portanto o quarto termo DR na proporção $\widehat{AC}/AB = AB/DR$ não pode ser maior que DQ. De modo semelhante provamos que essa quarta proporcional não pode ser menor que DQ; portanto o teorema de Dinóstrato está provado; isto é, $\widehat{AC}/AB = AB/QD$.

Dado o ponto Q de intersecção da trissetriz com DC, temos, pois, uma proporção envolvendo três segmentos retilíneos e o arco circular AC. Por uma construção geométrica simples do quarto termo numa proporção podemos facilmente traçar um segmento de reta b de comprimento igual a AC. O retângulo que tem um lado $2b$ e a como o outro lado, tem área exatamente igual à do círculo com raio a; constrói-se facilmente um quadrado de área igual à do retângulo, tomando como lado do quadrado a média geométrica dos lados do retângulo. Como Dinóstrato provou que a trissetriz de Hípias serve para quadrar o círculo, a curva veio a ser chamada mais comumente de quadratriz. Naturalmente, era sempre perfeitamente claro para os gregos que o uso da curva para problemas de trissecção e quadratura viola as regras do jogo — que só permitem círculos e retas. As "soluções" de Hípias e Dinóstrato, como seus autores sabiam, eram sofísticas; por isso a procura de outras soluções, canônicas ou ilegítimas, continuou, com o resultado que várias curvas novas foram descobertas pelos geômetras gregos.

13 Poucos anos depois de Dinóstrato e Menaecmus viveu um matemático que se distingue por ter escrito o mais antigo tratado matemático grego preservado. Descrevemos bem completamente a obra de matemáticos helênicos anteriores, mas deve-se ter em mente que essas exposições não se baseiam em obras originais mas em sumários, comentários ou descrições posteriores. Ocasionalmente um comentador parece estar copiando de uma obra original existente na época, como quando Simplicius no sexto século de nossa era descreve a quadratura de lunas por Hipócrates. Mas só quando chegamos a Autólico de Pitane, um contemporâneo de Aristóteles, é que encontramos um autor grego do qual uma obra se preservou. Uma razão para a sobrevivência é que esse pequeno tratado, *Sobre a esfera móvel*, fazia parte de uma coleção conhecida por "Pequena astronomia", largamente usada pelos antigos astrônomos. *Sobre a esfera móvel* não é uma obra profunda, nem provavelmente muito original, pois contém pouca coisa além dos teoremas elementares de geometria da esfera, que seriam necessários à astronomia. Seu significado principal está no fato de indicar que a geometria grega tinha evidentemente atingido a

forma que consideramos típica da idade clássica. Teoremas são claramente enunciados e provados. Além disso, o autor usa, sem prova ou indicação de fonte, outros teoremas que ele considera bem conhecidos; concluímos, pois, que havia na Grécia em seu tempo, por volta de 320 A. C., uma tradição bem estabelecida de textos de geometria.

Autólico foi um contemporâneo de Aristóteles — o homem mais erudito de todos os tempos, cuja morte em geral se considera como o marco do fim do primeiro grande período, a Idade Helênica, na história da civilização grega. Aristóteles, como Eudoxo, foi discípulo de Platão e, como Menaecmus, mestre de Alexandre, o Grande. Aristóteles era antes de tudo um filósofo e biólogo, mas estava completamente a par das atividades dos matemáticos. Pode ter tido um papel em uma das principais controvérsias da época, pois foi-lhe atribuido um tratado *Sobre retas indivisíveis*. Os historiadores modernos questionam a autenticidade dessa obra, mas de qualquer forma provavelmente ela resultou das discussões que se verificam no Liceu Aristotélico. A tese do tratado é que a doutrina dos indivisíveis defendida por Xenócrates, um sucessor de Platão como chefe da Academia, é insustentável. O indivisível, ou infinitésimo fixo de comprimento, área, ou volume, fascinou homens de muitas épocas; Xenócrates julgou que esse conceito resolveria os paradoxos, como os de Zeno, que atormentavam matemáticos e filósofos. Aristóteles também dedicou muita atenção aos paradoxos de Zeno, mas procurou refutá-los baseado no senso comum. Por ter hesitado em acompanhar os matemáticos platônicos nas abstrações e tecnicalidades da época, não deu contribuição importante ao assunto. Diz-se que ele escreveu uma biografia de Pitágoras, embora esta se tenha perdido, e Eudemus, um de seus estudantes, escreveu uma história da geometria, também perdida. Além disso, por ter fundado a lógica e por suas freqüentes alusões a conceitos e teoremas matemáticos em sua volumosa obra[11] pode-se considerar que Aristóteles contribuiu para o desenvolvimento da matemática. A discussão aristotélica sobre o infinito potencial e atual na aritmética e geometria influenciou muitos dos que mais tarde escreveram sobre fundamentos da matemática; mas a afirmação de Aristóteles, de que os matemáticos "não precisam do infinito, nem o usam" deve ser comparada com as asserções de nosso tempo de que o infinito é o paraíso dos matemáticos. De significado mais positivo é a análise que Aristóteles fez do papel das definições e hipóteses na matemática.

5 Em 323 A. C. Alexandre, o Grande, morreu subitamente e seu império se desfez. Seus generais dividiram o território que o jovem conquistador dominava; Ptolomeu ficou com o Egito, Seleuco e Lisímaco disputaram a Síria e o Oriente, Antígono e Cassander, cada um durante algum tempo, governaram a Macedônia. Em Atenas, onde Aristóteles fora considerado um estrangeiro, o filósofo verificou que se tornara impopular, agora que seu poderoso soldado-estudante estava morto. Deixou Atenas e morreu no ano seguinte. Em toda a Grécia a ordem antiga mudava, política e culturalmente. Sob Alexandre tinha-se dado uma fusão gradual de costumes e cultura helênicos e orientais, de modo que era mais apropriado falar da nova civilização como sendo helenística em vez de Helênica. Além disso, a nova cidade de Alexandria, fundada pelo conquistador do mundo, agora tomou o lugar de Atenas como centro do mundo matemático. Na história da civilização costuma-se por isso distinguir dois períodos no mundo grego, separados por uma linha divisória conveniente constituída pelas mortes quase simultâneas de Alexandre e Aristóteles (assim como de Demóstenes). A parte mais antiga chama-se Idade Helênica, a segunda Helenística ou Alexandrina; nos capítulos imediatamente seguintes descrevemos a matemática do primeiro século de nova era, freqüentemente chamada a Idade Áurea da matemática grega.

BIBLIOGRAFIA

Becker, O., "Eudoxus-Studien," *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte B, *Studien*, II (1933), 311-333, 369-387; III (1936), 236-244, 370-410

Brumbaugh, R. S., *Plato's Mathematical Imagination* (Bloomington, Ind.: Indiana University Press, 1954)

[11]Veja T. L. Heath, *Mathematics in Aristotle* (1949)

Coolidge, J. L., *A History of the Conic Sections and the Quadric Surfaces* (Oxford: Clarendon, 1945)

Coolidge, J. J., *A History of Geometrical Methods* (Oxford: Clarendon, 1940; edição em brochura, New York: Dover, 1963)

Cornford, F. M., *Plato's Cosmology*, The Timaeus of Plato traduzido com comentário (Londres: Routledge and Kegan Paul, 1937)

Görland, Albert, *Aristoteles und die Mathematik* (Marburg, 1899)

Heath, T. L., *History of Greek Mathematics* (Oxford, 1921, 2 volumes)

Heath, T. L., *Mathematics in Aristotle* (Oxford, 1949)

Heiberg, J. L., "Mathematisches zu Aristoteles," *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*, **18** (1904), 1-49

Lasserre, François, *The Birth of Mathematics in the Age of Plato*, traduzido por Helen Mortimer (Londres: Hutchinson, 1964)

Loria, Gino, *Historie des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique* (Paris: Gauthier-Villars, 1929)

Michel, Paul-Henri, *De Pythagore à Euclide* (Paris: Société d'Edition "Les Belles Lettres," 1950)

Plato, *Dialogues*, traduzido por Benjamin Jowett (Oxford, 1871, 4 volumes)

Solmsen, Friedrich, "Platos Einfluss auf die Bildung der mathematischen Methode," *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte B, *Studien*, I (1929-1931), 93-107

Toeplitz, Otto, "Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Plato," *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte B, *Studien*, I (1931), 3-33

Wedberg, Anders, *Plato's Philosophy of Mathematics* (Estocolmo: Almquist & Wiksell, 1955)

Zeuthen, H. G., *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (Copenhagen, 1886)

EXERCÍCIOS

1. Acredita-se que Teaetetus achou, para os sólidos regulares, a razão da aresta para o raio da esfera circunscrita. Faça isso para três sólidos regulares. (Ver Livro XII de *Os elementos* de Euclides.)

2. Prove o teorema, provavelmente devido a Teaetetus, de que não há mais do que cinco sólidos regulares. (Ver Livro XIII de *Os elementos* de Euclides.)

3. Platão no *Teaetetus* diz que Teodoro provou que $\sqrt{3}$ é irracional. Dê uma prova cuidadosa desse teorema.

4. Ache os ângulos dos 360 triângulos retângulos escalenos que Platão indicou sobre a superfície do dodecaedro.

5. Complete a outra metade da prova por exaustão (ver texto) de que áreas de círculos estão entre si como quadrados sobre seus raios. (Use polígonos circunscritos.)

6. Descreva um método pelo qual Eudoxo poderia ter medido a circunferência da terra.

7. Usando o método sugerido em conexão com a obra de Menaecmus, prove que a secção de um cilindro é uma elipse. Isso foi provado por Serenus, que provavelmente viveu no quarto século de nossa era.

8. Em sua teoria do arco-íris Aristóteles usou um lugar geométrico usualmente atribuído a Apolônio, um matemático posterior: o lugar de todos os pontos P tais que as distâncias de P a dois pontos fixos P_1 e P_2 estão numa razão fixa diferente de um. Identifique o lugar.

*9. Prove que uma secção de Menaecmus (perpendicular a um elemento) de um cone acutângulo é uma elipse.

*10. Complete a prova de Dinóstrato (ver texto) mostrando que a hipótese $DR < DQ$ leva a um absurdo.

Capítulo 7

Euclides de Alexandria

> Ptolomeu uma vez perguntou a Euclides se havia um caminho mais curto, para a geometria, que o estudo de *Os elementos*, e Euclides lhe respondeu que não havia estrada real para a geometria.
>
> *Proclus Diadocus*

1 A morte de Alexandre, o Grande, levou a disputas entre os generais do exército grego; mas em 306 A. C. o controle da parte egípcia do império estava firmemente nas mãos de Ptolomeu I, e esse governante pode voltar a atenção para esforços construtivos. Entre seus primeiros atos está a criação em Alexandria de uma escola ou instituto conhecido como Museu, insuperado em seu tempo. Como professores ele chamou um grupo de sábios de primeira linha, entre eles o autor do texto de matemática mais bem sucedido de todos os tempos — *Os elementos* (*Stoichia*) de Euclides. Considerando a fama do autor e de seu *best seller*, sabe-se notavelmente pouco sobre a vida de Euclides. Tão obscura ficou sua vida que nenhum lugar de nascimento é associado a seu nome. Embora edições de *Os elementos* freqüentemente identificassem o autor como Euclides de Megara, e um retrato de Euclides em Megara freqüentemente apareça em histórias da matemática, trata-se de um erro de identidade[*]. O verdadeiro Euclides de Megara era um discípulo de Sócrates e, embora se preocupasse com lógica, não se sentia mais atraído pela matemática que seu mestre. Nosso Euclides, em contraste, é conhecido como Euclides de Alexandria, porque foi chamado para lá ensinar matemática. Da natureza de seu trabalho pode-se presumir que tivesse estudado com discípulos de Platão, se não na própria Academia. Lendas associadas com Euclides o pintam como um bondoso velho. A estória contada acima em relação a Alexandre, o Grande, que desejava uma introdução fácil à geometria é repetida no caso de Ptolomeu, a quem se diz que Euclides garantiu que "não há uma estrada real para a geometria". Evidentemente Euclides não dava ênfase aos aspectos práticos do assunto, pois há uma estória contada sobre ele que diz que quando um estudante perguntou para que servia o estudo da geometria, Euclides disse a seu escravo que desse três moedas ao estudante, "pois ele precisa ter lucro com o que aprende".

Euclides e *Os elementos* são freqüentemente considerados sinônimos; na realidade o homem escreveu cerca de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos variados, desde óptica, astronomia, música e mecânica até um livro sobre secções cônicas. Com exceção de *A esfera* de Autólico, os livros de Euclides que sobreviveram são os mais antigos tratados gregos existentes; no entanto, do que Euclides escreveu mais da metade se perdeu, inclusive algumas das obras mais importantes, como o tratado sobre cônicas. Euclides considerava Aristeu, um geômetra contemporâneo, merecedor de grande crédito por ter escrito um tratado mais antigo sobre *Lugares sólidos* (o nome grego para secções cônicas, oriundo provavelmente da definição estereométrica das curvas na obra de Menaecmus). Os tratados sobre cônicas de Aristeu e Euclides se perderam ambos, provavelmente sem possibilidade de recuperação, talvez porque logo foram superados pelo trabalho mais extenso sobre cônicas de Apolônio, que será descrito abaixo. Entre as obras perdidas de Euclides está também uma sobre *Lugares de superfície*, outra sobre *Pseudaria* (ou falácias) e uma terceira sobre *Porismas*. Pelas referências antigas não fica sequer claro que material continham. A primeira, por exemplo, poderia dizer respeito a superfícies conhecidas pelos antigos — esfera, cone, cilindro, toro, elipsóide de revolução, parabolóide de revolução e hiperbolóide de revolução de duas folhas — ou talvez a curvas

[*]Veja frontispício na p. 198

sobre estas superfícies. Tanto quanto sabemos, os gregos não estudaram outras superfícies além das de sólidos de revolução.

A perda dos Porismas de Euclides é particularmente irritante, pois podem ter representado uma antiga aproximação à geometria analítica. Papus disse mais tarde que um *porisma* é algo intermediário entre um teorema, em que alguma coisa é proposta para demonstração, e um problema em que alguma coisa é proposta para construção. Outros descreveram um porisma como uma proposição em que se determina uma relação entre quantidades conhecidas e variadas ou indeterminadas, talvez a melhor aproximação da idéia de função da antiguidade. Se um porisma era, como se pensou, uma espécie de equação verbal de uma curva, o livro de Euclides sobre *Porismas* pode ter diferido de nossa geometria analítica principalmente pela falta de símbolos e técnicas algébricas. O historiador da geometria do século dezenove, Michel Chasles, sugeriu como porisma típico a determinação do lugar geométrico de um ponto para o qual a soma dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos é constante.

2 Cinco obras de Euclides sobreviveram até hoje: *Os elementos, Os dados, Divisão de figuras, Os fenômenos* e *Óptica*. Essa última tem interesse por ser um dos primeiros trabalhos sobre perspectiva, ou a geometria da visão direta. Os antigos dividiam o estudo da óptica em três partes: (1) óptica (a geometria da visão direta) (2) catóptrica (geometria dos raios refletidos) e (3) dióptrica (a geometria de raios refratados). Uma *Catóptrica* às vezes atribuída a Euclides é de duvidosa autenticidade, sendo talvez de Teon de Alexandria, que viveu seis séculos depois. *Óptica*[1] de Euclides é digna de nota por adotar uma teoria de "emissão" para a visão, segundo o qual o olho envia raios que vão até o objeto, em contraste com uma doutrina rival de Aristóteles, na qual uma atividade num meio caminha em linha reta do objeto para o olho. Deve-se notar que a matemática da perspectiva (em contraposição à descrição física) é a mesma em qualquer das duas teorias. Entre os teoremas que se encontram na *Óptica* de Euclides está um largamente usado na antiguidade — $\mathrm{tg}\,\alpha/\mathrm{tg}\,\beta < \alpha/\beta$ se $0 < \alpha < \beta < \pi/2$. Um objetivo da *Óptica* era combater a insistência dos epicuristas de que um objeto é exatamente do tamanho que aparenta, não se devendo fazer ajustes para compensar os efeitos da perspectiva.

Os fenômenos, de Euclides, é muito semelhante a *A esfera* de Autólico — isto é, uma obra de geometria esférica para uso dos astrônomos. Uma comparação entre as duas mostra que os dois autores se aproveitaram fortemente de uma tradição de livros-texto que era bem conhecida de sua geração. É possível que o mesmo seja verdade quanto a *Os elementos* de Euclides, mas, nesse caso, não há obra contemporânea preservada com a qual possa ser comparada.

A *Divisão de figuras* é significativa por ser uma obra que se teria perdido se não fosse pela cultura dos sábios árabes. Não sobreviveu no original grego; mas antes do desaparecimento das versões gregas, uma tradução árabe tinha sido feita (omitindo algumas das provas originais "porque são fáceis"), a qual por sua vez foi mais tarde traduzida para o latim, e finalmente para as línguas modernas[2]. Isso não é excepcional, para obras antigas. A *Divisão de figuras* contém uma coleção de trinta e seis proposições relativas à divisão de configurações planas. Por exemplo, a Proposição 1 pede a construção de uma reta que seja paralela à base de um triângulo e que divida o triângulo em duas áreas iguais. A Proposição 4 pede a bissecção de um trapézio *abgd* (Fig. 7.1) por uma reta paralela às bases; a reta *zi* pedida é achada determinando *z* tal que $\overline{zb}^2 = 1/2(\overline{eb}^2 + \overline{ea}^2)$. Outras proposições requerem a divisão de um paralelogramo em duas partes iguais por uma reta traçada por um ponto dado num dos lados (Proposição 6) ou por um ponto dado fora do paralelogramo (Proposição 10). A proposição final pede a divisão de um quadrilátero numa região dada por uma reta passando por um ponto sobre um dos lados do quadrilátero. Um tanto semelhante à *Divisão de figuras* em natureza é

[1]Veja M. R. Cohen e I. E. Drabkin: *A Source Book in Greek Science* (1948) pp. 257 e seguintes

[2]Uma versão em inglês intitulada *Euclid's Book on Divisions of Figures* foi editada por R. C. Archibald (1915)

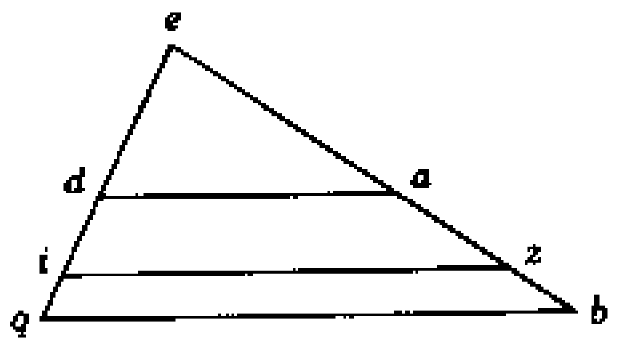


Figura 7.1

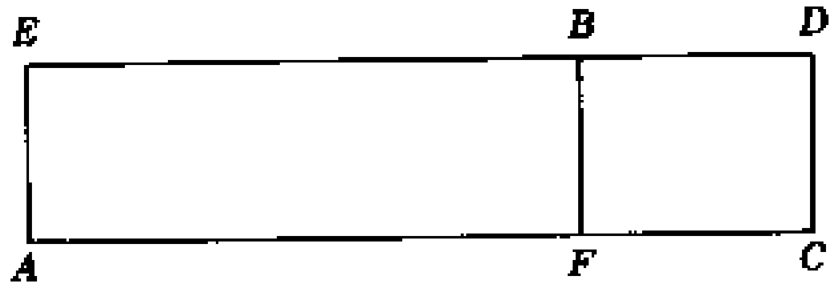


Figura 7.2

Os dados de Euclides, obra que chegou até nós tanto em grego como em árabe. Parece ter sido escrita para uso na universidade de Alexandria, servindo de complemento aos seis primeiros volumes de *Os elementos*, de modo semelhante a um manual de tabelas. Deveria ser útil como um guia para a análise de problemas de geometria a fim de descobrir provas. Inicia-se com quinze definições relativas a grandezas e lugares geométricos. A parte principal do texto compõe-se de noventa e cinco enunciados relativos às implicações das condições e grandezas que podem ser dadas num problema. Os dois primeiros dizem que se duas grandezas a e b são dadas, sua razão está dada, e que se uma grandeza é dada e também sua razão para uma segunda, a segunda grandeza está dada. Há cerca de duas dúzias de enunciados semelhantes, servindo como regras ou fórmulas algébricas. Seguem-se regras geométricas simples sobre retas paralelas e grandezas proporcionais, lembrando ao estudante as implicações dos dados de um problema, como o lembrete de que se dois segmentos estão numa razão dada, então se conhece a razão das áreas de figuras retilíneas semelhantes construídas sobre esses segmentos. Alguns dos enunciados são equivalentes geométricos da resolução de equações quadráticas. Por exemplo, ele nos diz que se uma área (retangular) dada AB é colocada sobre um segmento AC de comprimento dado (Fig. 7.2) e se a área BC que falta à área AB para completar todo o retângulo AD é dada, então as dimensões de BC são conhecidas. Isto é fácil de provar com nossa álgebra. Seja a o comprimento de AC, b^2 a área de AB e $c{:}d$ a razão de FC para CD. Então, se $FC = x$ e $CD = y$, temos $x/y = c/d$ e $(a-x)y = b^2$. Eliminando y temos $(a-x)dx = b^2c$ ou $dx^2 - adx + b^2c = 0$, donde $x = a/2 \pm \sqrt{(a/2)^2 - b^2c/d}$. A solução geométrica dada por Euclides é equivalente a isto, exceto pelo fato de ser usado o sinal negativo antes do radical. Os enunciados 84 e 85 de *Os dados* são equivalentes geométricos das familiares soluções algébricas babilônicas dos sistemas $xy = a^2$, $x \pm y = b$, que por sua vez são equivalentes de soluções de equações simultâneas. Os últimos enunciados em *Os dados* se referem a relações entre medidas lineares e angulares num círculo dado.

3 A universidade de Alexandria evidentemente não diferia muito de instituições modernas de cultura superior. Parte dos professores provavelmente se notabilizava na pesquisa, outros eram melhores como administradores e outros ainda eram conhecidos pela capacidade de ensinar. Pelos relatos que possuímos parece que Euclides definitivamente pertencia à última categoria. Nenhuma descoberta nova é atribuída a ele, mas ele era conhecido pela sua habilidade ao expor. Essa é a chave do sucesso de sua maior obra, *Os elementos*. Era, francamente, um livro-texto e de modo nenhum o primeiro. Sabemos da existência de pelo menos três anteriores, inclusive o de Hipócrates de Chios; mas não resta traço desses, nem de outros rivais potenciais de tempos antigos. *Os elementos* de Euclides superaram de tanto seus competidores que foram os únicos a sobreviver. Não eram, como se pensa às vezes, um compêndio de todo o conhecimento geométrico; ao contrário, trata-se de um texto introduzido cobrindo toda a matemática *elementar* — isto é, aritmética (no sentido de "teoria dos números"), geometria sintética (de pontos, retas, círculos e esferas), e álgebra (não no sentido simbólico moderno, mas um equivalente em roupagem geométrica). Note-se que a arte de calcular não está incluída, pois não era parte da instrução na universidade; nem o estudo das cônicas ou de curvas planas de maior grau, pois esse era parte da matemática mais avançada. Proclus descreve *Os elementos*, em relação com o resto da matemática, como as letras do alfabeto em relação com a linguagem. Se *Os elementos* pretendesse ser uma fonte completa de informação, o autor provavelmente incluiria referências a outros autores, informação sobre pesquisas recentes e explicações informais. Porém *Os elementos* se limitam austeramente ao seu

campo — a exposição em ordem lógica dos assuntos básicos da matemática elementar. Ocasionalmente, no entanto, autores posteriores interpolaram no texto escólios explicativos, e tais adições foram copiadas por escribas posteriores como parte do texto original. Algumas dessas aparecem em todos os manuscritos existentes agora. O próprio Euclides não manifesta qualquer pretensão de originalidade, e é claro que ele utilizou grandemente obras de seus predecessores. Acredita-se que a ordenação seja dele, e presumivelmente algumas provas foram fornecidas por ele; mas afora isso é difícil avaliar o grau de originalidade dessa obra, a mais renomada na história da matemática.

4 *Os elementos* estão divididos em treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o Livro X sobre incomensuráveis e os três últimos versam principalmente sobre geometria no espaço. Não há introdução ou preâmbulo, e o primeiro livro começa abruptamente com uma lista de vinte e três definições. A deficiência, aqui, é que algumas definições não definem, pois não há um conjunto prévio de elementos não-definidos em termos dos quais os outros sejam definidos. Assim, dizer como Euclides, que "um ponto é o que não tem parte", ou que "uma reta é comprimento sem largura", ou que "uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura" não é definir esses entes, pois uma definição deve ser expressa em termos de coisas precedentes que são melhor conhecidas que as coisas definidas. Também se pode facilmente fazer objeções, por razão de circularidade lógica, a outras assim chamadas "definições" de Euclides tais como "As extremidades de uma reta são pontos", ou "Uma linha reta é uma linha que jaz igualmente com os pontos sobre ela", ou "As extremidades de uma superfície são linhas", todas as quais podem ser devidas a Platão. A definição de Euclides de um ângulo plano como "a inclinação uma com relação a outra de duas retas de um plano que se encontram e não jazem sobre uma mesma reta" é defeituosa porque "inclinação" não foi previamente definida, nem é melhor conhecida que a palavra "ângulo".

Em seguida às definições, Euclides dá uma lista de cinco postulados e cinco noções comuns. Aristóteles tinha feito uma forte distinção entre axiomas (ou noções comuns) e postulados; as primeiras, ele dizia, devem ser convincentes por elas mesmas — verdades comuns a todos os estudos — mas os postulados são menos óbvios e não pressupõem o assentimento do estudante, pois dizem respeito somente ao assunto em discussão. Alguns autores posteriores distinguiram entre os dois tipos de pressuposições aplicando a palavra axioma somente a algo conhecido ou aceito como evidente, enquanto a palavra postulado se referia a alguma coisa a ser "requerida". Não sabemos se Euclides adotava qualquer dessas opiniões, nem mesmo se ele fazia distinção entre dois tipos de pressuposições. Os manuscritos preservados não estão de acordo aqui e em alguns casos as dez pressuposições aparecem juntas numa só categoria. Os matemáticos modernos não vêem diferença entre axioma e postulado. Na maioria dos manuscritos de *Os elementos* encontramos as dez pressuposições seguintes[3].

Postulados. Seja postulado o seguinte.

1. Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.
3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
4. Que todos os ângulos retos são iguais.
5. Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

Noções comuns

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.

[3]Veja *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, traduzidos e editados por T. L. Heath (1956, 3 vols.)

3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.
5. O todo é maior que a parte.

Aristóteles tinha escrito que "outras coisas sendo iguais, a prova melhor é a que provém de menos postulados", e Euclides evidentemente aceitava esse principio. Por exemplo, o Postulado 3 é interpretado em seu sentido literal muito limitado, às vezes descrito como uso do compasso euclidiano (não fixável), cujas pernas mantêm uma abertura constante somente enquanto a ponta está sobre o papel, mas caem uma sobre a outra quando levantadas. Isto é, o postulado não é interpretado de modo a permitir o uso de um compasso para marcar uma distância igual a um segmento sobre um outro segmento maior não contiguo, a partir de uma extremidade. Prova-se nas três primeiras proposições do Livro I que essa construção é sempre possível, mesmo com a interpretação estreita do Postulado 3. A primeira proposição justifica a construção de um triângulo equilátero *ABC*, sobre um segmento dado *AB*, construindo por *B* um círculo de centro *A* e um outro por *A* com centro *B*, e tomando como *C* o ponto de intersecção dos dois círculos. (Que eles se cortam é implicitamente assumido.) A Proposição 2 então usa a Proposição 1, mostrando que de qualquer ponto *A*, como extremidade (Fig. 7.3), pode-se marcar um segmento de reta igual a um segmento dado *BC*. Primeiro Euclides traça *AB*, e sobre esse segmento constrói o triângulo equilátero *ABD*, prolongando os lados *DA* e *DB* a *E* e *F* respectivamente. Com *B* como centro traçar o círculo por *C* que corta *BF* em *G*; então com *D* como centro traçar o círculo por *G* que corta *DE* em *H*. Mostra-se então facilmente que *AH* é o segmento pedido. Finalmente, na Proposição 3, Euclides usa a Proposição 2 para mostrar que, dados dois quaisquer segmentos desiguais, pode-se marcar sobre o maior um segmento igual ao menor.

5 Nas três primeiras proposições Euclides se deu a grande trabalho para mostrar que uma interpretação muito limitada do Postulado 3 implica, no entanto, o livre uso de compassos, como usualmente se faz, para marcar distâncias. Mesmo assim, por padrões modernos de rigor as pressuposições euclidianas são inadequadas, e em suas provas Euclides freqüentemente usa postulados tácitos. Por exemplo, na primeira proposição de *Os elementos* ele assume sem prova que os dois círculos vão se cortar num ponto. Para essa situação e outras semelhantes é necessário acrescentar aos postulados um equivalente a um princípio de continuidade. Além disso, os Postulados 1 e 2 como foram expressos por Euclides não garantem nem a unicidade da reta passando por dois pontos não coincidentes, nem sequer sua infinitude; eles dizem apenas que há pelo menos uma, e que ela não tem extremos, no entanto, em suas provas Euclides usa livremente a unicidade e a infinitude. É fácil, é claro, criticar a obra de um homem à luz de desenvolvimentos posteriores e esquecer que "suficiente para o dia é o rigor desse dia". Em seu tempo, *Os elementos*, evidentemente, constituiu o desenvolvimento lógico mais rigorosamente tratado da matemática elementar que já fora erigido, e dois mil anos deveriam passar-se antes que surgisse uma apresentação mais cuidadosa. Durante esse longo intervalo a maior parte dos matemáticos considerou a exposição de Euclides como logicamente satisfatória e pedagogicamente aceitável.

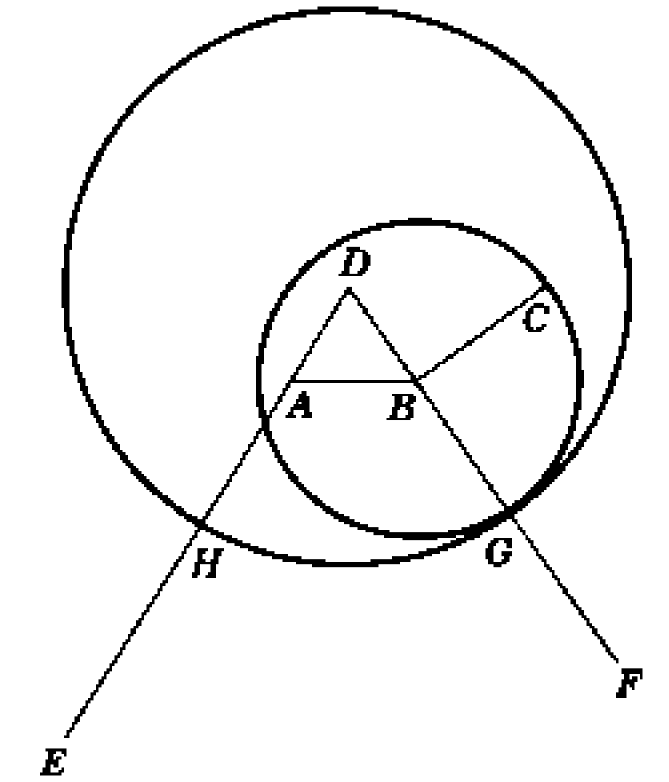


Figura 7.3

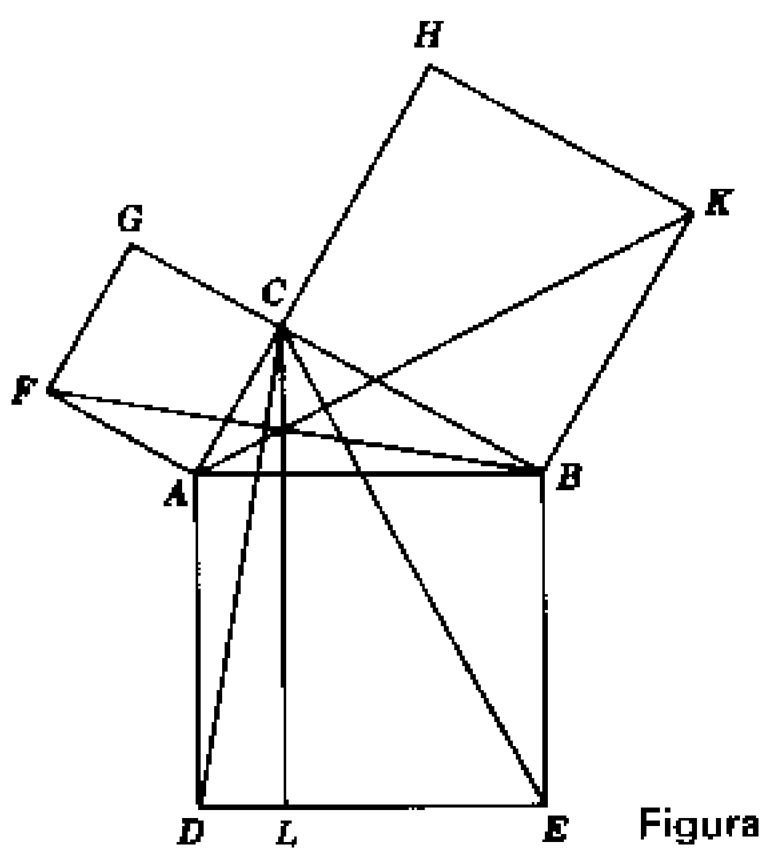
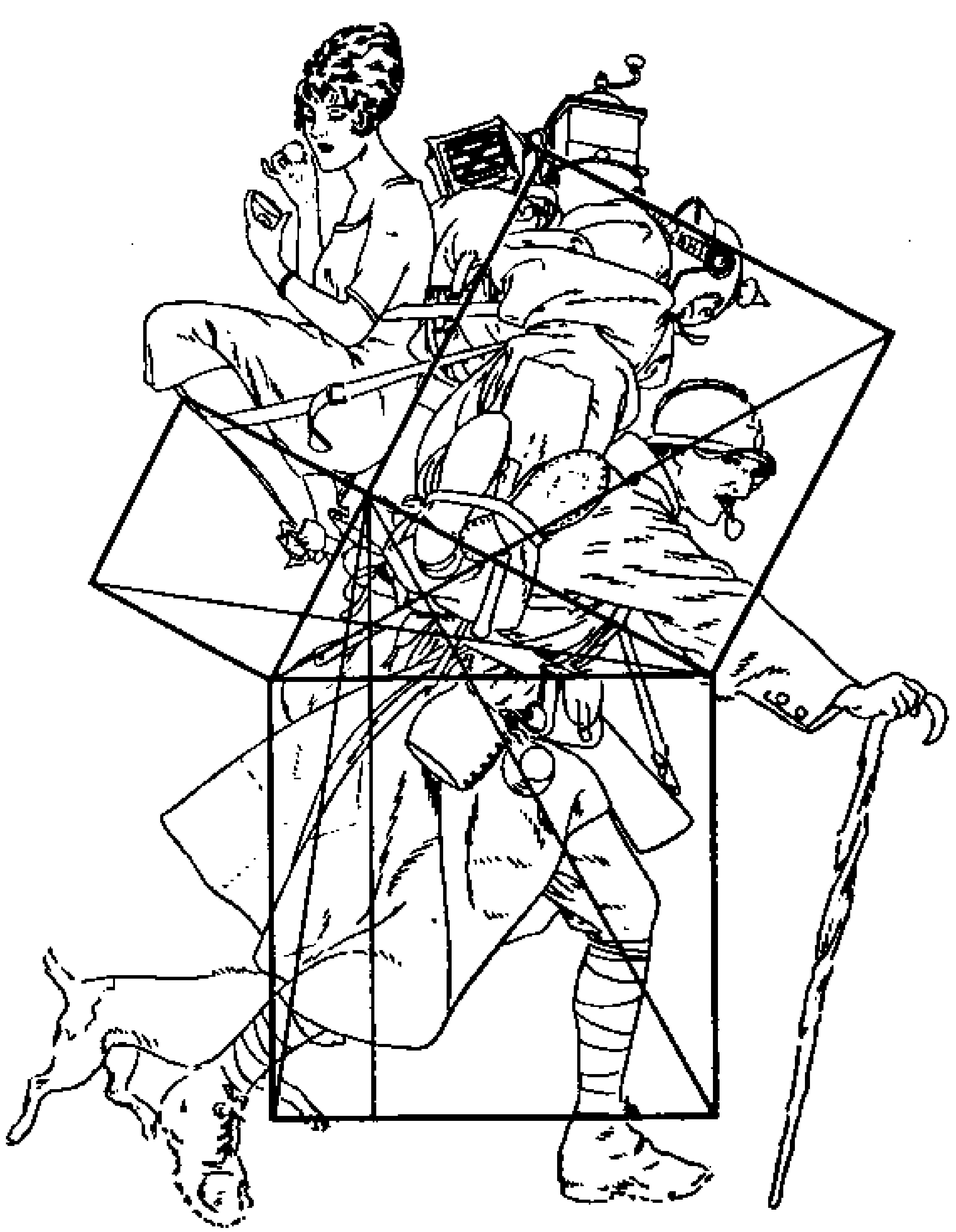


Figura 7.4

A maior parte das proposições no Livro I de *Os elementos* é dada em qualquer curso de geometria de escola secundária. Contém os teoremas familiares sobre congruência de triângulos (mas sem um axioma que justifique o método de superposição) sobre construções simples com régua e compasso, sobre desigualdades relativas a ângulos e lados de um triângulo, sobre propriedades de retas paralelas (levando ao fato de ser a soma dos ângulos de um triângulo igual a dois ângulos retos), e sobre paralelogramos (inclusive a construção de um paralelogramo tendo ângulos dados e área igual à de um triângulo dado ou à de uma figura retilínea dada). O livro termina com a demonstração (nas Proposições 47 e 48) do teorema de Pitágoras e sua recíproca. A prova do teorema dada por Euclides não é a usualmente dada nos livros de hoje, nos quais são aplicadas proporções simples aos lados de triângulos semelhantes formados baixando a altura sobre a hipotenusa. Foi dito que Euclides pode ter evitado tal prova por causa das dificuldades envolvidas em comensurabilidade. Somente no Livro V é que Euclides apresenta a bem fundamentada teoria das proporções, e até então o uso de proporcionalidades é evitado o quanto possível. Para o teorema pitagórico Euclides usou em vez disso a bela prova com uma figura às vezes descrita como um moinho de vento, cauda de pavão ou cadeira da noiva (Fig. 7.4). A prova é feita mostrando que o quadrado sobre *AC* é igual a duas vezes o triângulo *FAB* ou a duas vezes o triângulo *CAD* ou ao retângulo *AL*, e que o quadrado sobre *BC* é igual a duas vezes o triângulo *ABK* ou a duas vezes o triângulo *BCE* ou ao retângulo *BL*. Logo a soma dos quadrados é igual à soma dos retângulos, isto é, ao quadrado sobre *AB*. Supõe-se que esta prova é original de Euclides, e muitas conjeturas têm sido feitas quanto à forma possível de provas anteriores. Desde os tempos de Euclides muitas outras provas têm sido propostas.

Euclides tem a seu favor o fato de o teorema de Pitágoras ser seguido imediatamente por uma prova da recíproca: se num triângulo o quadrado sobre um lado é igual à soma dos quadrados sobre os outros dois lados, o ângulo entre esses dois outros lados é reto. Não raro em textos modernos os exercícios que se seguem à prova do teorema de Pitágoras são tais que exigem, não o teorema, mas a recíproca não provada. Há muitas falhas pequenas em *Os elementos*, mas o livro tem todas as virtudes lógicas maiores.

6 O Livro II de *Os elementos* é curto, contendo apenas quatorze proposições, nenhuma das quais desempenha qualquer papel em textos modernos; mas nos dias de Euclides esse livro tinha grande significado. É fácil explicar essa discrepância — hoje temos álgebra simbólica e trigonometria, que substituíram os equivalentes geométricos da Grécia. Por exemplo, a Proposição II.1 diz que "Se são dadas duas retas, e uma é cortada em um número qualquer de segmentos, o retângulo contido pelas duas é igual aos retângulos contidos pela reta não cortada e cada um dos segmentos". Esse teorema que diz (Fig. 7.5) que $AD(AP + PR + RB) = AD \cdot AP + AD \cdot PR + AD \cdot RB$, não é nada mais que um enunciado geométrico de uma das leis fundamentais da aritmética, conhecida hoje como lei distributiva: $a(b + c + d) = ab + ac + ad$. Mais adiante em *Os elementos* (V e VII) achamos demonstrações das leis comutativa e associativa da multiplicação. Ao passo que em nosso tempo as grandezas são representadas por letras que se entende representarem números, conhecidos ou não, sobre os quais operamos com as regras algorítmicas da álgebra, nos dias de Euclides as grandezas eram representadas como segmentos de reta, satisfazendo aos axiomas e teoremas da geometria. Diz-se às vezes que os gregos não possuíam uma álgebra, mas isto é evidentemente falso. Tinham o Livro II de *Os elementos*, que é uma álgebra geométrica servindo aos mesmos fins que nossa álgebra simbólica. Não há dúvida que a álgebra moderna facilita grandemente a manipulação de relações entre grandezas. Mas também é verdade que um geômetra grego conhecendo os quatorze teoremas da "álgebra" de Euclides era muito mais capaz de aplicar esses teoremas a questões práticas de mensuração do que um geômetra experimentado de hoje. A álgebra



τὸ θεώρημα τῆς νύμφης.

(With apologies to *La Vie Parisienne*.)

A "Cadeira da Noiva", diagrama de *Os elementos* I. 47, num cenário da Primeira Guerra Mundial. [*The Mathematical Gazette*, **11** (1922-1923), 364]

geométrica antiga não era um instrumento ideal, mas era eficaz. A afirmação de Euclides (Proposição 4), "se uma reta é cortada ao acaso, o quadrado sobre o todo é igual aos quadrados sobre os segmentos e duas vezes o retângulo contido pelos segmentos" é uma maneira prolixa de dizer que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mas seu apelo visual para um escolar de Alexandria deve ter sido muito mais vivido do que seu equivalente algébrico pode ser. É verdade que a prova ocupa página e meia de *Os elementos*; mas quantos escolares de hoje seriam capazes de dar uma prova cuidadosa da regra que usam tão

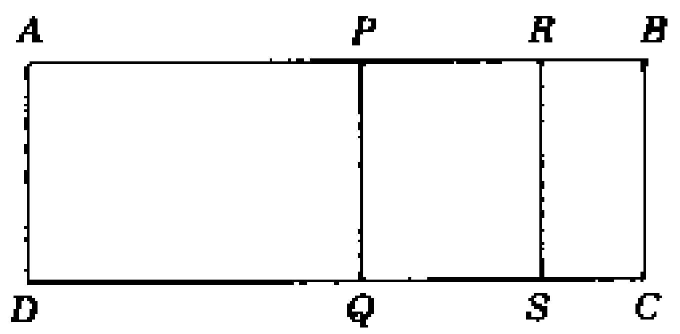


Figura 7.5

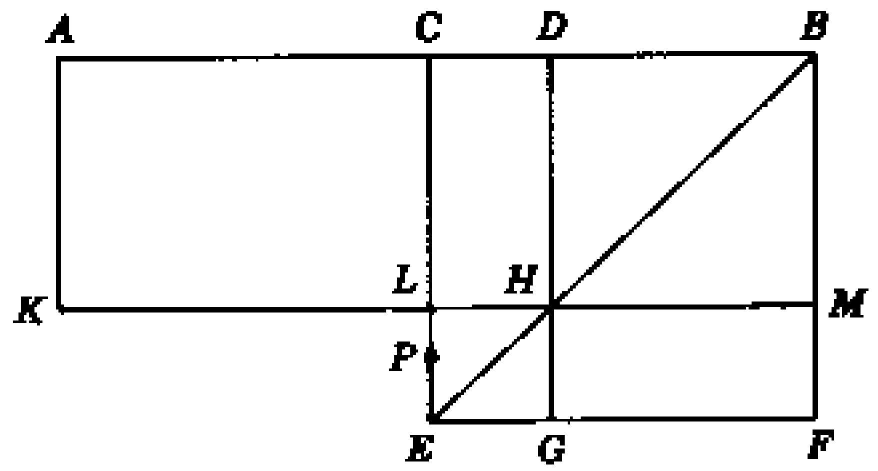


Figura 7.6

livremente? O mesmo vale para *Os elementos* II.5, que contém o que consideraríamos um circunlóquio pouco prático para $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

> Se uma reta é cortada em segmentos iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais do todo, junto com o quadrado sobre a reta entre os pontos de secção, é igual ao quadrado sobre a metade.

O diagrama que Euclides usa aqui desempenhou um papel chave na álgebra grega; por isso nós o reproduzimos[4] sem mais explicações. Se no diagrama (Fig. 7.6) fazemos $AC = CB = a$, e $CD = b$, o teorema diz que $(a + b)(a - b) + b^2 = a^2$. A verificação geométrica dessa afirmação não é difícil. Mas o significado do diagrama não está tanto na prova do teorema como no uso que os algebristas geométricos fizeram de diagramas semelhantes. O orgulho do escolar moderno em álgebra é a solução da equação de segundo grau (que ele pode ser ou não capaz de justificar), e um diagrama semelhante a Fig. 7.6 era o equivalente geométrico para o escolar grego. Se lhe pedissem para construir um segmento x tendo a propriedade expressa por $ax - x^2 = b^2$, onde a e b são segmentos tais que $a > 2b$, ele traçaria $AB = a$ e o dividiria ao meio em C. Então em C ele levantaria uma perpendicular CP de comprimento igual a b; com P como centro e raio $a/2$ ele traçaria um círculo, que encontra AB em um ponto D. Então sobre AB ele construiria o retângulo $ABMK$ de largura $BM = BD$ e completaria o quadrado $BDHM$. Essa é a área x^2 que tem a propriedade expressa pela equação quadrática. Os gregos diriam que aplicamos ao segmento $AB (= a)$ um retângulo $AH (= ax - x^2)$ que é igual a um quadrado dado b^2, e que difere para menos (de AM) por um quadrado DM. A demonstração disso resulta da proposição citada acima (II.5) na qual é claro que o retângulo $ADHK$ é igual ao polígono côncavo $CBFGHL$ — isto é, difere de $(a/2)^2$ pelo quadrado $LHGE$, cujo lado, por construção, é $CD = \sqrt{(a/2)^2 - b^2}$.

De modo inteiramente semelhante a equação quadrática $ax + x^2 = b^2$ pode ser resolvida usando II.6:

> Se um segmento de reta é bissectado e um outro é acrescentado a ele em linha reta, o retângulo contido pelo todo (com o segmento que foi acrescentado) e pelo segmento acrescentado junto com o quadrado sobre a metade é igual ao quadrado sobre a reta formada com a metade e o segmento acrescentado.

Dessa vez nós "aplicamos a uma reta dada ($AB = a$) um retângulo ($AM = ax + x^2$) que será igual a um quadrado dado (b^2) e que excederá (AH) por um quadrado" (Fig. 7.7). Nesse caso a distância $CD = \sqrt{(a/2)^2 + b^2}$; como da proposição sabemos que o retângulo $AM (= ax + x^2)$ mais o quadrado $LG [= (a/2)^2]$ é igual ao quadrado $CF [= (a/2)^2 + b^2]$, resulta que a condição $ax + x^2 = b^2$ está satisfeita.

As proposições seguintes no Livro II são variações da álgebra geométrica de que demos exemplos, II.11 sendo um caso especial importante de II.6. Aqui Euclides resolve a equação $ax + x^2 = a^2$ traçando um quadrado $ABCD$ de lado a, bissectando AD em E, traçando EB, prolongando o lado DA a F tal que $EF = EB$, e completando o quadrado $AFGH$ (Fig. 7.8). Então estendendo GH para cortar DC em K, teremos aplicado ao seg-

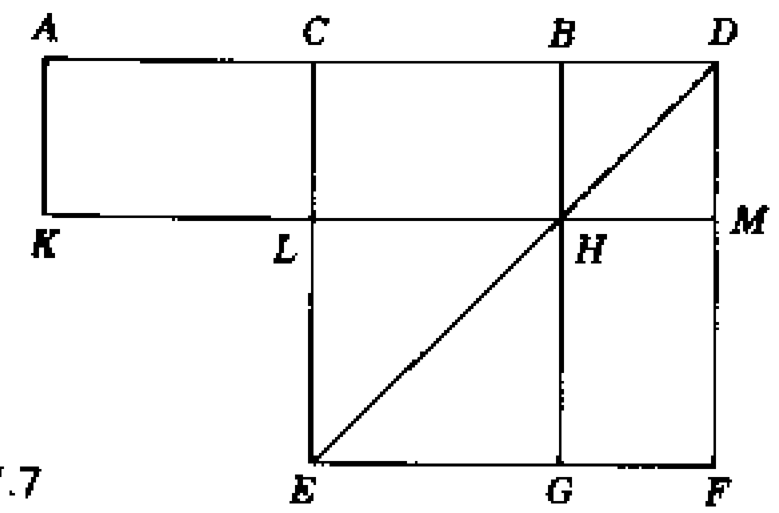


Figura 7.7

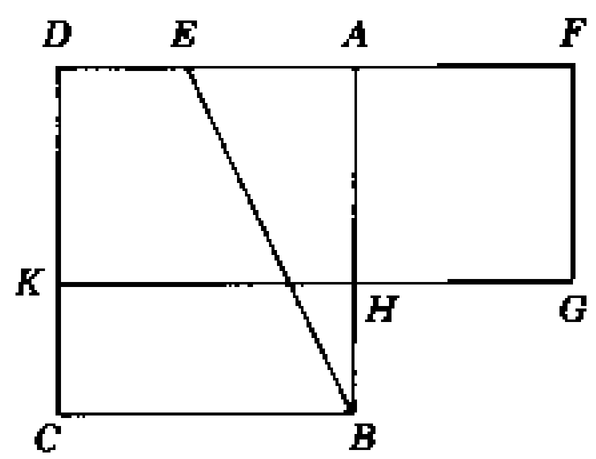


Figura 7.8

[4]Em todo este capítulo as traduções para o inglês e a maior parte dos diagramas são de *Thirteen Books of Euclid's Elements* na edição de T. L. Heath

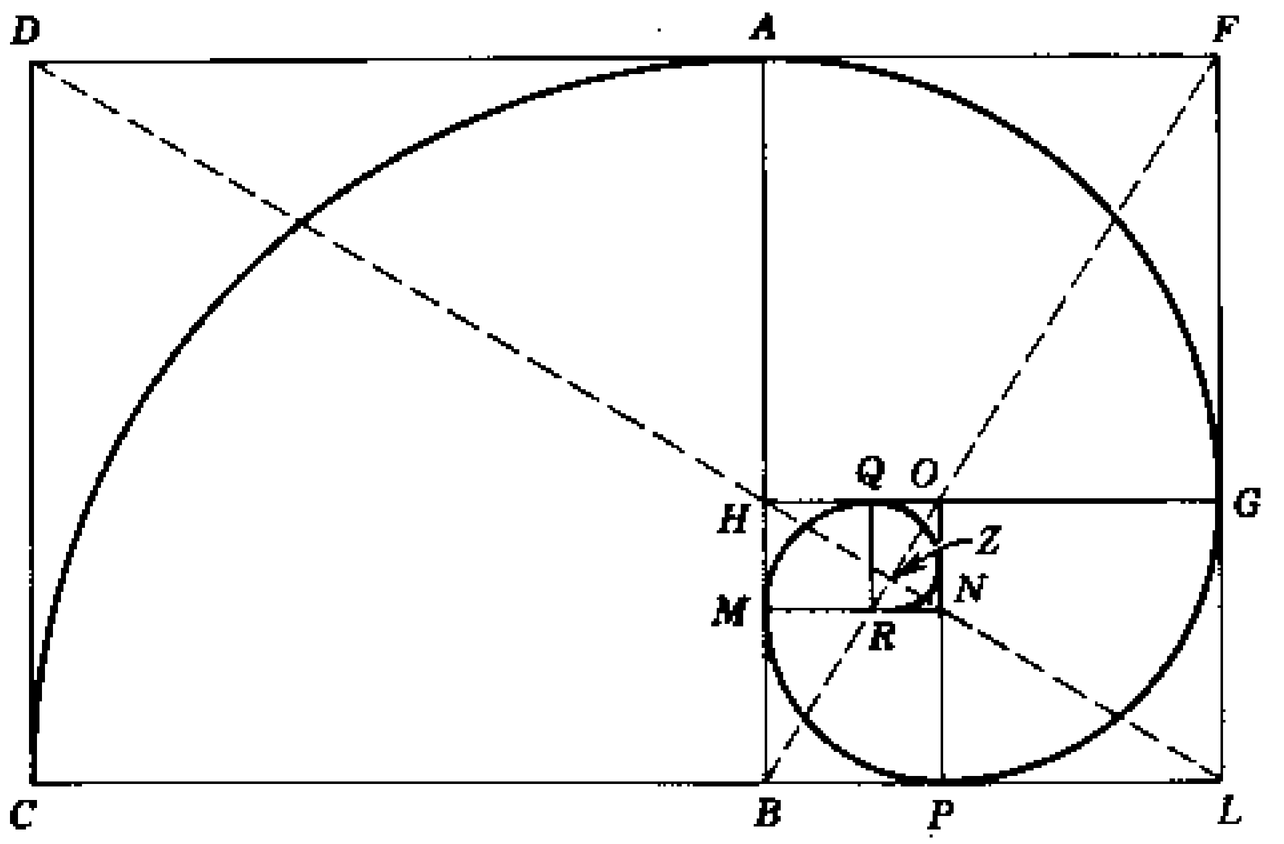


Figura 7.9

mento AD um retângulo $FK(= ax + x^2)$ igual a um quadrado dado $AC(= a^2)$ e excedendo por um quadrado (x^2).

A figura usada por Euclides em *Os elementos* II.11 e novamente em VI.30 (nossa Fig. 7.8), é a base de um diagrama que aparece hoje em muitos livros para ilustrar a propriedade iterativa da secção áurea. Ao *gnômon BCDFGH* acrescentamos o ponto L para completar o retângulo $CDFL$ (Fig. 7.9), e dentro do retângulo menor $LBGH$, que é semelhante ao maior $LCDF$, construímos tomando $GO = GL$, o gnômon $LBMNOG$ semelhante ao $BCDFGH$. Agora dentro do retângulo $BHOP$ que é semelhante aos retângulos maiores $CDFL$ e $LBHG$, construímos o gnômon $PBHQRN$ semelhante aos $BCDFGH$ e $LBMNOG$. Continuando assim indefinidamente, temos uma seqüência infinita de retângulos encaixantes semelhantes, tendendo a um ponto limite Z. Verifica-se que Z, que como se vê facilmente é a intersecção das retas FB e DL, é também o pólo de uma espiral logarítmica tangente aos lados dos retângulos nos pontos $C, A, G, P, M, Q, \ldots$ Outras propriedades notáveis podem ser observadas nesse fascinante diagrama[5].

As Proposições II.12 e II.13 são interessantes porque são um prenúncio do interesse por trigonometria que logo iria florescer na Grécia. Essas proposições serão reconhecidas pelo leitor como formulações geométricas — primeiro para o ângulo obtuso, depois para o ângulo agudo — do que depois se chamou a lei dos co-senos para triângulos planos:

Proposição 12

Em triângulos obtusângulos o quadrado sobre o lado que subentende o ângulo obtuso é maior que os quadrados sobre os lados contendo o ângulo obtuso por duas vezes o retângulo contido por um dos lados contendo o ângulo obtuso, aquele sobre o qual cai a perpendicular, e pelo segmento, cortado do lado de fora pela perpendicular, em direção ao ângulo obtuso.

Proposição 13

Em triângulos acutângulos o quadrado sobre o lado que subentende o ângulo agudo é menor que os quadrados sobre os lados que contêm o ângulo agudo por duas vezes o retângulo contido por um dos lados contendo o ângulo agudo, aquele sobre o qual cai a perpendicular, e o segmento cortado dentro dele pela perpendicular, em direção ao ângulo agudo.

As provas das Proposições 12 e 13 são análogas às usadas hoje em trigonometria, feitas por aplicação dupla do teorema de Pitágoras.

7 Supõe-se geralmente que o conteúdo dos dois primeiros livros de *Os elementos* seja em grande parte devido aos pitagóricos. Os Livros III e IV, de outro lado, tratam da geometria do círculo, e aqui presume-se que muito venha de Hipócrates de Chios. O que

[5]Veja H. S. M. Coxeter, "The Golden Section, Phyllotaxis, and Wythoff's Game", *Scripta Mathematica*, **19** (1953), 135-143

os dois livros contêm não difere muito dos teoremas sobre círculos encontrados nos textos de hoje. A primeira proposição do Livro III, por exemplo, pede a construção do centro de um círculo; a última, Proposição 37, é o enunciado familiar que diz que se de um ponto de um círculo se traçam uma tangente e uma secante, o quadrado sobre a tangente é igual ao retângulo sobre a secante toda e o segmento externo. O Livro IV contém dezesseis proposições, em geral familiares aos estudantes de hoje, relativas a figuras inscritas em, ou circunscritas a, um círculo. Os teoremas sobre medida de ângulos são deixados para depois que a teoria das proporções esteja estabelecida.

8 Dos treze livros de Euclides os mais admirados têm sido o quinto e o décimo — um sobre a teoria das proporções, o outro sobre os incomensuráveis. A descoberta dos incomensuráveis tinha ameaçado a matemática de uma crise lógica, lançando dúvidas sobre provas que usassem proporcionalidade, mas a crise foi enfrentada com sucesso, graças aos princípios enunciados por Eudoxo. Mesmo assim a matemática grega tendia a evitar as proporções. Vimos que Euclides adiou seu uso o quanto possível, e uma relação entre comprimentos da forma $x:a = b:c$ seria pensada como uma igualdade entre áreas $cx = ab$. Mais cedo ou mais tarde, porém, as proporções são necessárias, e assim Euclides atacou o problema no Livro V de *Os elementos*. Alguns comentadores chegaram a sugerir que o livro todo, consistindo de vinte e cinco proposições, é obra de Eudoxo, mas isto parece improvável. Algumas definições — como a de razão — são tão vagas que são inúteis. A Definição 4, porém, é essencialmente o axioma de Eudoxo e Arquimedes: "Diz-se que grandezas têm uma razão de uma para a outra se são capazes, quando multiplicadas, de exederem uma à outra." A Definição 5, de igualdade de razões, é precisamente a que foi dada antes, quando tratamos da definição de proporcionalidade de Eudoxo.

Para o leitor casual o Livro V pode parecer tão supérfluo quanto o Livro II, pois ambos foram superados por regras correspondentes de álgebra simbólica. Um leitor mais cuidadoso, interessado em axiomática, verá que o Livro V trata de tópicos de importância fundamental em toda a matemática. Começa com proposições que equivalem a coisas como distributividade à esquerda e à direita da multiplicação em relação à adição, distributividade à esquerda da multiplicação em relação à subtração, e a lei associativa da multiplicação $(ab)c = a(bc)$. Seguem-se regras para "maior que" e "menor que" e as propriedades bem conhecidas das proporções. Freqüentemente se afirma que a álgebra geométrica grega não poderia ir além do segundo grau em geometria plana, ou do terceiro grau em geometria no espaço, mas não é verdade. A teoria geral das proporções permitiria trabalhar com produtos de qualquer número de dimensões, pois uma equação da forma $x^4 = abcd$ equivale a uma envolvendo produtos de razões de segmentos, como $x/a \cdot x/b = c/x \cdot d/x$.

Tendo desenvolvido a teoria das proporções no Livro V, Euclides explorou-a no Livro VI provando teoremas relativos a razões e proporções que aparecem em triângulos, paralelogramos e outros polígonos que são semelhantes. Merece destaque a Proposição 31, uma generalização do teorema de Pitágoras. "Em triângulos retângulos a figura sobre o lado que subentende o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre os lados que contêm o ângulo reto." Proclus atribui esta extensão ao próprio Euclides. O Livro VI contém também (nas Proposições 28 e 29) uma generalização do método de aplicação de áreas, pois a base sólida para as proporções, dada no Livro V, permitia ao autor fazer um uso livre do conceito de semelhança. Os retângulos do Livro II são agora substituídos por paralelogramos, e pede-se aplicar sobre um segmento dado um paralelogramo semelhante a um dado paralelogramo. Essas construções, como as de II.5-6, são na realidade resoluções das equações quadráticas $bx = ac + x^2$, sujeitas à restrição (implicada em IX.27) de ser o discriminante não negativo.

Freqüentemente se pensa, erradamente, que *Os elementos* de Euclides só tratam de geometria. Já descrevemos dois livros (II e V) que são quase exclusivamente algébricos; três livros (VII, VIII e IX) são dedicados à teoria dos números. A palavra "número" para os gregos sempre se referia ao que chamamos números naturais — os inteiros positivos. O Livro VII começa por uma lista de vinte e duas definições distinguindo vários tipos de números — ímpares e pares, primos e compostos, planos e sólidos (isto é, os que são produtos de dois ou três inteiros) e finalmente definindo número perfeito como "aquele que é igual às suas partes". Os teoremas nos Livros VII, VIII e IX devem ser familiares aos leitores que tenham tido um curso elementar de teoria dos números, mas a linguagem das provas certamente não será familiar. Em todos esses livros cada número é representado por um segmento, de modo que Euclides se refere a um número AB. (A descoberta dos incomensuráveis tinha mostrado que nem todos os segmentos podem representar inteiros, mas a afirmação recíproca — de que números inteiros podem ser representados por segmentos evidentemente continua válida.) Por isso Euclides não usa frases como "é um múltiplo de" ou "é um fator de", pois ele as substitui por "é medido por" e "mede respectivamente". Isto é, um número n é medido por outro número m se existe um terceiro número k tal que $n = km$.

O Livro VII começa com duas proposições que constituem a célebre regra na teoria dos números, hoje conhecida como "algoritmo de Euclides" para achar o máximo divisor (medida) comum de dois números. É um esquema que sugere a aplicação inversa repetida do axioma de Eudoxo. Dados dois números diferentes, subtrai-se o menor a do maior b repetidamente até que se obtenha um resto r_1 menor do que o menor número; então subtrai-se repetidamente esse resto r_1 de a até resultar um resto $r_2 < r_1$; então subtrai-se repetidamente r_2 de r_1; e assim por diante. Finalmente o processo leva a um resto r_n que mede r_{n-1}, portanto todos os restos precedentes, bem como a e b; este número r_n será o máximo divisor comum de a e b. Entre as proposições seguintes achamos equivalentes de teoremas familiares da aritmética. Assim a Proposição 8 afirma que se $an = bm$ e $cn = dm$ então $(a-c)n = (b-d)m$; a Proposição 24 diz que se a e b são primos com c, então ab é primo com c. Esse livro termina com uma regra (Proposição 39) para achar o mínimo múltiplo comum de vários números.

O Livro III é dos menos interessantes dos treze livros de *Os elementos*. Começa com proposições sobre números em proporção continuada (progressão geométrica) e depois volta-se para propriedades simples de quadrados e cubos, terminando com a Proposição 27: "Números sólidos semelhantes têm entre si a razão que um número cúbico tem a um número cúbico." Esse enunciado diz simplesmente que se temos um "número sólido" $ma \cdot mb \cdot mc$ e um "número sólido semelhante" $na \cdot nb \cdot nc$ então sua razão será $m^3 : n^3$ — isto é, como de um cubo para um cubo.

10 O Livro IX, o último dos três sobre teoria dos números, contém vários teoremas interessantes. Desses o mais célebre é a Proposição 20: "Números primos são mais do que qualquer quantidade fixada de números primos." Isto é, Euclides dá aqui a prova elementar bem conhecida do fato que há infinitos números primos. A prova é indireta, pois mostra-se que a hipótese de haver só um número finito de primos leva a uma contradição. Seja P o produto de todos os primos, supostos em número finito, e consideremos o número $N = P + 1$. N não pode ser primo, pois isso contradiria a hipótese de P ser o produto de *todos* os primos. Logo N é composto e deve ser medido por algum número p. Mas p não pode ser nenhum dos fatores primos que entram em P, senão seria um fator de 1. Logo p deve ser um primo diferente de todos os fatores de P; portanto, a hipótese de P ser o produto de *todos* os primos é falsa.

A Proposição 35 desse livro contém uma fórmula para a soma de números em progressão geométrica, expressa em termos elegantes mas pouco usuais:

> Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrairmos do segundo e último números iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem.

Esse enunciado, é claro, é equivalente à fórmula

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1},$$

que por sua vez equivale a

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}.$$

A proposição seguinte, a última do Livro IX, é a fórmula bem conhecida para números perfeitos: "Se tantos números quantos quisermos, começando com a unidade, forem colocados continuadamente em dupla proporção até que a soma de todos seja um primo, e se a soma for multiplicada pelo último, o produto será perfeito." Isto é, em notação moderna, se $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ é um primo, então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito. A prova é fácil, em termos da definição de número perfeito dada no Livro VII. Os gregos antigos conheciam os quatro primeiros números perfeitos: 6, 28, 496 e 8 128. Euclides não respondeu à pergunta recíproca — se essa fórmula fornece ou não *todos* os números perfeitos. Sabe-se agora que todos os números perfeitos *pares* são desse tipo, mas a questão da existência de números perfeitos ímpares é ainda um problema não resolvido[6]. Da dúzia e meia de números perfeitos conhecidos hoje todos são pares, mas é arriscado supor que todos sejam.

Nas Proposições 21 a 36 do Livro IX há uma unidade que sugere que em algum período esses teoremas formassem em si um completo sistema matemático, talvez o mais antigo na história da matemática e presumivelmente datando do meio ou começo do quinto século A. C. Foi até sugerido que as Proposições 1 a 36 do Livro IX foram tiradas por Euclides, sem mudança essencial, de um texto pitagórico[7].

11 Antes do advento da álgebra moderna o Livro X era o mais admirado — e o mais temido. Trata da classificação sistemática de segmentos incomensuráveis das formas $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ e $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, onde a e b, quando são da mesma dimensão, são comensuráveis. Hoje diríamos que esse livro trata de *números* irracionais dos tipos acima, onde a e b são *números* racionais; mas Euclides via esse livro como parte da geometria, não da aritmética. Na verdade as Proposições 2 e 3 do livro repetem para grandezas geométricas as duas primeiras proposições do Livro VII, onde o autor tratava de números inteiros. Aqui ele prova que se a dois segmentos desiguais se aplica o processo descrito acima como algoritmo de Euclides, e se o resto nunca mede o que o precede, as grandezas são incomensuráveis. A Proposição 3 mostra que o algoritmo quando aplicado a duas grandezas comensuráveis, fornece a maior medida comum dos segmentos.

O Livro X contém 115 proposições — mais do que qualquer outro — a maior parte das quais contém equivalentes geométricos de números expressos com radicais quadráticos. Entre os teoremas há alguns equivalentes aos processos para racionalizar denominadores de frações da forma $a/(b \pm \sqrt{c})$ e $a/(\sqrt{b} \pm \sqrt{c})$. Segmentos dados por raízes quadradas, ou por raízes quadradas de somas de raízes quadradas, são quase tão fáceis de construir com régua e compasso quanto combinações racionais. Uma razão para os gregos construírem uma álgebra geométrica em vez de uma álgebra aritmética é que, na falta de um conceito de número real, a primeira parecia mais geral. As raízes de $ax - x^2 = b^2$, por exemplo, sempre podem ser construídas (desde que $a > 2b$). Porque, então, Euclides se daria a um trabalho enorme para provar, nas Proposições 17 e 18 do Livro X, as condições sob as quais as raízes dessa equação são comensuráveis com a? Ele mostrou que as raízes são comensuráveis ou incomensuráveis com a conforme a e $\sqrt{a^2 - 4b^2}$ sejam comensuráveis ou não. Foi sugerido[8] que tais considerações indicam que os gregos usavam suas soluções de equações quadráticas para problemas *numéricos* também, como os babilônios o faziam com seus sistemas de equações $x + y = a$, $xy = b^2$. Em tais casos seria vantajoso saber se as raízes serão ou não passíveis de serem expressas como quocientes de inteiros. Um estudo minucioso da matemática grega parece indicar

[6]Para mais detalhes, veja L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*. (Washington, D. C., 1919-1923, 3 volumes) I, 3-33

[7]Veja Arpád Szabó, "The Transformation of Mathematics into Deductive Science and the Beginnings of Its Foundations on Definitions and Axioms", *Scripta Mathematica*, 27 (1964), 27-48A

[8]Veja Heath, *Elements of Euclid*, III, 43-45

que sob o verniz geométrico havia mais preocupação com a logística e as aproximações numéricas do que os tratados clássicos preservados retratam.

2 O material no Livro XI, que contém trinta e nove proposições sobre geometria em três dimensões, será familiar a quem tenha tido um curso sobre elementos de geometria no espaço. Novamente é fácil criticar as definições, pois Euclides define como sólido "aquilo que tem comprimento, largura e espessura" e então nos diz que "uma extremidade de um sólido é uma superfície". As quatro últimas definições são de quatro sólidos regulares. O tetraedro não está entre eles, presumivelmente por causa de uma definição anterior de pirâmide como "figura sólida, limitada por planos, construída de um plano para qualquer ponto." As dezoito proposições do Livro XII são todas referentes à medida de figuras, usando o método de exaustão. O livro começa com uma prova cuidadosa do teorema que diz que as áreas de círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros. Aplicações semelhantes do típico método de *reductio ad absurdum* são então feitas a medidas volumétricas de pirâmides, cones, cilindros, e esferas. Arquimedes atribui as provas rigorosas desses teoremas a Eudoxo, de quem Euclides provavelmente adaptou muito desse material.

O último livro é inteiramente dedicado a propriedades dos cinco sólidos regulares, fato que levou alguns historiadores a dizer que *Os elementos* foram compostos como uma glorificação das figuras cósmicas ou platônicas. Como uma grande parte do material precedente não tem relação nenhuma com poliedros regulares, tal sugestão é inteiramente gratuita; mas os teoremas finais são um clímax digno desse notável tratado. Seu objetivo é "compreender" cada um dos sólidos numa esfera — isto é, achar a razão de uma aresta do sólido ao raio da esfera circunscrita. Tais cálculos são atribuídos por comentadores gregos a Teaetetus a quem se deve provavelmente muito do Livro XIII. Em preliminares a esses cálculos, Euclides se refere ainda uma vez à divisão de um segmento em média e extrema razão, mostrando que "o quadrado sobre o segmento maior somado com metade do todo é cinco vezes o quadrado sobre a metade" — como se verifica facilmente resolvendo $a/x = x/(a-x)$ — e citando outras propriedades das diagonais de um pentágono regular. Então, na Proposição 10, Euclides provou o teorema, bem conhecido, que um triângulo cujos lados são respectivamente lados do pentágono regular, hexágono regular e decágono regular inscritos num mesmo círculo é retângulo. As proposições 13 a 17 exprimem a razão da aresta para o diâmetro, para cada um dos sólidos regulares, sucessivamente: e/d é $\sqrt{2/3}$ para o tetraedro, $\sqrt{1/2}$ para o octaedro, $\sqrt{1/3}$ para o cubo ou hexaedro, $\sqrt{(5-\sqrt{5})/10}$ para o icosaedro, e $(\sqrt{5}-1)/2\sqrt{3}$ para o dodecaedro. Finalmente, na Proposição 18, a última de *Os elementos*, prova-se facilmente que não pode haver outro poliedro regular além desses. Cerca de 1 900 anos depois, o astrônomo Kepler ficou tão assombrado com esse fato que construiu uma cosmologia sobre os cinco sólidos regulares, acreditando que deveriam ser a chave do criador para a estrutura dos céus.

3 Antigamente não era raro que se atribuísse a um autor célebre obras que não eram dele; assim algumas versões de *Os elementos* de Euclides contêm um décimo quarto e mesmo um décimo quinto volumes, ambos os quais se provou mais tarde serem apócrifos. O assim chamado Livro XIV continua a comparação de Euclides dos sólidos regulares inscritos numa esfera, os resultados principais sendo que a razão das superfícies do dodecaedro e do icosaedro inscritos na mesma esfera é igual à razão de seus volumes, sendo a razão a da aresta do cubo para a aresta do icosaedro — isto é, $\sqrt{10/[3(5-\sqrt{5})]}$. Pensa-se que esse livro pode ter sido escrito por Hipsicles com base num tratado (agora perdido) de Apolônio, comparando o dodecaedro e o icosaedro. (Hipsicles, que provavelmente viveu na segunda metade do segundo século A. C., é o suposto autor de uma obra de astronomia, *De ascensionibus*, a partir da qual pode ter sido adotada a divisão do círculo em 360 partes.) Que o mesmo círculo circunscreve o pentágono do dodecaedro e o triângulo do icosaedro (inscritos na mesma esfera) foi provado, ao que se diz, por Aristeu aproximadamente contemporâneo de Euclides.

O espúrio Livro XV, que é inferior, pensa-se ter sido (ao menos em parte) escrito por Isidoro de Mileto (viveu por volta de 532 D. C.) arquiteto da catedral da Santa

Sabedoria (Hágia Sophia) em Constantinopla. Esse livro também trata dos sólidos regulares, mostrando como inscrever alguns deles em outros, contando o número de arestas e ângulos sólidos nos sólidos, e achando as medidas dos ângulos diedros de faces que se encontram numa aresta. É interessante notar que apesar dessas enumerações os antigos não perceberam a chamada fórmula poliedral enunciada por Euler no século dezoito.

14 *Os elementos* de Euclides não só constituem a mais antiga obra matemática grega importante a chegar até nós, mas o texto mais influente de todos os tempos. Foi composto em 300 A. C. aproximadamente e foi copiado e recopiado repetidamente depois. Erros e variações inevitavelmente se inseriram, e alguns editores posteriores, notadamente Teon de Alexandria no fim do quarto século, tentaram melhorar o original. No entanto, foi possível obter uma boa impressão do conteúdo da versão original comparando a mais de meia dúzia de cópias manuscritas gregas datando principalmente dos séculos dez a doze. Acréscimos posteriores, geralmente aparecendo como escólios, ajuntam informação suplementar, freqüentemente de natureza histórica, e na maior parte dos casos é fácil distingui-los do original. Cópias de *Os elementos* chegaram até nós também em traduções árabes, mais tarde vertidas para o latim no século doze, e finalmente, no século dezesseis, em vernáculo. A primeira versão impressa de *Os elementos* apareceu em Veneza em 1482, um dos primeiros livros de matemática impressos; calcula-se que desde então pelo menos mil edições foram publicadas. Talvez nenhum livro, além da Bíblia, possa se gabar de tantas edições, e certamente nenhuma obra matemática teve influência comparável à de *Os elementos* de Euclides. Como é apropriado o nome que os sucessores de Euclides lhe deram, "o Elementador"!

BIBLIOGRAFIA

Archibald, R. C., ed., *Euclid's Book on Divisions of Figures* (Cambridge: Cambridge University Press, 1915)

Cohen, M. R., e I. E. Drabkin, *A Source Book in Greek Science* (New York: McGraw-Hill, 1948; reimpresso Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958)

Frankland, W. B., *The First Book of Euclid's Elements, with a Commentary Based Principally upon that of Proclus Diadochus* (Cambridge: Cambridge University Press, 1905)

Heath, T. L., *History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon, 1921, 2 volumes)

Heath, T. L., ed. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Cambridge, 1908, 3 volumes; edição em brochura, New York: Dover, 1956)

Hultsch, F. O., "Eukleides", in Pauly-Wissowa, *Real-Enzyclopädie der klassischen Altertumswissenschaft* (Stuttgart, 1909), Vol. VI, colunas 1003-1052

Loria, Gino, *Storia delle matematiche* (Turin: Sten, 1929-1933, 3 volumes)

Sarton, George, *Ancient Science and Modern Civilization* (Lincoln, Nebr.: University of Nebraska Press, 1954)

Szabó, Arpád, "Anfänge des euclidischen Axiomensystems", *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1960), 37-106

Thomas, Ivor, ed., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Loeb Classical Library, 1939-1941, 2 volumes)

Thomas-Stanford, Charles, *Early Editions of Euclid's Elements* (Londres: Bibliographical Society, 1926)

Vogt, Heinrich, "Die Lebenzeit Euklids," *Bibliotheca Mathematica* (3), 13 (1913), 193-202

EXERCÍCIOS

1. Descreva as fontes que Euclides provavelmente usou ao escrever *Os elementos*; justifique suas conjeturas.
2. Quais dos treze livros de *Os elementos* você considera o mais importante? Justifique sua resposta.
3. Quais deles você julga mais dispensáveis? Justifique sua resposta.
4. Dados os segmentos a e b construa, só com régua e compasso, segmentos x e y satisfazendo às condições $x + y = a$, $xy = b^2$.
5. Dados os segmentos a e b construa, só com régua e compasso, uma solução x da equação $x^2 = ax + b^2$.
6. Use o algoritmo de Euclides para achar o máximo divisor comum de 456 e 759.
7. Use o algoritmo de Euclides para achar o máximo divisor comum de 567 e 839 e 432.

8. Qual é a maior medida comum de dois segmentos de comprimentos 2/3 e 4/7 respectivamente? De dois segmentos de comprimentos a/b e c/d respectivamente, onde a, b, c, d são inteiros primos entre si?

9. Dados dois segmentos desiguais, a e b, prove que se um segmento c é obtido pelo algoritmo de Euclides, ele é a maior medida comum de a e b.

10. Dê todos os detalhes da prova do teorema de Pitágoras pelo método do "moinho de vento".

11. Todos os números perfeitos pares terminam em 6 ou em 28, e, tirando noves fora, deixam resto 1 (excetuado o primeiro número perfeito). Verifique essas afirmações para os quatro primeiros números perfeitos.

12. Mostre como construir uma tangente a um círculo, por um ponto fora do círculo.

13. Justifique a fórmula de Euclides para a soma dos termos de uma progressão geométrica.

14. O número $2^{13}-1$ é primo. Use esse fato para achar o quinto número perfeito em ordem de grandeza.

15. Prove que não pode haver sólido regular convexo além dos dados por Euclides.

16. Prove a lei dos co-senos para um triângulo acutângulo, indicando até onde Euclides podia ir ao exprimir essa relação.

*17. Em *Os elementos* IX. 14 prova-se que um número pode ser decomposto em fatores primos de uma única maneira.

*18. Prove a fórmula de Euclides para números perfeitos.

*19. Prove, pelo método de exaustão, que os volumes das esferas estão entre si como os cubos dos diâmetros (*Os elementos* XII. 18).

*20. Prove que se um pentágono, um hexágono e um decágono são inscritos no mesmo círculo, um triângulo feito com um lado do pentágono, um do hexágono e um do decágono, é retângulo (*Os elementos* XIII. 10).

*21. A *Divisão de figuras* de Euclides inclui uma construção de uma reta paralela às bases de um trapézio e que divide o trapézio em duas áreas iguais. Mostre como se pode fazer essa construção só com régua e compasso.

Capítulo **8**

Arquimedes de Siracusa

Havia mais imaginação na cabeça de Arquimedes que na de Homero.

Voltaire

1 Durante toda a Idade Helenística o centro da atividade matemática permaneceu em Alexandria, mas o maior matemático desse tempo — e de toda a antiguidade — não nasceu nessa cidade. Arquimedes pode ter estudado por algum tempo em Alexandria com os estudantes de Euclides, e manteve comunicação com os matemáticos de lá, mas ele viveu e morreu em Siracusa. Conhece-se poucos fatos de sua vida, mas tem-se alguma informação tirada da narração de Plutarco da vida de Marcelo, o general romano. Durante a Segunda Guerra Púnica a cidade de Siracusa se viu envolvida na luta entre Roma e Cartago; tendo-se associado a essa última, a cidade foi sitiada pelos romanos durante os anos de 214 a 212 A. C. Lemos que durante o cerco Arquimedes inventou engenhosas máquinas de guerra para conservar o inimigo à distância — catapultas para lançar pedras; cordas, polias e ganchos para levantar e espatifar os navios romanos; invenções para queimar os navios. Por fim, no entanto, Siracusa caiu devido a uma "quinta coluna"; durante o saque da cidade Arquimedes foi morto por um soldado romano, apesar das ordens de Marcelo para que o geômetra fosse poupado. Como se diz que Arquimedes tinha então setenta e cinco anos, provavelmente nasceu em 287 A. C. Seu pai era um astrônomo, e Arquimedes também adquiriu uma reputação em astronomia. Diz-se que Marcelo reservou para si, como parte do saque, engenhosos planetários que Arquimedes tinha construído para retratar os movimentos dos corpos celestes. Todas as narrações da vida de Arquimedes, no entanto, concordam em que ele dava pouco valor a seus engenhos mecânicos, em comparação com o produto de seus pensamentos. Mesmo quando lidava com alavancas e outras máquinas simples, ele estava muito mais interessado em princípios gerais que em aplicações práticas.

2 Arquimedes não foi, é claro, o primeiro a usar alavancas, nem mesmo o primeiro a formular a lei geral. As obras de Aristóteles contêm a afirmação de que dois pesos numa alavanca se equilibram quando são inversamente proporcionais a suas distâncias ao fulcro; e os peripatéticos associavam essa lei à sua pressuposição de que o movimento retilíneo vertical é o único movimento natural sobre a terra. Eles faziam observar que as extremidades dos braços desiguais de uma alavanca, em seus deslocamentos em torno do fulcro, descrevem círculos em vez de retas; a extremidade do braço maior se moverá num círculo que é maior, por isso o caminho se aproximará mais do movimento retilíneo vertical natural do que o do braço mais curto. Portanto, a lei da alavanca é uma conseqüência natural desse princípio cinemático. Arquimedes, de outro lado, deduziu a lei de um postulado estático muito mais plausível — que corpos bilateralmente simétricos estão em equilíbrio. Isto é, suponhamos que uma barra sem peso de quatro unidades de comprimento e suportando três unidades de peso, uma em cada ponta e uma no meio (Fig. 8.1) é balanceada sobre um fulcro no seu centro. Pelo axioma de simetria de Arquimedes o sistema está em equilíbrio. Mas o princípio de simetria mostra também, considerando só o lado direito do sistema, que o equilíbrio se preservará se os dois pesos, situados a uma distância de duas unidades, forem reunidos no ponto médio do braço direito. Isso significa que um peso de uma unidade, a duas unidades do fulcro, suportará um peso sobre o outro braço, de duas unidades, colocado a uma unidade do fulcro. Por uma generalização desse processo, Arquimedes chegou à lei da alavanca por princípios estáticos apenas, sem recorrer ao argumento ci-

Representação em mosaico da morte de Arquimedes. Um tempo se pensou que proviesse do chão de uma sala em Pompéia, hoje se acredita ser uma cópia (ou falsificação) do século dezesseis. (Instituto Municipal de Arte, Frankfurt am Main)

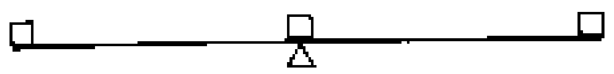


Figura 8.1

nemático aristotélico. Na história da ciência no período medieval se verá que uma conjunção de argumentos cinemáticos e estáticos produziu progressos tanto na ciência como na matemática.

A obra de Arquimedes sobre a lei da alavanca é parte de seu tratado, em dois livros, *Sobre o equilíbrio de planos*. Não é o mais antigo livro existente sobre o que se pode chamar de ciência física, pois, cerca de um século antes, Aristóteles tinha publicado uma obra em oito volumes, chamada *Física*, que foi muito influente; mas ao passo que a obra de Aristóteles era especulativa e não-matemática, o desenvolvimento de Arquimedes se assemelhava à geometria de Euclides. De um conjunto de postulados simples Arquimedes extraía algumas conclusões bastante abstrusas, estabelecendo a relação estreita entre a matemática e a mecânica que deveria vir a ser tão significativa, tanto para a física quanto para a matemática[1]. O primeiro livro no *Equilíbrio de planos* trata de figuras retilíneas e termina com os centros de gravidade do triângulo e do trapezóide. O Livro II concentra a atenção no centro de gravidade de um segmento parabólico e contém o fato que esse centro jaz sobre o diâmetro do segmento e divide esse diâmetro em segmentos, na razão de 3 para 2. O método usado é o já familiar, de exaustão, mas um estudante que conheça

[1]Veja E. J. Dijksterhuis *Archimedes* (1957), pp. 286 e seguintes, onde se chama a atenção para diferenças de opinião quanto ao rigor das provas de Arquimedes

cálculo e o princípio dos momentos (ou lei da alavanca) pode facilmente verificar o resultado.

3 Arquimedes pode bem ser chamado de pai da física matemática, não só por seu *Sobre o equilíbrio de planos* como também por outro tratado, em dois livros, *Sobre corpos flutuantes*. De novo, começando com um simples postulado sobre a natureza da pressão dos fluidos, ele obtém resultados muito profundos. Entre as primeiras proposições estão duas que exprimem o bem conhecido princípio hidrostático de Arquimedes:

> Todo sólido mais leve que um fluido, se colocado nele ficará imerso o suficiente para que o peso do sólido seja igual ao do fluido deslocado (I. 5). Um sólido mais pesado que um fluido, se colocado nele, descerá até o fundo do fluido, e o sólido, se pesado dentro do fluido, pesará menos do que seu peso real de um tanto igual ao peso do fluido deslocado (I. 7)[2].

A derivação matemática desse princípio de flutuação é certamente a descoberta que levou o distraído Arquimedes a saltar fora do banho e correr para casa nu, exclamando "Eureka" (eu achei). É também possível, embora menos provável, que o princípio o tenha ajudado a verificar a honestidade do ourives suspeito de fraudulentamente substituir parte do ouro por prata numa coroa feita para o rei Hiero de Siracusa, amigo (se não parente) de Arquimedes. Uma tal fraude podia facilmente ser detectada pelo método mais simples de comparar as densidades do ouro, da prata, e da coroa simplesmente medindo deslocamentos de água quando pesos iguais de cada um fossem mergulhados num vaso cheio de água. O arquiteto romano posterior, Vitruvius, atribuiu esse método a Arquimedes, ao passo que uma narração poética latina anônima, *De ponderibus et mensuris*, escrita provavelmente em 500 D. C., diz que Arquimedes usou o princípio de flutuação.

O tratado de Arquimedes *Sobre corpos flutuantes* contém muito mais do que as propriedades simples dos fluidos que acabamos de descrever. Virtualmente todo o Livro II, por exemplo, diz respeito à posição de equilíbrio de segmentos de parabolóides imersos em fluidos, mostrando que a posição de equilíbrio depende das gravidades específicas relativas do parabolóide sólido e do fluido em que flutua. A Proposição 4 é um exemplo típico:

> Dado um segmento reto de parabolóide de revolução cujo eixo a é maior que $3/4\,p$ (onde p é o parâmetro), e cuja gravidade específica é menor do que a de um fluido, mas está para esta numa razão não menor que $[a-(3/4)p]^2 : a^2$, se o segmento de parabolóide for colocado no fluido com seu eixo em qualquer ângulo com a vertical, mas de modo que sua base não toque na superfície do fluido, ele não ficará nessa posição mas voltará à posição em que seu eixo está vertical.

Casos ainda mais complicados, com provas longas, vêm em seguida. Arquimedes poderia bem ministrar um curso teórico de arquitetura naval, embora provavelmente preferisse um curso avançado de matemática pura. Não sendo um sábio de gabinete, ele acudia em emergências mecânicas. Uma vez, conta-se, fora construído um navio para o rei Hiero que era pesado demais para ser lançado ao mar, mas Arquimedes, com uma combinação de alavancas e polias, realizou a tarefa. Diz-se que ele se gabou de que, se lhe dessem uma alavanca suficientemente longa e um fulcro para apoiá-la, poderia mover a terra. Foi provavelmente em Alexandria que Arquimedes ficou interessado no problema técnico de fazer subir a água no Nilo para irrigar as partes aráveis do vale; para isso ele inventou um engenho, agora chamado parafuso de Arquimedes, feito de tubos em hélice presos a um eixo inclinado com uma manivela para fazê-lo girar.

4 Na Grécia antiga fazia-se uma clara distinção não só entre teoria e aplicação como entre computação de rotina e o estudo teórico das propriedades dos números. Àquela, que os matemáticos gregos, ao que se diz, olhavam com desprezo, era dado o nome de logística, enquanto que a aritmética, um respeitável assunto de investigação filosófica, entendia-se considerar apenas esse último aspecto. Foi dito até que a atitude antiga com relação à computação rotineira refletia a estrutura social de então, a computação sendo

[2]As traduções para o inglês deste capítulo foram tiradas de *The Works of Archimedes*, editado por T. L. Heath (1897)

relegada aos escravos. Qualquer dose de verdade que haja nisto foi certamente exagerada, pois os gregos se deram ao trabalho de substituir seu sistema numérico antigo, ático ou herodiânico, por um outro marcadamente superior — o jônio ou alfabético. Arquimedes viveu mais ou menos na época em que se efetivou a transição da numeração ática para a jônica[3], e isso pode explicar o fato de ele ter-se rebaixado a dar uma contribuição à logística. Numa obra chamada *Psammites* (computador de areia) Arquimedes se gabava de poder escrever um número maior do que o número de grãos de areia necessários para encher o universo. Ao fazer isso ele se referia a uma das mais audaciosas especulações astronômicas da antiguidade — aquela em que Aristarco de Samos, por meados do terceiro século A. C., propunha pôr a Terra em movimento ao redor do Sol. Um tal sistema astronômico sugeriria que a posição das estrelas fixas deveria mudar quando a terra se deslocasse de muitos milhões de quilômetros ao girar em torno do Sol. A ausência desse deslocamento paralático foi o fator que levou os maiores astrônomos da antiguidade (inclusive, provavelmente, Arquimedes) a rejeitar a hipótese heliocêntrica; mas Aristarco afirmou que a ausência de paralaxe pode ser atribuída à enormidade da distância das estrelas fixas à Terra. Agora, para realizar o que anunciava, Arquimedes tinha, por força, que prever todas as possíveis dimensões do universo, e, portanto, mostrou que podia enumerar os grãos de areia necessários para preencher mesmo o imenso mundo de Aristarco. Arquimedes começou com certas avaliações que tinham sido feitas em seu tempo sobre os tamanhos da Terra, da Lua e do Sol, e as distâncias da Lua, Sol e estrelas. Uma avaliação da circunferência da Terra feita em seu tempo, ele diz, tinha dado como resultado 300 000 estádios (cerca de 30 000 milhas, ou 45 000 quilômetros pois o estádio geralmente usado era aproximadamente um décimo de milha); Arquimedes admitiu a possibilidade de subestimação e assumiu uma circunferência de 3 000 000 estádios. Além disso, Aristarco avaliara o diâmetro do Sol como sendo dezoito ou vinte vezes o da Lua, que por sua vez é menor que a Terra. Por segurança, Arquimedes tomou o diâmetro do Sol como sendo não mais de trinta vezes maior que o da Lua (ou, a fortiori, que o da Terra). Em seguida Arquimedes assumiu que o tamanho aparente do Sol era maior que a milésima parte de um círculo, pois Aristarco tinha calculado que fosse de meio grau, resultado confirmado pela observação. Conhecendo uma limitação superior para o tamanho real do Sol e uma inferior para o tamanho aparente, uma limitação superior para a distância é fácil de calcular. Finalmente, Arquimedes interpretou o universo de Aristarco como tendo um raio que está para a distância do Sol, como esta está para o raio da Terra[4]. Com essas hipóteses Arquimedes mostra que o diâmetro do universo ordinário, indo até o Sol, é menor que 10^{10} estádios. Em seguida ele tinha que avaliar o tamanho de um grão de areia; para maior segurança, ele assumiu que 10 000 grãos de areia não são menos que uma semente de papoula, que o diâmetro de uma semente de papoula não é menor que um quarenta avos da largura de um dedo, e que o estádio por sua vez é menos que 10 000 larguras de dedos. Reunindo todas essas desigualdades, Arquimedes concluiu que o número de grãos de areia necessários para encher a esfera do universo então geralmente aceito é menor que um número que nós escreveríamos como 10^{51}. Para o universo de Aristarco, que está para o universo ordinário como esse está para a Terra, Arquimedes mostrou que são necessários não mais que 10^{63} grãos de areia. Arquimedes não usou essa notação, mas em vez disso descreveu o número como sendo dez milhões de unidades da oitava ordem de números (onde os números de segunda ordem começam com uma miríade de miríades, e os de oitava com a sétima potência de uma miríade de miríades). Para mostrar que podia exprimir um número maior ainda, Arquimedes estendeu sua ter-

[3]No entanto, O. Neugebauer em *Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª edição (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957), p. 11, acredita que o sistema alfabético já estava em uso vários séculos antes do tempo de Arquimedes

[4]A linguagem do *Psammites* não é clara aqui, mas a interpretação que adotamos parece adequada. Erika e Rudolf von Erhardt, "Archimedes' Sand-Reckoner", *Isis*, **33** (1942), 578-602, disputam a autenticidade do *Psammites*, mas esta é defendida por O. Neugebauer, "Archimedes and Aristarchus", *Isis*, **34** (1942), 4-6

minologia para chamar todos os números de ordem menor que uma miríade de miríades os do primeiro período, o segundo período conseqüentemente começando com o número $(10^8)^{10^8}$, um número que teria 800 000 000 de algarismos. Os períodos é claro continuam pelo 10^8 ésimo período. Isto é, seu sistema iria até uma miríade de miríades de unidades da ordem miríade de miríades, do período miríade de miríades-ésimo - um número que se escreveria como um, seguido de uns oitenta mil milhões de milhões de algarismos. Foi em conexão com esse trabalho sobre números imensos que Arquimedes mencionou, muito incidentalmente, o princípio que mais tarde levou à invenção dos logaritmos — a adição das "ordens" dos números (o equivalente de seus expoentes quando a base é 100 000 000) corresponde a achar o produto dos números.

Ao avaliar a razão da circunferência para o diâmetro de um círculo novamente Arquimedes provou sua habilidade em computação. Começando com o hexágono regular inscrito, ele calculou os perímetros de polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a noventa e seis lados. Seu processo iterativo para esses polígonos relacionava-se com o que às vezes se chama algoritmo de Arquimedes. Escreve-se a seqüência $P_n, p_n, P_{2n}, p_{2n}, P_{4n}, p_{4n}, \ldots$ onde P_n e p_n são os perímetros dos polígonos regulares circunscrito e inscrito de n lados. Começando do terceiro termo, calcula-se cada termo a partir dos dois precedentes tomando alternadamente a média harmônica e a média geométrica. Isto é, $P_{2n} = 2p_nP_n/(p_n + P_n)$, $p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$, etc. Também se pode usar a seqüência $a_n, A_n, a_{2n}, A_{2n}, \ldots$ onde a_n e A_n são as áreas dos polígonos regulares inscrito e circunscrito de n lados. O terceiro termo e os seguintes são calculados tomando alternadamente as médias geométrica e harmônica, de modo que $a_{2n} = \sqrt{a_nA_n}$, $A_{2n} = 2A_na_{3n}/(A_n + a_{2n})$, etc. Seu método para calcular raízes quadradas, ao achar o perímetro do hexágono circunscrito, e para médias geométricas, era semelhante ao dos babilônios. O resultado do cálculo de Arquimedes sobre o círculo foi uma aproximação do valor de π expressa pelas desigualdades $3\,10/71 < \pi < 3\,10/70$, uma aproximação melhor que a dos egípcios e a dos babilônios. (Deve-se ter em mente que nem Arquimedes nem qualquer outro matemático grego jamais usou nossa notação para a razão da circunferência para o diâmetro num círculo.) Esse resultado foi dado na Proposição 3 do tratado *Sobre as medidas do círculo*, uma das obras de Arquimedes mais populares no período medieval. Essa pequena obra, provavelmente incompleta na forma que chegou até nós, contém apenas três proposições, das quais uma é a prova, pelo método de exaustão, de que a área do círculo é igual à do triângulo retângulo tendo a circunferência do círculo como um lado e o raio do círculo como o outro. É improvável que Arquimedes tenha sido o descobridor desse teorema, pois está pressuposto na quadratura do círculo atribuída a Dinóstrato.

Arquimedes, como seus predecessores, foi atraído pelos três famosos problemas de geometria, e a bem conhecida espiral de Arquimedes forneceu soluções para dois deles (não, é claro, só com régua e compasso). A espiral é definida como o lugar geométrico no plano de um ponto que se move, partindo da extremidade de um raio ou semi-reta, uniformemente ao longo do raio enquanto esse por sua vez gira uniformemente em torno de sua origem. Em coordenadas polares a equação é $r = a\theta$. Dada uma tal espiral, a trissecção de um ângulo é fácil. O ângulo é colocado de modo que seu vértice e primeiro lado coincidam com o ponto inicial O da espiral e a posição inicial OA da semi-reta. O segmento OP, onde P é o ponto em que o segundo lado do ângulo corta a espiral, é então dividido em terços pelos pontos R e S (Fig. 8.2), e círculos são traçados com O como centro e raios OR e OS. Se esses círculos cortam a espiral nos pontos U e V, as retas OU e OV trissectam o ângulo AOP.

A matemática grega tem sido descrita como essencialmente estática, com pouca consideração pela idéia de variabilidade; mas Arquimedes, em seu estudo da espiral, parece ter achado a tangente a uma curva por considerações cinemáticas aparentadas ao cálculo diferencial. Pensando num ponto sobre a espiral $r = a\theta$ como sujeito a um duplo movimento — um movimento radial uniforme, afastando-se da origem das coordenadas e um movimento circular uniforme em torno da origem — ele parece ter achado

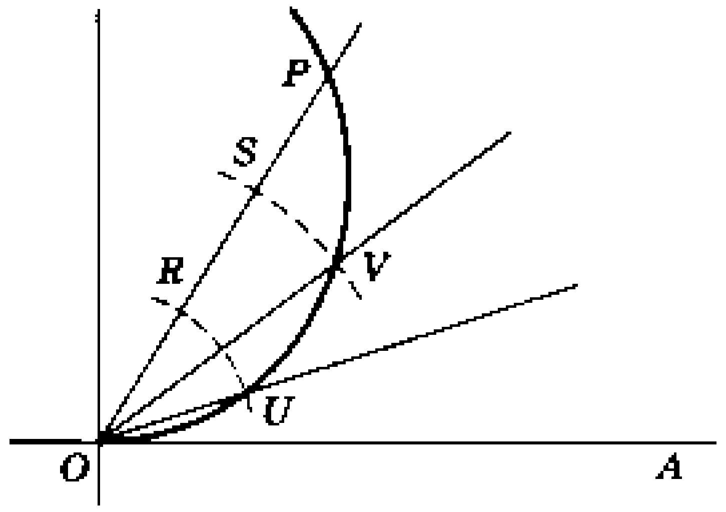


Figura 8.2

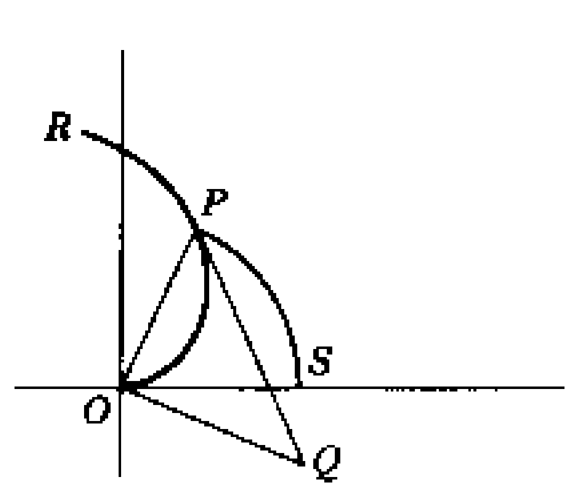


Figura 8.3

(através do paralelogramo de velocidades) a direção do movimento (logo da tangente à curva) observando o resultante dos dois movimentos componentes. Parece ser esse o primeiro caso em que foi achada a tangente a uma curva que não era o círculo.

O estudo que Arquimedes fez da espiral, curva que ele atribuiu a seu amigo Conon de Alexandria, era parte da busca de soluções dos três problemas famosos. A curva se presta tão bem a subdivisões de ângulos que pode bem ter sido inventada por Conon para esse fim. Como no caso da quadratriz, porém, ela também serve para quadrar o círculo, como Arquimedes mostrou. Pelo ponto P trace-se a tangente à espiral OPR e suponhamos que essa tangente corte no ponto Q a reta por O que é perpendicular a OP. Então, provou Arquimedes, o segmento de reta OQ (chamado subtangente polar para o ponto P) tem comprimento igual ao do arco circular PS do círculo com centro O e raio OP (Fig. 8.3) que é cortado pela semi-reta inicial (polar) e pela semi-reta OP (raio vetor). Esse teorema, provado por Arquimedes por uma típica dupla *reductio ad absurdum*, pode ser verificado por um estudante de cálculo que se lembre de que tg $\psi = r/r'$, onde $r = f(\theta)$ é a equação polar de uma curva, r' é a derivada de r em relação a θ, e ψ é o ângulo entre o raio vetor num ponto P e a tangente à curva no ponto P. Uma grande parte da obra de Arquimedes, é tal que hoje seria incluída num curso de cálculo, o que é particularmente verdade da obra *Sobre espirais*. Se o ponto P sobre a espiral é escolhido como intersecção da espiral com a reta de ângulo 90° em coordenadas polares a subtangente polar OQ será precisamente igual ao quarto da circunferência do círculo de raio OP. Portanto, a circunferência toda se constrói facilmente, como quatro vezes o segmento OQ, e pelo teorema de Arquimedes se acha um triângulo de área igual à do círculo. Uma transformação geométrica simples produz um quadrado em lugar do triângulo, e a quadratura do círculo está feita.

Entre as vinte e oito proposições em *Sobre espirais* há várias que dizem respeito a áreas associadas à espiral. Por exemplo, mostra-se na Proposição 24 que a área varrida pelo raio vetor em sua primeira rotação completa é um terço da área do "primeiro círculo" — isto é, o círculo com centro no pólo e raio igual ao comprimento do raio vetor correspondente ao fim da primeira rotação completa. Arquimedes usou o método de exaustão mas novamente um estudante hoje pode facilmente verificar o resultado lembrando que essa área é $1/2 \int_0^{2\pi} r^2\, d\theta$. Ainda mais, pode-se mostrar facilmente com métodos de cálculo, como Arquimedes mostrou pelo método mais difícil de exaustão, que na rotação seguinte a área do anel adicional R_2 (limitado pela primeira e segunda voltas da espiral e a parte do eixo polar entre as duas intersecções, após a primeira e a segunda voltas) é seis vezes a da região R_1 varrida na primeira rotação. As áreas dos anéis adicionais, acrescentadas em sucessivas rotações, são dadas pela regra simples de recorrência $R_{n+1} = nR_n/(n-1)$, como Arquimedes mostrou.

7 A obra *Sobre espirais* foi muito admirada mas pouco lida, pois era geralmente considerada a mais difícil obra de Arquimedes. Dos tratados que se ocupavam principalmente do método de exaustão (isto é, o cálculo integral) o mais popular era *Quadratura da parábola*. As secções cônicas eram conhecidas havia já mais de um século quando Arquimedes escreveu, mas nenhum progresso fora feito no cálculo de suas áreas. Só o maior matemático da antiguidade conseguiu resolver a questão de quadrar uma secção cônica — um segmento de parábola — coisa que ele realizou na Proposição 17 da obra em que o objetivo era a quadratura. A prova pelo método de exaustão é longa e elaborada, mas Arquimedes provou rigorosamente que a área K de um segmento parabólico $APBQC$ (Fig. 8.4) é quatro

terços da área de um triângulo T tendo a mesma base e mesma altura. Nas sete proposições seguintes (e últimas) Arquimedes deu uma segunda prova, diferente, do mesmo teorema. Primeiro mostrou que a área do maior triângulo inscrito, ABC, sobre a base AC é quatro vezes a soma dos triângulos correspondentes inscritos sobre cada um dos lados AB e BC como base. Continuando o processo sugerido por essa relação, fica claro que a área K do segmento parabólico ABC é dado pela soma da série infinita $T + T/4 + T/4^2 + \ldots + T/4^n + \ldots$, que vale $4/3\ T$. Arquimedes não falou em soma de série infinita, pois, processos infinitos eram mal vistos em seu tempo; em vez disso ele provou por uma dupla *reductio ad absurdum* que K não pode ser nem maior nem menor que $4/3\ T$. (Arquimedes, como seus predecessores, não usou o nome *parábola*, mas a palavra *orthotome* ou secção de um cone reto.)

No preâmbulo da *Quadratura da parábola* encontramos a pressuposição ou lema que se chama usualmente hoje de axioma de Arquimedes: "Que o excesso pelo qual a maior de duas áreas diferentes excede a menor pode, sendo somada a si mesma, vir a exceder qualquer área finita dada." Esse axioma elimina o infinitésimo ou indivisível fixo, que tinha sido muito discutido no tempo de Platão. É essencialmente o mesmo que o axioma de exaustão e Arquimedes admitiu francamente que

> Os geômetras de antes também usaram esse lema, pois é por seu uso que mostraram que círculos estão entre si na razão dupla de seus diâmetros, e que esferas estão entre si na razão tripla de seus diâmetros; e ainda que toda pirâmide é um terço do prisma de mesma base que a pirâmide e mesma altura; também, que todo cone é um terço do cilindro de mesma base que o cone e mesma altura, eles provaram assumindo um lema semelhante a esse.

Os "geômetras de antes" mencionados aqui presumivelmente incluem Eudoxo e seus sucessores.

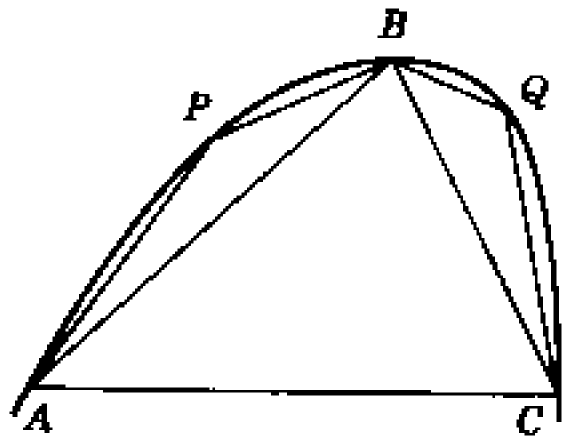


Figura 8.4

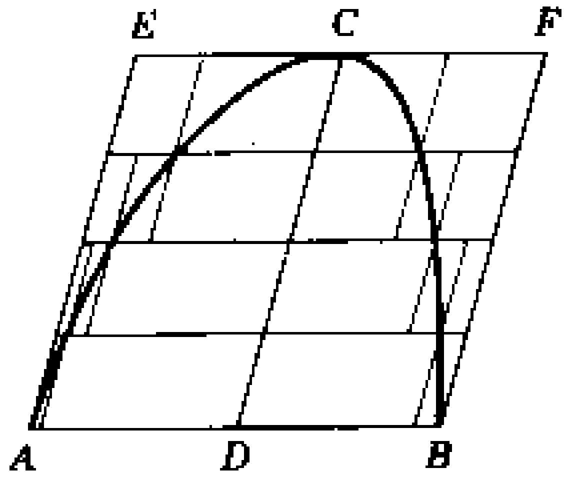


Figura 8.5

Arquimedes aparentemente não conseguiu achar a área de um segmento geral de elipse ou hipérbole. Achar hoje a área de um segmento parabólico por integração não envolve nada pior do que polinômios, mas as integrais que surgem na quadratura de um segmento de elipse ou hipérbole (assim como nos comprimentos de arco dessas curvas ou da parábola) exigem funções transcendentes. No entanto, em seu importante tratado *Sobre conóides e esferóides* Arquimedes achou a área da elipse *inteira*: "As áreas das elipses são como os retângulos sob seus eixos." (Proposição 6). Isso é dizer que a área de $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ é πab ou que a área da elipse é igual à área de um círculo cujo raio é a média geométrica dos semieixos da elipse. Além disso, no mesmo tratado Arquimedes mostrou como achou os volumes dos segmentos cortados de um elipsóide ou parabolóide ou hiperbolóide (de duas folhas) de revolução em torno do eixo principal. O processo que usou se parece tanto com o de integração que o descreveremos em um caso. Seja ABC um segmento de parabolóide (ou conóide paraboloidal) e seja CD seu eixo (Fig. 8.5); em volta do sólido vamos circunscrever o cilindro circular $ABEF$, também tendo CD como eixo. Dividamos o eixo em n partes iguais de comprimento h, e pelos pontos de divisão passemos os planos paralelos à base. Sobre as secções circulares que são cortadas no parabolóide por esses planos construímos os troncos cilíndricos circunscrito e inscrito, como se vê na figura. É fácil estabelecerem-se então, usando a equação da parábola e a soma de progressão aritmética, as seguintes proporções e desigualdades:

$$\frac{\text{cilindro } ABEF}{\text{figura inscrita}} = \frac{n^2h}{h + 2h + 3h + \ldots + (n-1)h} > \frac{n^2h}{1/2\, n^2h};$$

$$\frac{\text{cilindro } ABEF}{\text{figura circunscrita}} = \frac{n^2h}{h + 2h + 3h + \ldots + nh} < \frac{n^2h}{1/2\, n^2h}.$$

Arquimedes tinha mostrado previamente que a diferença de volume entre as figuras circunscrita e inscrita era igual ao volume da fatia de baixo do cilindro circunscrito; aumentando o número h de subdivisões do eixo, com isso fazendo cada fatia ficar mais fina, a diferença entre as figuras circunscrita e inscrita pode ser tornada menor que qualquer grandeza prefixada. Daí as desigualdades levam à conclusão que o volume do cilindro é duas vezes o volume do segmento conoidal. Essa obra difere do processo moderno do cálculo integral essencialmente pela falta de conceito de limite de função — conceito que estava tão próximo e no entanto nunca foi formulado pelos antigos, nem mesmo por Arquimedes, o homem que chegou mais perto de consegui-lo.

9 Arquimedes escreveu muitos tratados maravilhosos, dentre os quais seus sucessores se inclinavam a admirar mais *Sobre espirais*. O próprio autor parece ter preferido outro, *Sobre a esfera e o cilindro*. Arquimedes pediu que sobre seu túmulo fosse esculpida uma representação de uma esfera inscrita num cilindro circular reto cuja altura é igual ao seu diâmetro, pois ele tinha descoberto, e provado, que a razão dos volumes do cilindro e da esfera é igual à razão das áreas, isto é, três para dois. Essa propriedade, que Arquimedes descobriu após sua *Quadratura da parábola* era, diz ele, desconhecida dos geômetras que o precederam. Tinha-se pensado outrora[5] que os egípcios sabiam achar a área de um hemisfério; mas agora Arquimedes aparece como o primeiro a saber, e provar que a área da esfera é quatro vezes a área de um seu círculo máximo. Além disso, Arquimedes mostrou que "a superfície de qualquer segmento da esfera é igual à de um círculo cujo raio é igual a uma reta tirada do vértice do segmento à circunferência do círculo que é base do segmento". Isso, é claro, equivale ao enunciado mais familiar que diz que a área da superfície de qualquer segmento esférico é igual à da superfície curva de um cilindro cujo raio é o mesmo que o da esfera e cuja altura é igual à do segmento. Isto é, a área da superfície do segmento não depende da distância do centro da esfera, mas somente da altura (ou espessura) do segmento. O teorema crucial sobre a superfície da esfera aparece em Proposição 33, após uma longa série de teoremas preliminares incluindo um que equivale à integração da função seno:

Se um polígono é inscrito num segmento de círculo LAL' de modo que todos os seus lados exceto a base são iguais e seu número par, como $LK \ldots A \ldots K'L'$, sendo A o ponto médio do segmento; e se as retas BB', CC', ... paralelas à base LL' e unindo pares de vértices são traçadas, então $(BB' + CC' + \ldots + LM):AM = A'B:BA$, onde M é o ponto médio de LL' e AA' é o diâmetro por M (Fig. 8.6).

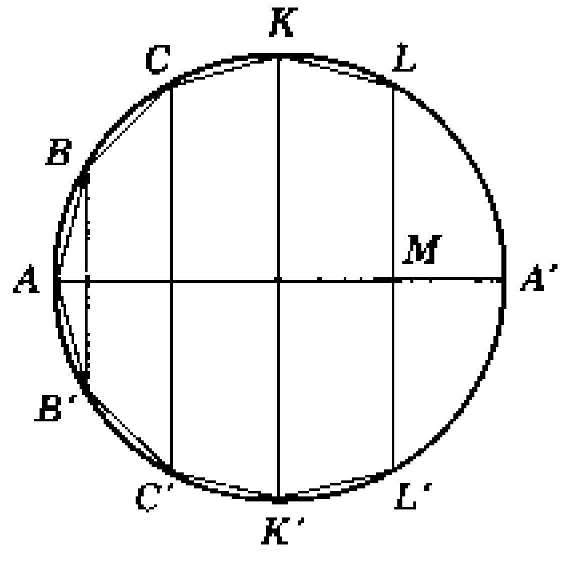


Figura 8.6

[5]Veja R. G. Archibald, *Outline of the History of Mathematics*, 6.ª ed., (The American Mathematical Monthly, Slaught Memorial Papers N.º 2, Janeiro, 1949), pp. 15-16. Cf. notas de rodapé 10 e 11 do Cap. 2

Isso é o equivalente geométrico da equação trigonométrica.

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\theta}{n} + \ldots + \operatorname{sen}\frac{n-1}{n}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{n\theta}{n} = \frac{1-\cos\theta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2n}.$$

Desse teorema é fácil obter a expressão $\int_0^\phi \operatorname{sen} x\, dx = 1 - \cos\phi$, multiplicando ambos os membros da equação acima por θ/n e passando ao limite para n crescendo a infinito. O primeiro membro fica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i \Delta x_i ,$$

onde $x_i = i\theta/n$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, $\Delta x_i = \theta/n$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, e $\Delta x_n = \theta/2n$. O segundo membro fica

$$(1-\cos\theta)\lim_{n\to\infty}\frac{\theta}{2n}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2n} = 1 - \cos\theta.$$

O equivalente do caso especial $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = 1 - \cos\pi = 2$ tinha sido dado por Arquimedes na proposição anterior.

A fórmula familiar para o volume da esfera aparece em *Sobre a esfera e cilindro* I.34:

Toda esfera é igual a quatro vezes o cone que tem base igual ao círculo máximo da esfera e altura igual ao raio da esfera.

O teorema é provado pelo método usual de exaustão, e a razão entre o volume e a área da superfície da esfera e cilindro circunscrito seguem como corolário simples. O diagrama da esfera em um cilindro foi de fato esculpido no túmulo de Arquimedes, como sabemos por uma referência de Cícero. Quando foi questor na Sicília, o orador romano achou o túmulo abandonado com a figura. Ele restaurou o túmulo — o que foi quase a única contribuição de um romano à história da matemática — mas a partir daí qualquer traço dele desapareceu.

10 Um problema no Livro II de *Sobre a esfera e cilindro* lança uma curiosa luz sobre a álgebra geométrica dos gregos. Na Proposição 2 Arquimedes justifica sua fórmula para o volume de um segmento de uma esfera dada; na Proposição 3 ele mostra que, para cortar uma esfera dada por um plano de modo que as *superfícies* dos segmentos estejam numa razão dada, simplesmente se traça um plano perpendicular a um diâmetro por um ponto sobre o diâmetro que o divida em dois segmentos tendo a razão dada. Então mostra na Proposição 4 como cortar a esfera dada de modo que os *volumes* dos dois segmentos estejam numa razão dada um problema muito mais difícil. Em notação moderna, Arquimedes foi levado à equação

$$\frac{4a^2}{x^2} = \frac{(3a-x)(m+n)}{ma},$$

onde $m{:}n$ é a razão dos segmentos. Essa é uma equação cúbica, e Arquimedes atacou sua solução como seus predecessores tinham feito com o problema de Delos — através de intersecções de cônicas. É interessante que o método de ataque usado pelos gregos para cúbicas era muito diferente do usado para a equação quadrática. Por analogia com a "aplicação de áreas" no último caso, esperaríamos uma "aplicação de volumes", mas esse não foi o caminho seguido. Por substituições Arquimedes reduziu sua equação cúbica à forma $x^2(c-x) = db^2$ e prometeu dar em separado uma análise completa dessa cúbica quanto ao número de raízes positivas. Essa análise tinha aparentemente estado perdida havia séculos quando Eutocius, um importante comentador do começo do sexto século, achou um fragmento que parece conter a autêntica análise de Arquimedes. A solução foi obtida por meio da intersecção da parábola $cx^2 = b^2y$ e da hipérbole $(c-x)y = cd$. Indo além, ele achou uma condição sobre os coeficientes que determina o número de raízes reais que satisfazem às condições dadas — uma condição equivalente a achar o discri-

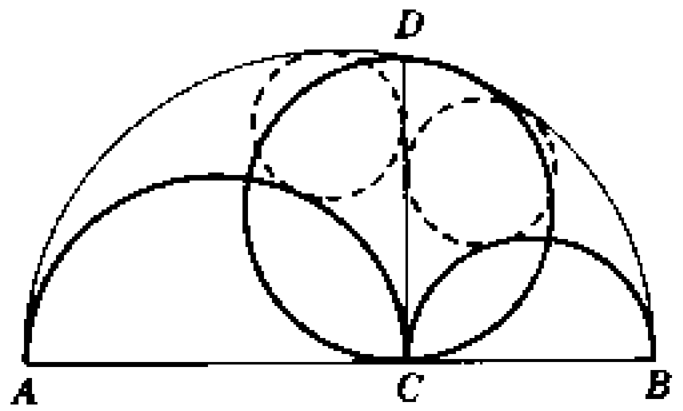


Figura 8.7

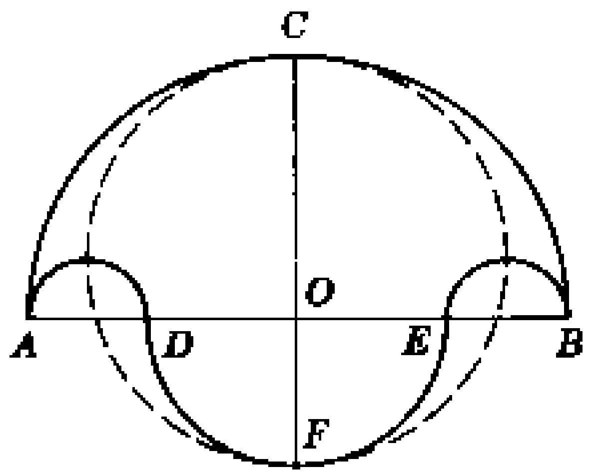


Figura 8.8

minante, $27b^2d-4c^3$, da equação cúbica $b^2d = x^2(c-x)$. (Isso pode ser facilmente verificado usando um pouco de Cálculo elementar.) Como toda equação cúbica pode ser transformada no tipo arquimediano, temos a essência de uma análise completa da cúbica geral. O interesse pela equação cúbica desapareceu logo após Arquimedes, sendo revivido por algum tempo por Eutocius e séculos mais tarde pelos Árabes.

11 A maior parte dos tratados de Arquimedes que descrevemos dizem respeito a matemática avançada, mas o grande siracusano não desprezava problemas elementares. Em seu *Livro de lemas*, por exemplo, achamos um estudo do chamado *arbelos* ou "faca do sapateiro". A faca do sapateiro é a região limitada pelos três semicírculos tangentes em pares na Fig. 8.7, a área em questão sendo aquela que está dentro do semicírculo maior e fora dos menores. Arquimedes mostrou na Proposição 4 que se CD é perpendicular a AB, a área do círculo com CD como diâmetro é igual à área do arbelos. Na proposição seguinte ele mostra que os dois círculos inscritos nas duas regiões em que CD divide o arbelos são iguais.

O *Livro de lemas* contém também um teorema (Proposição 14) sobre o que Arquimedes chamou o *salinon* ou "saleiro". Trace semicírculos com os segmentos AB, AD, DE e EB como diâmetros (Fig. 8.8) com $AD = EB$. Então a área total limitada pelo *salinon* (inteiramente limitada por arcos semicirculares) é igual à área do círculo tendo por diâmetro o eixo de simetria da figura, FOC.

É no *Livro de lemas* que achamos também (como Proposição 8) a bem conhecida trissecção do ângulo de Arquimedes. Seja ABC o ângulo a ser trissectado (Fig. 8.9). Então com B como centro, traçar um círculo de qualquer raio, que cortará AB em P, BC em Q, e BC estendido em R. Então traçar uma reta STP tal que S esteja em $CQBR$ estendida e T sobre o círculo e tal que $ST = BQ = BP = BT$. Verifica-se então facilmente, pois que os triângulos STB e TBP são isósceles, que o ângulo BST é precisamente um terço do ângulo QBP, o ângulo a ser trissectado. Arquimedes e seus contemporâneos sabiam, é claro, que essa não era uma trissecção canônica no sentido platônico, pois envolve o que chamavam de *neusis* — isto é, a inserção de um comprimento dado, no caso $ST = BQ$, entre duas figuras, aqui a reta QR estendida e o círculo.

O *Livro de lemas* não se preservou no original grego mas em tradução árabe, que depois foi por sua vez traduzida para o latim. (Por isso freqüentemente é designado por seu título em latim de *Liber assumptorum*.) Na verdade a obra que chegou em latim até nós não pode ser genuinamente a de Arquimedes, pois seu nome é várias vezes citado no texto. No entanto, mesmo que não seja senão uma miscelânia de teoremas que os árabes atribuíam a Arquimedes, a obra provavelmente é, em substância, autêntica. Há

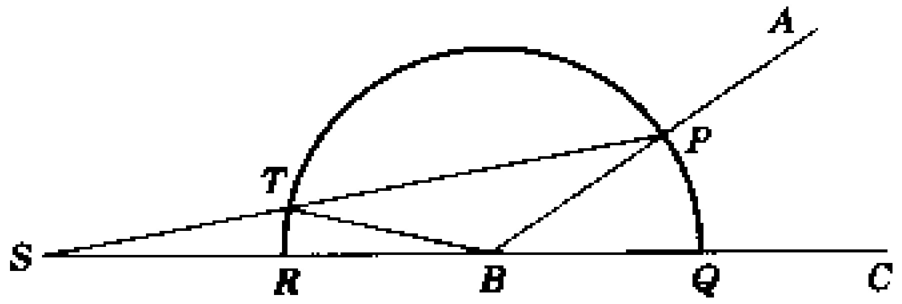


Figura 8.9

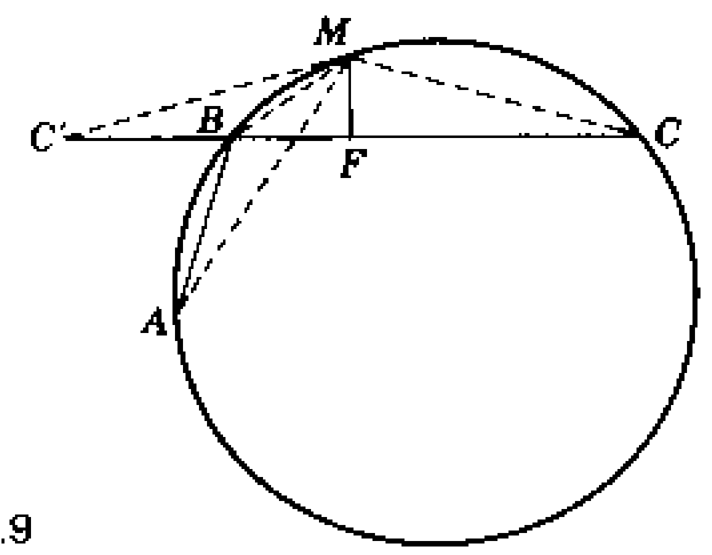


Figura 8.10

dúvidas também quanto à autenticidade do *problema do gado*, que em geral supõe-se ser de Arquimedes, e certamente data de alguma época poucas décadas distante de sua morte. O *problema do gado* é um desafio aos matemáticos para resolver um sistema de equações indeterminadas em oito incógnitas — o número de touros e vacas de cada uma de quatro cores diferentes. Há alguma ambigüidade na formulação do problema, mas segundo uma interpretação seria necessário um volume de mais de 600 páginas para dar os valores das oito incógnitas contidas numa das possíveis soluções. O problema, que envolve a solução de $x^2 = 1 + 4729494y^2$, incidentalmente fornece um primeiro exemplo do que mais tarde (ver abaixo) se chamou uma "equação de Pell".

12 É certo que nem todas as obras de Arquimedes chegaram até nós, pois por um comentário de época posterior sabemos (por Papus) que Arquimedes descobriu todos os treze possíveis sólidos ditos semi-regulares. Ao passo que um poliedro regular tem faces que são polígonos regulares do mesmo tipo, um sólido semi-regular é um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares mas não todos do mesmo tipo. Por exemplo, se dos oito cantos de um cubo de aresta a cortamos tetraedros com arestas $a(2-\sqrt{2})/2$, a figura resultante será um sólido semi-regular ou arquimediano com a superfície feita de oito triângulos equiláteros e seis octógonos regulares.

Que um bom número de obras de Arquimedes se perdeu é claro por muitas referências. Pelos árabes sabemos que a familiar fórmula para a área de um triângulo em termos de seus lados, conhecida como fórmula de Heron — $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ onde s é o semiperímetro — era conhecida por Arquimedes vários séculos antes de Heron ter nascido. Também os árabes atribuem a Arquimedes o "teorema sobre a corda quebrada" — se AB e BC formam uma corda quebrada num círculo (com $AB \neq BC$) e se M é o ponto médio do arco ABC e F o pé da perpendicular de M à corda maior, F será o ponto médio da corda quebrada ABC (Fig. 8.10). Dizem os árabes que Arquimedes deu várias provas desse teorema, uma das quais obtida traçando as linhas pontilhadas da figura, tomando $FC' = FC$, e provando que $\Delta MBC' \simeq \Delta MBA$. Logo $BC' = BA$, e resulta que $C'F = AB + BF = FC$. Não sabemos se Arquimedes viu algum significado trigonométrico no teorema, mas sugeriu-se[6] que ele lhe servia como uma fórmula análoga à nossa $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$. Para mostrar a equivalência pomos $\widehat{MC} = 2x$ e $\widehat{BM} = 2y$. Então $\widehat{AB} = 2x-2y$. Agora, as cordas que correspondem a esses arcos são respectivamente $MC = 2 \operatorname{sen} x$, $BM = 2 \operatorname{sen} y$ e $AB = 2 \operatorname{sen}(x-y)$. Além disso, as projeções de MC e MB sobre BC são $FC = 2 \operatorname{sen} x \cos y$ e $FB = 2 \operatorname{sen} y \cos x$. Se, finalmente escrevermos o teorema da corda quebrada na forma $AB = FC - FB$ e substituirmos os equivalentes trigonométricos dessas três cordas, resulta a fórmula para $\operatorname{sen}(x-y)$. Outras identidades trigonométricas podem ser obtidas, é claro, do mesmo teorema da corda quebrada, o que indica que Arquimedes pode tê-lo achado útil em seus cálculos astronômicos.

13 Ao contrário de *Os elementos* de Euclides que foram conservados em muitos manuscritos gregos e árabes, os tratados de Arquimedes chegaram a nós por um fio frágil. Quase todas as cópias derivam de um mesmo original grego que existia no começo do século dezesseis e que era ele próprio copiado de um original do século nove ou dez. *Os elementos* de Euclides eram familiares aos matemáticos, quase sem interrupção, desde sua composição; mas os tratados de Arquimedes tiveram uma carreira mais aventurosa. Houve épocas em que poucas ou nenhuma das obras de Arquimedes eram conhecidas. Nos dias de Eutocius, um conhecedor de primeira linha e hábil comentador do século seis, somente três obras de Arquimedes eram bastante conhecidas — *Sobre o equilíbrio de planos*, a incompleta *Medida de um círculo*, e o admirável *Sobre a esfera e cilindro*. Em tais circunstâncias é de admirar que tão grande parte do que Arquimedes escreveu tenha sobrevivido até hoje. Entre os aspectos assombrosos da proveniência das obras de Arquimedes está a descoberta no século vinte de um de seus mais importantes tratados — um que Arquimedes chamou simplesmente *O método* e que esteve perdido desde os primeiros séculos de nossa era até sua redescoberta em 1906.

[6] Veja Johannes Tropfke "Archimedes und die Trigonometrie" *Archiv für die Geschichte der Mathematik*, 10 (1927-1928), 432-463

O método de Arquimedes é de particular importância porque nos revela uma faceta do pensamento de Arquimedes não encontrada em outras obras. Seus outros tratados são jóias de precisão lógica, com poucos traços da análise preliminar que possa ter levado à formulação definitiva. Suas provas pareceram tão completamente sem motivação a alguns escritores do século dezessete que eles suspeitaram que Arquimedes tivesse ocultado seu método de descoberta a fim de que sua obra fosse ainda mais admirada. O quanto essa avaliação pouco generosa do grande siracusano era injustificada se tornou claro em 1906 com a descoberta do manuscrito contendo *O método*. Aqui Arquimedes publicou, para que todos lessem, uma descrição das investigações "mecânicas" preliminares que levaram a muitas de suas principais descobertas matemáticas. Ele julgava que seu "método" nesses casos não tinha rigor, pois considerava uma área, por exemplo, como soma de segmentos de reta.

O método, na forma em que o temos, contém a maior parte do texto de umas quinze proposições, enviadas em forma de carta a Eratóstenes, matemático e bibliotecário na universidade de Alexandria. O autor começa dizendo que é mais fácil fornecer uma prova de um teorema se sabemos antes o que está envolvido; como exemplo, cita as provas de Eudoxos sobre o cone e a pirâmide, que tinham sido facilitadas por asserções prévias, sem prova, feitas por Demócrito. Depois Arquimedes anuncia que ele próprio tinha um método "mecânico" que abria caminho para algumas de suas provas. O primeiro teorema que ele descobriu desse modo foi o teorema sobre a área de um segmento parabólico; na Proposição 1 de *O método* o autor descreve como chegar a esse teorema, equilibrando retas como se faz com pesos em mecânica. Pensou nas áreas do segmento parabólico ABC e do triângulo AFC (onde FC é tangente à parábola em C) como sendo a totalidade de uma coleção de segmentos de reta paralelos ao diâmetro QB da parábola, tais como OP (Fig. 8.11) para a parábola e OM para o triângulo. Se, agora, colocarmos em H (onde $HK = KC$) um segmento igual a OP, isso equilibraria OM onde está, sendo K o fulcro. (Isso pode ser provado usando a lei da alavanca e a propriedade da parábola.) Logo a área da parábola, se colocada com o centro de gravidade em H, equilibrará o triângulo, cujo centro de gravidade está sobre KC, a um terço da distância de K a C. Disso resulta facilmente que a área do segmento parabólico é um terço da área do triângulo AFC, ou quatro terços da área do triângulo inscrito ABC.

14 O teorema favorito de Arquimedes, representado em seu túmulo, também foi sugerido pelo seu método mecânico. É descrito na Proposição 2 de *O método*:

> Qualquer segmento de esfera tem para o cone de mesma base e altura a razão que a soma do raio da esfera e da altura do segmento complementar tem com a altura do segmento complementar.

O teorema resulta de uma bela propriedade de equilíbrio que Arquimedes descobriu (e que pode ser facilmente verificada em termos de fórmulas modernas). Seja $AQDCP$ uma secção transversal de uma esfera com centro O e diâmetro AC (Fig. 8.12) e seja AUV uma secção plana de um cone circular reto com eixo AC e UV como diâmetro da base. Seja $IJUV$ um cilindro circular reto com eixo AC e com $UV = IJ$ como diâmetro, e seja $AH = AC$. Se traçarmos um plano por um ponto S qualquer do eixo AC e perpendicular a AC, o plano cortará a esfera, o cone, e o cilindro em círculos de raios $r_1 = SP$, $r_2 = SR$, e $r_3 = SN$ respectivamente. Se chamarmos as áreas desses círculos A_1, A_2, e A_3, então, Arquimedes descobriu, A_1 e A_2, quando colocados com seus centros em H, equilibrarão A_3 onde está, com A como fulcro. Logo se chamarmos os volumes da esfera, do cone e do cilindro de V_1, V_2, V_3 vem que $V_1 + V_2 = 1/2\, V_3$; e como $V_2 = 1/3\, V_3$ a esfera deve ser $1/6\, V_3$. Como o volume V_3 do cilindro é conhecido (por Demócrito e Eudoxo), o volume da esfera fica também conhecido — em notação atual, $V = 4/3\, \pi r^3$. Aplicando a mesma técnica de equilíbrio ao segmento esférico com diâmetro da base BD, ao cone de diâmetro da base EF, e ao cilindro com diâmetro da base KL, o volume do segmento esférico é achado do mesmo modo que o da esfera toda.

15 O método do equilíbrio de secções circulares com um vértice como fulcro foi aplicado por Arquimedes para descobrir os volumes dos segmentos de três sólidos de revolução — o elipsóide, o parabolóide e o hiperbolóide, bem como os centros de gravidade do parabolóide (conóide), de qualquer hemisfério, e de um semicírculo. *O método* conclui com a determinação dos volumes de dois sólidos que são os favoritos dos livros atuais de Cálculo — uma cunha cortada de um cilindro circular reto por dois planos (como na Fig. 8.13) e o volume comum a dois cilindros circulares retos iguais que se cortam em ângulo reto. A obra contendo esses maravilhosos resultados de há mais de 2 000 anos foi recuperada quase acidentalmente em 1906. O infatigável erudito dinamarquês J. L. Heiberg tinha lido que em Constantinopla se encontrava um palimpsesto de conteúdo matemático. (Um palimpsesto é um pergaminho em que a escrita original foi imperfeitamente apagada e substituída por um texto diferente). Uma inspeção cuidadosa mostrou-lhe que o texto original tinha contido algo de Arquimedes, e por meio de fotografias ele conseguiu ler a maior parte do texto primitivo. O manuscrito consistia de 185 folhas, quase todas de pergaminho mas algumas de papel, com o texto de Arquimedes copiado por mão do século dez. Uma tentativa — felizmente não muito bem sucedida — tinha sido feita para apagar esse texto a fim de usar o pergaminho para um Euchologion (uma coleção de orações e liturgias usadas na Igreja Ortodoxa Oriental) escrito por volta do século treze. O texto matemático continha *Sobre a esfera e o cilindro*, a maior parte da obra *Sobre espirais*, parte de *Medida de um círculo* e de *Sobre o equilíbrio de planos*, e *Sobre corpos flutuantes*, todas obras preservadas em outros manuscritos; mais importante que tudo isto, é que o pelimpsesto nos dá a única cópia existente de *O método*. Num certo sentido o palimpsesto simboliza a contribuição da Idade Média. A intensa preocupação com assuntos religiosos quase apagou de vez uma das mais importantes obras do

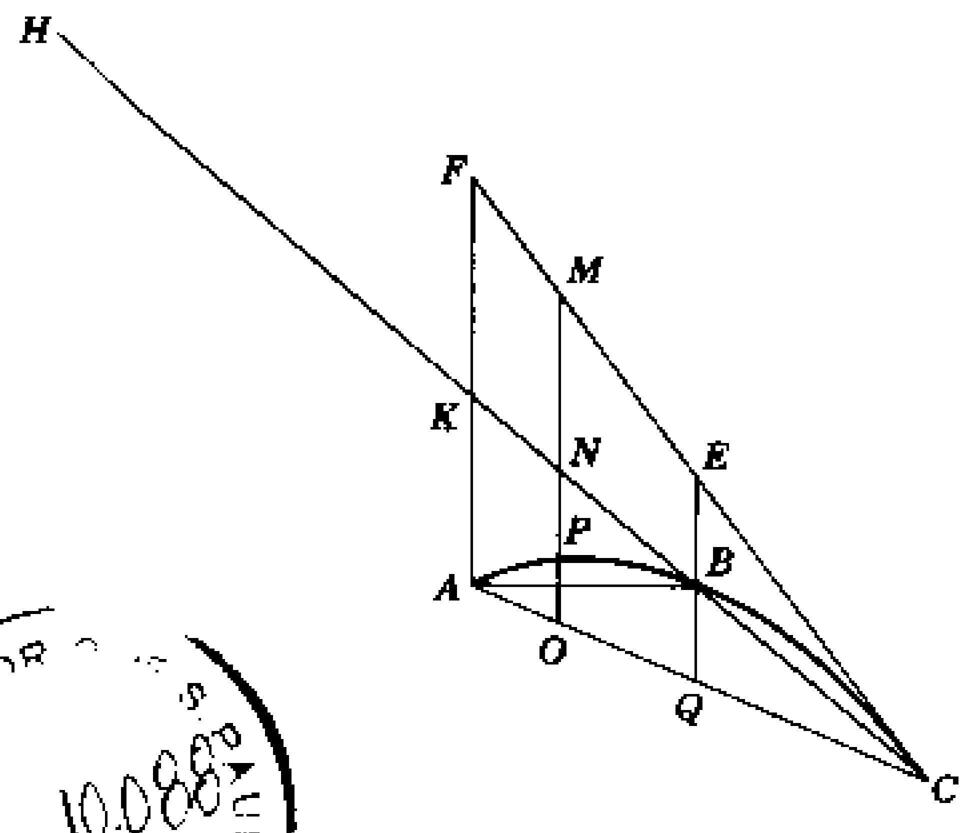


Figura 8.11

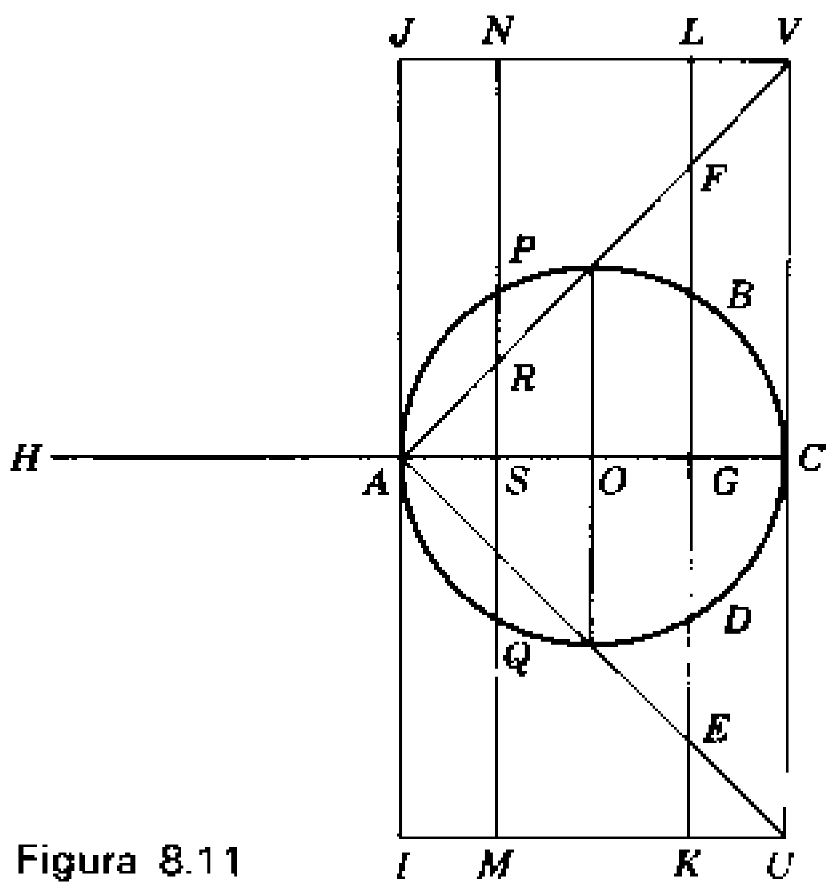


Figura 8.12

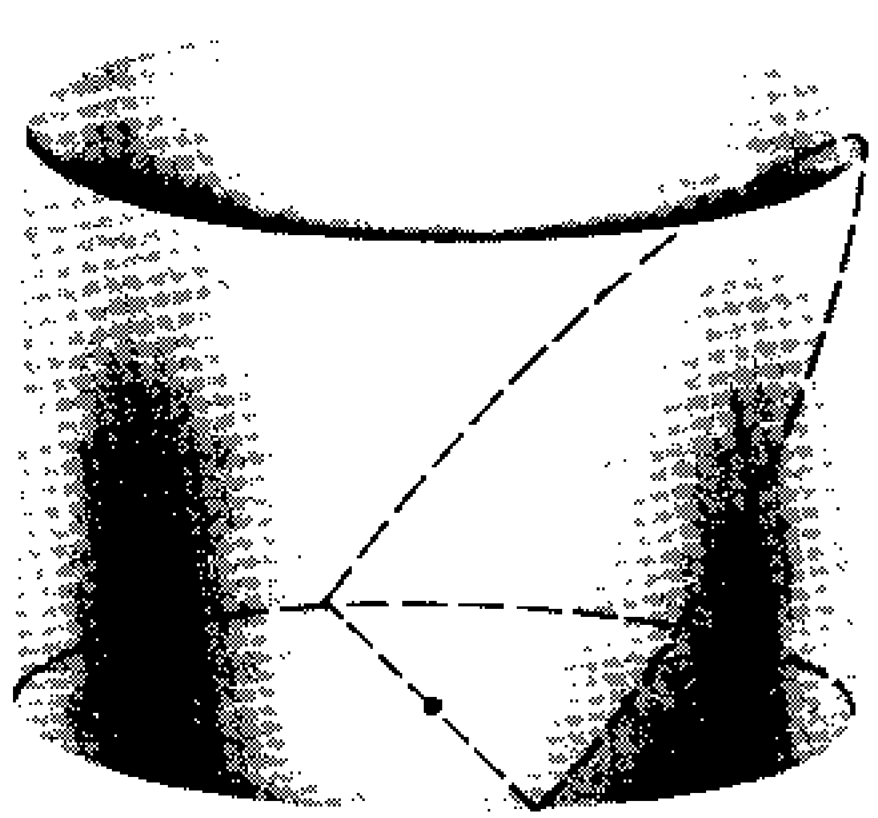


Figura 8.13

maior matemático da antiguidade; mas afinal foi a atividade cultural medieval que inadvertidamente preservou isso, e muito mais, que de outra forma se perderia.

BIBLIOGRAFIA

Bromwich, T. J., "The Methods Used by Archimedes for Approximating to Square Roots, *The Mathematical Gazette*, **14** (1928-1929), 253-257

Clagett, Marshall, *Archimedes in the Middle Ages* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1964, 2 vols.)

Cohen, M. R., e I. E. Drabkin, *A Source Book in Greek Science* (New York: McGraw-Hill, 1948; reimpresso Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958)

Davis, H. T., "Archimedes and Mathematics," *School Science and Mathematics*, **44** (1944), 136-145, 213-221

Dijksterhuis, E. J., *Archimedes* (New York: Humanities Press, 1957)

Erhardt, Erika von, e Rudolf von Erhardt, "Archimedes' Sand-Reckoner," *Isis*, **33** (1942), 578-602

Heath, T. L., *The Works of Archimedes* (Cambridge, 1897; reimpresso em brochura, incluindo *O método de Archimedes*, New York: Dover, s.d.)

Heiberg, J. L., *Quaestiones archimedae* (Copenhagen, 1879)

Heiberg, J. L., "Le rôle d'Archimède dans le développement des sciences exactes," *Scientia*, **20** (1916), 81-89

Heiberg, J. L., ed., *Archimedes, Opera omnia* (Leipzig, 1880-1881, 3 volumes)

Heiberg, J. L., e H. G. Zeuthen, "Eine neue Schrift des Archimedes," *Bibliotheca Mathematica* (3), **7** (1906-1907), 321-363

Hofmann, J. E., "Erklärungsversuche für Archimeds Berechnung von $\sqrt{3}$," *Archiv für die Geschichte der Mathematik*, **12** (1929), 386-408

Hoppe, Edmund, "Die zweite Methode des Archimedes zur Berechnung von π," *Archiv für die Geschichte der Mathematik*, **9** (1920-1922), 104-107

Midolo, P., *Archimede e il suo tempo* (Syracuse, 1912)

Neugebauer, O., "Archimedes and Aristarchus," *Isis*, **34** (1942), 4-6

Smith, D. E., "A Newly Discovered Treatise of Archimedes," *Monist*, **19** (1909), 202-230

Thomas, Ivor, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Leob Classical Library, 1939-1941, 2 vols.)

Tropfke, Johannes, "Archimedes und die Trigonometrie," *Archiv für die Geschichte der Mathematik*, **10** (1927-1928), 432-463

Weissenborn, Hermann, "Die irrationalen Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron," *Berliner Studien für Klassische Philologie und Archaeologie*, **1** (1884), 357-408

EXERCÍCIOS

1. Arquimedes é às vezes considerado o inventor do cálculo integral. Até que ponto você concorda ou discorda dessa opinião?

2. Euclides se apoiou pesadamente na obra de seus predecessores. Até que ponto o mesmo vale para Arquimedes?

3. Aristóteles conhecia a lei da alavanca antes de Arquimedes nascer. Por que, então, a lei é às vezes atribuída a Arquimedes? Explique.

4. Dos muitos tratados que Arquimedes escreveu e que nos são familiares, qual considera o mais significativo para o desenvolvimento da matemática? Explique.

5. Arquimedes é em geral considerado o maior matemático da antiguidade. Explique completamente a justificativa para essa opinião, comparando sua obra com pelo menos a de dois rivais potenciais anteriores.

6. Se a_i e A_i são respectivamente as áreas de polígonos regulares de i lados inscritos em e circunscritos a um círculo, prove as fórmulas de recorrência de Arquimedes $a_{2n} = \sqrt{a_n A_n}$ e $A_{2n} = 2A_n a_{2n}/(A_n + a_{2n})$.

7. Se p_i e P_i são os *perímetros* de polígonos regulares inscritos em e circunscritos a um círculo, prove o algoritmo de Arquimedes $P_{2n} = 2P_n p_n/(P_n + p_n)$ e $p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}$.

8. Começando, como o fez Arquimedes, com um hexágono regular inscrito num círculo, use um algoritmo arquimediano de recorrência para achar ou p_{12} e P_{12} ou a_{12} e A_{12}. Que valor de π surgiria como média aritmética de suas respostas?

9. Ache a área entre as porções da espiral $r = a\theta$ formadas para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e para $2\pi \leq \theta \leq 4\pi$.

10. Mostre claramente como dividir a área da superfície da esfera por dois planos paralelos em três áreas numericamente iguais.

11. Prove o teorema (de Arquimedes) que diz que a área da "faca de sapateiro" é igual à área do círculo de diâmetro CD (Fig. 8.7).

12. Prove o método de trissecção de Arquimedes descrito no texto.

13. Construa ou desenhe diagramas de três sólidos arquimedianos semi-regulares.

*14. Ache, para a espiral arquimediana $r = a\theta$, o comprimento da subtangente polar para $\theta = 2\pi$ e mostre como pode ser usada na quadratura do círculo.

*15. Prove o teorema de Arquimedes sobre a corda quebrada.

*16. Usando ou a propriedade de equilíbrio arquimediana, ou integração moderna, prove a fórmula para o volume de um segmento de esfera.

*17. Prove o teorema arquimediano sobre o salinon.

*18. No diagrama do teorema de Arquimedes sobre a corda quebrada (Fig. 8.10) use a equação $BF + FC = BC$ para obter a identidade trigonométrica familiar para sen $(x + y)$.

*19. Você pode dividir, exata ou aproximadamente, a esfera unitária por dois planos paralelos em três segmentos de volumes iguais? Explique.

*20. Prove que os dois círculos inscritos nas duas partes em que CD divide a "faca de sapateiro" (Fig. 8.7) são iguais.

Capítulo **9**

Apolônio de Perga

> Parece-me que toda a evidência indica ter sido Apolônio o fundador da astronomia matemática grega.
>
> *Otto Neugebauer*

1 Durante o primeiro século aproximadamente da Idade Helenística três matemáticos se destacaram a grande distância dos demais da época, assim como da maior parte de seus predecessores e sucessores. Esses homens foram Euclides, Arquimedes e Apolônio; é por causa da obra deles que o período de cerca de 300 a 200 A. C. foi denominado "Idade Áurea" da matemática grega. Num certo sentido a matemática estava em atraso com relação às artes e à literatura, pois foi a Idade de Péricles, em meados do quinto século A. C., que em sentido mais amplo mereceu o nome de "Idade Áurea da Grécia". Durante todo o período helenístico a cidade de Alexandria permaneceu o foco matemático do Ocidente mas Apolônio, como Arquimedes, não nasceu aí. Nasceu em Perga em Panfília (sul da Ásia Menor); mas pode ter sido educado em Alexandria, e parece ter passado algum tempo lá ensinando na universidade. Durante certo tempo esteve em Pérgamo, onde havia uma universidade e uma biblioteca só inferiores às de Alexandria, graças ao apoio do general de Alexandre, Lisímaco, e de seus sucessores. Como houve muitos homens chamados Apolônio na antiguidade (129 desses, com biografias, são mencionados em Pauly Wissowa, *Real-Enzyklopädie der Klassischen Altertumswissenschaft*) nosso matemático é distinguido dos demais pelo uso de seu nome completo, Apolônio de Perga. Não conhecemos as datas precisas de sua vida, mas diz-se que viveu durante os reinos de Ptolomeu Euergetes e de Ptolomeu Filopater; um relato diz que foi o tesoureiro geral de Ptolomeu Filadelfo, e diz-se ainda que era vinte e cinco a quarenta anos mais jovem que Arquimedes. Sugeriu-se que viveu de 262 a 190 A. C., e pouco se sabe de sua vida. Parece ter-se considerado rival de Arquimedes; assim, ele tratou de vários dos assuntos que discutimos no capítulo anterior. Desenvolveu um esquema de "tetradas" para exprimir grandes números, usando equivalentes de expoentes da miríade, ao passo que Arquimedes usava a dupla miríade como base. O esquema de Apolônio provavelmente era aquele de que parte está descrita no que restou do Livro II da *Coleção matemática* de Papus. (Todo o Livro I e parte do II se perderam.) Aqui o número $5\,462\,360\,064 \times 10^6$ é escrito como $\mu^{\gamma}\ {}_{,}\varepsilon\nu\xi\beta\mu^{\beta}\ {}_{,}\gamma\chi\mu^{\alpha}\ {}_{,}\varsigma\nu$ onde μ^{γ}, μ^{β}, e μ^{α} são a terceira, segunda e primeira potências, respectivamente, de uma miríade.

Apolônio escreveu uma obra (agora perdida) chamada *Resultado rápido* que parece ter tratado de processos rápidos de calcular. Nela diz-se que o autor obteve uma aproximação de melhor do que a dada por Arquimedes — provavelmente o valor que conhecemos como 3,1416. Não sabemos como esse valor, que apareceu depois em Ptolomeu e na Índia, foi obtido. Na verdade há mais perguntas não respondidas sobre Apolônio e sua obra do que sobre Euclides e Arquimedes, pois a maior parte de suas obras desapareceram. Temos os títulos de muitas obras perdidas, como *Dividir em uma razão*, outra sobre *Cortar uma área*, uma *Sobre secção determinada*, outra sobre *Tangências* (ou *Contatos*), uma sobre *Inclinações* e uma sobre *Lugares planos*. Em alguns casos sabemos qual o assunto do tratado, pois Papus deu uma breve descrição de alguns. Seis das obras de Apolônio estavam incluídas junto com dois dos tratados mais avançados (hoje perdidos) de Euclides, numa coleção chamada "Tesouro da análise". Papus descreveu isso como uma coleção especial destinada aos que, depois de adquirir os elementos usuais, queriam obter a capacidade de resolver problemas envolvendo curvas. O "Tesouro", consistindo em grande parte de obras de Apolônio, conseqüentemente deve ter incluído muito do que hoje chamamos geometria analítica; foi com razão que Apolônio, não Euclides, mereceu dos antigos o nome de "o Grande Geômetra".

2 Pelas descrições dadas por Papus e outros, é possível obter uma boa idéia do conteúdo de algumas obras gregas perdidas, e quando, no século dezessete, o esporte de reconstruir livros de geometria perdidos estava no auge, os tratados de Apolônio estavam entre os favoritos[1]. Das restaurações do *Lugares planos*, por exemplo, inferimos que dois dos lugares considerados eram os seguintes: (1) o lugar dos pontos cuja diferença de quadrados das distâncias a dois pontos fixos é constante é uma reta perpendicular à reta que une os dois pontos; (2) o lugar dos pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante (e diferente de um) é um círculo. Esse último lugar é chamado "círculo de Apolônio", mas é má denominação pois era conhecido por Aristóteles que o utilizou para justificar matematicamente a forma semicircular do arco-íris[2].

O *Dividir em uma razão* tratava de vários casos de um problema geral — dadas duas retas e um ponto em cada uma, traçar por um terceiro ponto dado uma reta que corte sobre as retas dadas segmentos (medidos a partir dos pontos fixados sobre elas) que estejam numa razão dada. Esse problema equivale a resolver uma equação quadrática do tipo $ax - x^2 = bc$, isto é, aplicar a um segmento um retângulo igual a um retângulo e faltando um quadrado. Em *Cortar uma área* o problema é semelhante, só que se exige que os segmentos cortados contenham um retângulo dado, em vez de estar numa razão dada. Esse problema leva a uma quadrática da forma $ax + x^2 = bc$, de modo que é preciso aplicar a um segmento a um retângulo igual a um retângulo e com excesso de um quadrado. O tratado de Apolônio *Sobre secção determinada* estuda o que se poderia chamar de geometria analítica a uma dimensão. Considerava o seguinte problema geral, usando a típica análise algébrica grega em forma geométrica: Dados quatro pontos A, B, C, D sobre uma reta, determinar um quinto ponto P sobre ela, tal que o retângulo sobre AP e CP esteja numa razão dada com o retângulo sobre BP e DP. Aqui, também, o problema se reduz facilmente à solução de uma quadrática; e, como em outros casos, Apolônio tratou a questão exaustivamente, inclusive os limites de possibilidade e o número de soluções.

3 O tratado sobre *Tangências* é de tipo diferente dos três citados acima, pois da forma pela qual Papus o descreve vemos o problema conhecido hoje como "Problema de Apolônio": dadas três coisas, cada uma das quais pode ser um ponto, uma reta ou um círculo, traçar um círculo que é tangente a cada uma das três coisas (onde tangência a um ponto significa que o círculo passa pelo ponto). Esse problema envolve dez casos, desde os dois mais fáceis (em que as três coisas são três pontos ou três retas) até o mais difícil de todos (traçar um círculo tangente a três círculos). Os dois mais fáceis aparecem em *Os elementos* de Euclides em conexão com círculos circunscrito e inscrito a um triângulo; outros seis foram tratados no Livro I de *Tangências* e o caso de duas retas e um círculo, mais o de três círculos, ocupavam todo o Livro II. Não temos as soluções de Apolônio, mas elas podem ser reconstruídas com base em informação dada por Papus. No entanto estudiosos dos séculos dezesseis e dezessete em geral pensavam que Apolônio não tinha resolvido o último caso, por isso o consideravam como um desafio às suas capacidades. Newton foi um dos que deram uma solução, usando apenas régua e compasso[3].

A trissecção do ângulo por Arquimedes, em que um comprimento dado é inserido entre uma reta e um círculo segundo uma reta que é deslocada de modo a passar por um ponto dado (o ponto P na Fig. 8.9) é um exemplo típico de uma solução por meio de uma *neusis* (inclinação). O tratado de Apolônio sobre *Inclinações* considerava a classe dos problemas de *neusis* que podem ser resolvidos por métodos "planos" — isto é, só usando régua e compasso. (A trissecção de Arquimedes, é claro, não é um tal problema, pois em tempos modernos provou-se que o ângulo geral não pode ser trissectado por

[1] Para uma exposição dessas "restaurações" ver o artigo sobre "Apollonius" por T. L. Heath na *Encyclopaedia Britannica*, 11.ª edição (1910)

[2] Veja C. B. Boyer, *The Rainbow* (New York: Yoseloff, 1959), pp. 45-46

[3] *Arithmetica universalis*, Problema XLVII

métodos "planos".) De acordo com Papus, um dos problemas tratados em *Inclinações* é o da inserção dentro de um círculo dado, de uma corda de comprimento dado inclinando-se a um ponto dado.

Fizeram-se na antiguidade alusões a outras obras de Apolônio, inclusive uma sobre *Comparação entre dodecaedro e icosaedro*. Nela o autor dava uma prova do teorema (conhecido talvez por Aristeu) que diz estarem as faces pentagonais planas de um dodecaedro à mesma distância do centro da esfera circunscrita que as faces triangulares de um icosaedro inscrito na mesma esfera. O teorema no espúrio Livro XIV de *Os elementos* — que diz que nesse caso a razão das áreas do icosaedro e do dodecaedro é igual à razão de seus volumes — decorre imediatamente da proposição de Apolônio e é possível que o autor de *Os elementos* XIV tenha usado o tratado de Apolônio.

4 Apolônio foi também um astrônomo célebre; o modelo matemático favorito da antiguidade para a representação do movimento dos planetas aparentemente deve-se a ele. Enquanto que Eudoxo tinha usado esferas concêntricas, Apolônio propôs dois sistemas alternativos, um feito de movimentos epicíclicos, outro envolvendo movimentos excêntricos. No primeiro modelo assumia-se que um planeta P se move uniformemente ao longo de um pequeno círculo (epiciclo) cujo centro C por sua vez se move uniformemente ao longo de um círculo maior (deferente) com centro na terra E (Fig. 9.1). No esquema excêntrico o planeta P se move ao longo de um círculo grande, cujo centro C' por sua vez se move, uniformemente em um círculo pequeno de centro E. Se $PC = C'E$, os dois esquemas serão equivalentes, como Apolônio evidentemente sabia[4]. Enquanto que a teoria de esferas homocêntricas tinha-se tornado, por obra de Aristóteles, o esquema astronômico favorito dos que se satisfaziam com uma aproximação grosseira dos movimentos, a teoria dos ciclos e epiciclos, por causa de Ptolomeu, veio a ser adotada pelos astrônomos matemáticos que desejavam maior refinamento de detalhe e de previsões. Durante cerca de 1 800 anos os dois modelos — um de Eudoxo e o outro de Apolônio — foram rivais cordiais disputando a preferência dos estudiosos.

5 Apesar de sua produtividade científica, só dois dos muitos tratados de Apolônio se preservaram em grande parte. Todas as versões gregas de *Dividir segundo uma razão* se perderam há muito tempo, mas não antes de ser feita uma tradução árabe. Em 1706 Halley, amigo de Newton, publicou uma tradução da obra para o latim, e depois disso apareceu em línguas atuais. Além desse tratado, só uma obra de Apolônio se preservou apareceu em línguas atuais. Além desse tratado, só uma obra de Apolônio se preservou substancialmente, mas essa foi certamente sua obra prima — *As cônicas*. Dessa obra famosa só metade — os quatro primeiros dos oito livros de que se compunha — existe ainda em grego; felizmente, um matemático árabe, Thabit ibn Qurra, tinha traduzido os três seguintes, e essa versão se preservou. Em 1710 Edmund Halley deu uma tradução latina dos sete livros, e daí então apareceram edições em muitas línguas.

As secções cônicas eram conhecidas havia cerca de um século e meio quando Apolônio escreveu seu célebre tratado sobre essas curvas. Pelo menos duas vezes nesse intervalo tinham sido escritas exposições gerais — por Aristeu e por Euclides — mas

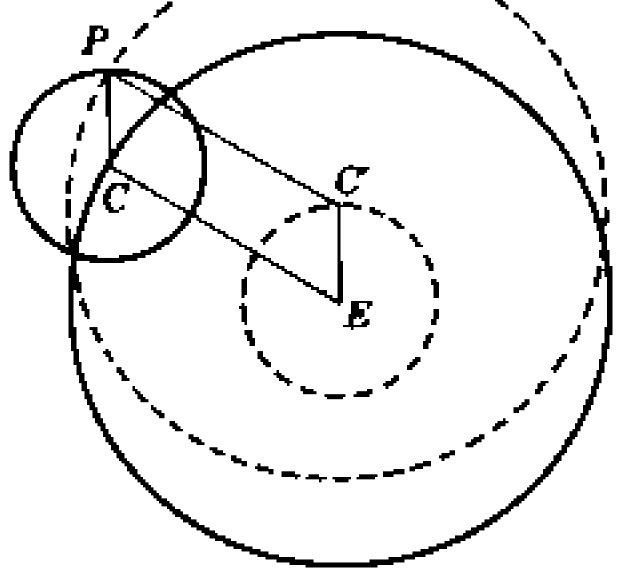


Figura 9.1

[4]Veja O. Neugebauer, "Eccentric and Epicyclic Motion According to Apollonius", *Scripta Mathematica*, **24** (1959), 5-21

assim como *Os elementos* de Euclides substituíram textos elementares anteriores, assim em nível mais avançado o tratado sobre *Cônicas* de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das secções cônicas, inclusive *As cônicas* de Euclides, e na antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-lo. Se a sobrevivência é uma medida de qualidade, *Os elementos* de Euclides e *As cônicas* de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus campos.

O Livro I de *As cônicas* começa com uma exposição da motivação para escrever a obra. Quando Apolônio estava em Alexandria, foi procurado por um geômetra chamado Naucrates, e foi a pedido dele que Apolônio escreveu uma versão apressada de *As cônicas* em oito livros. Mais tarde, em Pérgamo, o autor elaborou os livros, um de cada vez, por isso os Livros IV e VII começam com saudações a Atalus, rei de Pérgamo. O autor descreve os quatro primeiros livros como se formassem uma introdução elementar e supõe-se que muito deste material já havia aparecido em tratados anteriores sobre cônicas. No entanto, Apolônio diz expressamente que alguns dos teoremas no Livro III são seus, pois Euclides não tinha completado os lugares ali considerados. Os quatro últimos livros ele descreve como extensões do assunto além do fundamental, e veremos que neles a teoria se expande em direções mais especializadas[5].

Antes do tempo de Apolônio, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como secções de três tipos bem diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Apolônio, aparentemente pela primeira vez, mostrou sistematicamente que não é necessário tomar secções perpendiculares a um elemento do cone e que de um único cone podem ser obtidas todas as três espécies de secções cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano de secção. Esse foi um passo importante para relacionar os três tipos de curvas. Uma segunda generalização importante se efetuou quando Apolônio provou que o cone não precisa ser reto — isto é, um cone cujo eixo é perpendicular à base circular — mas pode também ser um cone oblíquo ou escaleno. Se Eutócio, ao comentar *As cônicas*, estava bem informado, podemos inferir que Apolônio foi o primeiro geômetra a mostrar que as propriedades das curvas não são diferentes conforme sejam cortadas de cones oblíquos ou retos. Finalmente, Apolônio trouxe as curvas antigas mais para perto do ponto de vista moderno substituindo o cone de uma só folha (como um cone de sorvete) por um duplo (semelhante a dois cones de sorvete colocados, em sentidos opostos e indefinidamente estendidos, de modo que seus vértices coincidam e os eixos estejam sobre uma mesma reta). Apolônio, na verdade, deu a mesma definição de cone circular usada hoje:

> Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo.

Essa mudança fez da hipérbole a curva de dois ramos que nos é familiar hoje. Os geômetras freqüentemente falavam das "duas hipérboles" em vez dos "dois ramos" de uma única hipérbole, mas de qualquer forma a duplicidade da curva era percebida.

6 Na história da matemática os conceitos são mais importantes que a terminologia, mas a mudança de nome das secções cônicas devida a Apolônio teve significado mais profundo do que o usual. Durante cerca de século e meio as curvas não tinham tido designações além de descrições banais do modo pelo qual tinham sido descobertas — secções de cone acutângulo (oxytome), secções de cone retângulo (orthotome) e secções de cone obtusângulo (amblytome). Arquimedes tinha continuado a usar esses nomes (embora se diga que também usou o nome parábola como sinônimo para secção de cone retângulo). Foi Apolônio (talvez seguindo sugestão de Arquimedes) quem introduziu os nomes elipse e hipérbole para essas curvas. As palavras "elipse", "parábola" e "hipérbole" não foram inventadas expressamente; foram adatadas de uso anterior, provavelmente

[5]Veja T. L. Heath, *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections* (1896), pp. XXVI-XXVII. Aqui, e em todo este capítulo, nos baseamos na valiosa obra de Heath, de que tiramos passagens de tradução

pelos pitagóricos, na solução de equações quadráticas por aplicação de áreas. *Ellipsis* (significando falta) tinha sido a palavra usada quando um retângulo de área dada era aplicado a um segmento e lhe faltava um quadrado (ou outra figura especificada), e *hyperbola* (um lançamento além) tinha sido a palavra usada quando a área excedia o segmento. A palavra *parábola* (indicando colocar ao lado ou comparação) não indicava nem excesso nem deficiência. Apolônio aplicou estas palavras num contexto novo como nomes para as seções planas. A equação familiar moderna para a parábola com vértice na origem é $y^2 = lx$ (onde l é o *lactus rectum* ou parâmetro, agora freqüentemente representado por $2p$, ou ocasionalmente por $4p$). Isso é, a parábola tem a propriedade que para qualquer ponto sobre ela o quadrado sobre a ordenada é igual ao retângulo sobre a abscissa x e o parâmetro l. As equações da elipse e hipérbole, também com um vértice como origem, são $(x \pm a)^2/a^2 \pm y^2/b^2 = 1$ ou $y^2 = lx \pm b^2x^2/a^2$ (onde l é novamente o *lactus rectum* ou parâmetro $2b^2/a$). Isto é, para a elipse $y^2 < lx$ e para a hipérbole $y^2 > lx$, e são as propriedades das curvas que são representadas por essas desigualdades que sugeriram os nomes dados por Apolônio há mais de dois milênios e que ainda lhes estão firmemente associados[6].

7 Mostrando como obter todas as secções cônicas de um mesmo cone oblíquo de duas folhas e dando-lhes nomes eminentemente apropriados, Apolônio deu importante contribuição à geometria mas não foi tão longe quanto poderia ter ido na generalidade. Poderia igualmente bem ter partido de um cone elíptico — ou de qualquer cone quádrico — e ter ainda obtido as mesmas curvas. Isto é, qualquer secção plana do cone "circular" de Apolônio, poderia servir como a curva de "base" em sua definição, e a restrição "cone circular" é desnecessária. Na verdade, como o próprio Apolônio mostrou (Livro I, Proposição 5), todo cone circular oblíquo tem não só uma infinidade de secções circulares paralelas à base, mas também um outro conjunto infinito de secções circulares dadas pelo que ele chamou de secções subcontrárias. Seja *BFC* a base do cone circular oblíquo e seja *ABC* uma secção triangular do cone (Fig. 9.2). Seja *P* qualquer ponto de uma secção circular *DPE* paralela à *BFC* e seja *HPK* uma secção por um plano tal que os triângulos *AHK* e *ABC* são semelhantes mas de orientações contrárias. Apolônio chamou a secção *HPK* de secção subcontrária e mostrou que é um círculo. É fácil prová-lo usando a semelhança dos triângulos *HMD* e *EMK*, da qual resulta que $HM \cdot MK = DM \cdot ME = PM^2$,

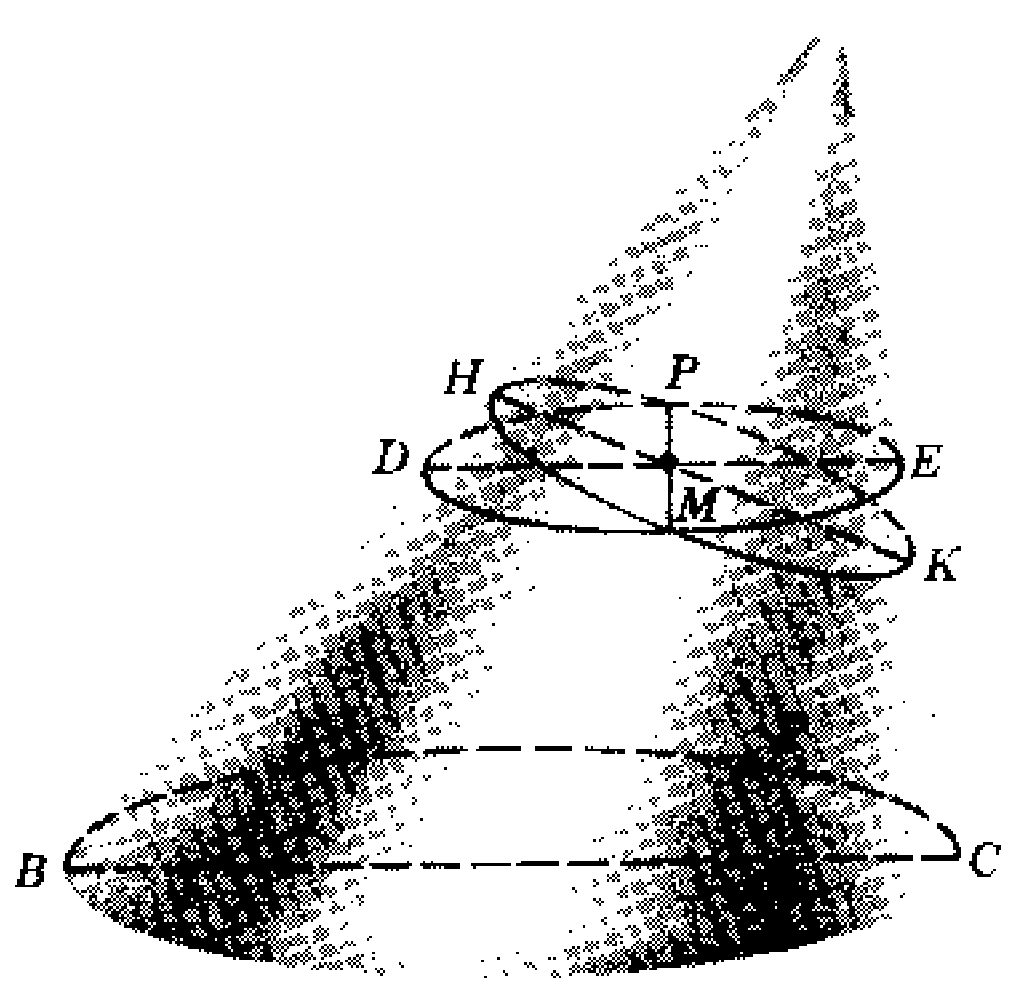


Figura 9.2

[6]O comentador Eutocius foi responsável por uma impressão errônea, ainda bastante difundida, de que as palavras elipse, parábola e hipérbole foram adotadas por Apolônio para indicar que o plano de secção não atingia, passava ao lado ou cortava a segunda folha do cone. Não é isso que Apolônio diz em *As cônicas*

a propriedade característica do círculo. (Em linguagem de geometria analítica, se pusermos $HM = x$, $HK = a$, e $PM = y$, então $y^2 = x(a - x)$ ou $x^2 + y^2 = ax$, que é a equação de um círculo.)

8 Os geômetras gregos dividiam as curvas em três categorias. A primeira, conhecida como dos "lugares planos" consistia das retas e círculos; a segunda, conhecida como dos "lugares sólidos" era formada das secções cônicas; a terceira, conhecida como dos "lugares lineares" reunia todas as restantes curvas. O nome dado à segunda categoria sem dúvida era sugerido pelo fato de as cônicas não serem definidas como lugares num plano que satisfazem a uma certa condição, como se faz hoje; eram descritas estereometricamente como secções de uma figura a três dimensões. Apolônio, como seus predecessores, obtinha as cônicas a partir de um cone no espaço tridimensional, mas dispensou o cone logo que possível. Do cone ele deduziu uma propriedade plana fundamental ou *symptome* para a secção, e daí por diante continuou com um estudo puramente planimétrico baseado nessa propriedade. Esse passo, que ilustramos para a elipse (Livro I, Proposição 13), provavelmente era quase o mesmo usado por seus predecessores, inclusive Menaecmus. Seja *ABC* uma secção triangular de um cone circular oblíquo (Fig. 9.3) e seja *P* qualquer ponto sobre uma secção *HPK* cortando todos os elementos do cone. Prolongue-se *HK* até encontrar *BC* em *G* e por *P* passe-se um plano horizontal que corta o cone no círculo *DPE* e o plano *HPK* na reta *PM*. Trace-se *DME*, um diâmetro do círculo perpendicular a *PM*. Então da semelhança dos triângulos *MEK* e *KCG* temos $ME/MK = CG/KG$. Agora, da propriedade do círculo temos $PM^2 = DM \cdot ME$; logo $PM^2 = (HM \cdot BG/HG)(MK \cdot CG)/KG$. Se $PM = y$, $HM = x$ e $HK = 2a$, a propriedade na sentença precedente equivale à equação $y^2 = kx(2a - x)$, que reconhecemos como a equação de uma elipse com *H* como vértice e *HK* como eixo maior. De modo semelhante, Apolônio obteve para a hipérbole o equivalente da equação $y^2 = kx(x + 2a)$. Essas formas são facilmente redutíveis às formas de *nome* acima, bastando tomar $k = b^2/a^2$ e $l = 2b^2/a$.

9 Depois de Apolônio ter obtido de um estudo estereométrico do cone a relação básica entre o que chamaríamos hoje as coordenadas planas de um ponto da curva — dada pelas três equações $y^2 = lx - b^2x^2/a^2$, $y^2 = lx$ e $y^2 = lx + b^2x^2/a^2$ — obteve outras propriedades a partir das equações no plano, sem mais referência ao cone. O autor de *As cônicas* diz que no Livro I ele analisou as propriedades fundamentais das curvas "mais completamente e com mais generalidade que nos escritos de outros autores". O quanto essa afirmação é verdadeira é sugerido pelo fato de aqui, já no primeiro livro, ser desenvolvida a teoria dos diâmetros conjugados. Isto é, Apolônio mostrou que os pontos médios de um conjunto de cordas paralelas a um diâmetro de uma elipse ou hipérbole formarão um segundo diâmetro, os dois sendo chamados "diâmetros conjugados". Na verdade, enquanto que hoje invariavelmente referimos uma cônica a um par de retas perpendiculares entre

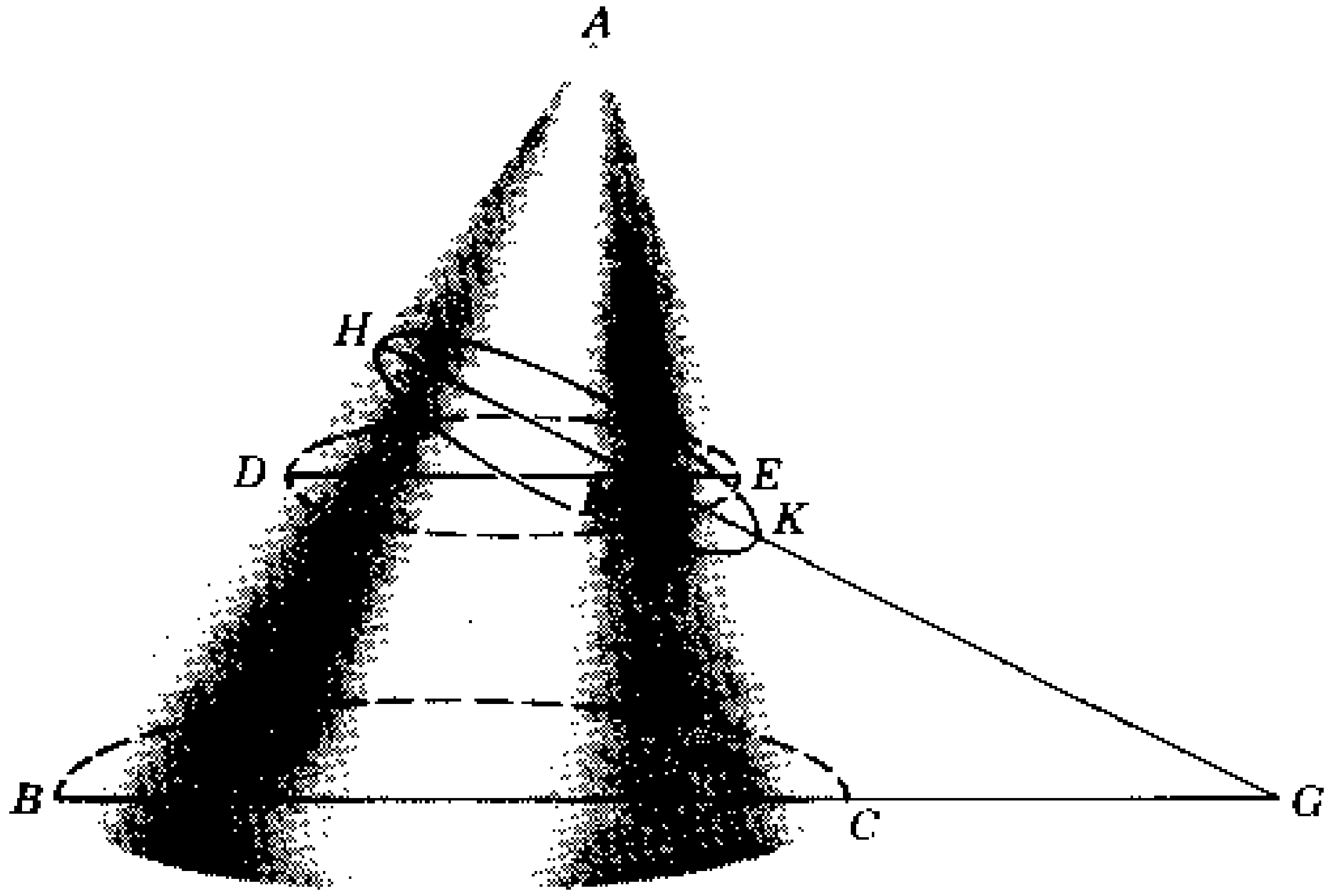


Figura 9.3

si como eixos, Apolônio em geral usava um par de diâmetros conjugados como equivalentes de eixos de coordenadas oblíquas. O sistema de diâmetros conjugados fornecia um quadro de referência excepcionalmente útil para uma cônica, pois Apolônio mostrou que se uma reta é traçada por uma extremidade de um diâmetro de uma elipse ou hipérbole paralelamente ao conjugado, a reta "tocará" a cônica e nenhuma outra reta pode cair entre ela e a cônica — isto é, a reta será tangente à cônica. Aqui vemos claramente o conceito grego estático de tangente a uma curva, em contraste com o conceito cinemático de Arquimedes. Na verdade, freqüentemente em *As cônicas* vemos um diâmetro e uma tangente em sua extremidade usados como sistema de referência de coordenadas.

Entre os teoremas no Livro I há vários (Proposição 41 a 49) que equivalem a transformações de coordenadas de um sistema baseado numa tangente e um diâmetro por um ponto P da curva para um novo sistema determinado por uma tangente e um diâmetro por um segundo ponto Q da mesma cônica, junto com a prova de que uma cônica pode ser referida a qualquer tal sistema como eixos. Em particular, Apolônio conhecia as propriedades da hipérbole referida às assíntotas como eixos, dadas, para a hipérbole equilátera, pela equação $xy = c^2$. Não podia saber é claro, que um dia essa relação, equivalente à lei de Boyle, seria fundamental no estudo dos gases, ou que seu estudo da elipse seria essencial para a moderna astronomia.

0 O Livro II continua o estudo de diâmetros conjugados e tangentes. Por exemplo, se P é qualquer ponto sobre qualquer hipérbole, com centro C, a tangente em P cortará as assíntotas em pontos L e L' (Fig. 9.4) que são equidistantes de P (Proposições 8 e 10). Além disso (Proposições 11 e 16), toda corda QQ' paralela a CP encontrará as assíntotas em pontos K e K' tais que $QK = Q'K'$ e $QK \cdot QK' = CP^2$. (Essas propriedades eram verificadas sinteticamente, mas o leitor pode convencer-se de sua validez usando métodos analíticos.) Proposições posteriores no Livro II mostram como traçar tangentes a uma cônica usando a teoria da divisão harmônica. No caso da elipse (Proposição 49), por exemplo, se Q é um ponto da curva (Fig. 9.5), Apolônio traçava uma perpendicular QN de Q ao eixo AA' e achava o conjugado harmônico T de N com relação a A e A'. (Isto é, ele achava o ponto T da reta AA' estendida tal que $AT/A'T = AN/NA'$; em outras palavras determinava o ponto T que divide o segmento AA' externamente na mesma razão em que N o divide internamente.) A reta por T e Q será então tangente à elipse. O caso em que Q não jaz sobre a curva pode ser reduzido a esse por meio de propriedades familiares da divisão harmônica. (Pode-se provar que não há curvas planas, além das cônicas, tais que dada a curva e um ponto, uma tangente pode ser traçada, só com régua e compasso, do ponto à curva; mas é claro que Apolônio não sabia disso.)

11 Apolônio aparentemente se orgulhava especialmente do Livro III, pois no prefácio geral de *As cônicas* ele escreveu:

> O terceiro livro contém muitos teoremas notáveis, úteis para a síntese de lugares sólidos e determinação de limites; a maior parte e os mais bonitos desses teoremas são novos e, quando os descobri, observei que Euclides não tinha efetuado a síntese do lugar com relação a três ou quatro retas, mas só uma parte casual dela e não bem sucedida: pois a síntese não poderia ser completada sem minhas descobertas adicionais.

O lugar de três e quatro retas, a que se refere, desempenhou um papel importante na matemática de Euclides a Newton. Dadas três retas (ou quatro retas) de um plano, achar

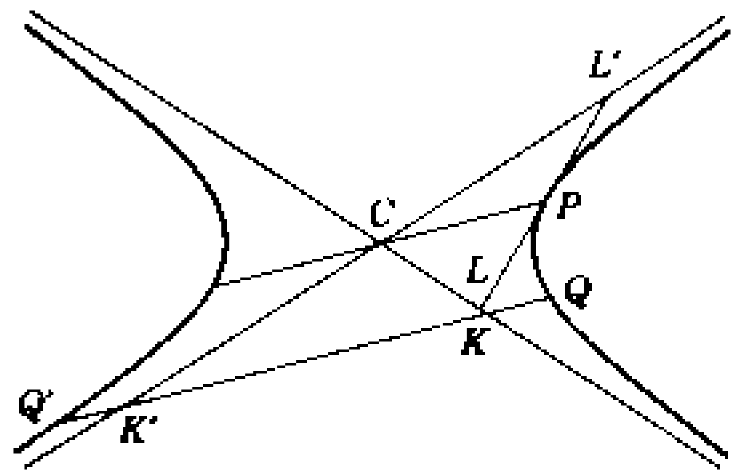


Figura 9.4

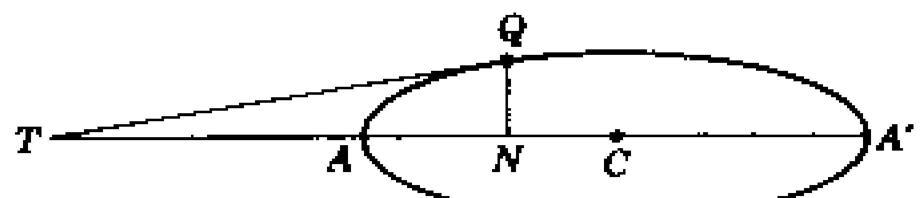


Figura 9.5

o lugar de um ponto P que se move de modo que o quadrado da distância de P a uma delas seja proporcional ao produto das distâncias às outras duas (ou, no caso de quatro retas, o produto das distâncias a duas delas é proporcional ao produto das distâncias às outras duas), as distâncias sendo medidas em ângulos dados com relação às retas. Por métodos analíticos, usando a forma normal da equação da reta, é fácil mostrar que o lugar é uma secção cônica real ou imaginária, redutível ou irredutível. Se, para o lugar de três retas, as equações das retas são $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, e $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ e se os ângulos em que as distâncias devem ser medidas são θ_1, θ_2, θ_3, então o lugar de $P(x, y)$ é dado por

$$\frac{(A_1x + B_1y + C_1)^2}{(A_1^2 + B_1^2)\,\text{sen}^2\,\theta_1} = \frac{K(A_2x + B_2y + C_2)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}\,\text{sen}\,\theta_2} \cdot \frac{(A_3x + B_3y + C_3)}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2}\,\text{sen}\,\theta_3}.$$

Essa equação é, em geral, de segundo grau em x e y; logo o lugar é uma secção cônica. Nossa solução não faz justiça ao tratamento dado por Apolônio no Livro III, em que mais de cinqüenta proposições cuidadosamente enunciadas, todas provadas por métodos sintéticos, levam eventualmente ao lugar pedido. Meio milênio depois Papus sugeriu uma generalização desse teorema para n retas, onde $n > 4$, e foi contra esse problema generalizado que Descartes em 1637 pôs à prova sua geometria analítica. Assim poucos problemas tiveram papel tão importante na história da matemática quanto o do "lugar a três ou quatro retas".

12 O Livro IV de *As cônicas* é descrito pelo autor como demonstração "de quantos modos as secções de um cone se encontram", e ele se mostra particularmente orgulhoso de teoremas "nenhum dos quais foi discutido por escritores anteriores" com relação ao número de pontos em que uma secção de um cone encontra "os ramos opostos de uma hipérbole". A idéia da hipérbole como curva de dois ramos era novidade de Apolônio e ele gostava muito de descobrir e provar teoremas relativos a ela. Por exemplo, ele mostrou (IV. 42) que se um ramo de uma hipérbole encontra os dois ramos de uma outra hipérbole, o ramo oposto da primeira hipérbole não encontrará nenhum dos ramos da segunda em dois pontos; ou ainda (IV. 54), se uma hipérbole é tangente a um dos ramos de uma segunda hipérbole com sua concavidade em sentido oposto, o ramo oposto da primeira não encontrará o ramo oposto da segunda. É em relação aos teoremas desse livro que Apolônio faz uma afirmação de que se infere que, em seus dias como nos nossos, havia oponentes de espírito estreito da matemática pura que pejorativamente indagavam da utilidade desses resultados. O autor orgulhosamente afirma: "Eles merecem aceitação pelas suas próprias demonstrações, assim como aceitamos muitas coisas na matemática por esta razão e nenhuma outra"[7].

13 O prefácio do Livro V, relativo a retas máximas e mínimas traçadas a uma cônica, novamente argumenta que "o assunto é um daqueles que parecem dignos de estudo por si mesmos". Embora devamos admirar o autor por sua elevada atitude intelectual, pode ser pertinentemente observado que o que em seu tempo era bela teoria, sem perspectivas de aplicabilidade à ciência ou engenharia de seu tempo, a partir daí tornou-se fundamental em campos como a dinâmica terrestre e a mecânica celeste. Os teoremas de Apolônio sobre máximos e mínimos na verdade são teoremas sobre tangentes e normais a secções cônicas. Sem um conhecimento das propriedades das tangentes a uma parábola, uma análise de trajetórias locais seria impossível, e um estudo das órbitas dos planetas é impensável sem referência às tangentes a uma elipse. É claro, em outras palavras, que foi a matemática pura de Apolônio que permitiu cerca de 1 800 anos mais tarde, os *Principia* de Newton; esse, por sua vez, deu aos cientistas de hoje condições para que a viagem de ida e volta à lua fosse possível. Mesmo na Grécia antiga o teorema de Apolônio que diz que todo cone oblíquo tem duas famílias de secções circulares era aplicável à cartografia na transformação estereográfica, usada por Ptolomeu e possivelmente por Hiparco, de

[7]Veja Heath, *Apollonius of Perga, Treatise on Conic Sections*, p. LXXIV

uma região esférica em uma parte do plano. Freqüentemente se verificou no desenvolvimento da matemática que tópicos que originalmente podiam ser justificados apenas como "dignos de estudo por eles mesmos" mais tarde se tornaram de valor inestimável para o "homem prático".

Os matemáticos gregos não tinham uma definição satisfatória de tangente a uma curva C num ponto P, pensando nela como uma reta L tal que nenhuma outra podia ser traçada por P entre C e L. Talvez fosse insatisfação com essa definição o que levou Apolônio a evitar definir uma normal a uma curva C por um ponto Q como uma reta por Q que corta a curva C num ponto P e é perpendicular à tangente a C por P. Em vez disso, usou o fato de ser a normal de Q a C uma reta tal que a distância de Q a C é um máximo ou mínimo relativo. Em *As cônicas*, V. 8, por exemplo, Apolônio provou um teorema relativo à normal de uma parábola que hoje é parte de cursos de cálculo. Em terminologia moderna o teorema afirma que a subnormal da parábola $y^2 = 2px$ por qualquer ponto P sobre a curva é constante e igual a p; na linguagem de Apolônio essa propriedade se exprime mais ou menos assim:

> Se A é o vértice de uma parábola $y^2 = px$, e se G é um ponto no eixo tal que $AG > p$, e se N é um ponto entre A e G tal que $NG = p$, e se NP é traçado perpendicularmente ao eixo, encontrando a parábola em P (Fig. 9.6), então PG é o segmento de reta mínimo de G à curva e portanto é normal à parábola em P.

A prova de Apolônio é uma típica prova indireta — mostra-se que se P' é qualquer outro ponto da parábola, $P'G$ cresce quando P' se afasta de P de qualquer dos dois lados. Uma prova do teorema correspondente, mas mais complicado, referente à normal a uma elipse ou hipérbole de um ponto sobre o eixo é dada então; e mostra-se que se P é um ponto sobre uma cônica, só uma normal pode ser traçada por P, quer seja considerada como um mínimo ou um máximo, e essa normal é perpendicular à tangente em P. Observe-se que a perpendicularidade que tomamos como definição é aqui provada como um teorema, enquanto que a propriedade de máximo-mínimo, que tomamos como teorema, serve para Apolônio como definição. Proposições posteriores no Livro V levam o tópico das normais a uma cônica a tal ponto que o autor dá critérios que permitem decidir quantas normais podem ser tiradas de um ponto a uma secção cônica. Esses critérios equivalem ao que descreveríamos como equações das evolutas às cônicas. Para a parábola $y^2 = 2px$ Apolônio mostrou em essência que pontos, cujas coordenadas satisfazem à equação cúbica $27py^2 = 8(x-p)^3$, são posições limites do ponto de intersecção de normais à parábola em pontos P e P' quando P' se avizinha de P. Isto é, pontos sobre essa cúbica são os centros de curvatura para pontos sobre a cônica (isto é, os centros de círculos osculadores para a parábola). No caso da elipse e da hipérbole, cujas equações são respectivamente $x^2/a^2 \pm y^2/b^2 = 1$, as equações correspondentes para a evoluta são $(ax)^{2/3} \pm (by)^{2/3} = (a^2 \mp b^2)^{2/3}$.

Depois de dar as condições para a evoluta de uma cônica, Apolônio mostrou como construir uma normal a uma secção cônica de um ponto Q. No caso da parábola $y^2 = 2px$, e para Q fora da parábola e não sobre o eixo, traça-se a perpendicular QM ao eixo AK, mede-se $MH = p$, e levanta-se HR perpendicular a HA (Fig. 9.7). Então por Q traça-se a hipérbole retangular com assíntotas HA e HR, que corta a parábola num ponto P. A reta QP é a normal pedida, como se prova mostrando que $NK = HM = p$. Se o ponto Q está

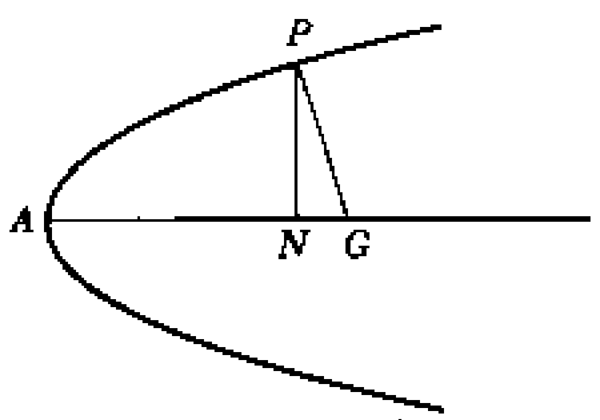


Figura 9.6

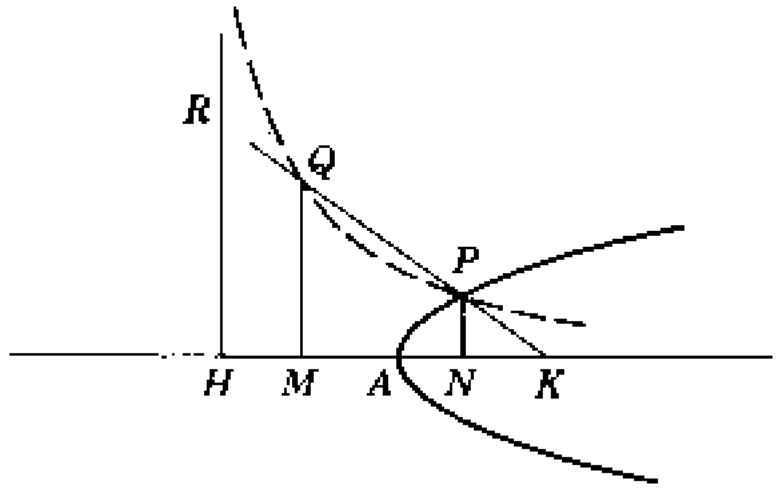


Figura 9.7

dentro da parábola, a construção é semelhante, só que P cai entre Q e R. Apolônio deu ainda construções, usando também uma hipérbole auxiliar para a normal de um ponto a uma elipse ou hipérbole dadas. Deve-se notar que a construção de normais à elipse e à hipérbole, ao contrário da construção de tangentes, exige mais do que régua e compasso. Como os antigos descreveriam os dois problemas, traçar uma *tangente* a uma cônica é um "problema plano"; pois bastam retas e círculos que se cortam; ao contrário, traçar uma *normal* de um ponto arbitrário no plano a uma cônica central dada é um "problema sólido", pois não pode ser resolvido só usando retas e círculos, mas pode ser feito usando lugares sólidos (no caso uma hipérbole). Papus mais tarde criticou severamente Apolônio por sua construção de uma normal à parábola por tê-lo tratado como problema sólido em vez de plano. Isto é, a hipérbole que Apolônio usou poderia ser substituída por um círculo. Talvez Apolônio tenha achado que a obsessão com reta e círculo deveria ceder, na sua construção de normais, a um desejo de uniformidade de métodos em relação aos três tipos de cônicas.

14 Quando Apolônio mandou ao rei Atalus o sexto livro de *As cônicas*, ele o descreveu como contendo proposições acerca de "segmentos de cônicas iguais e desiguais, semelhantes e dessemelhantes, além de outras questões não tratadas pelos que me precederam. Em particular, encontrará neste livro como num cone reto dado, se pode cortar uma secção igual a uma secção dada." Duas cônicas se dizem semelhantes se as ordenadas, quando traçadas a distâncias proporcionais do vértice, são respectivamente proporcionais às abscissas correspondentes. Entre as proposições mais fáceis do Livro VI estão as que demonstraram que todas as parábolas são semelhantes (VI. 11) e que uma parábola não pode ser semelhante a uma elipse ou hipérbole nem uma elipse a uma hipérbole (VI. 14, VI. 15). Outras proposições (VI. 26, VI. 27) provam que se um cone qualquer é cortado por dois planos paralelos em secções elíticas ou hiperbólicas, as secções serão semelhantes, mas não iguais.

O Livro VII volta ao assunto de diâmetros conjugados e "muitas proposições novas relativas a diâmetros de secções e figuras descritas sobre eles". Entre essas estão algumas encontradas em textos modernos, tais como a prova (VII. 12, VII. 13, VII. 29, VII. 30) de que

> Em toda elipse a soma, e em toda hipérbole a diferença, dos quadrados sobre dois diâmetros conjugados quaisquer é igual à soma ou diferença respectivamente dos quadrados sobre os eixos.

Há também a prova do teorema familiar que diz que se tangentes são traçadas nas extremidades de um par de eixos conjugados de uma elipse ou hipérbole, o paralelogramo formado por essas quatro tangentes será igual ao retângulo sobre os eixos. Conjeturou-se que o Livro VIII perdido de *As cônicas* continuasse problemas semelhantes, pois no prefácio do Livro VII o autor escreveu que os teoremas do Livro VII eram usados no Livro VIII para resolver certos problemas sobre cônicas, de modo que o último livro "é uma espécie de apêndice".

15 *As cônicas* de Apolônio constituem um tratado de amplitude e profundidade tão extraordinárias que ficamos surpresos de não encontrar algumas propriedades que a nós parecem tão evidentemente fundamentais. Do modo como as curvas são agora introduzidas em livros de texto, os focos desempenham papel proeminente; no entanto, Apolônio não tinha nome para esses pontos e se referia a eles apenas indiretamente. Presume-se que ele, e talvez também Aristeu e Euclides, conhecesse na verdade a propriedade foco-diretriz das curvas, mas esta não é sequer mencionada em *As cônicas*. Não há conceito numérico, no tratamento antigo das cônicas, que corresponda ao que chamamos excentricidade, e embora o foco da parábola apareça por implicação em muitos teoremas de Apolônio, não é claro que o autor conhecesse o papel agora familiar da diretriz. Parece ter sabido como determinar uma cônica dados cinco pontos, mas esse tópico, que mais tarde apareceu em destaque nos *Principia* de Newton, é omitido em *As cônicas*. É possível, é claro, que algumas ou todas essas omissões tantalizantes resultem do fato de terem sido tratados em outro lugar, em obras perdidas de Apolônio ou outros autores.

Tanto da matemática antiga se perdeu que um argumento *e silencio* é realmente precário. Além disso, as palavras de Leibniz devem servir de aviso de que não devem ser subestimadas as realizações dos antigos: "Quem entende Arquimedes e Apolônio admirará menos as realizações dos homens mais célebres de épocas posteriores."

16 Os métodos de Apolônio, em *As cônicas*, em muitos pontos são tão semelhantes aos modernos que às vezes se considera seu tratado como uma geometria analítica, antecipando a de Descartes por 1 800 anos. A aplicação de retas de referência em geral, e de um diâmetro e uma tangente em sua extremidade em particular, não difere essencialmente, é claro, do uso de sistemas de coordenadas, sejam sistemas retangulares, sejam oblíquos. As distâncias medidas ao longo do diâmetro a partir do ponto de tangência são as abscissas, e os segmentos paralelos à tangente e cortados entre o eixo e a curva são as ordenadas. As relações de Apolônio entre essas abscissas e ordenadas correspondentes são nem mais nem menos que as formas retóricas das equações das curvas. No entanto, a álgebra geométrica grega não englobava grandezas negativas; além disso, o sistema de coordenadas era sempre superposto a posteriori sobre uma curva dada a fim de estudar suas propriedades. Não parece haver exemplo na geometria antiga de ser o sistema de coordenadas estabelecido a priori para fins de representação gráfica de uma equação ou relação expressa, seja simbolicamente seja retoricamente. Da geometria grega podemos dizer que as equações são determinadas pelas curvas, mas não que curvas fossem definidas por equações. Coordenadas, variáveis e equações eram noções subsidiárias derivadas de uma situação geométrica específica; e infere-se que do ponto de vista grego não era suficiente definir curvas abstratamente como lugares satisfazendo a condições dadas sobre as coordenadas. Para garantir que um lugar fosse realmente uma curva os antigos achavam que era necessário exibi-lo estereometricamente como uma secção de um sólido ou descrever um processo cinemático de construção.

A definição e estudo das curvas pelos gregos em comparação com a flexibilidade e extensão do tratamento moderno ficam em posição desfavorável. Na verdade, aos antigos escapou quase completamente o papel que curvas de vários tipos desempenham no mundo que os cercava. Esteticamente um dos povos mais bem dotados de todos os tempos, as únicas curvas que acharam nos céus e na terra foram combinações de retas e círculos. Nem sequer exploraram eficazmente os dois métodos de definição de curvas que admitiam. O método cinemático e o uso de secções planas de superfícies admitem generalizações de grande alcance, no entanto apenas uma dúzia de curvas era familiar aos antigos. Mesmo a ciclóide, gerada por um ponto de um círculo que rola sobre uma reta, parece não ter sido percebida por eles. Que Apolônio, o maior geômetra da antiguidade, não tenha desenvolvido a geometria analítica se deveu provavelmente à pobreza de curvas mais do que de idéias. Não são necessários métodos gerais quando os problemas se referem sempre a um caso dentre um número limitado de casos particulares. Além disso, os inventores modernos da geometria analítica tinham toda a álgebra da Renascença à sua disposição, enquanto que Apolônio trabalhava necessariamente com o instrumento mais rigoroso mas menos manejável da álgebra geométrica.

BIBLIOGRAFIA

Apollonius of Perga, *Les coniques*, traduzido por Paul Ver Eecke (Bruges: Desclée, de Brouwer, 1924)

Coolidge, J. L., *History of the Conic Sections and Quadric Surfaces* (Oxford: Clarendon, 1945)

Coolidge, J. L., *History of Geometrical Methods* (Oxford: Clarendon, 1940; edição em brochura, New York: Dover, 1963)

Coxeter, H. S. M., "The Problem of Apollonius," *American Mathematical Monthly*, **75** (1968), 5-15

Dingeldey, F., "Coniques," in *Encyclopédie des sciences mathématiques*, 3 (3), 1-256

Fladt, K., *Geschichte und Theorie der Kegelschnitte und der Flächen zweiten Grades* (Stuttgart, 1965)

Heath, T. L., "Apollonius," em *Encyclopaedia Britannica*, 11.ª edição (Cambridge, 1910), II, 186-188

Heath, T. L., ed., *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections* (Cambridge: Cambridge University Press, 1896; reimpresso, New York: Barnes and Noble, 1961)

Neugebauer, O., "Apollonius-Studien," *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Parte B, *Studien*, II (1932), 215-253

Neugebauer, O., "Eccentric and Epicyclic Motion According to Apollonius," *Scripta Mathematica*, **24** (1959), 5-21

Taylor, Charles, *An Introduction to the Ancient and Modern Geometry of Conics* (Cambridge, 1881)

Thomas, Ivor, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Loeb Classical Library, 1939-1941, 2 vols.)

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, traduzido por Arnold Dresden (New York: Oxford, 1961, edição em brochura, New York: Wiley, 1963)

Zeuthen, H. G., *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (Copenhagen, 1886 e 1902)

EXERCÍCIOS

1. Os nomes de Aristóteles, Euclides, Arquimedes e Apolônio estão associados respectivamente com os de quatro poderosos governantes — Alexandre, Ptolomeu, Hiero e Atalus. Diga onde esses governaram e em que conexão seus nomes estão associados aos dos sábios.

2. Descreva vários aspectos em que a matemática de Apolônio difere da de Euclides e vários aspectos em que suas obras se parecem.

3. Em que pontos a obra de Apolônio se assemelha à de Arquimedes e em quais modos diferem suas obras?

4. Você diria que Apolônio usou geometria analítica? Justifique sua resposta, mostrando em que aspectos seus métodos lembram o moderno e em quais diferem.

5. Escreva o número 12 345 678 987 654 321 como Apolônio o escreveria.

6. Prove o teorema de Apolônio que diz que o lugar dos pontos, cuja diferença dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos é constante, é uma reta perpendicular à reta que une os dois pontos.

7. Prove o teorema relativo ao "círculo de Apolônio" isto é, mostre que o lugar dos pontos, cujas distâncias a dois pontos fixos são diferentes mas estão numa razão fixa, é um círculo.

8. Dados três pontos $P_1(3, 0)$, $P_2(0, 4)$ e $P_3(1, 2)$ ache a equação da reta por P_3 que corta o eixo-x num ponto P_4 e o eixo-y num ponto P_5, tais que (a) P_1P_4 é duas vezes P_2P_5 e (b) $P_1P_4 \times P_2P_5$ é 10.

9. Resolva o "problema de Apolônio" para (a) o caso de dois pontos e uma reta e (b) o caso de duas retas e um ponto.

10. Partindo das equações usuais para a elipse, a parábola e a hipérbole com um vértice na origem, complete a prova da "propriedade do nome" de Apolônio.

11. Se um diâmetro da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ tem inclinação m, ache a inclinação do diâmetro conjugado.

12. Ache a inclinação do sistema de cordas paralelas de $y^2 = 2px$ bissectadas pelo "diâmetro" $y = a$.

13. Dado um diâmetro de uma hipérbole, mostre precisamente como, com régua e compasso, você construiria o diâmetro conjugado.

14. Ache as equações das tangentes do ponto $(-1, 2)$ à parábola $y^2 = 2px$ e mostre como construir as tangentes com régua e compasso.

15. Ache as coordenadas dos pés das quatro normais que podem ser traçadas do ponto $(1, 0)$ à elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$. Quantas normais podem ser traçadas de $(2, 0)$ a essa elipse?

16. Para que valores de K podem ser traçadas quatro normais do ponto $(K, 0)$ à elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$?

17. Prove que o comprimento da subnormal à parábola, num ponto P da parábola, é constante (isto é, independe da posição do ponto P sobre a curva).

18. Apolônio sabia que a tangente a uma elipse ou hipérbole num ponto P sobre a curva faz ângulos iguais com os raios focais por P. Prove esse teorema.

19. Prove o teorema de Apolônio que diz que o segmento de uma tangente à hipérbole, cortado entre as assíntotas, é bissectado pelo ponto de tangência.

*20. Ache uma equação do lugar dos pontos P tais que o produto das distâncias perpendiculares de P aos eixos coordenados é igual ao produto das distâncias perpendiculares de P às retas $y = x$ e $y = 1 - x$.

*21. Ache uma equação da polar do ponto (a, b) com relação à parábola $y^2 = 2px$.

*22. Prove, pelo modo que Apolônio usou para o cone, que uma secção oblíqua de um cilindro circular é uma elipse.

*23. Prove que se AA' é o eixo maior de uma elipse, se a tangente à elipse num ponto qualquer P corta esse eixo (prolongado) em T e se N é a projeção de P sobre AA', então (AA', TN) formam um conjunto de pontos conjugados. (Ver Fig. 9.5.)

*24. Quantas normais podem ser traçadas do ponto $(1, 2)$ à parábola $y^2 = 2x$? Justifique sua resposta.

Capítulo **10**

Trigonometria e mensuração na Grécia

Quando eu traço a meu prazer os movimentos dos corpos celestiais, eu já não toco a terra com os meus pés: eu estou na presença do próprio Zeus e me alimento de ambrosia, o manjar dos deuses.

Ptolomeu

1 A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem — ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios. Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado "trilaterometria", ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que "trigonometria", a medida de partes de um triângulo. Com os gregos pela primeira vez encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos, eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates, e é provável que Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e da Lua. Nas obras de Euclides não há trigonometria no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas. As Proposições II. 12 e II. 13 de *Os elementos*, por exemplo, são as leis de co-senos para ângulos obtuso e agudo respectivamente enunciadas em linguagem geométrica em vez de trigonométrica, e são provadas por método semelhante ao usado por Euclides para o teorema de Pitágoras. Os teoremas sobre comprimentos de cordas são essencialmente aplicações da lei dos senos. Vimos que o teorema de Arquimedes sobre a corda quebrada pode facilmente ser traduzido em linguagem trigonométrica fórmulas para senos de somas e diferenças de ângulos. Cada vez mais os astrônomos da Idade Alexandrina — notadamente Eratóstenes de Cirene (por volta de 276-194 A. C.) e Aristarco de Samos (por volta de 310-230 A. C.) tratavam problemas que indicavam a necessidade de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas.

2 Aristarco, segundo Arquimedes e Plutarco, propôs um sistema heliocêntrico, antecipando-se a Copérnico por mais de um milênio e meio[1]; mas o que quer que ele tenha escrito sobre esse assunto se perdeu. Em vez disso temos dele um tratado, talvez escrito antes (cerca de 260 A. C.), *Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua*, que assume um universo geocêntrico[2]. Nessa obra Aristarco observa que quando a Lua está exatamente meio cheia, o ângulo entre as linhas de vista ao Sol e à Lua difere para menos de um ângulo reto por um trintavos de um quadrante. (A introdução sistemática do círculo de 360° veio um pouco depois.) Na linguagem de hoje isso significa que a razão da distância da Lua para a distância do Sol (a razão *ME* a *SE* na Fig. 10.1) é sen 3°. Não tendo ainda sido desenvolvidas as tabelas trigonométricas, Aristarco recorreu a um bem conhecido teorema geométrico de então que agora seria expresso pelas desigualdades $\operatorname{sen}\alpha/\operatorname{sen}\beta < \alpha/\beta < \operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$, onde $0° < \beta < \alpha < 90°$. Dessas ele concluiu que $1/20 < \operatorname{sen} 3° < 1/18$, e daí que o Sol está mais de dezoito vezes, mas menos de vinte, mais longe da Terra que a Lua. Isso está muito longe do valor moderno — pouco menos que 400 — mas é melhor que os valores nove e doze que Arquimedes tinha atribuído respectivamente a Eudoxo e Fídias (pai de Arquimedes). Além disso, o *método* usado

[1]O relato mais completo acerca de Aristarco e seu lugar na astronomia encontra-se em T. L. Heath, *Aristarchus of Samos* (1913)

[2]É possível que, na determinação dessas distâncias, Eudoxo se tenha antecipado a Aristarco. Veja Paul Tannery, *Mémoires scientifiques*, **1**, 371

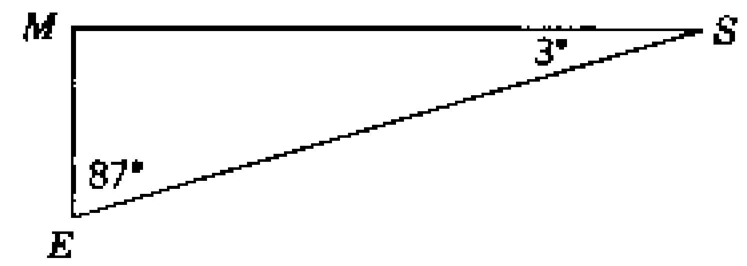


Figura 10.1

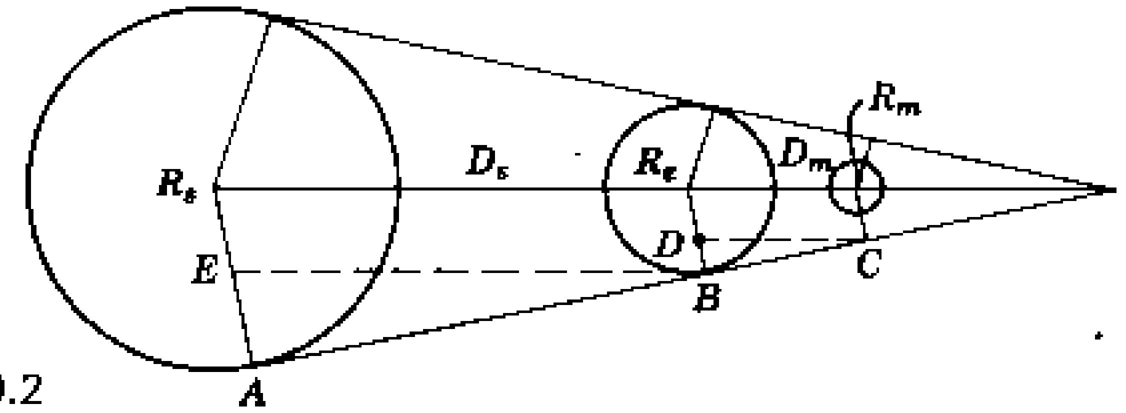


Figura 10.2

por Aristarco era inatacável, o resultado sendo prejudicado apenas pelo erro de observação ao medir o ângulo *MES* como 87° (quando de fato é aproximadamente 89° 50′).

Tendo determinado as distâncias relativas do Sol e da Lua, Aristarco sabia que seus respectivos tamanhos estavam na mesma razão. Isso decorre do fato de terem o Sol e a Lua aproximadamente o mesmo tamanho aparente — isto é, subentendem o mesmo ângulo ao olho de um observador na Terra. No tratado em questão esse ângulo é dado como 2°, mas Arquimedes atribui a Aristarco o valor muito melhor de (1/2)°. Dessa razão Aristarco pode obter uma aproximação para os tamanhos do Sol e da Lua em comparação com o da Terra. Por observação de eclipses lunares ele concluiu que a largura da sombra lançada pela Terra à distância da Lua era duas vezes a largura da Lua. Então se R_s, R_e e R_m são os raios do Sol, Terra e Lua respectivamente e se D_s e D_m são as distâncias do Sol e da Lua à Terra, resulta da semelhança dos triângulos *BCD* e *ABE* (Fig. 10.2) a proporção $(R_e - 2R_m)/(R_s - R_e) = D_m/D_s$. Se nessa equação substituirmos D_s e R_s pelos valores aproximados $19D_m$ e $19R_m$ obtém-se a equação $(R_e - 2R_m)/(19R_m - R_e) = 1/19$ ou $R_m = 20/57\, R_e$. Aqui os cálculos de Aristarco foram consideravelmente simplificados. Seu raciocínio na verdade era exposto muito mais cuidadosamente e levava às conclusões que

$$\frac{108}{43} < \frac{R_e}{R_m} < \frac{60}{19} \quad \text{e} \quad \frac{19}{3} < \frac{R_s}{R_e} < \frac{43}{6}$$

3 O que faltava para chegar a uma avaliação dos tamanhos do Sol e da Lua era só uma medida do raio da Terra. Aristóteles tinha mencionado uma estimativa de 60 000 quilômetros para a circunferência da Terra (talvez devida a Eudoxo) e Arquimedes contava que alguns de seus contemporâneos calculavam que o perímetro seria de uns 45 000 quilômetros[3]. Um cálculo muito melhor, e de longe o mais célebre, deveu-se a Eratóstenes, contemporâneo mais jovem de Arquimedes e Aristarco. Eratóstenes nascera em Cirene, e passara boa parte de sua juventude em Atenas. Tinha conseguido proeminência em vários campos — poesia, astronomia, história, matemática, atletismo — quando na meia-idade foi chamado a Alexandria por Ptolomeu III (Filopator) para ensinar a seu filho (mais tarde Ptolomeu Filadelfo) e para ser bibliotecário na universidade. Foi a Eratóstenes em Alexandria que Arquimedes enviou o tratado sobre *O método*. Hoje Eratóstenes é lembrado especialmente por sua medida da terra — não a primeira nem a última de tais avaliações na antiguidade mas em tudo a de mais sucesso. Eratóstenes observou que ao meio dia no dia do solstício de verão o Sol brilhava diretamente para dentro de um poço profundo em Siene. Ao mesmo tempo em Alexandria, tomada como estando no mesmo meridiano e 5 000 estádios ao norte de Siene verificou-se que o Sol lançava uma sombra indicando que a distância angular do Sol ao zênite era um cinqüentavo de um círculo. Da igualdade dos ângulos correspondentes *S′AZ* e *S″OZ* na Fig. 10.3 é claro que a circunferência da Terra deve ser cinqüenta vezes a distância entre Siene e Alexandria. Isso fornece um perímetro de 250 000 estádios, ou, como um estádio era cerca de um décimo de milha, de 25 000 milhas ou 37 000 quilômetros. (Textos posteriores indicavam 252 000 estádios, talvez para fornecer a cifra redonda de 700 estádios por grau.)

Tendo dado contribuições a vários domínios do conhecimento, Eratóstenes é bem conhecido dos matemáticos pelo "crivo de Eratóstenes", um método sistemático para

[3]A. Diller, "The Ancient Measurements of the Earth", *Isis*, **40**, (1949), 6-9

isolar os números primos. Com todos os números naturais dispostos em ordem, simplesmente são cancelados os números de dois em dois seguindo o dois, de três em três (na seqüência de partida) seguindo o três, de cinco em cinco seguindo o cinco, e continua-se assim a cancelar cada n-ésimo número seguindo o número n. Os números restantes, de dois em diante, serão, é claro, primos. Eratóstenes também escreveu obras sobre médias e lugares, mas essas se perderam. Mesmo seu tratado *Sobre a medida da Terra* já não existe, embora alguns detalhes dele tenham sido preservados por outros, Heron e Ptolomeu de Alexandria inclusive.

4 Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates a Eratóstenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a uma variedade de problemas de astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática. Então, presumivelmente durante a segunda metade do segundo século A. C., foi compilada a que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica pelo astrônomo Hiparco de Nicéia (por volta de 180-125 A. C.), que assim ganhou o direito de ser chamado "o pai da trigonometria". Aristarco sabia que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180° para 0°, aproximando-se do limite 1. No entanto parece que antes de Hiparco empreender a tarefa ninguém tinha tabulado valores correspondentes do arco e da corda para toda uma série de ângulos[4]. Foi sugerido, no entanto, que Apolônio pode ter-se antecipado a Hiparco quanto a isto, e que a contribuição desse último à trigonometria foi apenas a de calcular um melhor conjunto de cordas do que seus predecessores. Hiparco evidentemente calculou suas tabelas para serem usadas na sua astronomia, sobre cuja origem pouco se sabe[5]. Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu. A astronomia florescia na Mesopotâmia, quando em 270 A. C. aproximadamente, Berossos, quase o único astrônomo babilônio conhecido pelo nome, mudou-se para a ilha de Cos, e não é improvável que os fundamentos da teoria conhecida no Oriente Próximo tenham sido transmitidos à Grécia nessa época. As principais contribuições à astronomia atribuídas a Hiparco foram a organização de dados empíricos derivados dos babilônios, a elaboração de um catálogo estelar, melhoramentos em constantes astronômicas importantes (tais como a duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, e o ângulo de inclinação da eclítica) e, finalmente, a descoberta da precessão dos equinócios. Supõe-se em geral que ele fosse em grande parte responsável pela construção de sistemas planetários geométricos, mas isso é incerto, pois não está claro até que ponto Apolônio, um pouco antes, possa ter aplicado métodos trigonométricos à astronomia.

Não se sabe bem quando penetrou na matemática o uso sistemático do círculo de 360°, mas parece dever-se em grande parte a Hiparco através de sua tabela de cordas. É possível que ele a tenha tomado de Hipsícles, que anteriormente tinha dividido o dia em 360 partes, subdivisão que pode ter sido sugerida pela astronomia babilônica. Como Hiparco fez sua tabela não se sabe, pois suas obras se perderam (excetuado um comentário sobre um poema astronômico popular por Aratus). É provável que seus métodos fossem semelhantes aos de Ptolomeu, descritos abaixo, pois Teon de Alexandria, comentando a

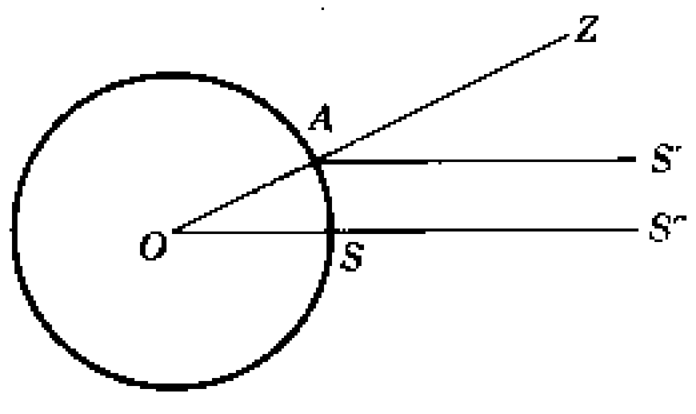


Figura 10.3

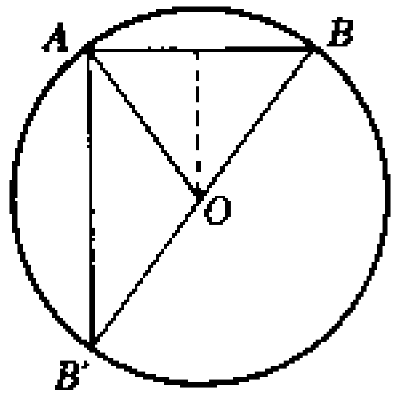


Figura 10.4

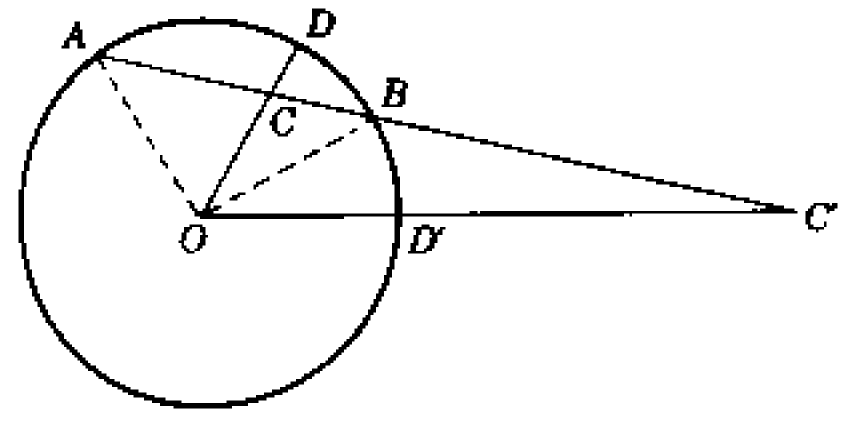


Figura 10.5

[4]Veja Paul Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*. (Paris, 1893), pp. 66 e seguintes

[5]Como se sabe pouco fica claro em O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª edição (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957) especialmente pp. 167-168

tabela de cordas de Ptolomeu, referiu que Hiparco antes tinha escrito um tratado em doze livros sobre cordas em um círculo.

5 Teon menciona também outro tratado, em seis livros, por Menelau de Alexandria (cerca de 100 D. C.) tratando de *Cordas num círculo*. Outras obras de matemática e astronomia de Menelau são citadas por comentadores gregos e árabes posteriores, inclusive um *Elementos de geometria*, mas a única que se preservou — e somente em árabe — foi sua *Sphaerica*. No Livro I desse tratado Menelau estabeleceu uma base para triângulos esféricos análoga à de Euclides I para triângulos planos. Contém um teorema que não tem um análogo euclidiano — que dois triângulos esféricos são congruentes se ângulos correspondentes são iguais (Menelau não fazia distinção entre triângulos esféricos congruentes e simétricos); e o teorema $A + B + C > 180°$ é provado. O segundo livro de *Sphaerica* descreve a aplicação da geometria esférica aos fenômenos astronômicos e é de pouco interesse matemático. O Livro III, o último, contém o bem conhecido "teorema de Menelau" como parte do que é essencialmente trigonometria esférica na forma grega típica — uma geometria ou trigonometria de cordas num círculo. No círculo na Fig. 10.4 escreveríamos que a corda AB é duas vezes o seno da metade do ângulo central AOB (multiplicado pelo raio do círculo). Menelau e seus sucessores gregos em vez disso referiam-se a AB simplesmente como a corda correspondente ao arco AB. Se BOB' é um diâmetro do círculo, então a corda AB' é duas vezes o co-seno da metade do ângulo AOB (multiplicado pelo raio do círculo). Logo os teoremas de Tales e Pitágoras, que levam à equação $AB^2 + AB'^2 = 4r^2$, equivalem à identidade trigonométrica moderna $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$. Menelau, como também provavelmente Hiparco antes dele, conhecia bem outras identidades, duas das quais ele usou como lemas para provar seu teorema sobre transversais. O primeiro desses lemas pode ser enunciado em nossa terminologia como segue. Se uma corda AB num círculo de centro O (Fig. 10.5) é cortada no ponto C por um raio OD, então $AC/CB = \text{sen}\,\widehat{AD}/\text{sen}\,\widehat{DB}$. O segundo lema é semelhante: se a corda AB prolongada é cortada no ponto C' por um raio OD' prolongado, então $AC'/BC' = \text{sen}\,\widehat{AD'}/\text{sen}\,\widehat{BD'}$. Esses lemas são assumidos por Menelau sem prova, presumivelmente porque podiam ser encontrados em textos anteriores, possivelmente nos doze livros de Hiparco sobre cordas. (O leitor pode provar os lemas facilmente traçando AO e BO e perpendiculares de A e B a OD e usando semelhança de triângulos.)[6]

É provável que o "teorema de Menelau" para o caso de triângulos planos fosse conhecido por Euclides, talvez tendo aparecido no desaparecido *Porismas*. O teorema no plano diz que se os lados AB, BC, CA de um triângulo são cortados por uma transversal nos pontos D, E, F respectivamente (Fig. 10.6) então $AD \cdot BE \cdot CF = BD \cdot CE \cdot AF$. Em outras palavras, qualquer reta corta os lados de um triângulo de modo que o produto de três segmentos não adjacentes é igual ao produto dos outros três, como se prova facilmente por geometria elementar ou por aplicação de relações trigonométricas simples. Esse teorema Menelau considerou bem conhecido por seus contemporâneos, mas ele o estendeu a triângulos esféricos numa forma equivalente a $\text{sen}\,AD\,\text{sen}\,BE\,\text{sen}\,CF = \text{sen}\,BD\,\text{sen}\,CE\,\text{sen}\,AF$. Se são considerados segmentos com orientação em vez de absolutos, os dois produtos são iguais em valor absoluto mas diferem em sinal.

6 O teorema de Menelau desempenhou papel fundamental na trigonometria esférica e na astronomia, mas de longe a mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade foi a *Syntaxis matemática*, obra em treze livros escrita por Ptolomeu de Alexandria cerca de meio século depois de Menelau. Essa célebre "Síntese matemática" era distinguida de outro grupo de tratados astronômicos por outros autores (Aristarco inclusive) por ser a de Ptolomeu chamada a coleção "maior" e a de Aristarco e outros a coleção "menor". Devido às freqüentes referências à primeira como *megiste* surgiu mais tarde na Arábia o costume de chamar o livro de Ptolomeu o *Almajesto* ("o maior") e é por esse nome que a obra é conhecida a partir daí então.

Da vida de seu autor sabemos tão pouco quanto da do autor de *Os elementos*. Não sabemos onde ou quando Euclides e Ptolomeu nasceram. Sabemos que Ptolomeu fez

[6]Veja T. L. Heath, *History of Greek mathematics* (1921), II, 265-267

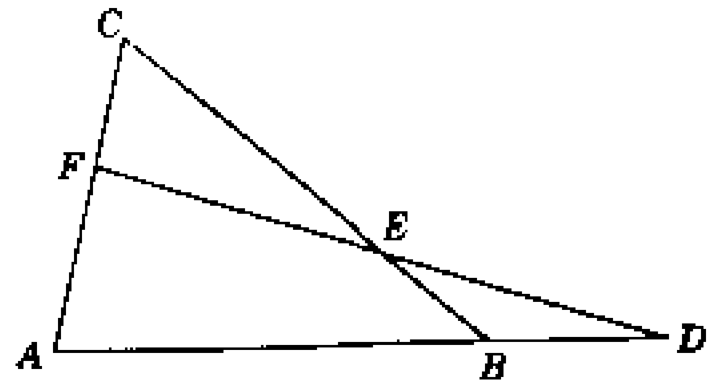


Figura 10.6

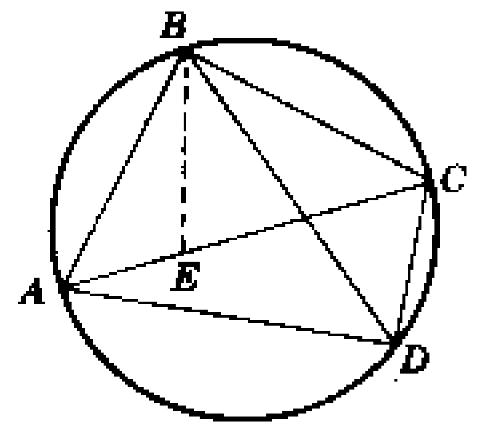


Figura 10.7

observações em Alexandria de 127 a 151 D. C. e por isso supomos que nasceu pelo fim do primeiro século. Suidas, escritor que viveu no século dez, diz que Ptolomeu vivia ainda sob Marco Aurélio (imperador de 161 a 180 D. C.).

O *Almajesto* de Ptolomeu, ao que se supõe, deve muito quanto a seus métodos ao *Cordas num círculo* de Hiparco, mas a extensão da dívida não pode ser calculada com segurança. É claro que, em astronomia, Ptolomeu fez uso do catálogo de posições estelares legado por Hiparco, mas se as tabelas trigonométricas de Ptolomeu derivavam, ou não, em grande parte, de seu reputado predecessor não se pode saber. Felizmente, o *Almajesto* sobreviveu aos estragos do tempo; por isso temos não só suas tabelas trigonométricas mas também uma exposição dos métodos usados em sua construção. De importância central para o cálculo das cordas de Ptolomeu era uma proposição geométrica ainda hoje conhecida como "teorema de Ptolomeu": se $ABCD$ é um quadrilátero (convexo) inscrito num círculo (Fig. 10.7), então $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$; isto é, a soma dos produtos de lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao produto das diagonais. A prova disto se faz facilmente traçando BE de modo que o ângulo ABE seja igual ao ângulo DBC e observando a semelhança dos triângulos ABE e BCD. Um caso especial do teorema de Ptolomeu tinha aparecido nos *Dados* de Euclides (Proposição 93): Se ABC é um triângulo inscrito num círculo, e se BD é uma corda que bissecta o ângulo ABC então $(AB + BC)/BD = AC/AD$.

Outro, e mais útil, caso especial do teorema geral de Ptolomeu é aquele em que um lado, digamos AD, é diâmetro do círculo (Fig. 10.8). Então se $AD = 2r$, temos $2r \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$. Se fizermos arco $BD = 2\alpha$ e arco $CD = 2\beta$, então $BC = 2r \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$, $AB = 2r \operatorname{sen}(90° - \alpha)$, $BD = 2r \operatorname{sen} \alpha$, $CD = 2r \operatorname{sen} \beta$, e $AC = 2r \operatorname{sen}(90° - \beta)$. O teorema de Ptolomeu, portanto, leva ao resultado $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$. Raciocínio semelhante leva à fórmula $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$, e ao par análogo $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$. Por isso essas quatro fórmulas de soma e diferença são freqüentemente chamadas fórmulas de Ptolomeu.

Foi a fórmula para seno da diferença — ou, mais precisamente, corda da diferença — que Ptolomeu achou especialmente útil ao construir suas tabelas. Outra fórmula que lhe foi muito útil foi a equivalente de nossa fórmula para metade do ângulo. Dada a corda de um arco num círculo, Ptolomeu achava a corda da metade do arco como segue. Seja D o ponto médio do arco BC num círculo com diâmetro $AC = 2r$ (Fig. 10.9), seja $AB = AE$, e tomemos DF bissectando (perpendicularmente) EC. Então não é difícil mostrar que $FC = 1/2\,(2r - AB)$. Mas da geometria elementar sabemos que $DC^2 = AC \cdot FC$, donde resulta que $DC^2 = r(2r - AB)$. Se pomos arc $BC = 2\alpha$, então $DC = 2r \operatorname{sen} \alpha/2$ e $AB = 2r \cos \alpha$, donde resulta a fórmula moderna familiar $\operatorname{sen} \alpha/2 = \sqrt{(1 - \cos \alpha)/2}$. Em outras palavras, se é conhecida a corda de um arco, a corda da metade do arco também é. Agora Ptolomeu

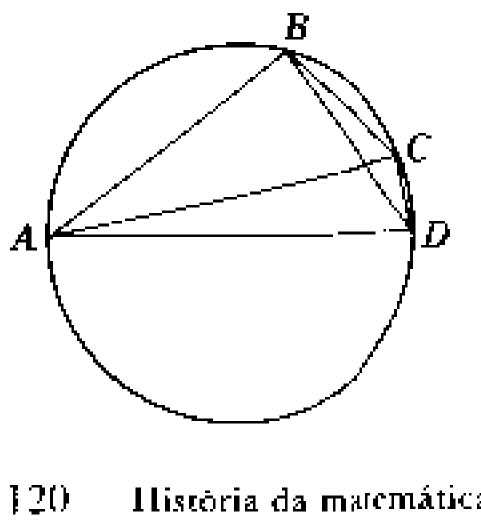


Figura 10.8

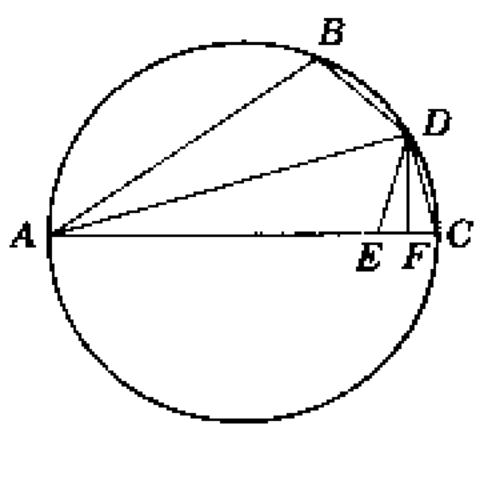


Figura 10.9

estava preparado para construir uma tabela de cordas tão precisa quanto se poderia desejar, pois tinha o equivalente de nossas fórmulas fundamentais.

7 Deve-se lembrar que desde os dias de Hiparco até os tempos modernos não havia coisas como *razões* trigonométricas. Os gregos, e depois deles os hindus e os árabes, usaram *linhas* trigonométricas. Essas a princípio tiveram a forma de cordas num círculo, como vimos, e coube a Ptolomeu associar valores numéricos (ou aproximações) às cordas. Para isso duas convenções eram necessárias: (1) algum esquema para subdividir a circunferência de um círculo e (2) alguma regra para subdividir o diâmetro. A divisão de uma circunferência em 360 graus parece ter estado em uso na Grécia desde os dias de Hiparco, embora não se saiba bem como a convenção surgiu. Não é improvável que a medida de 360 graus tenha sido tomada da astronomia, onde o zodíaco fora dividido em doze "signos" ou 36 "decanatos". Um ciclo de estações, de aproximadamente 360 dias, podia facilmente ser posto em correspondência com o sistema de signos zodiacais e decanatos subdividindo cada signo em trinta partes e cada decanato em dez partes. Nosso sistema comum de medida de ângulos pode derivar dessa correspondência. Além disso, como o sistema babilônico posicional para frações era evidentemente superior às frações unitárias egípcias e às frações comuns gregas, era natural que Ptolomeu subdividisse seus graus em sessenta *partes minutae primae*, cada uma das quais era dividida em sessenta *partes minutae secundae*, e assim por diante. É das frases latinas, que os tradutores usaram, que provêem nossas palavras "minutos" e "segundos". Sem dúvida foi o sistema sexagesimal que levou Ptolomeu a subdividir o diâmetro de seu círculo trigonométrico em 120 partes; cada uma dessas ele subdividiu de novo em sessenta minutos e cada minuto de comprimento em sessenta segundos.

Nossas identidades trigonométricas podem facilmente ser traduzidas para a linguagem de cordas de Ptolomeu por meio das relações simples

$$\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{cd} 2x}{120} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{\operatorname{cd}(180° - 2x)}{120}.$$

As fórmulas $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ ficam

$$\operatorname{cd} \overline{2x \pm 2y} = \frac{\operatorname{cd} \overline{2x} \operatorname{cd} \overline{2y} \mp \operatorname{cd} 2x \operatorname{cd} 2y}{120}$$

onde uma barra sobre um arco (ângulo) indica o arco suplementar. Note-se que não só ângulos e arcos mas também suas cordas eram expressas em notação sexagesimal. Na verdade, sempre que os estudiosos da antiguidade queriam um sistema preciso de aproximação eles adotavam a base sessenta para a parte fracionária; isto levou às expressões "frações de astrônomos" e "frações de físicos" para distinguir as frações sexagesimais das comuns.

8 Tendo fixado seu sistema de medidas, Ptolomeu estava pronto para calcular as cordas dos ângulos dentro do sistema. Por exemplo, como o raio do círculo de referência continha sessenta partes, a corda de um arco de sessenta graus também contava sessenta partes lineares. A corda de 120° será $60\sqrt{3}$ ou aproximadamente 103 partes e 55 minutos e 33 segundos, ou, na notação alfabética ou iônica de Ptolomeu, $\rho\gamma^{\text{p}}\ \nu\varepsilon'\ \lambda\gamma''$. Ptolomeu poderia agora usar sua fórmula para o ângulo metade para achar a corda de 30°, depois a de 15° e assim por diante com ângulos ainda menores. No entanto, ele preferiu adiar a aplicação dessa fórmula, e calcular em vez disso as cordas de 36° e 72°. Usou um teorema de *Os elementos* XIII. 9 que mostra que um lado de um pentágono regular, um lado de um hexágono regular, e um lado de um decágono regular, todos inscritos num mesmo círculo, constituem os lados de um triângulo retângulo. Incidentalmente, esse mesmo teorema de Euclides fornece a justificação para a elegante construção dada por Ptolomeu de um pentágono regular inscrito num círculo. Seja O o centro do círculo e AB um diâmetro (Fig. 10.10). Então se C é o ponto médio de OB e OD é perpendicular a AB, e se CE é tomado igual a CD, os lados do triângulo retângulo EDO são os lados do pentágono regular inscrito, do hexágono, e do decágono. Então se o raio OB contém 60 partes, das

propriedades do pentágono e da secção áurea resulta que OE, a corda de 36°, é $30(\sqrt{5}-1)$ ou cerca de 37,083 ou $37^p\,4'\,55''$ ou $\lambda\zeta^p\,\delta'\,\nu\varepsilon''$. Pelo teorema de Pitágoras a corda de 72° é $30\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ ou aproximadamente 70,536 ou $70^p\,32'\,3''$ ou $o^p\,\lambda\beta'\,\gamma''$.

Conhecendo a corda de um arco de s graus num circulo pode-se facilmente achar a do arco $180° - s$ dos teoremas de Tales e Pitágoras, pois $\text{cd}^2\,s + \text{cd}^2\,s = 120^2$. Portanto, Ptolomeu conhecia as cordas dos suplementos de 36° e 72°. Além disso, das cordas de 72° e 60° ele achou corda 12° por meio de sua fórmula para a corda da diferença de dois arcos. Então por aplicações sucessivas de sua fórmula para metade do arco ele obteve as cordas dos arcos de 6°, 3°, 1 (1/2)° e (3/4)°, as duas últimas sendo $1^p\,34'\,15''$ e $0^p\,47'\,8''$ respectivamente. Por interpolação linear entre esses valores Ptolomeu obteve $1^p\,2'\,50''$ como corda de 1°. Usando a fórmula para metade do ângulo — ou, como o ângulo é muito pequeno, simplesmente dividindo por dois — achou o valor $0^p\,31'\,25''$ para a corda de 30'. Isso equivale a dizer que sen 15' é 0,00873, o que está correto até quase meia dúzia de casas decimais.

O valor de Ptolomeu para a corda de (1/2)° é, naturalmente, o comprimento de um lado de um polígono de 720 lados inscrito num círculo de raio 60 unidades. Enquanto que o polígono de 96 lados de Arquimedes levava a 22/7 como uma aproximação para π, o de Ptolomeu equivale a $6(0^p\,31'\,25'')$ ou 3;8,30. Essa aproximação de π usada por Ptolomeu no *Almajesto*, é o mesmo que 377/120, que leva a uma fração decimal aproximadamente igual a 3,1416, valor que pode ter sido dado antes por Apolônio.

9 Armado com suas fórmulas para cordas de somas e diferenças de arcos e corda de metade de um arco, e tendo um bom valor para a corda (1/2)°, Ptolomeu se dispôs a construir sua tabela, correta a menos de um segundo, de cordas de arcos de 1/2° a 180° para cada 1/2°. Essa é praticamente a mesma que uma tabela de senos de 1/2° a 90°, por passos de 1/4°. A tabela formava parte integral do Livro I do *Almajesto* e continuou a ser um instrumento indispensável para os astrônomos por mais de mil anos. Os doze livros restantes do célebre tratado contêm, entre outras coisas, a teoria elegantemente desenvolvida dos ciclos e epiciclos para os planetas, conhecida como sistema ptolomaico. Como Arquimedes, Hiparco, e a maior parte dos outros grandes pensadores da antiguidade, Ptolomeu postulou um universo essencialmente geocêntrico, pois uma terra móvel parecia acarretar dificuldades — tais como a aparente falta de paralaxe estelar e aparente inconsistência com os fenômenos da dinâmica terrestre. Em comparação com esses problemas, a implausibilidade da imensa velocidade necessária para a rotação diária da esfera das estrelas "fixas" parecia reduzir-se à insignificância. Além de apelar para o senso comum, o sistema ptolomaico tinha a vantagem de ser fácil de representar. Os planetários em geral são construídos como se o universo fosse geocêntrico, pois dessa forma os movimentos *aparentes* são fáceis de reproduzir.

Platão tinha proposto a Eudoxo os problemas astronômicos de "conservar os fenômenos" — isto é, produzir um esquema matemático, como por exemplo uma combinação de movimentos circulares uniformes, que servisse como modelo para os movimentos aparentes dos planetas. O sistema de Eudoxo de esferas homocêntricas tinha sido abandonado pela maioria dos matemáticos em favor do sistema de ciclos e epiciclos de Apolônio e Hiparco. Ptolomeu por sua vez fez uma modificação essencial nesse esquema. Em primeiro lugar, deslocou a terra do centro do círculo diferente, de modo que tinha órbitas excêntricas. Tais modificações tinham sido feitas antes dele, mas Ptolomeu introduziu

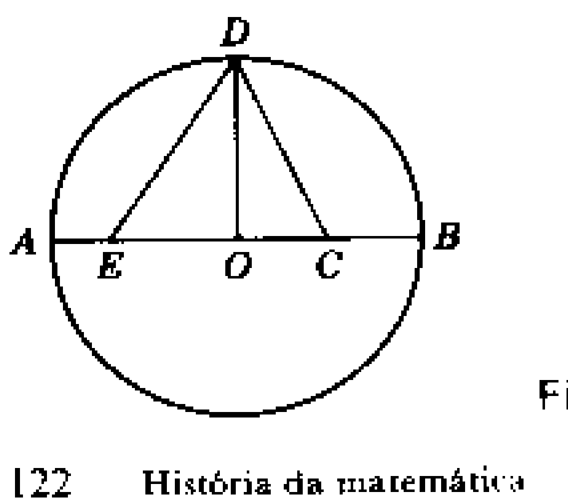


Figura 10.10

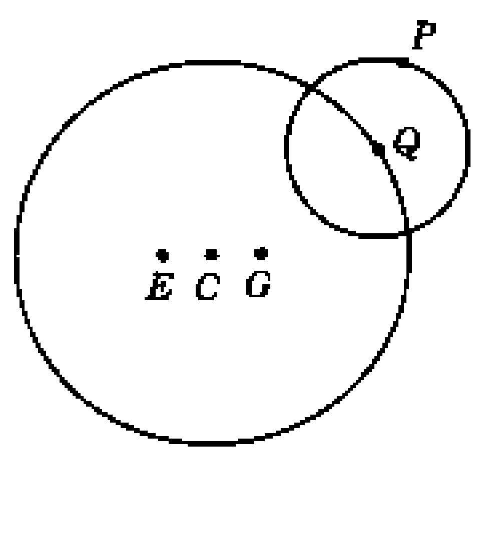


Figura 10.11

uma novidade tão drástica em implicação científica que Copérnico mais tarde não pode aceitá-la, por eficaz que fosse o artifício conhecido como equante, para reproduzir os movimentos dos planetas. Por mais que tentasse, Ptolomeu não tinha conseguido arranjar um sistema de ciclos, epiciclos e excêntricas que aproximasse bem os movimentos observados dos planetas. Sua solução foi abandonar a insistência grega na uniformidade de movimentos circulares e introduzir em vez disso um ponto geométrico, o equante E colinear com a terra G e o centro C do círculo diferente, de modo que o movimento angular *aparente* do centro Q do epiciclo, em que um planeta P se desloca, seja uniforme quando visto de E (Fig. 10.11). Dessa maneira Ptolomeu conseguiu representações precisas dos movimentos dos planetas, mas naturalmente o artifício era apenas cinemático e não contribuía em nada para resolver as questões de dinâmica levantadas por movimentos circulares não-uniformes.

10 A fama de Ptolomeu hoje está associada principalmente a um único livro, o *Almajesto*, mas há outras obras dele. Entre as mais importantes estava a *Geografia*, em oito livros, que era uma "bíblia" para os geógrafos da época tanto quanto o *Almajesto* para os astrônomos. A *Geografia* de Ptolomeu introduzia o sistema de latitudes e longitudes tal como é usado hoje, descrevia métodos de projeção cartográfica, e catalogava cerca de 8 000 cidades, rios, e outros aspectos importantes da terra. Infelizmente não havia na época meios satisfatórios de determinar longitudes, portanto, erros substanciais era inevitáveis. Ainda mais significativo era o fato de Ptolomeu aparentemente ter feito uma má escolha quando se tratava de avaliar o tamanho da Terra. Em vez de aceitar a cifra de 252 000 estádios dada por Eratóstenes, ele preferiu o valor de 180 000 estádios proposto por Posidônio, um estóico, professor de Pompeu e Cícero. Por isso Ptolomeu julgava que o mundo eurasiano conhecido era uma parte maior da circunferência do que realmente é — mais de 180° de latitude, em vez da cifra real de cerca de 130°. Esse erro grande sugeriu a navegadores posteriores, inclusive a Colombo, que uma viagem para oeste partindo da Europa para a Índia não seria nem de longe tão longa quanto se provou ser na realidade. Se Colombo soubesse de quanto a avaliação de Ptolomeu, do tamanho da terra, era inferior à realidade, talvez nunca tivesse embarcado.

Os métodos geográficos de Ptolomeu, eram melhores na teoria que na prática, pois, em monografias separadas, que se preservaram apenas em traduções latinas do árabe, Ptolomeu descreveu dois tipos de projeção cartográfica. A projeção ortográfica é explicada no *Analemma*, a mais antiga exposição desse método de que dispomos, embora possa ter sido usada por Hiparco. Nessa transformação de uma esfera para um plano, pontos na superfície da esfera são projetados ortogonalmente sobre três planos perpendiculares entre si. No *Planisphaerium* Ptolomeu descreve a projeção estereográfica em que pontos da esfera são projetados por retas por um pólo sobre um plano — no caso de Ptolomeu do pólo sul para o plano do equador. Ele sabia que sob tal transformação um círculo que não passasse pelo pólo de projeção ia num círculo do plano, e que um círculo era projetado pelo pólo numa reta. Ptolomeu percebia também o importante fato de tal transformação ser conforme — isto é, preservar ângulos. A importância de Ptolomeu para a geografia pode ser julgada pelo fato de os mais antigos mapas da Idade Média que chegaram até nós em manuscritos, nenhum anterior ao século treze, terem como protótipos os mapas feitos por Ptolomeu mais de mil anos antes[7].

11 Ptolomeu escreveu também uma *Óptica* que sobreviveu, imperfeitamente, em uma tradução latina de uma tradução árabe. Trata da física e da psicologia da visão, com a geometria dos espelhos, e contém uma tentativa de chegar a uma lei da refração. Pela tabela de Ptolomeu dos ângulos de refração do ar para a água (e também do ar para o vidro e da água para o vidro) para ângulos de incidência de 10° a 80° a intervalos de 10° vemos que assumia uma lei da forma $r = ai + bi^2$, pois as segundas diferenças em seus valores para r são constantes. Para ângulos de incidência de 10° e 80° assumia ângulos de refração de 8° e 50° respectivamente, e as segundas diferenças todas iguais a (1/2)°.

[7]Veja George Sarton, *Ancient Science and Modern Civilization* (1954), pp. 53-54

As segundas diferenças nas antigas fórmulas pitagóricas para números poligonais eram também constantes, e talvez Ptolomeu tinha sido influenciado por essas ao procurar uma lei quadrática em vez de uma lei trigonométrica para a refração. A trigonometria durante o primeiro milênio e meio de sua existência era quase exclusivamente um adjunto da astronomia e geografia, e somente no século dezessete foram descobertas aplicações da trigonometria na refração e outras partes da física.

Nenhuma exposição da obra de Ptolomeu seria completa sem alguma menção de sua *Tetrabiblos* (ou *Quadripartitum*), pois mostra-nos um aspecto da investigação antiga que estamos inclinados a esquecer. Os autores gregos não eram sempre os homens racionais, de pensamento claro, que imaginamos que fossem. O *Almajesto* é realmente um modelo de boa matemática e dados de observação precisos, postos a trabalhar para construir uma astronomia sóbria e científica; mas o *Tetrabiblos* (ou obra em quatro livros) representa uma espécie de religião sideral a que muito do mundo antigo se submetia. Com o fim da Idade Áurea, a matemática e a filosofia gregas se aliaram à aritmética e astrologia caldéias e a resultante pseudo-religião preencheu a lacuna deixada pelo repúdio da velha mitologia. Ptolomeu parece ter compartilhado dos preconceitos de sua época; no *Tetrabiblos* ele argüia que não se deve por causa da possibilidade de erro, desencorajar o astrólogo mais do que o médico. Quanto mais se lê sua obra, mais desanimado se fica ao ver que o autor não hesita em aceitar as supertições de seu tempo.

O *Tetrabiblos* difere do *Almajesto* não só como a astrologia difere da astronomia; as duas obras também usam diferentes tipos de matemática. O segundo é uma obra sólida e sofisticada que usa bem a geometria grega sintética; o primeiro é típico da pseudo-ciência da época na adoção de primitivos artifícios aritméticos babilônicos. Das obras clássicas de Euclides, Arquimedes e Apolônio se teria a impressão de que a matemática grega se ocupava exclusivamente com os níveis mais altos do raciocínio geométrico lógico; mas o *Tetrabiblos* de Ptolomeu sugere que o povo em geral estava mais interessado em computações aritméticas que em pensamento racional. Pelo menos dos dias de Alexandre, o Grande, ao fim do mundo clássico, havia muita intercomunicação entre a Grécia e a Mesopotâmia, e parece claro que a aritmética e a geometria algébrica babilônicas continuaram a exercer considetável influência no mundo helenístico. Esse aspecto da matemática, por exemplo, aparece tão fortemente em Heron de Alexandria (viveu por volta do ano 100) que um tempo se supôs que Heron fosse egípcio ou fenício e não grego. Agora pensa-se que Heron representa um tipo de matemática que havia muito tempo existia na Grécia mas sem achar representante entre as maiores figuras, exceto, talvez, quando Ptolomeu se trai no *Tetrabiblos*. A geometria grega, de outro lado, parece não ter tido boa acolhida na Mesopotâmia até a conquista árabe.

12 Heron de Alexandria é conhecido na história da matemática sobretudo pela fórmula, que tem seu nome, para a área do triângulo:

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

onde a, b, c são os lados e s é a metade da soma destes lados, isto é, o semiperímetro. Os árabes nos contam que a "fórmula de Heron" era já conhecida por Arquimedes, que sem dúvida tinha uma prova dela, mas a demonstração de Heron em sua *A métrica* é a mais antiga que temos. Embora agora seja em geral provada trigonometricamente, a prova de Heron é convencionalmente geométrica. *A métrica*, como *O método* de Arquimedes, ficou perdida durante muito tempo, até ser redescoberta em Constantinopla em 1896 num manuscrito datando de cerca de 1100. A palavra "geometria" originalmente significava "medida de terra" mas a geometria clássica como se encontra em *Os elementos* de Euclides e em *As cônicas* de Apolônio estava muito longe de mensuração de terras. A obra de Heron, de outro lado, nos mostra que nem toda a matemática na Grécia era do tipo "clássico". Havia evidentemente dois níveis no estudo de configurações — comparáveis à distinção feita em contexto numérico entre aritmética (ou teoria dos números) e logística (ou técnica de computação) — uma era eminentemente racional, que podia ser chamada geometria e a outra, inteiramente prática, seria melhor chamada geodésia.

Os babilônios não tinham a primeira, mas eram fortes na segunda, e é essencialmente o tipo de matemática babilônica que se encontra em Heron. É verdade que em *A métrica* uma ou outra demonstração é incluída, mas a maior parte da obra diz respeito a exemplos numéricos na mensuração de comprimentos, áreas e volumes. Há fortes semelhanças entre seus resultados e os que se encontram nos antigos textos de problemas mesopotâmios. Por exemplo, Heron dá uma tabulação[8] das áreas A_n dos polígonos regulares de n lados em termos do quadrado de um lado s_n, começando com $A_3 = 13/30\, s_3^2$ e indo até $A_{12} = 45/4\, s_{12}^2$. Como na matemática pré-helênica, Heron não fazia distinção entre resultados que são exatos e os que são apenas aproximações. Para A_5, por exemplo, Heron dá duas fórmulas — $5/3\, s_5^2$ e $12/7\, s_5^2$ — a primeira concordando com o valor encontrado numa tableta babilônica [9], mas nenhuma das duas sendo precisamente correta. Para o hexágono a razão dada por Heron de A_6 para s_6^2 é 13/5, a babilônia é 2;37,30, enquanto que o valor verdadeiro está entre os dois e é irracional, é claro. Nesses cálculos esperaríamos que Heron usasse tabelas trigonométricas como as que Hiparco tinha construído uns dois séculos antes, mas aparentemente a trigonometria era então mais a serva do astrônomo do que do homem prático.

O fosso que separava a geometria clássica da mensuração de Heron é ilustrado claramente por certos problemas enunciados e resolvidos por Heron em outra de suas obras, a *Geométrica*. Um problema pede o diâmetro, perímetro e área de um círculo, dada a soma dessas grandezas. O axioma de Eudoxo excluiria tal problema de consideração teórica, pois as três grandezas não são de mesma dimensão, mas de um ponto de vista numérico não crítico o problema faz sentido. Além disso, Heron não resolveu o problema em termos gerais mas, novamente se inspirando em métodos pré-helênicos, escolheu o caso específico em que a soma é 212; sua solução é como as receitas antigas, em que só os passos, sem razões, são dados. O diâmetro 14 é facilmente achado tomando o valor de Arquimedes para π e usando o método babilônico de completar o quadrado para resolver uma equação quadrática. Heron simplesmente dá as instruções lacônicas, "Multiplique 212 por 154, some 841, extraia a raiz quadrada e subtraia 29, e divida por 11." Esse não é o melhor método para ensinar matemática, mas os livros de Heron se destinavam a servir como manuais para o praticante.

Heron dava tão pouca atenção à unicidade da resposta quanto às dimensões das grandezas. Em um problema ele pedia os lados de um triângulo retângulo se a soma da área com o perímetro é 280. Isto, é claro, é um problema indeterminado, mas Heron dá uma só solução, usando a fórmula de Arquimedes para a área do triângulo. Em notação moderna, se s é o semiperímetro do triângulo e r o raio do círculo inscrito então $rs + 2s = s(r + 2) = 280$. Usando sua própria regra tipo livro de receitas de cozinha, "Sempre procure fatores", ele escolhe $r + 2 = 8$ e $s = 35$. Então a área rs é 210. Mas o triângulo é retângulo logo a hipotenusa c é igual a $s - r$ ou $35 - 6$ ou 29; a soma dos lados a e b é igual a $r + s$ ou 41. Os valores de a e b são pois, como se acha facilmente, 20 e 21. Heron nada diz sobre outras fatorações de 280, que naturalmente levariam a outras respostas.

13 Heron se interessava por mensuração em todas as formas — na óptica e na mecânica tanto quanto na geodésia. A lei da reflexão da luz já era conhecida por Euclides e Aristóteles (possivelmente também por Platão); mas foi Heron quem mostrou, por um argumento geométrico simples, numa obra chamada *Catóptrica* (ou reflexão), que a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão é uma conseqüência do princípio aristotélico que diz que a natureza nada faz do modo mais difícil. Isto é, se a luz deve ir de uma fonte S a um espelho MM' e, então, ao olho E de um observador (Fig. 10.12), o caminho mais curto possível SPE é aquele em que os ângulos SPM e EPM' são iguais. Que nenhum outro caminho $SP'E$ pode ser tão curto quanto SPE fica claro, traçando-se SQS' perpendicular a MM', com $SQ = QS'$, e comparando o caminho SPE com o caminho $SP'E$.

[8]Veja D. E. Smith, *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 volumes, II, 606

[9]Veja Neugebauer: *Exact Sciences in Antiquity*, p. 47

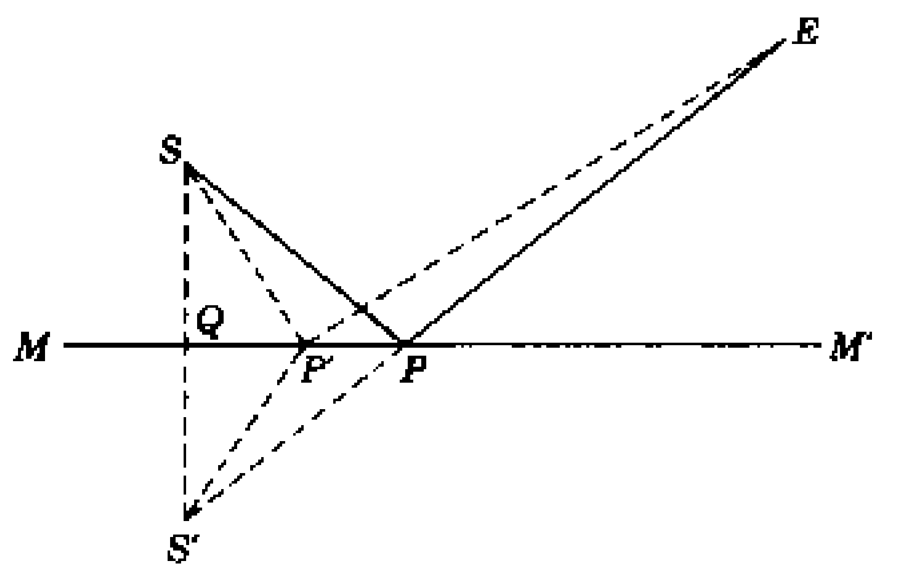


Figura 10.12

Como os caminhos *SPE* e *SP'E* são de comprimentos iguais aos caminhos *S'PE* e *S'P'E* respectivamente, e como *S'PE* é uma reta (porque o ângulo *M'PE* é igual ao ângulo *MPS*), resulta que *S'PE* é o caminho mais curto.

Heron é lembrado na história da ciência como inventor de um tipo primitivo de máquina a vapor, descrita em *Pneumática*, de um precursor do termômetro, e de vários brinquedos e engenhos mecânicos baseados nas propriedades dos fluidos e em leis das máquinas simples. Ele sugeriu em *Mecânica* uma lei (engenhosa mas incorreta) da máquina simples cujo princípio Arquimedes não conseguira explicar — o plano inclinado. Seu nome está também ligado ao "algoritmo de Heron" para achar raízes quadradas, mas esse método de iteração era na verdade devido aos babilônios de 2 000 anos antes de seu tempo. Embora Heron evidentemente aprendesse muito da matemática babilônica, parece não ter avaliado a importância do princípio posicional para frações. As frações sexagesimais tinham-se tornado o instrumento usual dos astrônomos e físicos, mas é provável que permanecessem pouco familiares para o homem comum. Frações comuns eram usadas com certa freqüência pelos gregos, a princípio com o numerador colocado abaixo do denominador, depois com as posições trocadas (e sem a barra separando os dois), mas Heron, escrevendo para o homem prático, parece ter preferido as frações unitárias. Ao dividir 25 por 13 ele escreve a resposta como $1 + 1/2 + 1/3 + 1/78$. A velha preferência egípcia por frações unitárias continuou na Europa durante pelo menos mil anos depois do tempo de Heron.

14 O período de Hiparco a Ptolomeu, cobrindo três séculos, foi uma fase em que a matemática aplicada esteve em posição proeminente, e os livros de Heron parecem notas tomadas por um estudante no equivalente de um instituto de tecnologia em Alexandria. Afirmam alguns[10] que a matemática se desenvolve melhor quando em contacto estreito com o trabalho do mundo; mas o período que estivemos considerando forneceria um argumento para a tese oposta. A perda de vigor na religião e na filosofia, que levou os gregos a buscar cultos e misticismo, foi acompanhada na matemática por um movimento voltado às aplicações que durou mais de três séculos. De Hiparco a Ptolomeu houve progressos na astronomia e geografia, óptica e mecânica, mas nenhum desenvolvimento significativo na matemática. É verdade que durante esses três séculos se desenvolveu a trigonometria, mas esse tópico era então, na melhor das hipóteses, uma aplicação à mensuração da geometria elementar que satisfazia às necessidades da astronomia, não parte da matemática pura. Além disso, não é sequer claro se houve ou não qualquer progresso significativo na trigonometria de Ptolomeu em 150 D. C. relativamente à de Hiparco, em 150 A. C. — ou mesmo talvez à de Apolônio e Arquimedes um século antes ainda. É evidente que o rápido crescimento da matemática, de Eudoxo a Apolônio, quando considerações teóricas predominavam, tinha terminado. Talvez a tendência para as aplicações fosse resultado do declínio e não causa, mas de qualquer forma os dois foram concomitantes. Alguns[11] atribuem o declínio às deficiências e dificuldades da álgebra geométrica, outros[12] ao ar frio que vinha de Roma. De qualquer forma, o período em que a trigonometria e a mensuração adquiriram relevo foi caracterizado pela falta de progresso — se não real declínio; no entanto foram precisamente esses aspectos da matemática grega que mais atraíram os hindus e os árabes que serviram de ponte para o mundo moderno. Antes de nos voltarmos a esses povos, no entanto, precisamos olhar o veranico da matemática grega, às vezes chamado a "Idade de Prata".

[10]Especialmente Lancelot Hogben em suas muitas obras sobre matemática e sua história, tais como *Mathematics for the Million* (New York: W. W. Norton, por volta de 1937)

[11]Por exemplo, B. L. van der Waerden em *Science Awakening* (1961) pp. 265-266

[12]E. T. Bell em *Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1940)

BIBLIOGRAFIA

Aaboe, Asger, *Episodes from the Early History of Mathematics* (New York: Random House, 1964)

Braunmühl, Anton von, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (Leipzig, 1900-1903, 2 volumes)

Cohen, M. R. e I. E. Drabkin, *Source Book in Greek Science* (New York: McGraw-Hill, 1948; reimpresso Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958)

Dantzig, Tobias, *The Bequest of the Greeks* (New York: Scribner, 1955)

Heath, T. L., *Aristarchus of Samos* (Oxford: Clarendon, 1913)

Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon, 1921, 2 volumes)

Lammert, Friedrich, "Klaudios Ptolemaios," em Pauly-Wissowa, *Real-Enzyclopädie der klassischen Altertumswissenschaft* (Stuttgart, 1959), Vol. XXIII, Parte 2, colunas 1788-1858

Manitius, Karl, *Des Ptolemäus Handbuch der Astronomie* (Leipzig, 1912-1913), 2 volumes)

Peters, C. H. F. e E. B. Knobel, *Ptolemy's Catalogue of Stars; a Revision of the Almagest* (Washington, D. C.: Carnegie Institution, 1915)

Ptolemy, Claudius, *L'optique*, editado por Albert Lejeune (Louvaina, Bélgica: Louvain University, 1956)

Ptolemy, Claudius, *Cosmographia*, editado por Skelton (Amsterdam: Meridian, 1963)

Sarton, George, *Ancient Science and Modern Civilization* (Lincoln, Nebr.: University of Nebraska Press, 1954)

Stahl, W. H., *Ptolemy's Geography; a Select Bibliography* (New York: Bulletin of the New York Public Library, 1951-1952)

Tannery, Paul, *Mémoires scientifiques* (Toulouse, 1912, etc.), especialmente Vols. I e II.

Thomas, Ivor, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Loeb Classical Library, 1939-1941, 2 volumes)

Thomson, J. O., *History of Ancient Geography* (Cambridge, 1948)

Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, traduzido por Arnold Dresden (New York: Oxford, 1961; edição em brochura, New York: Wiley, 1963)

EXERCÍCIOS

1. Como se pode explicar o fato de ser o período do desenvolvimento da trigonometria grega um período de declínio da geometria grega?

2. Por que os antigos preferiam um sistema astronômico geocêntrico a um heliocêntrico?

3. Que distância teria Colombo a percorrer de Gibraltar à Índia, supondo-a acessível pelo leste por água, se as idéias de Ptolomeu quanto ao tamanho da terra fossem corretas?

4. O que acontece aos círculos sobre a esfera se esta é projetada ortogonalmente num plano?

5. Usando a informação dada no texto, ache a lei de refração de Ptolomeu para raios indo do ar para a água.

6. Prove, geométrica ou trigonometricamente, a fórmula de Heron para a área de um triângulo.

7. Diz-se que Posidônio usou observações das estrelas para avaliar o tamanho da terra. Mostre como isso pode ser feito.

8. Qual das fórmulas de Heron para a razão de A_5 para s_5^2 é a melhor aproximação?

9. Heron deu a razão da área do heptágono regular para o quadrado de um lado como sendo 43/12, e os babilônios lhe davam o valor 3;41. Qual é a melhor aproximação?

10. Ache, com aproximação de um décimo de um por cento, o erro no valor de Heron 45/4 para a razão $A_{12}:s_{12}^2$.

11. Complete os passos na solução de Heron do problema de achar o diâmetro de um círculo se a soma do diâmetro e do perímetro e da área é 212.

12. Prove a desigualdade de Aristarco $1/20 < \text{sen } 3° < 1/18$.

13. Hiparco sabia por observações de eclipses que a paralaxe lunar (isto é, o ângulo subentendido pela Terra num ponto da Lua) é aproximadamente 2°. Que distância da Lua isso implica?

14. Escreva em notação grega a corda de 45°.

15. Ache, sem tabelas, o sen 15° e usando isso escreva em notação alfabética grega o valor de Ptolomeu para corda 30°.

16. Escreva em notação grega a corda de 150°.

17. Se os valores de Arquimedes e Ptolomeu para π são expressos como frações comuns impróprias, e se uma nova fração é formada pela diferença dos dois numeradores sobre a diferença dos dois denominadores, acha-se uma aproximação melhor, dita chinesa. Quão precisa é essa nova aproximação?

18. Prove o teorema de Aristarco que diz que se $\beta < \alpha < 90°$, então $\operatorname{sen} \alpha / \operatorname{sen} \beta < \alpha/\beta$.

19. Prove os dois lemas de Menelau.

20. Prove geométrica ou trigonometricamente, o teorema de Menelau para triângulos planos.

21. Complete a prova do teorema de Ptolomeu.

22. Usando o teorema de Ptolomeu (com um diâmetro do círculo como um lado do quadrilátero) obtenha as fórmulas para $\operatorname{sen}(x + y)$ e $\cos(x \pm y)$.

23. Usando o método de Ptolomeu para ângulo metade, obtenha uma fórmula para $\cos x/2$.

*24. Ache exatamente, em termos de radicais, a razão da área do decágono regular para o quadrado de um lado. Seu valor é maior ou menor que o valor 15/2 dado por Heron?

Capítulo **11**

Ressurgimento e declínio da matemática grega

As abelhas . . . em virtude de uma certa intuição geométrica . . . sabem que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo, e conterá mais mel com o mesmo gasto de material.

Papus de Alexandria

1 Hoje usamos a frase "matemática grega" como se indicasse um corpo de doutrina homogêneo e bem definido. Uma tal visão pode ser muito enganadora no entanto, pois significaria que a geometria sofisticada do tipo Arquimedes-Apolônio era a única espécie que os gregos conheciam. Devemos lembrar que a matemática no mundo grego cobriu um intervalo de tempo indo pelo menos de 600 A. C. a 600 D. C. e que viajou da Jônia à ponta da Itália, e Atenas, a Alexandria, e a outras partes do mundo civilizado. Bastam os intervalos de tempo e espaço para produzir modificações na profundidade e extensão da atividade matemática, pois a ciência grega não tinha a uniformidade, século após século que se encontra no pensamento pré-helênico. Além disso, mesmo num dado tempo e lugar do mundo grego (como em nossa civilização hoje) havia marcadas diferenças no nível de interesse e realização matemática. Vimos como até na obra de um único indivíduo, como Ptolomeu, pode haver dois tipos de estudos — o *Almajesto* para os racionalistas e o *Tetrabiblos* para os místicos. É provável que sempre houvesse pelo menos dois níveis de percepção matemática, mas que a escassez de obras preservadas, especialmente do nível inferior, tenda a obscurecer esse fato. A frase usada como título, neste capítulo, deve ser aceita com alguma hesitação, pois embora seja justificada à luz do que sabemos sobre o mundo grego, nosso conhecimento está longe de ser completo. O período que consideramos neste capítulo, de Ptolomeu a Proclus, cobre quase quatro séculos (do segundo ao sexto), mas nossa exposição se baseia em grande parte em dois tratados importantes apenas, de que só partes existem, e em uma variedade de obras de menor significado.

Heron e Ptolomeu eram gregos, mas viviam num mundo dominado politicamente por Roma. A morte de Arquimedes pela mão de um soldado romano pode ter sido acidental, mas foi verdadeiramente premonitória. Durante toda a sua longa história, a Roma antiga pouco contribuiu para a ciência e a filosofia e menos ainda para a matemática. Tanto durante a república como durante o império, os romanos mostraram pouca inclinação para a investigação especulativa ou lógica. As artes práticas como a medicina e a agricultura eram cultivadas com algum interesse, e a geografia descritiva era olhada favoravelmente. Projetos notáveis de engenharia e monumentos arquitetônicos se relacionavam com os aspectos mais simples da ciência, mas os construtores romanos se satisfaziam com técnicas práticas elementares que requeriam muito pouco conhecimento da grande massa de pensamento grego. Quão pouco os romanos conheciam a ciência pode ser avaliado pelo *De architectura* de Vitruvius, escrito durante o período médio da Idade de Augusto e dedicada ao imperador. Num certo ponto o autor descreve o que lhe parecem ser as três maiores descobertas matemáticas: a incomensurabilidade do lado e diagonal do cubo; o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5; e o cálculo feito por Arquimedes da composição da coroa do rei. O autor, Marcus Vitruvius Pollio, se interessava especialmente por instrumentos de agrimensura e problemas envolvendo medidas aproximadas. O perímetro de uma roda de diâmetro 4 pés é dado por Vitruvius como sendo 12 1/2 pés, o que dá a π o valor 3 1/8. Essa aproximação não é tão boa quanto a de Arquimedes, cuja obra Vitruvius provavelmente pouco conhecia, mas é de um grau de precisão aceitável para as aplicações romanas. Afirma-se às vezes que obras notáveis de engenharia, como as pirâmides do Egito, e os aquedutos romanos, implicam um alto grau de realização matemática, mas a evidência histórica não apóia essa idéia. Assim como a matemática egípcia antiga era de nível inferior à babilônica do mesmo período, também a matemática romana era de nível muito inferior à da Grécia durante os mesmos anos. Faltava quase completamente aos romanos o interesse pela matemática, de modo que seus melhores esforços, como o de Vitruvius por exemplo, não se comparavam aos mais fracos resultados surgidos na Grécia, exemplificados pela obra de Heron[1].

2 Vimos que a matemática grega não era toda de alto nível, pois ao período glorioso do terceiro século A. C. seguiu-se um declínio, talvez interrompido até certo ponto nos dias de Ptolomeu, mas não realmente cancelado até o século da "Idade de Prata", de 250 a 350 D. C. aproximadamente. No começo desse período, também chamado Segunda Idade Alexandrina, encontramos o maior algebrista grego, Diofante de Alexandria, e pelo fim desse período apareceu o último geômetra grego importante, Papus de Alexandria. Nenhuma outra cidade foi o centro da atividade matemática por tanto tempo quanto Alexandria, dos dias de Euclides (morreu por volta de 300 A.C.) aos de Hipatia (morreu em 415). Era um centro muito cosmopolita, e a matemática que se originou dali não era toda de mesmo tipo. Os resultados de Heron eram bem diferentes dos de Euclides ou Apolônio ou Arquimedes, e na obra de Diofante novamente há uma quebra abrupta da tradição clássica grega. Pouco se sabe da vida de Diofante, além de uma tradição referida numa coleção de problemas datando do quinto ou sexto século, chamada "Antologia Grega" (descrita abaixo).

> Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem; Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! infeliz criança tardia; depois de chegar à medida de metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida[2].

Se esse enigma é historicamente exato, Diofante viveu oitenta e quatro anos. Positivamente não deve ser tomado como problema típico dos que interessavam a Diofante, pois este pouca atenção deu a equações de primeiro grau.

3 Diofante é freqüentemente chamado o pai da álgebra, mas veremos que tal designação não deve ser tomada literalmente. Sua obra não é de modo algum o tipo de material que forma a base da álgebra elementar moderna; nem se assemelha à álgebra geométrica de Euclides. A principal obra de Diofante que conhecemos é a *Arithmetica*, tratado que era originalmente em treze livros, dos quais só os seis primeiros se preservaram[3]. Deve-se lembrar que na Grécia antiga a palavra aritmética significava teoria dos números, não computação. Freqüentemente a aritmética grega tinha mais em comum com a filosofia que com o que consideramos como matemática; por isso teve um papel importante no neoplatonismo durante a Segunda Idade Alexandrina. Isso era particularmente verdadeiro quanto à *Introductio arithmeticae* de Nicômaco de Gerasa, um neopitagórico que viveu não longe de Jerusalém no ano 100 aproximadamente. Afirma-se às vezes que o autor é de origem síria, mas certamente as tendências filosóficas gregas predominam em sua obra. A *Introductio* de Nicômaco, como a temos, contém só dois livros, e é possível que isso seja apenas uma versão abreviada de uma obra originalmente mais extensa. De qualquer forma, a possível perda nesse caso é muito menos de lamentar que a perda de sete livros da *Arithmetica* de Diofante, pois há um mundo de diferença entre os dois autores. Nicômaco, tanto quanto se pode julgar, tinha pouca competência matemática e se ocupava apenas com as propriedades mais elementares dos números. O nível da obra pode ser

[1]Uma devastadora comparação entre a ciência romana e a da Grécia é apresentada por W. H. Stahl, *Roman Science* (1962)

[2]Citado de Cohen e Drabkin, *Source Book in Greek Science* (1958), p. 27. A incerteza quanto à vida de Diofante é tal que não sabemos com segurança em que século viveu. Em geral supõe-se que viveu por volta de 250, mas têm sido sugeridas datas diferindo de um século, antes ou depois

[3]Para uma exposição completa veja T. L. Heath, *Diophantus of Alexandria* (1910)

Quatro matemáticos antigos que contribuíram também para a música: Boécio, Pitágoras, Platão e Nicômaco; de um manuscrito de Boécio, Cambridge.

avaliado pelo fato do autor achar conveniente juntar uma taboada de multiplicação indo até ι vezes ι (isto é, 10 vezes 10). Se isto é genuíno e não apenas uma interpolação posterior, é o mais antigo exemplo grego preservado de tal tabela, embora existam muitas tabelas de multiplicação babilônias mais antigas.

A *Introductio* de Nicômaco começa como era de se esperar com a classificação pitagórica dos números em pares e ímpares, depois em parmente pares (potências de dois) e parmente ímpares ($2^n \cdot p$ onde p é ímpar e $p > 1$ e $n > 1$) e imparmente pares ($2 \cdot p$ onde p é ímpar e $p > 1$). São definidos os números primos, compostos, e perfeitos, e é dada uma descrição do crivo de Eratóstenes e uma lista dos quatro primeiros números perfeitos (6 e 28 e 496 e 8 128). A obra inclui também uma classificação das razões e combinações de razões (porque razões de inteiros são essenciais na teoria pitagórica dos intervalos musicais), um tratamento extenso dos números figurativos (que tinham tido tanto relevo na aritmética pitagórica) em duas e três dimensões, e uma exposição bem completa sobre as várias médias (também um tópico favorito na filosofia pitagórica). Como alguns outros escritores, Nicômaco considerava o número três como o primeiro número no sentido estrito da palavra, pois um e dois eram realmente apenas os geradores do sistema numérico. Para Nicômaco os números tinham certas qualidades, eram melhores ou piores, mais jovens ou mais velhos; e podiam transmitir esses traços, como os pais aos filhos. Apesar desse antropomorfismo aritmético como pano de fundo, a *Introductio* contém um teorema moderadamente sofisticado. Nicômaco observou que se os inteiros ímpares são agrupados segundo o esquema $1; 3 + 5; 7 + 9 + 11; 13 + 15 + 17 + 19; \ldots$ as somas sucessivas são os cubos dos inteiros. Essa observação, junto com a antiga observação pitagórica de ser a soma dos n primeiros números ímpares igual a n^2, leva à conclusão que a soma dos n primeiros cubos perfeitos é igual ao quadrado da soma dos n primeiros inteiros.

A *Introductio* de Nicômaco[4] não era nem um tratado sobre computações nem sobre álgebra, mas um manual dos elementos de matemática essenciais à compreensão da filosofia pitagórica e platônica; como tal, serviu de modelo para imitadores e comentadores. Entre esses os mais conhecidos foram Teon de Smirna (viveu por volta de 125), que escreveu sua *Expositio* em grego, e Boécio (morreu em 524), que escreveu sua *Arithmetica* muito depois, em latim. Esses homens, como Nicômaco, se preocupavam muito mais com a aplicação da aritmética à música e à filosofia platônica que com o progresso do próprio assunto. O título completo da *Expositio* indica, de fato, que se trata de uma exposição de questões matemáticas úteis à compreensão de Platão[5]. Explica, por exemplo, que o *tetractys* consistindo dos números 1, 2, 3 e 4 contém todas as consonâncias musicais, pois fornece as razões 4:3, 3:2, 2:1, 3:1 e 4:1. A *Arithmetica* de Boécio nada tem de original, é quase uma tradução da obra mais antiga de Nicômaco[6].

4 A *Arithmetica* de Diofante era algo muito diferente das obras de Nicômaco, Teon, e Boécio; era um tratado caracterizado por um alto grau de habilidade matemática e de engenho: quanto a isto, o livro pode ser comparado aos grandes clássicos da Idade Alexandrina anterior; no entanto quase nada tem em comum com esses ou, na verdade, com qualquer matemática grega tradicional. Representa essencialmente um novo ramo e usa um método diferente. Desvinculado dos métodos algébricos, assemelha-se à álgebra babilônica em muitos aspectos; mas enquanto que os matemáticos babilônios se ocupavam principalmente com soluções *aproximadas* de equações *determinadas* de até terceiro grau, a *Arithmetica* de Diofante (tal como a temos) é quase toda dedicada à resolução *exata* de equações, tanto *determinadas* quanto *indeterminadas*. Devido à ênfase dada na *Arithmetica* à solução de problemas indeterminados, o assunto, às vezes chamado análise indeterminada, tornou-se conhecido como análise diofantina. Como esse tipo de trabalho hoje é em geral parte de cursos de teoria dos números e não de álgebra elementar, não é uma base adequada para considerar Diofante como pai da álgebra. Mas há outro aspecto em que tal paternidade se justifica. A álgebra hoje se baseia quase exclusivamente em formas simbólicas de enunciados, em lugar da linguagem escrita usual da comunicação ordinária em que a matemática grega anterior, bem como a literatura grega, se expressavam. Considera-se em geral que podem ser reconhecidos três estágios no desenvolvimento histórico da álgebra: (1) o primitivo, ou retórico, em que tudo é completamente escrito em palavras; (2) um estágio intermediário, sincopado, em que são adotadas algumas abreviações; e (3) um estágio simbólico ou final. Uma tal divisão arbitrária do desenvolvimento da álgebra em três estágios é naturalmente uma simplificação excessiva; mas

[4]Para uma tradução para o inglês veja Nicômaco de Gerasa, *Introduction to Arithmetic*, traduzido por M. L. D'Ooge (1926). Essa edição muito útil contém também uma longa introdução que situa a obra de Nicômaco numa clara perspectiva histórica. D'Ooge conclui da evidência disponível que Nicômaco era grego e não sírio.

[5]Há um excerto, traduzido para o inglês, em Cohen e Drabkin, *Source Book in Greek Science*, pp. 294-298

[6]Marshall Clagett, *Greek Science in Antiquity*, pp. 185-186

serve como primeira aproximação ao que aconteceu, e nesse esquema a *Arithmetica* de Diofante deve ser colocada na segunda categoria.

Nos seis livros preservados da *Arithmetica* há um uso sistemático de abreviações para potências de números e para relações e operações. Um número desconhecido é representado por um símbolo parecido com a letra grega ς (talvez como última letra de *arithmos*); o quadrado disto aparece como Δ^Y, o cubo como K^Y, a quarta potência dita quadrado-quadrado, como $\Delta^Y\Delta$, a quinta potência como ou quadrado-cubo, como ΔK^Y, e a sexta potência ou cubo-cubo como K^YK. Diofante naturalmente conhecia as regras de combinação equivalentes a nossas leis sobre expoentes, e tinha nomes especiais para os recíprocos das seis primeiras potências das incógnitas, quantidades equivalentes às nossas potências negativas. Coeficientes numéricos eram escritos depois dos símbolos para as potências a que estavam associados; a adição de termos era indicada por justaposição adequada dos símbolos para os termos, e a subtração representada por uma abreviação de uma só letra colocada antes dos termos a serem subtraídos. Com tal notação Diofante podia escrever polinômios numa incógnita quase tão concisamente quanto nós hoje. A expressão $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$, por exemplo, poderia aparecer numa forma equivalente a *SS*2 *C*3 *x*5 *M S*4 *u*6, onde as nossas letras, *S*, *C*, *x*, *M* e *u* foram usadas para "quadrado", "cubo", a "incógnita", "menos" e "unidade" e nossos numerais em lugar de notação grega alfabética que se usava no tempo de Diofante. A álgebra grega já não estava mais restrita ao uso das três primeiras potências ou dimensões e as identidades $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$, que desempenharam papel importante na álgebra medieval e na trigonometria moderna, aparecem na obra de Diofante. A diferença principal entre a sincopação de Diofante e a notação algébrica moderna está na falta de símbolos especiais para operações e relações, bem como de notação exponencial. Esses elementos de notação que faltavam foram em grande parte contribuição do período do fim do século quinze ao começo do século dezessete, na Europa.

5 Se pensarmos primariamente em termos de notação, Diofante tem boas razões para pretender o título de pai da álgebra, mas em termos de motivação e conceitos a pretensão é menos justificada. A *Arithmetica* não é uma exposição sistemática sobre as operações algébricas ou as funções algébricas ou a resolução de equações algébricas. Em vez disso é uma coleção de cerca de 150 problemas, todos estudados em termos de exemplos numéricos específicos, embora talvez pretendendo conseguir generalidade de método. Não há desenvolvimento postulacional, nem se faz um esforço para achar todas as soluções possíveis. No caso de equações quadráticas, com duas raízes positivas, só a maior é dada, e raízes negativas não são consideradas. Não é feita uma distinção clara entre problemas determinados e indeterminados, e mesmo para os últimos, para os quais o número de soluções em geral é infinito, uma só resposta é dada. Diofante resolvia problemas envolvendo vários números desconhecidos expressando engenhosamente todas as quantidades desconhecidas, quando possível, em termos de uma apenas. Dois problemas da *Arithmetica* servirão para ilustrar o método diofantino. Ao achar dois números tais que sua soma seja 20 e a soma dos quadrados 208, os números são designados não por x e y, mas como $10 + x$ e $10 - x$ (em termos de nossa notação). Então $(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208$, logo $x = 2$; portanto os números procurados são 8 e 12. Diofante tratou também o problema análogo em que a soma dos dois números e a soma dos cubos são dadas como sendo 10 e 370 respectivamente.

Nesses problemas ele está lidando com uma equação determinada, mas Diofante usou essencialmente o mesmo esquema na análise indeterminada. Um problema pede que sejam encontrados dois números tais que cada um somado com o quadrado do outro forneça um quadrado perfeito. Esse é um exemplo típico de análise diofantina em que somente números racionais são admissíveis como resposta. Ao resolver o problema Diofante não chamou os números de x e y, mas de x e $2x + 1$. Aqui o segundo quando somado ao quadrado do primeiro fornecerá um quadrado perfeito qualquer que seja o valor de x escolhido. Agora, exige-se que $(2x + 1)^2 + x$ seja um quadrado perfeito. Aqui Diofante não menciona a existência de uma infinidade de respostas. Ele se contenta com escolher um caso particular de quadrado perfeito, aqui o número $(2x-2)^2$, tal que quando igualado a $(2x+1)^2+x$ resulte uma equação linear em x. Aqui o resultado é $x = 3/13$, de modo que o outro número, $2x+1$, é $19/13$. Poderíamos, é claro, usar $(2x-3)^2$ ou $(2x-4)^2$ ou expressões semelhantes, em vez de $(2x-2)^2$, e chegar a outros pares de números tendo a propriedade desejada. Aqui vemos um esquema que chega perto de ser um "método" na obra de Diofante; quando duas condições devem ser satisfeitas por dois números, eles são escolhidos de modo a satisfazer a uma das duas condições; e então se ataca o problema de satisfazer à segunda. Isto é, em vez de tratar equações *simultâneas* sobre duas incógnitas, Diofante opera com condições *sucessivas* de modo que apareça um só número desconhecido no trabalho.

6 Entre os problemas indeterminados na *Arithmetica* há alguns envolvendo equações como $x^2 = 1 + 30y^2$ e $x^2 = 1 + 26y^2$, que são exemplos da chamada "equação de Pell" $x^2 = 1 + py^2$; novamente, considera-se ali que uma só solução basta[7]. Num certo sentido é injusto criticar Diofante por se satisfazer com uma única resposta, pois ele estava resolvendo problemas, não *equações*. Num certo sentido a *Arithmetica* é uma coleção de problemas de aplicação de álgebra, não um texto de álgebra. Nisso Diofante se assemelha aos algebristas babilônios; e sua obra é considerada "o mais belo florescimento da álgebra babilônica"[8]. Até certo ponto tal caracterização é injusta para com Diofante, pois seus números são inteiramente abstratos e não se referem a medidas de grãos ou dimensões de campos ou unidades monetárias, como no caso da álgebra egípcia e mesopotâmica. Além disso, ele se interessava apenas por soluções racionais *exatas*, enquanto que os babilônios tinham gostos computacionais e aceitavam aproximações de soluções irracionais das equações. Por isso equações cúbicas raramente aparecem na obra de Diofante, enquanto que entre os babilônios tinha sido dada atenção à redução de cúbicas à forma padrão $n^3 + n^2 = a$, a fim de resolver aproximadamente, usando interpolação numa tabela de valores de $n^3 + n^2$.

Não sabemos quantos problemas na *Arithmetica* eram originais ou se Diofante tinha emprestado de outras coleções. Possivelmente de alguns dos problemas ou métodos é possível seguir a trilha até as origens babilônicas, pois enigmas e exercícios costumam reaparecer geração após geração. Para nós hoje a *Arithmetica* de Diofante parece notavelmente original, mas talvez essa impressão resulte da perda de coleções de problemas rivais. Nossa visão da matemática grega deriva de um número relativamente pequeno de obras preservadas, e conclusões tiradas deles são necessariamente precárias. Indicações de que Diofante possa ter sido uma figura menos isolada do que se supôs se encontram numa coleção de problemas talvez do começo do segundo século de nossa era (portanto presumivelmente anterior à *Arithmetica*) em que aparecem alguns símbolos diofantinos[9]. No entanto, Diofante teve uma influência maior sobre a teoria moderna dos números do que qualquer outro algebrista grego não geométrico. Em particular, Fermat foi levado ao seu célebre "grande" ou "último" teorema (ver abaixo) quando procurou generalizar um problema que tinha lido na *Arithmetica* de Diofante (II. 8): dividir um dado quadrado em dois quadrados[10].

7 A *Arithmetica* de Diofante é uma obra brilhante, digna do período de renascimento em que foi escrita, mas, em motivação e conteúdo, está muito distante dos tratados magnificamente lógicos do grande triunvirato de geômetras da primeira Idade Alexandrina. A álgebra parece mais adequada à resolução de problemas do que à exposição dedutiva, e a grande obra de Diofante ficou fora da corrente principal da matemática grega. Uma obra menor sobre números poligonais de Diofante está mais perto dos antigos interesses gregos, mas mesmo dessa não se pode dizer que se aproxime do ideal lógico grego. A geometria clássica não tinha achado um defensor ardente, com a possível exceção de Menelau, desde a morte de Apolônio mais de quatrocentos anos antes. Mas durante o reino de Diocleciano (284-305) viveu novamente em Alexandria um matemático que era movido pelo mesmo espírito que animara Euclides, Arquimedes e Apolônio. Papus de Alexandria em 320 aproximadamente compôs uma obra com o título *Coleção* (Synagoge) que é importante por várias razões. Em primeiro lugar fornece um registro histórico muito valioso de partes da matemática grega que de outro modo não conheceríamos. Por exemplo, é pelo Livro V da *Coleção* que ficamos sabendo da descoberta por Arquimedes dos treze poliedros semi-regulares ou "sólidos arquimedianos". Além disso, a *Coleção* contém novas provas e lemas suplementares para proposições das obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Ptolomeu. Finalmente, o tratado contém descobertas e generalizações novas, não encontradas em nenhuma obra anterior. A *Coleção*, o mais importante tratado de Papus, continha oito livros, mas o primeiro livro e a primeira parte do segundo livro se perderam. Nesse caso a perda é menos lamentável que a dos últimos livros da *Arithmetica* de Diofante, pois ao que parece os dois primeiros livros da *Coleção* tratavam principalmente dos princípios do sistema de tetradas de Apolônio na numeração grega. Como temos, no *Computador de areia*, o correspondente sistema de octadas de Arquimedes, podemos fazer uma boa idéia do material que se perdeu da exposição de Papus.

8 O Livro III da *Coleção* mostra que Papus compartilhava totalmente da clássica apreciação grega pelas sutilezas da precisão lógica em geometria. Aqui ele faz distinção clara entre problemas "planos", "sólidos" e "lineares" — os primeiros sendo construtíveis com retas e círculos apenas, os segundos resolúveis por uso de secções cônicas e os terceiros exigindo outras curvas que não retas, círculos e cônicas. Depois Papus descreve algumas soluções dos três famosos problemas da antiguidade, a duplicação e trissecção sendo problemas da segunda categoria, isto é, sólidos, e a quadratura do círculo um problema linear. Papus virtualmente afirma aqui o fato de ser impossível resolver os problemas clássicos sob as condições platônicas, pois não estão entre os problemas planos; mas provas rigorosas só foram dadas no século dezenove.

No Livro IV Papus novamente insiste em que se deve dar a cada problema uma construção adequada a ele. Isto é, não devem ser usados lugares lineares para resolver problemas sólidos, nem lugares sólidos ou lineares na solução de um problema plano. Afirmando que a trissecção de um ângulo é um problema sólido, ele sugere portanto que empreguem secções cônicas, ao passo que, Arquimedes num caso tinha usado uma *neusis* ou seja, uma construção usando régua móvel, e em outro uma espiral, que é um lugar linear. Uma das trissecções de Papus é como segue. Seja o ângulo dado AOB colocado num círculo com centro O (Fig. 11.1) e seja OC a bissetriz. Traçar a hipérbole tendo A como um foco, OC como a diretriz correspondente, e com excentricidade igual a 2. Então um ramo dessa hipérbole cortará a circunferência do círculo num ponto T tal que o $\angle AOT$ é um terço do $\angle AOB$.

Uma segunda construção da trissecção proposta por Papus usa uma hipérbole equilátera como segue. Seja o lado OB do ângulo dado AOB uma diagonal de um retângulo $ABCO$ e por A trace-se a hipérbole equilátera tendo BC e OC (prolongados) como assíntotas (Fig. 11.2). Com A como centro e com raio duas vezes OB trace-se um círculo, que corta a hipérbole em P e de P baixe-se a perpendicular PT a CB prolongado. Então prova-se facilmente, usando as propriedades da hipérbole, que a reta que passa por O e T é paralela a AP e que o $\angle AOT$ é um terço do $\angle AOB$. Papus não menciona nenhuma fonte para suas trissecções, e não podemos deixar de nos perguntar se Arquimedes conhecia esta trissecção. Se traçarmos o semicírculo passando por B, tendo OT como

[7]Veja D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 3.ª edição (New York: Dover, 1967), p. 62. Para uma completa exposição da obra de Diofante ver T. L. Heath, *Diophantus of Alexandria*. Cf. também J. A. Sánchez Pérez: *La arithmética en Grecia* (1947) e o artigo sobre Diofante por F. O. Hultsch em Pauly-Wissowa, *Real-Enzyclopädie der klassischen Altertumswissenschaft*, Vol. V (Stuttgart: Metzler, 1905), colunas 1 051-1 073

[8]Veja J. D. Swift, "Diophantus of Alexandria", *American Mathematical Monthly*, **43** (1956), 163-170

[9]Veja F. E. Robbins, "P. Mich. 620: A Series of Arithmetical Problems", *Classical Philology*, **24** (1929), 321-329, e Kurt Vogel, "Die algebraischen Probleme des P. Mich. 620", *Classical Philology*, **25** (1930), 373-375

[10]Veja Heath, *Diophantus of Alexandria*, pp. 144-145

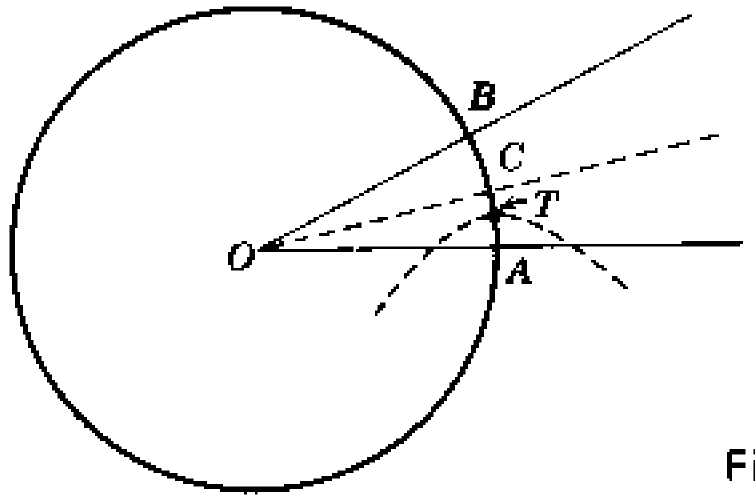


Figura 11.1

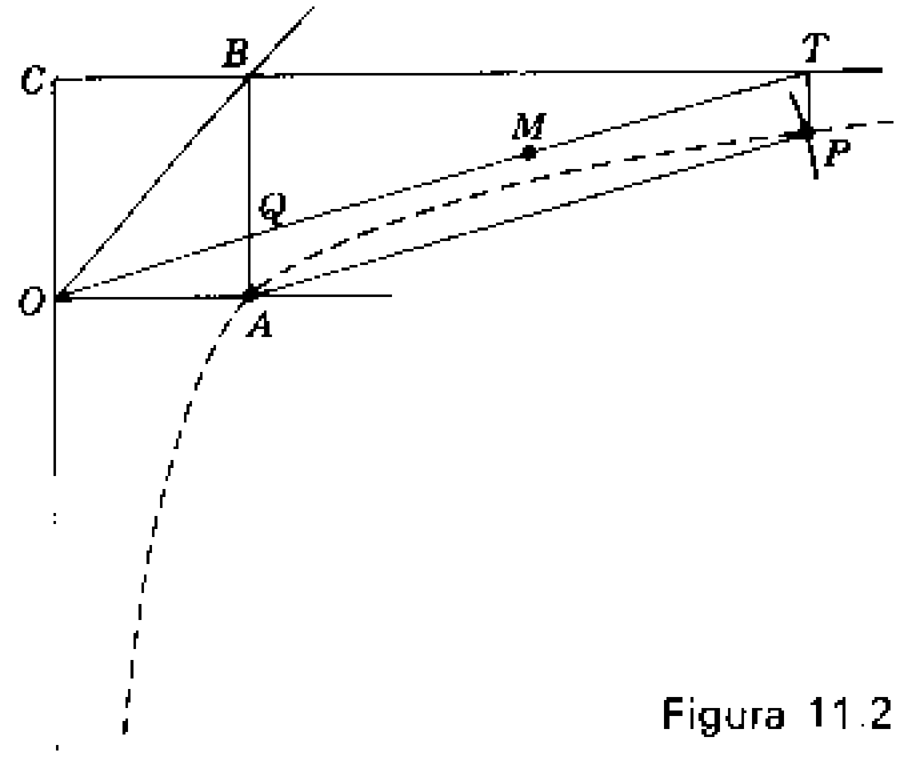


Figura 11.2

diâmetro e M como centro, teremos essencialmente a construção de Arquimedes por *neusis*, pois $OB = QM = MT = MB$.

No Livro III Papus descreve também a teoria das médias e dá uma atraente construção que põe a média aritmética, a geométrica e a harmônica no mesmo semicírculo. Papus mostra que se no semicírculo ADC com centro O (Fig. 11.3) tivermos $DB \perp AC$ e $BF \perp OD$, então DO é a média aritmética, DB é a média geométrica e DF a média harmônica das grandezas AB e BC. Aqui Papus diz que é o autor da prova apenas, atribuindo o diagrama a um geômetra cujo nome não é citado. Mesmo quando Papus menciona nomes de autores às vezes nós não os conhecemos, o que indica que nossa informação sobre os matemáticos de seu tempo é muito incompleta.

9 A *Coleção* de Papus está repleta de interessantes informações e de significativos resultados novos. Em muitos casos as novidades têm a forma de generalizações de teoremas anteriores, e exemplos disso aparecem no Livro IV. Aqui achamos uma generalização elementar do teorema de Pitágoras. Se ABC é *qualquer* triângulo (Fig. 11.4) e se $ABDE$ e $CBGF$ são quaisquer paralelogramos construídos sobre dois dos lados, então Papus constrói sobre o lado AC um terceiro paralelogramo $ACKL$ igual à soma dos dois outros. Isso se faz facilmente, prolongando os lados FG e ED até se encontrarem em H, depois traçando HB e prolongando até encontrar o lado AC em J, e finalmente traçando AL e CK paralelos a HBJ. Não se sabe se essa generalização, que leva usualmente o nome de Papus, era original dele, pois sugere-se que Heron já a conhecia.

Outro exemplo de generalização no Livro IV, também levando o nome de Papus, estende teoremas de Arquimedes sobre a faca do sapateiro. Afirma que se círculos C_1, C_2, C_3, $C_4, \ldots, C_n, \ldots$ são inscritos sucessivamente como na Fig. 11.5, todos sendo tangentes a semicírculos sobre AB e sobre AC e sucessivamente cada um ao anterior, a distância perpendicular do centro do n-ésimo círculo à reta de base ABC é n vezes o diâmetro do n-ésimo círculo[11].

10 O Livro V da *Coleção* foi um favorito dos comentadores, porque levantava a questão da sagacidade das abelhas. Tendo Papus mostrado que, de dois polígonos regulares de mesmo perímetro, o que tem maior número de lados tem maior área, ele concluiu que as abelhas provavam algum entendimento matemático ao construir suas células como

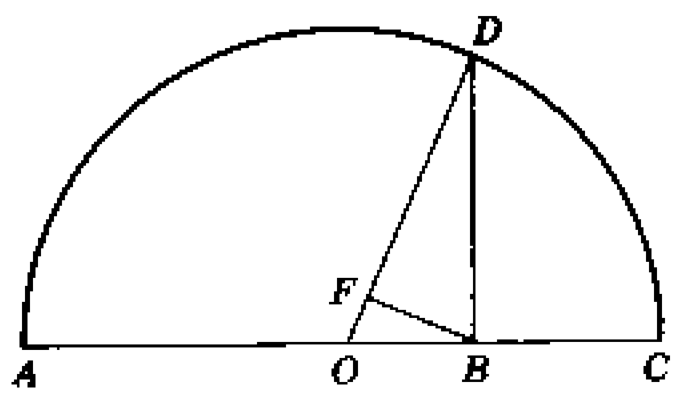


Figura 11.3

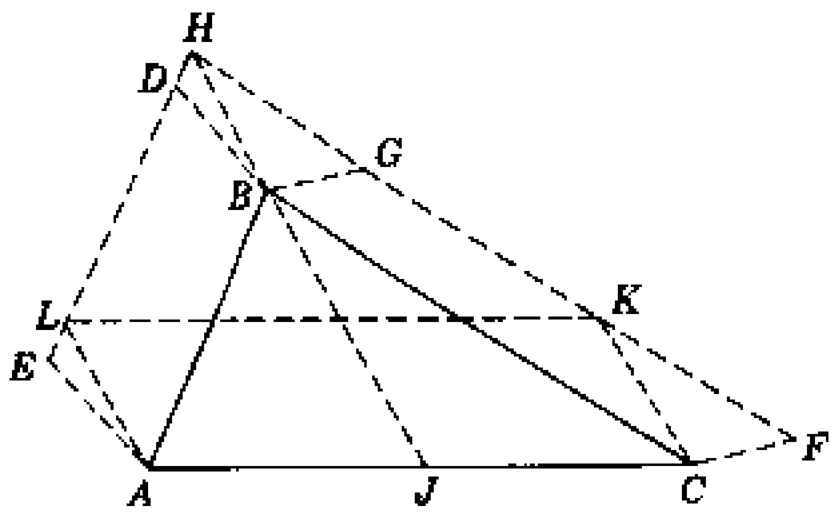


Figura 11.4

[11]Uma indicação da prova do teorema se encontra em R. A. Johnson, *Modern Geometry* (New York: Houghton Mifflin, 1929), p. 117

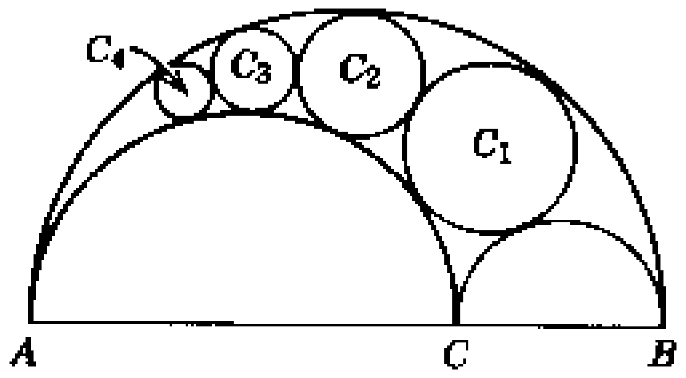


Figura 11.5

prismas hexagonais, em vez de quadrados ou triangulares. O livro examina outros problemas de isoperimetria, inclusive uma prova de que o círculo tem maior área, para um perímetro dado, que qualquer polígono regular. Aqui Papus parece estar seguindo de perto uma obra, *Sobre figuras isométricas*, escrita quase meio milênio antes por Zenodoro (cerca de 180 A. C.), da qual alguns fragmentos foram preservados por comentadores posteriores. Entre as proposições no tratado de Zenodoro havia uma afirmando que de todas as figuras sólidas de igual superfície a esfera tem o volume máximo, mas só é dada uma justificação incompleta[12].

Os Livros VI e VIII da *Coleção* tratam principalmente de aplicações da matemática à astronomia, à óptica e à mecânica (inclusive uma tentativa infrutífera de achar a lei do plano inclinado). De muito maior significado na história da matemática é o Livro VII, em que, graças à sua propensão para generalizar, Papus chega perto do princípio fundamental da geometria analítica. Os únicos métodos reconhecidos pelos antigos para definir curvas planas eram (1) definições cinemáticas em que o ponto se move sujeito a dois movimentos superpostos e (2) secção por um plano de uma superfície geométrica, tal como um cone ou esfera ou cilindro. Entre essas últimas curvas estavam certas quárticas chamadas secções espíricas, descritas por Perseu (cerca de 150 A. C.), obtidas cortando-se um anel de âncora, ou toro, por um plano. Ocasionalmente uma curva reversa chamava a atenção dos gregos, por exemplo a hélice cilíndrica e uma curva análoga à espiral de Arquimedes descrita sobre uma superfície esférica, ambas conhecidas por Papus; mas a geometria grega se restringia principalmente ao estudo de curvas planas, na verdade, a um número muito limitado de curvas planas. É interessante notar, portanto, que no Livro VII da *Coleção* Papus propôs um problema generalizado que levava a uma infinidade de novos tipos de curvas. Esse problema, mesmo em sua forma mais simples, é conhecido usualmente como "problema de Papus", mas o enunciado original, envolvendo três ou quatro retas, parece vir dos dias de Euclides. Em sua primeira forma o problema é chamado "o lugar a três ou quatro retas", descrito acima em conexão com a obra de Apolônio. Euclides evidentemente tinha determinado o lugar para certos casos especiais, mas parece que Apolônio, numa obra agora perdida, tinha dado uma solução completa. No entanto Papus dá a impressão de que os geômetras tinham fracassado nas tentativas de chegar a uma solução geral e de que ele teria sido o primeiro a provar que o lugar é sempre uma secção cônica.

Mas, o que é mais importante, Papus então foi adiante, considerando o problema análogo para mais de quatro retas. Para seis retas num plano ele percebeu que uma curva é determinada pela condição de o produto das distâncias a três das retas estar numa razão fixada para o produto das distâncias às outras três. Nesse caso, uma curva é definida pelo fato de um sólido estar numa razão fixada para outro sólido. Papus hesitou em passar a casos envolvendo mais do que seis retas porque "não há nada contido por mais do que três dimensões". Mas, ele continuou, "homens que viveram um pouco antes de nós se permitiram interpretar tais coisas, que nada significam que seja compreensível, falando do produto do conteúdo de tais e tais retas pelo quadrado disso ou conteúdo daquelas. Tais coisas porém poderiam ser enunciadas e provadas de modo geral usando proporções compostas". Os predecessores não citados por nome evidentemente estavam dispostos a dar um passo muito importante na direção de uma geometria analítica que incluiria

[12]Veja Heath: *History of Greek Mathematics* (1921), II, 207 e seguintes. Uma exposição fascinante de tais questões encontra-se em D'Arcy Wentworth Thompson: *On Growth and Form*, 2.ª edição (Cambridge University Press, 1942)

curvas de grau superior a três, assim como Diofante tinha usado as expressões quadrado-quadrado e cubo-cubo para potências superiores de números. Se Papus tivesse seguido a sugestão até mais longe, poderia ter-se antecipado a Descartes com uma classificação geral e teoria das curvas indo muito além da distinção clássica entre lugares planos, sólidos e lineares. Que ele tenha percebido que, para qualquer número de retas no problema de Papus, uma curva especifica fica determinada, constitui a observação mais geral sobre lugares em toda a geometria antiga, e as sincopações algébricas que Diofante desenvolveria teriam sido suficientes para revelar algumas das propriedades das curvas. Mas Papus, no fundo, era unicamente um geômetra, como Diofante tinha sido unicamente um algebrista; por isso Papus apenas comentou com surpresa que ninguém tinha feito uma síntese desse problema para algum caso que envolvesse mais do que quatro retas. O próprio Papus não fez um estudo mais profundo desses lugares, "dos quais nada mais se sabe e que são simplesmente chamados curvas"[13]. Para o passo seguinte, nessa questão, era necessário que aparecesse um matemático que se ocupasse ao mesmo tempo com álgebra e geometria; é significativo que quando tal figura apareceu na pessoa de Descartes, foi esse mesmo problema de Papus que serviu como ponto de partida para a invenção da geometria analítica.

11 Há outros tópicos importantes no Livro VII da *Coleção*, além do problema de Papus. Assim, há uma descrição completa do que se chamava o método de análise e de uma coleção de obras conhecida como *Tesouro da análise*. Papus descreve a análise como sendo "um método de tomar como aceito o que se busca e daí passar por suas conseqüências até alguma coisa que seja aceita como resultado de síntese". Isto é, ele via na análise uma "solução ao contrário", cujos passos devem ser percorridos de novo em sentido inverso para fornecer uma demonstração válida. Se a análise leva a alguma coisa impossível, o problema também será impossível, pois uma conclusão falsa implica uma premissa falsa. Papus explica que o método de análise e síntese é usado pelos autores cujas obras constituem o *Tesouro da análise*: "É isto um corpo de doutrina fornecido para o uso daqueles que, depois de estudados os elementos usuais, querem se tornar capazes de resolver problemas, envolvendo curvas, que lhes sejam propostos"; e Papus menciona entre as obras do *Tesouro da análise* os tratados sobre cônicas de Aristeu, Euclides e Apolônio. É pela descrição de Papus que ficamos sabendo que *As cônicas* de Apolônio continha 487 teoremas. Como os sete livros preservados compreendem 382 proposições, concluímos que o oitavo livro continha 105. Cerca de metade das obras mencionadas por Papus como parte do *Tesouro da análise* está perdida, inclusive *Dividir numa razão* de Apolônio, *Sobre médias* de Eratóstenes e *Porismas* de Euclides. Sugeriu-se que um porisma era um equivalente antigo de uma equação para uma curva ou lugar, o que indica que Euclides e Papus podem não ter estado tão longe do que chamamos "geometria analítica", quanto se supõe em geral.

12 O Livro VII da *Coleção* contém o primeiro enunciado conhecido da propriedade foco-diretriz das três secções cônicas. Parece que Apolônio conhecia as propriedades focais para as cônicas centrais, mas é possível que a propriedade foco-diretriz para a parábola não fosse conhecida antes de Papus. Outro teorema no Livro VII que aparece pela primeira vez é um que em geral tem o nome de Paul Guldin, matemático do século dezessete: Se uma curva plana fechada gira em torno de uma reta que não a corta, o volume do sólido gerado é obtido tomando o produto da área limitada pela distância percorrida durante a revolução pelo centro de gravidade da área. Papus justificadamente se orgulhava desse teorema muito geral, pois inclui "um grande número de teoremas de todos os tipos sobre curvas, superfícies e sólidos, todos provados simultaneamente com uma demonstração". É de fato o teorema mais geral envolvendo o cálculo que se encontra na antiguidade. Papus deu também o teorema análogo que diz que a área da superfície gerada pela revolução de uma curva em torno de uma reta que não a corta é igual ao produto do comprimento da curva pela distância percorrida pelo centróide da curva durante a revolução[14].

A *Coleção* de Papus é o último tratado matemático antigo realmente significativo, pois a tentativa do autor de ressuscitar a geometria não teve sucesso. Obras matemáticas continuaram a ser escritas em grego por mais mil anos, continuando uma influência com início quase um milênio antes, mas os autores que vieram depois de Papus nunca mais chegaram ao seu nível. Suas obras têm quase exclusivamente a forma de comentários sobre tratados anteriores. O próprio Papus é em parte responsável pelos comentários que surgiram em seguida de todos os lados, pois ele escreveu comentários sobre *Os elementos* de Euclides e o *Almajesto* de Ptolomeu, entre outros, dos quais só restam fragmentos. Comentários posteriores, como os de Teon de Alexandria (viveu em 365) são mais úteis para informação histórica do que por resultados matemáticos. Teon também é responsável por uma importante edição de *Os elementos* que se preservou; é lembrado também como o pai de Hipatia, uma jovem culta que escreveu comentários sobre Diofante, Ptolomeu e Apolônio. Devota ardente da cultura pagã, Hipatia atraiu a inimizade de uma fanática multidão cristã em cujas mãos sofreu uma morte cruel em 415. O impacto dramático de sua morte em Alexandria fez com que esse ano fosse tomado por alguns como marco do fim da matemática antiga, mas um fecho mais adequado se acha um século depois.

13 Em Proclus (410-485) Alexandria produziu um jovem estudioso de matemática que foi para Atenas onde se tornou chefe da escola neoplatônica. Proclus era mais filósofo que matemático, mas suas observações são freqüentemente cruciais para a história da geometria grega mais antiga. De grande importância é seu *Comentário sobre o Livro I de Os elementos de Euclides*, pois, enquanto o escrevia, Proclus certamente tinha à mão um exemplar da *História da geometria* de Eudemus, agora perdida, assim como os *Comentários sobre Os elementos* de Papus, em grande parte perdido. Devemos muito da informação de que dispomos sobre a história da geometria antes de Euclides a Proclus, que incluiu em seu *Comentário* um sumário ou extrato substancial da *História* de Eudemus. Essa passagem, que se tornou conhecida como *Sumário eudemiano*, pode ser considerada a principal contribuição de Proclus à matemática, embora lhe seja atribuído o teorema que diz que se um segmento de reta de comprimento fixo se move com as extremidades sobre duas retas que se cortam, um ponto do segmento descreverá uma parte de uma elipse.

14 Durante os anos que Proclus passou em Atenas, o Império Romano no Ocidente estava desmoronando gradualmente. O fim do império é geralmente situado em 476, pois nesse ano o então imperador foi destituído por Odoacre, um Godo. Restava algo do antigo senado romano, mas o partido senatorial tinha perdido o controle político. Nessa situação Boécio (cerca de 480-524) achou sua posição difícil, pois provinha de antiga e importante família patrícia. Ele não era apenas um filósofo e matemático, mas também um homem de estado, e provavelmente encarou com desgosto o emergente poder ostrogodo. Embora possa ter sido o principal matemático produzido pela Roma antiga, o nível de sua obra está muito abaixo do nível característico dos autores gregos. Escreveu livros de texto para cada um dos quatro ramos matemáticos das artes liberais, mas esses livros eram abreviações insignificantes e extremamente elementares de clássicos mais antigos — uma *Arithmetica* que era apenas uma forma abreviada da *Introductio* de Nicômaco; uma *Geometria* baseada em Euclides e contendo apenas enunciados, sem prova, de algumas das partes mais simples dos quatro primeiros livros de *Os elementos*; uma *Astronomia* derivada do *Almajesto* de Ptolomeu; e uma *Música* em dívida com obras de Euclides, Nicômaco e Ptolomeu. Em alguns casos esses livros elementares, muito usados em escolas monásticas medievais, podem ter sofrido interpolações posteriores, por isso é difícil determinar precisamente o que se deve de fato ao próprio Boécio. No entanto é claro que o autor se preocupava principalmente com dois aspectos da matemática: sua relação

[13]Não há tradução para o inglês da *Coleção* de Papus, mas amplas exposições sobre ela se encontram em Heath, *History of Greek Mathematics*, e em I. Thomas, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Há uma útil tradução para o francês da *Coleção*, feita por Paul Ver Eeke, (Paris: Desclée de Brouwer, 1933, 2 volumes)

[14]Há uma possibilidade de que o "teorema de Guldin" represente uma interpolação no manuscrito da *Coleção*. (Veja a tradução de Ver Eecke citada na nota de rodapé 12.) De qualquer forma, o teorema representa um notável progresso por alguém durante ou em seguida ao longo período de declínio

com a filosofia e sua aplicabilidade a problemas simples de mensuração. Da matemática como estrutura lógica há poucos traços.

Boécio parece ter sido um homem de estado de elevadas motivações e indiscutível integridade; ele e seus filhos serviram como cônsules. Boécio foi um dos principais conselheiros de Teodorico, mas por alguma razão política ou religiosa, o filósofo caiu no desagrado do imperador. Insinuou-se que Boécio era cristão (como talvez também Papus) e ter ele adotado idéias trinitárias que desagradavam ao imperador ariano. É possível também que Boécio estivesse associado muito de perto com elementos políticos, que buscavam no Império do Oriente ajuda para restaurar a antiga ordem romana no Ocidente[15]. De qualquer forma, Boécio foi executado em 524 ou 525, após longo encarceramento. (Incidentalmente, Teodorico morreu cerca de um ano depois, em 526.) Foi na prisão que ele escreveu sua obra mais célebre, *De consolatione philosophiae*. Esse ensaio, escrito em prosa e verso enquanto esperava a morte, discute a responsabilidade moral à luz da filosofia aristotélica e platônica.

15 A morte de Boécio pode ser considerada como marco do fim da matemática antiga no Império Romano do Ocidente, como a morte de Hipatia tinha marcado o fim de Alexandria como centro matemático; mas em Atenas ainda se trabalhou por mais algum tempo. Não surgiu nenhum grande matemático original aí, mas o comentador peripatético Simplicius (viveu em 520) se preocupava suficientemente com a gemetria grega para preservar para nós o que pode ser o mais antigo fragmento existente. Aristóteles na *Physica* tinha mencionado a quadratura do círculo ou de um segmento e Simplicius aproveitou esta oportunidade para citar "palavra por palavra" o que Eudemus escrevera sobre a quadratura de lunas por Hipócrates. A exposição, contendo várias páginas, dá detalhes completos sobre a quadratura de lunas, citados por Simplicius de Eudemus, que por sua vez se presume ter dado, ao menos, parte das provas nas próprias palavras de Hipócrates, especialmente onde eram usadas certas formas de expressão arcaicas. Essa fonte é onde chegamos a contato mais direto com a matemática grega antes dos dias de Platão.

16 Simplicius era primariamente um filósofo, mas em seus dias circulava uma obra usualmente descrita como a *Antologia grega*, cujas partes matemáticas lembram fortemente os problemas no Papiro Ahmes de mais de dois milênios antes. A *Antologia* continha cerca de seis mil epigramas; desses, mais de quarenta são problemas matemáticos, presumivelmente reunidos por Metrodorus, um gramático talvez do século quinto ou sexto. A maior parte deles, inclusive o epigrama acima sobre a idade de Diofante, leva a equações lineares simples. Por exemplo, pergunta-se quantas maçãs há numa coleção, se devem ser distribuídas entre seis pessoas de modo que a primeira receba um terço das maçãs, a segunda receba um quarto, a terceira pessoa receba um quinto, a quarta receba um oitavo, a quinta receba dez maçãs, e reste uma maça para a última pessoa. Outro problema é típico de textos de álgebra elementar de nossos dias: Se um cano pode encher uma cisterna em um dia, um segundo em dois dias, um terceiro em três dias e um quarto em quatro dias, quantos dias levam os quatro vertendo juntos para enchê-la? Os problemas não devem ser originais de Metrodorus, mas reunidos de várias fontes. Alguns provavelmente vêm dos dias de Platão, lembrando-nos que nem toda a matemática grega era do tipo que consideramos clássico.

17 Simplicius e Metrodorus não eram os maiores matemáticos de seu tempo, pois havia comentadores contemporâneos com preparo suficiente para permitir-lhes entender as obras de Arquimedes e Apolônio. Entre esses havia Eutocius (nascido por volta de 480) que comentou vários tratados de Arquimedes e *As cônicas* de Apolônio. É a Eutocius que devemos a solução de Arquimedes de uma cúbica por cônicas que se cortam, mencionada em *A esfera e o cilindr* , mas que fora isso só existe no comentário de Eutocius. O comentário de Eutocius sc re *As cônicas* era dedicado a Antemius de Trales (morreu em 534), um matemático co: ipetente e arquiteto de Sta. Sofia de Constantinopla, que

[15]Veja Helen M. Barrett, *Boethius. Some Aspects of His Times and Work* (Cambridge University Press, 1940). Breves extratos de ob as de Boécio estão incluídas em Cohen e Drabkin, *Source Book in Greek Science*, pp. 291-294, 298-299

descreveu a construção da elipse com cordel e escreveu uma obra *Sobre espelhos que queimam*, em que são descritas as propriedades focais da parábola. Seu colega e sucessor na construção de Sta. Sofia, Isidoro de Mileto (viveu em 520) era também matemático capaz. Foi Isidoro quem tornou conhecidos os comentários de Eutocius e promoveu um ressurgimento do interesse pelas obras de Arquimedes e Apolônio. A ele talvez devamos a familiar construção com cordel e régua T da parábola e talvez também o apocrifo Livro XV de *Os elementos* de Euclides. Talvez se deva em grande parte às atividades do grupo de Constantinopla — Eutocius, Isidoro e Antemius — que tenham sido preservadas versões gregas de obras de Arquimedes e dos quatro primeiros livros de *As cônicas* de Apolônio.

Isidoro de Mileto foi um dos últimos dirigentes da Academia Platônica de Atenas. A escola, é claro, sofrera muitas mudanças em sua existência de mais de 900 anos, e durante os dias de Proclus tinha-se tornado um centro de estudos neoplatônicos. Quando em 527 Justiniano se tornou imperador do Oriente, evidentemente julgou que a cultura pagã, da Academia e de outras escolas filosóficas em Atenas, era uma ameaça ao cristianismo ortodoxo; por isso em 529 as escolas filosóficas foram fechadas e os seus membros dispersados. Roma então não era um abrigo hospitaleiro para sábios, e Simplicius e alguns outros filósofos procuraram asilo no Oriente. Encontraram-no na Pérsia, onde sob o rei Chosroes eles estabeleceram o que se poderia chamar a "Academia Ateniense no Exílio"[16]. A data 529, portanto, pode ser considerada o marco do fim do desenvolvimento da matemática na Europa na antiguidade. Daí por diante as sementes da ciência grega se desenvolveriam nos países do Oriente Próximo e do Extremo Oriente até que, cerca de 600 anos depois, o mundo latino estivesse mais receptivo. A data 529 tem outro significado que pode ser considerado sintomático da mudança de valores — nesse ano foi fundado o venerável monastério de Monte Cassino. A matemática, é claro, não desapareceu de vez da Europa em 529, pois, comentários sem importância continuaram a ser escritos em grego no Império Bizantino e versões dos medíocres textos latinos de Boécio continuaram em uso nas escolas do Ocidente. Mas o espírito matemático se apagou, enquanto os homens discutiam menos a geometria e mais o caminho para a salvação. Por isso, para os próximos passos no desenvolvimento matemático devemos voltar as costas à Europa e olhar para o Oriente.

BIBLIOGRAFIA

Clagett, Marshall, *Greek Science in Antiquity* (New York: Abelard Schuman, 1955; edição em brochura, Collier Books. 1963)

Cohen. M. R. e I. E. Drabkin. *Source Book in Greek Science* (New York: McGraw-Hill. 1948: reimpresso, Cambridge. Mass.: Harvard University Press, 1958)

Chasles, Michel, *Les trois livres de porismes d'Euclide, rétablis . . . d'après la notice . . . de Pappus* (Paris: Mallet-Bachelier, 1860)

Heath, T. L., *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra*, 2.ª edição (New York: Cambridge University Press, 1910; edição em brochura, New York: Dover, 1964)

Heath, T. L., *History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon, 1921, 2 volumes)

Nesselmann, G. H. F., *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842)

Nicomachus of Gerasa, *Introduction to Arithmetic*, traduzido por M. L. D'Ooge, com estudos sobre aritmética grega por F. E. Robbins e L. C. Karpinski (New York: Macmillan, 1926)

Pappus of Alexandria, *Collectionis quae supersunt*, editado por F. Hultsch (Berlin, 1876-1878, 3 volumes)

Pappus of Alexandria, *La collection mathématique*, traduzido por Paul Ver Eecke (Paris, 1933, 2 volumes)

Proclus Diadochus, *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, traduzido por Paul Ver Eecke (Bruges: Desclee de Brouwer, 1948)

Sánchez Pérez, José Augusto, *La aritmética en Grecia* (Madrid: Instituto Jorge Juan, 1947)

Sánchez Pérez, José Augusto, *La aritmética em Roma, en India y en Arabia* (Madrid: Instituto Miguel Asin, 1949)

Stahl, W. H., *Roman Science* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1962)

Swift, J. D., "Diophantus of Alexandria", *American Mathematical Monthly*, **43** (1956), 163-170

[16]Veja George Sarton, *The History of Science* (Cambridge, Mass. Harvard University Press, 1952-1959, 2 volumes), I, 400

Thomas, Ivor, ed., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics* (Cambridge, Mass.: Loeb Classical Library, 1939-1941, 2 volumes)
Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*, traduzido por Arnold Dresden (New York: Oxford, 1961: edição em brochura, New York: Wiley, 1963)
Ziegler, Konrat, "Pappos", in Pauly-Wissowa, *Real-Enzyclopädie der klassischen Wissenschaft* (Stuttgart, 1949), Vol. XVIII, Parte 3, colunas 1084-1106

EXERCÍCIOS

1. Você acha que as condições em Alexandria eram mais ou menos favoráveis ao desenvolvimento matemático nos dias de Papus que nos de Ptolomeu? Explique.
2. Como se comparavam as condições intelectuais em Alexandria com as de Roma nos dias de Diofante e Papus?
3. O desenvolvimento matemático teria sido essencialmente modificado se Roma não tivesse caído em 476? Dê razões para sua resposta.
4. Se você fosse um matemático vivendo em 500, escolheria Alexandria, Roma, Atenas ou Constantinopla para viver? Dê razões para sua resposta.
5. Mostre que o epigrama relativo à idade de Diofante leva à conclusão que ele morreu com oitenta e quatro anos.
6. Verifique que os quatro números, dados por Nicômaco como perfeitos, são, de fato, números perfeitos.
7. Resolva o problema de Diofante em que se pede achar dois números cuja soma seja 10 e a soma de seus cubos seja 370.
8. Ache duas frações racionais, além de 3/13 e 9/13, que satisfaçam a condição de Diofante de que cada uma quando somada ao quadrado da outra irá produzir um quadrado perfeito.
9. Prove que as retas *OC*, *BD* e *DF* na Fig. 11.3 são de fato respectivamente as médias aritmética, geométrica e harmônica, de *AB* e *BC*, como afirmou Papus.
10. Prove a generalização de Papus do teorema de Pitágoras ilustrada na Fig. 11.4.
11. Desenhe cuidadosamente um diagrama semelhante à Fig. 11.5 em que *AB* tenha 9 cm e *BC* 6 cm e ache aproximadamente, por medidas, o diâmetro do círculo C_3 e a distância de seu centro à reta *AC*, verificando assim por aproximação a asserção de Papus.
12. Resolva o problema da distribuição de maçãs descrito no texto.
13. Resolva o problema dos três canos descritos no texto.
14. Mostre analiticamente que o problema de Papus para seis retas leva a um lugar cuja equação é de grau superior a três.

*15. Prove a primeira trissecção de Papus dada no texto.
*16. Prove que *OT* é paralela a *AP* na Fig. 11.2.
*17. Use o resultado do Exc. 16 para completar a prova da segunda trissecção de Papus dada no texto.
*18. Justifique o teorema de Papus sobre sólidos de revolução.
*19. Prove o teorema de Proclus sobre a geração de uma elipse no caso em que as retas são perpendiculares entre si.

Capítulo **12**

China e Índia

Uma mistura de conchas de pérolas e frutas amargas . . . ou de valioso cristal e pedregulho.

Índia, de *Al-Biruni*

1 As civilizações da China e da Índia são muito mais antigas que as da Grécia e Roma, porém não mais que as dos vales do Nilo e Mesopotâmia. Remontam à Idade Potâmica, enquanto que as culturas da Grécia e de Roma eram da Idade Talássica. As civilizações das margens dos rios Iang-tse e Amarelo são de época comparável à do Nilo ou de entre os rios Tigre e Eufrates; mas testemunhos de cronologia referentes à China são menos merecedores de fé do que os relativos ao Egito e Babilônia. Afirmações quanto a terem os chineses feito observações astronômicas importantes, ou descrito os doze signos do zodíaco, pelo décimo quinto milênio A. C. são certamente infundadas, mas uma tradição que coloca o primeiro império chinês em 2 750 A. C. aproximadamente não é absurda. Outras avaliações mais modestas colocam as civilizações primitivas da China por volta do ano 1 000 A. C. Datar os documentos matemáticos da China não é nada fácil, e estimativas quanto ao *Chou Pei Suang Ching*, geralmente considerado o mais antigo dos clássicos matemáticos, diferem por quase mil anos. O problema de sua data é dificultado pelo fato de poder ser obra de vários homens em períodos diferentes. Alguns consideram o *Chou Pei* como uma boa exposição da matemática chinesa de cerca de 1 200 A. C., mas outros colocam a obra no primeiro século de nossa era. Uma data de 300 A. C. parece razoável, o que colocaria a obra em competição com outro tratado, o *Chiu Chang Suan-Shu*, composto por volta de 250 A. C.[1], isto é, pouco antes da dinastia Huan (202 A. C.). As palavras *chou pei* parecem referir-se ao uso do gnomon no estudo das trajetórias circulares no céu, e o livro com esse título trata de cálculos astronômicos, embora contenha uma introdução relativa às propriedades do triângulo retângulo e alguma coisa sobre o uso de frações. A obra tem a forma de um diálogo entre um príncipe e seu ministro sobre o calendário; o ministro diz ao governante que a arte dos números deriva do círculo e do quadrado, o quadrado pertencendo à terra e o círculo aos céus. O *Chou Pei* indica que na China, como Heródoto dizia do Egito, a geometria derivou da mensuração; e, como na Babilônia, a geometria chinesa era essencialmente um exercício de aritmética ou álgebra. Há, aparentemente, indicações no *Chou Pei* do teorema de Pitágoras, um teorema que os chineses tratavam algebricamente.

2 Quase tão, antigo quanto o *Chou Pei*, e talvez o mais influente livro de matemática chinês,[2] foi o *Chui-Chang Suan-Shu* ou *Nove capítulos sobre a arte matemática*. Esse livro contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações, e propriedades dos triângulos retângulos. Ao passo que os gregos da mesma época estavam compondo tratados logicamente ordenados e sistematicamente expositórios, os chineses repetiam o velho hábito dos babilônios e egípcios de compilar coleções de problemas específicos. *Nove capítulos*

[1] As histórias da matemática em geral dedicam pouco espaço às contribuições chinesas. Uma exceção nisso é D. E. Smith, *History of Mathematics* (1923-1925), e também J. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, 2.ª ed. (Berlim, 1963), Vol. I. Uma exposição excepcionalmente completa e atual sobre os Próximo e Extremo Orientes é dada em A. P. Juschkewitsch, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (1964)

[2] Ver Joseph Needham, *Science and Civilization in China* (1959) Vol. II, pp. 24-25. Para obras de matemática recentes ver Tung-Li Yuan, *Bibliography of Chinese Mathematics* 1918-1960 (Washington, D. C., publicado pelo autor, 1963)

também se assemelha à matemática egípcia pelo uso da "falsa posição", mas a invenção desse processo, assim como a origem da matemática chinesa em geral, parece ter sido independente de influência ocidental.

Nas obras chinesas, como nas egípcias, chama a atenção a justaposição de resultados precisos e imprecisos, primitivos e elaborados. São usadas regras corretas para as áreas de triângulos, retângulos e trapézios. A área do círculo era calculada tomando três quartos do quadrado sobre o diâmetro ou um dozeavos do quadrado da circunferência — resultado correto se se adota o valor três para π — mas para a área do segmento o *Nove capítulos* usa o resultado aproximado $s(s + c)/2$, onde s é a seta (isto é, o raio menos o apótema) e c a corda ou base do segmento. Há problemas resolvidos pela regra de três; noutros são encontradas raízes quadradas e cúbicas. O Cap. 8 do *Nove capítulos* é significativo por conter a solução de problemas sobre equações lineares, usando tanto números positivos quanto negativos. O último problema no capítulo envolve quatro equações em cinco incógnitas, e o tópico das equações indeterminadas continuaria a ser um dos preferidos entre povos orientais. O nono e último capítulo contêm problemas sobre triângulos retângulos, alguns dos quais mais tarde reapareceram na Índia e na Europa. Um deles pergunta qual a profundidade de uma lagoa de 10 pés quadrados se um caniço que cresce no centro e se estende 1 pé para fora da água atinge exatamente a superfície, se puxado para a margem da lagoa. Outro desses problemas bem conhecidos é o do bambu quebrado: há um bambu de 10 pés de altura, cuja extremidade superior, ao ser quebrada, atinge o chão a 3 pés da haste. Achar a altura da quebra.[3]

3 Os chineses gostavam especialmente de diagramas; portanto não é surpreendente que o primeiro registro (de origem antiga mas desconhecida) de um quadrado mágico tenha aparecido lá. O quadrado

4	9	2
3	5	7
8	1	6

foi supostamente trazido para os homens por uma tartaruga do Rio Lo nos dias do lendário Imperador Yü, considerado um engenheiro hidráulico.[4] A preocupação com tais diagramas levou o autor dos *Nove capítulos* a resolver o sistema de equações lineares simultâneas

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39, \\ 2x + 3y + z &= 34, \\ x + 2y + 3z &= 26, \end{aligned}$$

efetuando operações sobre colunas na matriz

$$\begin{array}{|ccc|} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array} \quad \text{para reduzi-la a} \quad \begin{array}{|ccc|} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

A segunda forma representava as equações $36z = 99$, $5y + z = 24$ e $3x + 2y + z = 39$, das quais facilmente são calculados sucessivamente os valores de z, y e x.

4 Se a matemática chinesa tivesse tido ininterrupta continuidade de tradição, algumas das notáveis antecipações dos métodos modernos poderiam ter modificado substancialmente o desenvolvimento da matemática, mas a cultura chinesa foi seriamente prejudicada por quebras abruptas. Em 213 A. C., por exemplo, o imperador da China mandou queimar livros. Algumas obras evidentemente escaparam, seja pela persistência de cópias

[3]Ver Yoshio Mikami, *The Development of Mathematics in China and Japan* (1913), p. 23.

[4]Ver D. J. Struik, "On Ancient Chinese Mathematics", *The Mathematics Teacher*, 56 (1963), 424-432.

seja por transmissão oral; e o aprendizado de fato continuou com ênfase, quanto à matemática, em problemas de comércio e calendário.

Parece ter havido algum contato entre a Índia e a China, bem como entre a China e o Ocidente, mas os entendidos não estão de acordo quanto à extensão e sentido dos empréstimos. A tentação de ver influência babilônica ou grega na China por exemplo, se depara com o problema de não terem os chineses usado frações sexagesimais. A numeração chinesa permaneceu essencialmente decimal, com notações marcadamente diferentes das de outros países. Na China, desde os tempos primitivos, dois sistemas de notação estiveram em uso. Num predominava o princípio multiplicativo, no outro era usada uma forma de notação posicional. No primeiro havia símbolos diferentes para os dígitos de um a dez e símbolos adicionais para as potências de dez, e nas formas escritas os dígitos em posições ímpares (da esquerda para a direita ou de baixo para cima) eram multiplicados pelo seu sucessor. Assim o número 678 seria escrito como um seis seguido do símbolo para cem, depois um sete seguido do símbolo para dez, e finalmente o símbolo para oito.

No sistema de "numerais em barras" os dígitos de um a nove apareciam como 𝍠 𝍡 𝍢 𝍣 𝍤 𝍥 𝍦 𝍧 𝍨 e os nove primeiros múltiplos de dez como 𝍩 𝍪 𝍫 𝍬 𝍭 𝍮 𝍯 𝍰 𝍱. Usando esses dezoito símbolos alternadamente em posições contadas da direita para a esquerda, podiam ser escritos números tão grandes quanto se desejasse. Por exemplo, representaria-se 56 789 por 𝍤𝍮𝍦𝍰𝍨. Como na Babilônia, só relativamente tarde é que apareceu um símbolo para uma posição vazia. Numa obra de 1247 o número 1 405 536 é escrito, com um símbolo redondo para o zero, como 𝍠𝍬O𝍭𝍤𝍫𝍥. (Ocasionalmente, como na forma do triângulo aritmético do século quatorze, eram permutadas as barras verticais e horizontais.)

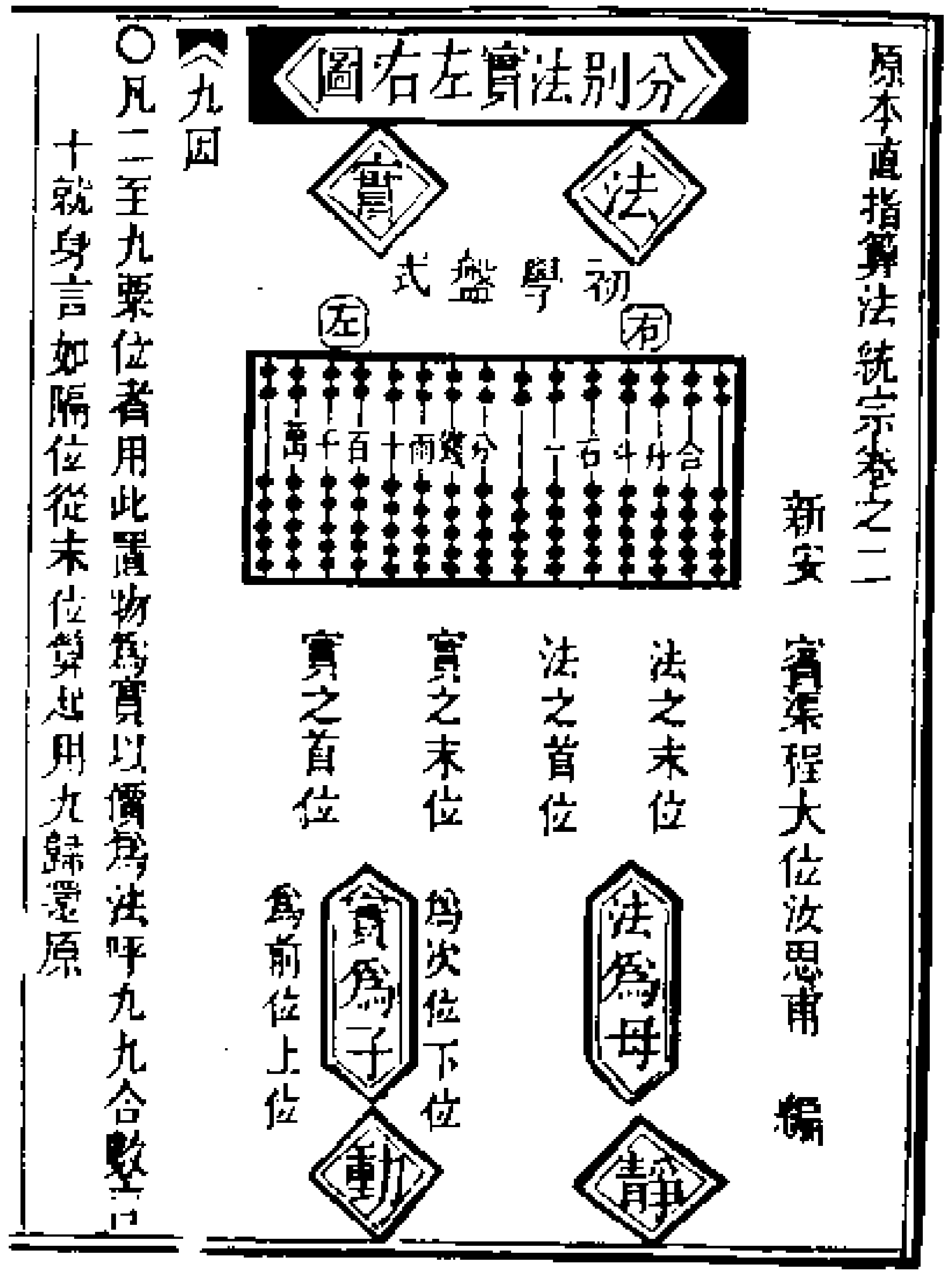
A idade precisa dos numerais em barras originais não pode ser determinada, mas certamente estavam em uso vários séculos antes de nossa era, isto é, muito antes de ser adotada na Índia a notação posicional. O uso de um sistema posicional centesimal em vez de decimal na China era conveniente para a adaptação aos cálculos na placa de calcular. Notações diferentes para potências de dez vizinhas permitiam aos chineses usar, sem confusão, um ábaco com colunas verticais não marcadas. Antes do século oito o lugar em que um zero deveria aparecer era simplesmente deixado vazio. Embora em textos anteriores a 300 D. C. os números e tabelas de multiplicação fossem escritos em palavras, os cálculos na verdade eram feitos com numerais em barras numa placa de calcular.

5 Os numerais em barras de 300 A. C. não eram apenas uma notação para escrever o resultado de um cálculo. Barras verdadeiras, de bambu, marfim ou ferro, eram carregadas numa sacola pelos administradores e usadas para cálculos. As barras eram manipuladas com tal destreza que um escritor do século onze descreveu-as como "voando tão depressa que o olhar não podia acompanhar seu movimento". Provavelmente era mais rápido efetuar cancelamentos com barras sobre uma tábua de contar do que em cálculos escritos. Na verdade, o uso das barras sobre uma tábua era tão eficiente que o ábaco ou moldura rígida com fichas móveis sobre arames não foi usado tão cedo quanto se tem suposto em geral. As primeiras descrições claras das formas modernas, conhecidas na China como *suan phan* e no Japão como o *soroban*, são do século dezesseis; mas formas precursoras parecem ter sido usadas talvez mil anos antes. A palavra *abacus* provavelmente deriva da palavra semítica *abq* ou pó, indicando que em outras regiões, como na China, o instrumento proveio de uma bandeja de areia usada como tábua de contar. É possível, mas nada certo, que o uso da tábua de contar na China preceda o europeu, mas não se dispõe de datas definidas e dignas de fé. No Museu Nacional em Atenas há uma placa de mármore, datando provavelmente do quarto século A. C. que parece ser uma placa de contar; e quando um século antes Heródoto escreveu "Os egípcios movem a mão da direita para a esquerda para calcular, enquanto que os gregos a movem da esquerda para a direita", provavelmente ele se referia ao uso de algum tipo de placa de calcular. Quando exatamente tais instrumentos cederam lugar ao ábaco propriamente

dito é difícil determinar; nem podemos saber se os aparecimentos do ábaco na China, Arábia e Europa foram ou não acontecimentos independentes. O ábaco árabe tinha dez bolas em cada arame, sem barra central, enquanto que o chinês tinha cinco fichas superiores e cinco inferiores em cada arame, separadas por uma barra. Cada ficha superior num ábaco chinês equivale a cinco inferiores; um número é marcado fazendo deslisar as fichas adequadas até encostar na barra. (Ver a ilustração de um ábaco adiante.)

Nenhuma descrição da numeração chinesa seria completa sem uma referência ao uso de frações. Os chineses conheciam as operações sobre frações comuns, para as quais achavam o mínimo denominador comum. Como em outros contextos, viam ana-

Placa de calcular de mármore, provavelmente do século quatro A. C., encontrada na ilha de Salamis e agora no Museu Nacional de Atenas



Uma representação primitiva do abaco, do *Suan Fa Thung Tsung*, 1593. (Reproduzido de Joseph Needham, *Science and Civilization in China*, III, 76)

logias com as diferenças entre os sexos, referindo-se ao numerador como "filho" e ao denominador como "mãe". A ênfase sobre *yin* e *yang* (opostos, especialmente em sexo) tornava mais fácil seguir as regras para manipular frações. Mais importante do que essas, no entanto, era a tendência à decimalização de frações na China. Como na Mesopotâmia uma metrologia sexagesimal levou à numeração sexagesimal, também na China a adesão à idéia decimal em pesos e medidas teve como resultado um hábito decimal no tratamento de frações que, ao que se diz, pode ser encontrado já no século quatorze A. C.[5] Artifícios decimais na computação eram às vezes adotados para facilitar a manipulação de frações. Num comentário do primeiro século aos *Nove capítulos*, por exemplo, vemos o uso das regras agora familiares para raízes quadradas e cúbicas, equivalentes a $\sqrt{a} = \sqrt{100a}/10$ e $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{1\,000a}/10$, que facilitam a decimalização das extrações de raiz.

A idéia de números negativos parece não ter causado muitas dificuldades aos chineses pois estavam acostumados a calcular com duas coleções de barras — uma vermelha para os coeficientes positivos ou números e uma preta para os negativos. No entanto, não aceitavam a idéia de um número negativo poder ser solução de uma equação.

6 A matemática chinesa primitiva é tão diferente da de períodos comparáveis em outras partes do mundo que a hipótese de desenvolvimento independente parece justificada. De qualquer forma, parece seguro dizer que se houve alguma intercomunicação antes de 400, então mais matemática saiu da China do que entrou. Para épocas posteriores a questão torna-se mais difícil. O uso do valor três para π na matemática chinesa antiga não chega a ser um argumento para afirmar dependência com relação à Mesopotâmia, especialmente porque a busca de valores mais precisos, desde os primeiros

[5]Ver Needham, obra citada, III, 89

séculos da era cristã, era mais persistente na China que nos demais lugares. Valores como 3,1547, $\sqrt{10}$, 92/29, e 142/45 são encontrados; e no terceiro século Liu Hui, um importante comentador do *Nove capítulos*, obteve 3,14 usando um polígono regular de 96 lados e a aproximação 3,14159 considerando um polígono de 3 072 lados. Na reelaboração do *Nove capítulos*, por Liu Hui, há muitos problemas de mensuração, inclusive a determinação correta do volume de um tronco de pirâmide quadrada. Para um tronco de cone circular uma fórmula semelhante era aplicada, mas com valor três para π. Pouco comum é a regra que diz que o volume de um tetraedro com duas arestas opostas perpendiculares entre si é um sexto do produto dessas duas arestas e de sua perpendicular comum. O método da falsa posição é usado para resolver equações lineares, mas há também resultados mais sofisticados, tais como a solução, por um método matricial, de um problema diofantino envolvendo quatro equações em cinco incógnitas. A resolução aproximada de equações de grau superior parece ter sido efetuada por um processo semelhante ao que chamamos "método de Horner". Liu Hui também inclui, em sua obra sobre *Nove capítulos*, numerosos problemas envolvendo torres inacessíveis e árvores em encostas de colinas.[6]

A fascinação dos chineses com o valor de π atingiu o ápice na obra de Tsu Ch'ung-chih (430-501). Um de seus valores era o familiar valor arquimediano 22/7, descrito por Tsu Ch'ung como "inexato", seu valor "preciso" era 355/113. Se se persistir em procurar possíveis influências ocidentais, pode-se explicar essa aproximação notavelmente boa, sem igual em qualquer outro lugar até o século quinze, subtraindo o numerador e o denominador, respectivamente, do valor de Arquimedes do numerador e denominador do valor ptolomaico 377/120. No entanto, Tsu Ch'ung-chih foi ainda mais longe em seus cálculos, pois deu 3,1415927 como valor "em excesso" e 3,1415926 como "em falta"[7]. Os cálculos pelos quais ele chegou a essas limitações, aparentemente ajudado por seu filho Tsu Cheng-chih, provavelmente estavam contidos em algum de seus livros, agora perdido. De qualquer modo, seus resultados eram notáveis para a época, e é justo que hoje um ponto assinalado na superfície da lua tenha seu nome.

Devemos ter em mente que a precisão no valor de π é mais uma questão de resistência computacional do que de visão teórica. O teorema de Pitágoras por si só basta para dar uma aproximação tão boa quanto se queira. Partindo do perímetro conhecido de um polígono regular de n lados inscrito num círculo, o perímetro do polígono regular inscrito de $2n$ lados pode ser calculado com duas aplicações do teorema de Pitágoras. Seja C um círculo de centro O e raio r (Fig. 12.1) e seja $PQ = s$ um lado do polígono regular inscrito de n lados, de perímetro conhecido. Então o apótema $OM = u$ é dado por $u = \sqrt{r^2 - (s/2)^2}$; logo a flecha $MR = v = r - u$ é conhecida. Então o lado $RQ = w$ do polígono regular inscrito de $2n$ lados é dado por $w = v^2 + (s/2)^2$; logo o perímetro desse polígono é conhecido. O cálculo, como Liu Hui observou, pode ser simplificado notando que $w^2 = 2rv$. Uma iteração do processo fornecerá aproximações cada vez melhores do perímetro do círculo, em termos do qual π é definido.

7 Os problemas matemáticos chineses muitas vezes parecem mais pitorescos do que práticos, e no entanto a civilização chinesa foi responsável por um número surpreendente de inovações tecnológicas. O uso da impressão e da pólvora (oitavo século) do papel e da bússola (século onze) surgiu mais cedo na China que nos outros lugares, e antes, também, do ponto mais alto da matemática chinesa, que ocorreu no século treze, durante o fim do período Sung. Havia então matemáticos trabalhando em várias partes da China; mas as relações entre eles parecem ter sido remotas, e como no caso da matemática grega, evidentemente possuímos relativamente poucos dos tratados outrora existentes. O último e maior matemático chinês foi Chu Shih-chieh (viveu de 1280-1303), no entanto pouco sabemos dele — nem mesmo quando nasceu ou morreu. Residia em Yen-shan, perto da moderna Pequim, mas parece ter passado cerca de vinte anos como sábio errante, ganhando sua vida com o ensino da matemática, embora tivesse oportunidade de escrever dois tratados. O primeiro deles, escrito em 1299, foi o *Suan-hsüeh ch'i-meng* (Introdução aos estudos matemáticos), obra relativamente elementar que influenciou fortemente a Coréia e o Japão, embora na China se perdesse até reaparecer no século dezenove[8]. De maior interesse histórico e matemático é o *Ssu-yüan yü-chien* (Precioso espelho dos quatro elementos) de 1303. No século dezoito esse também desapareceu na China, sendo redescoberto somente no século seguinte. Os quatro elementos, chamados, céu, terra, homem, e matéria, são as representações de quatro incógnitas na mesma equação. O livro representa o ápice do desenvolvimento da álgebra chinesa, pois trata de equações simultâneas e de equações de graus até quatorze. Nele o autor descreve um método de transformação que ele chama *fan-fa*, cujos elementos parecem ter surgido muito antes na China, mas que tem geralmente o nome de Horner, que viveu meio milênio depois. Para resolver a equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$, por exemplo, Chu Shihchieh primeiro obteve $x = 19$ como aproximação (uma raiz cai entre $x = 19$ e $x = 20$) depois usou o *fan-fa*, nesse caso a transformação $y = x - 19$, para obter a equação $y^2 + 290y - 143 = 0$ (com uma raiz entre $y = 0$ e $y = 1$). Deu então a raiz dessa como (aproximadamente) $y = 143/(1 + 290)$; daí o valor correspondente de x é $19\,143/291$. Para a equação $x^3 - 574 = 0$ ele usou $y = x - 8$ para obter $y^3 + 24y^2 + 192y - 62 = 0$, e deu a raiz como sendo $x = 8 + 62/(1 + 24 + 192)$ ou $x = 8\,2/7$. Em alguns casos ele usou aproximações decimais.

8 O fato de pelo menos três outros matemáticos do fim do período Sung usarem processos semelhantes revela que o chamado método de Horner era de conhecimento comum na China. Um desses foi Li Chih (ou Li Yeh, 1192-1279), um matemático de Pequim a quem Khublai Khan ofereceu um posto no governo em 1260, mas que achou uma desculpa polida para recusá-lo. Seu *Ts'e-yuan hai-ching* ("Espelho marinho das medidas do círculo") inclui 170 problemas tratando de círculos inscritos em ou excritos fora de um triângulo retângulo, e da determinação das relações entre os lados e os raios, alguns desses problemas levando a equações de quarto grau. Embora não descrevesse seu método de resolução de equações, inclusive de algumas de grau seis, parece que não era muito diferente do usado por Chu Shih-chieh e Horner[9]. Outros que usaram o método de Horner foram Ch'in Chiu-shao (por volta de 1202-1261) e Yang Hui (viveu por volta de 1261-1275). O primeiro foi um governador sem princípios, que adquiriu riquezas imensas num período de cem dias após assumir seu posto. Seu *Shu-shu chiu-chang* (Tratado matemático em nove partes) marca o ápice da análise indeterminada na China, com a invenção de regras de rotina para resolver congruências simultâneas. Nessa obra ele também achou a raiz quadrada de 71 824 por passos semelhantes aos do método de Horner. Com 200 como primeira aproximação de uma raiz de $x^2 - 71\,824 = 0$, ele diminuiu as raízes dessa equação de 200, obtendo $y^2 + 400y - 31\,824 = 0$. Para essa equação ele achou 60 como aproximação, e subtraiu 60 das raízes, chegando a uma terceira equação, $z^2 + 520z - 4\,224 = 0$, de que 8 é raiz. Logo o valor de x é 268. De modo semelhante ele resolveu equações cúbicas e quárticas. O mesmo "método de Horner" foi usado por Yang Hui, sobre cuja vida quase nada se sabe e cuja obra só em

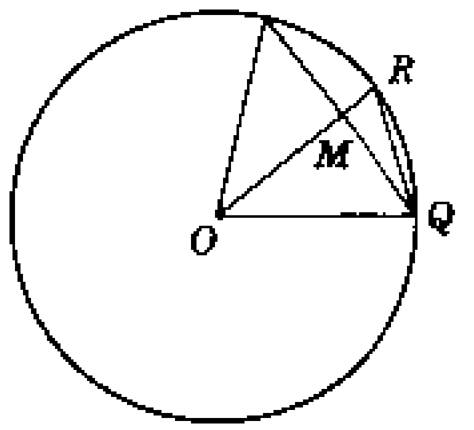


Figura 12.1

[6]Ver o excelente artigo sobre Liu Hui, escrito por Ho Peng-Yoke, a aparecer nos próximos volumes do *Dictionary of Scientific Biography*

[7]Ver o artigo citado na nota de rodapé 6. Parece haver alguma confusão na citação desse valor por Mikami, obra citada p. 50, por Smith, obra citada II, 309 e Hofmann, obra citada I, 76

[8]Ver o extenso artigo a aparecer sobre Chu Shih-chieh por Ho Peng-Yoke, a ser publicado no *Dictionary of Scientific Biography*. Ver também Needham, obra citada, III, 38-53

[9]Ver o artigo sobre Li Chih por Ho Peng-Yoke a aparecer no *Dictionary of Scientific Biography*

parte se preservou. Entre suas contribuições preservadas estão os mais antigos quadrados mágicos chineses de ordem maior que três, inclusive dois de cada ordem de quatro a oito, um de ordem nove e um de ordem dez[10].

9 A obra de Yang Hui inclui também resultados quanto à soma de séries e o chamado triângulo de Pascal, coisas publicadas e melhor conhecidas através do *Espelho precioso* de Chu Shih-chieh, com o qual a idade áurea da matemática chinesa teve fim. Algumas das muitas somas de séries encontradas no *Espelho* são as seguintes:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/3!$$

$$1 + 8 + 30 + 80 + \ldots + n^2(n+1)(n+2)/3! = n(n+1)(n+2)(n+3) \times \times (4n+1)/5!$$

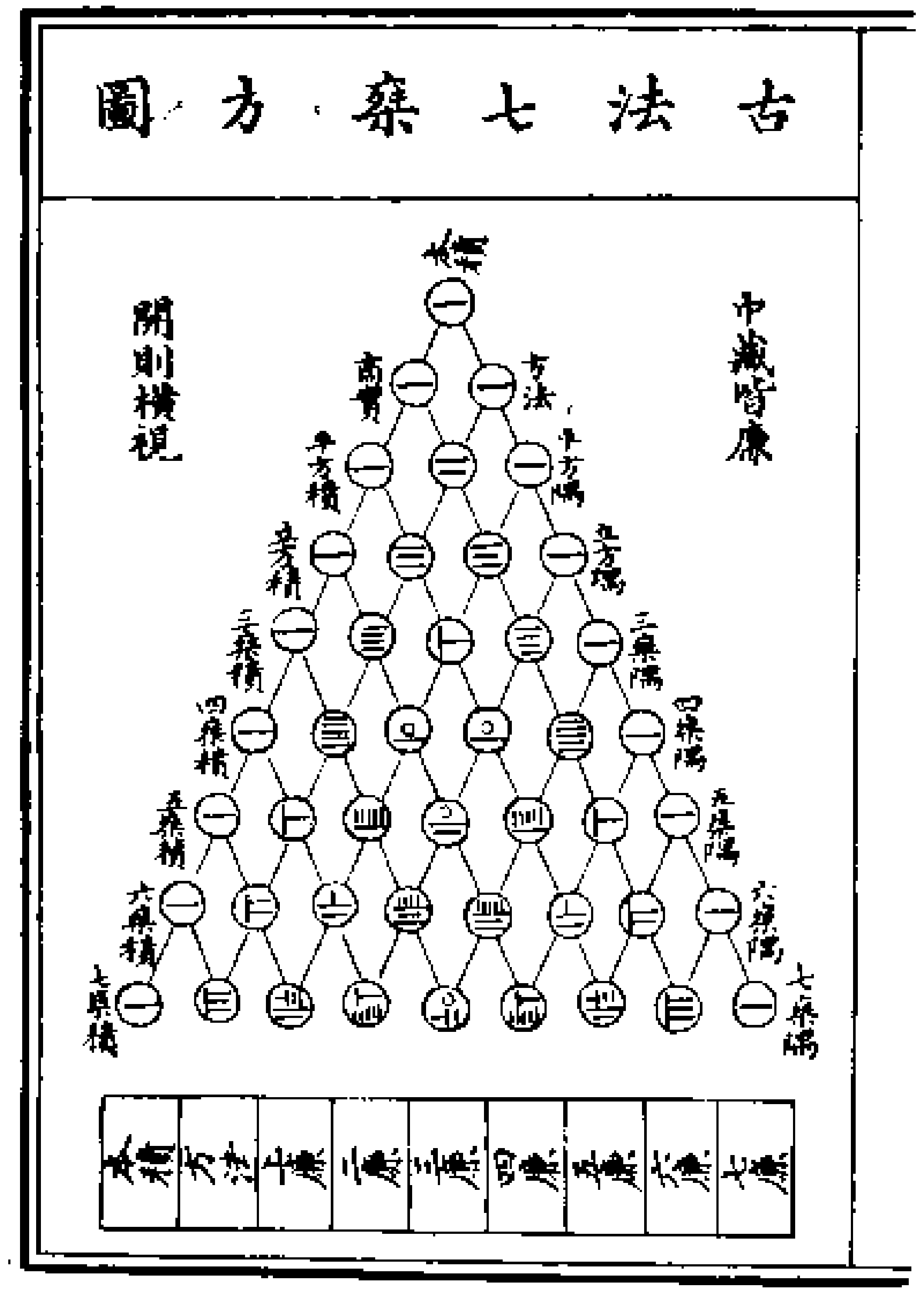
No entanto não são dadas provas, nem o tópico parece ter continuado na China outra vez senão no século dezenove. Chu Shih-chieh parece ter tratado suas somas pelo método de diferenças finitas, elementos do qual parecem remontar na China ao século sete; mas logo depois de sua obra o método desapareceu por muitos séculos.

O *Espelho precioso* começa com um diagrama do triângulo aritmético inapropriamente conhecido no Ocidente como "triângulo de Pascal". No arranjo de Chu temos os coeficientes das expansões binomiais até a oitava potência, claramente dadas em numerais em barra e um símbolo redondo para o zero. Chu não reivindicava crédito pelo triângulo, referindo-se a ele como um "diagrama do velho método para achar potências oitavas e menores". Um arranjo semelhante de coeficientes até a sexta potência tinha aparecido na obra de Yang Hui, mas sem o símbolo redondo para o zero. Nas obras chinesas há cerca de 1 100 referências a sistemas de tabulação para coeficientes binomiais, e é provável que o triângulo aritmético tenha se originado na China, aproximadamente nessa data. É interessante observar que a descoberta chinesa do teorema binomial para potências inteiras estava associada, em sua origem, à extração de raízes e não a potenciações. O equivalente do teorema aparentemente era conhecido por Omar Khayyam mais ou menos na mesma época em que estava sendo usado na China, mas a mais antiga obra árabe existente que o contém é de Al-Kashi no século quinze. Por essa época a matemática chinesa não tinha realizações comparáveis às da Europa e Oriente Próximo, e provavelmente mais matemática entrava na China do que saía. Ainda não está resolvido o problema espinhoso de determinar as influências mútuas da China e da Índia durante o primeiro milênio de nossa era.

10 Escavações arqueológicas em Mohenjo Daro fornecem provas de uma civilização antiga e de alta cultura na Índia durante a era das construções de pirâmides egípcias, mas não temos documentos matemáticos indianos dessa época. Mais tarde o país foi ocupado pelos invasores arianos que introduziram o sistema de castas e desenvolveram a literatura sânscrita. O grande mestre religioso, Buda, agia na Índia mais ou menos quando Pitágoras, ao que se diz, esteve lá, e às vezes se tem sugerido que Pitágoras aprendeu seu teorema com os Hindus. Estudos recentes mostram ser isso altamente improvável dada a familiaridade dos babilônios com o teorema pelo menos mil anos antes.

A queda do Império Romano do Ocidente tradicionalmente é situada no ano 476; foi nesse ano que nasceu Aryabhata, autor de um dos mais antigos textos matemáticos indianos. É claro, entretanto, que tinha havido atividade matemática na Índia muito antes disto — provavelmente antes mesmo da mística fundação de Roma em 753 A. C. A Índia, como o Egito, tinha seus "estiradores de corda", e as primitivas noções geométricas adquiridas em conexão com o traçado de templos e medida e construção de altares tomou a forma de um corpo de conhecimentos conhecido como os *Sulvasūtras* ou "regras de corda". *Sulva* (ou *sulba*) refere-se às cordas usadas para medidas, e *sūtra* significa um livro de regras ou aforismos relativos a um ritual ou ciência. O estirar de cordas é notavelmente reminiscente da origem da geometria egípcia, e sua associação com funções

[10]Artigos excelentes, incluindo muito mais sobre a obra de Ch'in Chiu-shao e Yang Hui, escritos por Ho Peng-Yoke, aparecerão no *Dictionary of Scientific Biography*



O Triângulo "de Pascal" representado em 1303 no frontispício do *Ssu Yuan Yü Chien* de Chu Shih-Chieh. Chama-se "Figura do velho método dos sete quadrados multiplicadores" e tabula os coeficientes binomiais até a oitava potência. (Reproduzido de Joseph Needham, *Science and Civilization in China*, III, 135)

nos templos nos faz lembrar a possível origem ritual da matemática. Mas a dificuldade em datar as regras se liga ainda a dúvidas quanto à influência que tiveram sobre matemáticos hindus posteriores. Mais ainda do que na China há uma notável falta de continuidade na tradição matemática na Índia; contribuições significativas são acontecimentos isolados separados por intervalos sem realizações[11].

11 Existem três versões, todas em verso, da obra chamada os *Sulvasūtras*, a mais conhecida sendo a que tem o nome de Apastamba. Nessa primeira exposição, que data talvez do tempo de Pitágoras, encontramos regras para a construção de ângulos retos por meio de ternas de cordas cujos comprimentos formem tríadas pitagóricas, como 3, 4 e 5, ou 5, 12 e 13, ou 8, 15 e 17, ou 12, 35 e 37. No entanto todas essas tríadas são facilmente obtidas da antiga regra babilônica; portanto não é improvável que houvesse influência mesopotâmica nos *Sulvasūtras*. Apastamba sabia que o quadrado sobre a diagonal de um retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os dois lados adjacentes, mas essa forma do teorema de Pitágoras também pode ter sido obtida da Mesopotâmia. Menos fácil de explicar é outra regra dada por Apastamba — uma que se assemelha muito à álgebra geométrica no livro II de *Os elementos* de Euclides. Para construir um quadrado de área igual à do retângulo *ABCD* (Fig. 12.2) marca-se os lados menores sobre os maiores de modo que $AF = AB = BE = CD$, e traça-se *HG* bissectando os seg-

[11]O leitor deve ser prevenido do fato de existirem numerosos livros em que as contribuições da Índia são muito exageradas. Um exemplo disto é B. K. Sarkar, *Hindu Achievements in Exact Science* (New York, 1918). A *History of Hindu Mathematics*, em dois volumes, de B. Datta e A. N. Singh (1935-1938) merece muito mais confiança, mas mesmo isso deve sofrer reservas, como indica Solomon Gandz ao comentar o Volume I em *Isis*, 25 (1936), 478-488

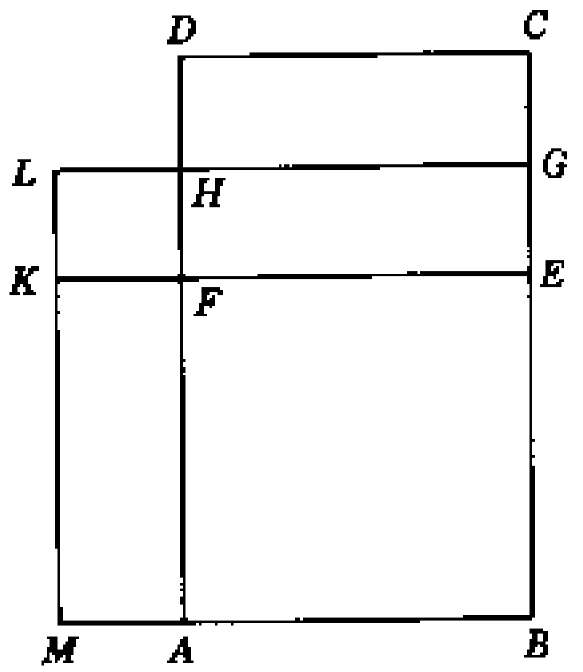


Figura 12.2

mentos CE e DF; prolonga-se EF até K, GH, até L, e AB até M, tal que $FK = HL = FH = AM$, e traça-se LKM. Agora constrói-se um retângulo com diagonal igual a LG e lado menor HF. Então o lado maior do retângulo é o lado do quadrado pedido.

A origem e data dos *Sulvasūtras* são tão incertos que não podemos dizer se tais regras são ou não relacionadas com a primitiva agrimensura egípcia ou com o problema grego mais tardio de duplicar um altar. Têm sido atribuídas a eles datas que variam num intervalo de mil anos, do século oitavo A. C. ao segundo século de nossa era. Não se pode confiar na cronologia das culturas antigas do Extremo Oriente quando a tradição hindu ortodoxa se gaba de obras astronômicas importantes de mais de 2 000 000 de anos[12] e quando os cálculos levam a bilhões de dias desde o começo da vida de Brahman até 400 D. C. aproximadamente[13]. Referências a séries geométricas e aritméticas na literatura védica que datariam de há 2 000 anos[14] são mais plausíveis, mas não há documentos contemporrâneos da Índia para confirmá-las. Afirmou-se também que a primeira constatação dos incomensuráveis se acha na Índia no período *Sulvasūtra*[15], mas tais asserções não estão bem fundamentadas. Que os hindus antigos tenham percebido a existência de grandezas incomensuráveis parece muito improvável, pois os matemáticos indianos absolutamente não investigaram conceitos fundamentais.

12 Ao período dos *Sulvasūtras*, que se encerrou pelo segundo século, seguiu-se a idade dos *Siddhāntas*, ou sistemas (de astronomia). O estabelecimento da dinastia do Rei Gupta (290) assinalou o começo de um renascimento da cultura sânscrita, e os *Siddhāntas* parecem ter sido um produto desse renascimento. São conhecidas nominalmente cinco versões diferentes dos *Siddhāntas*, *Pauliśha Siddhānta*, *Sūrya Siddhānta*, *Vasisishta Siddhānta*, *Paitamaha Siddhānta*, e *Romanka Siddhānta*. Dessas, o *Sūrya Siddhānta* (Sistema do Sol), escrito por volta de 400, é o único que parece ter-se preservado completamente. De acordo com o texto, escrito em versões épicas, ele é obra de Sūrya, o Deus do Sol[16]. As principais doutrinas astronômicas são evidentemente gregas, mas conservando grande quantidade de tradição popular hindu. O *Pauliśha Siddhānta*, que data de 380 aproximadamente, foi resumido pelo matemático hindu Varahamihira (viveu em 505) e foi citado freqüentemente pelo estudioso árabe Al-Biruni, que sugeriu uma origem ou influência grega. Escritores posteriores dizem que os *Siddhāntas* concordavam bastante em substância, variando apenas a fraseologia; por isso podemos supor que os outros, como o *Sūrya Siddhānta*, eram compêndios de as-

[12]G. R. Kaye, "Indian Mathematics", *Isis*, 2 (1914), 326-356

[13]*Alberuni's India*, ed. por E. C. Sachan (Londres, 1960, 2 vols.), II, pp. 32 e seguintes

[14]A. N. Singh, "On the use of Series in Hindu Mathematics", *Osiris*, 1 (1036), 606-628

[15]A. N. Singh, "A Review of Hindu Mathematics up to XIIth Century", *Archeion* 18 (1936), 43-62, Saradakanta Ganguli, "On the Indian Discovery of the Irrational at the Time of the Sulvasutras", *Scripta Mathematica*, 1 (1932), 135-141

[16]Uma tradução para o inglês por Burgess e Whitney, juntamente com notas copiosas, foi publicada no *Journal of the American Oriental Society*, 6 (1860), 141-498. Ver também George Sarton, *An Introduction to the History of Science* (1927), pp. 386-388

tronomia contendo regras enigmáticas em verso sânscrito, com pouca explicação e sem prova.

Concorda-se em geral em que os *Siddhāntas* provêm do fim do quarto século ou começo do quinto, mas há muito desacordo quanto à origem do conhecimento que contêm. Estudiosos hindus insistem em afirmar a originalidade e independência dos autores, ao passo que autores ocidentais se inclinam a ver sinais claros de influência grega. Não é improvável, por exemplo que o *Pauliśha Siddhānta* derive em grande parte da obra do astrólogo Paulo que viveu em Alexandria pouco antes da data em que se presume terem sido compostos os *Siddhāntas* (Al-Biruni de fato atribui explicitamente esse *Siddhānta* a Paulo de Alexandria). Isso daria uma explicação simples para as evidentes semelhanças entre partes dos *Siddhāntas* e a trigonometria e astronomia de Ptolomeu. O *Pauliśha Siddhānta*, por exemplo, usa o valor 3 177/1 250 para π, o que concorda bem o valor sexagesimal 3; 8, 30 de Ptolomeu.

Mesmo que os hindus tenham adquirido seu conhecimento de trigonometria do helenismo cosmopolita de Alexandria, o material em suas mãos tomou uma forma nova. Ao passo que a trigonometria de Ptolomeu se baseava na relação funcional entre as cordas de um círculo e os arcos centrais que subentendem, os autores dos *Siddhāntas* converteram isso num estudo da correspondência entre *metade* de uma corda de um círculo e *metade* do ângulo subentendido no centro pela corda toda. Assim, aparentemente nasceu na Índia a precursora da função trigonométrica moderna que chamamos seno de um ângulo, e a introdução da função seno representa a contribuição mais importante dos *Siddhāntas* à história da matemática. Embora se suponha em geral que a mudança da corda toda para a metade teve lugar na Índia, Paul Tannery, o mais importante historiador da ciência do fim do século passado e início deste, sugeriu que essa transformação na trigonometria teve lugar em Alexandria durante o período pós-ptolomaico. Quer essa sugestão seja ou não válida, não há dúvida que é dos hindus, não dos gregos, que deriva nosso uso da metade da corda; e nosso termo "seno", por acidente de tradução (ver Cap. 14), provém da palavra hindu *jiva*.

13 Durante o sexto século, logo depois da composição dos *Siddhāntas*, viveram dois matemáticos hindus dos quais se sabe terem escrito livros sobre o mesmo tipo de material. O mais antigo e importante dos dois foi Aryabhata, cuja obra mais conhecida, escrita em 499 e entitulada *Aryabhatiya*, é um pequeno volume, escrito em verso, sobre astronomia e matemática. Os nomes de vários matemáticos hindus anteriores são conhecidos, mas nada de sua obra, além de uns poucos fragmentos, se preservou. Quanto a isso, portanto, a posição do *Aryabhatiya* de Aryabhata na Índia é semelhante à de *Os elementos* de Euclides na Grécia, cerca de oito séculos antes. Ambos são sumários de resultados anteriores, compilados por um único autor. Há porém mais diferenças significativas que analogias entre as obras. *Os elementos* é uma síntese bem ordenada de matemática pura, com alto grau de abstração, uma estrutura lógica clara e uma evidente intenção pedagógica; o *Aryabhatiya* é uma curta obra descritiva, em 123 estrofes metrificadas, destinadas a fornecer regras de cálculo usadas na astronomia e na matemática de mensuração, sem nenhum espírito lógico ou de metodologia dedutiva. Cerca de um terço da obra é sobre *ganitapada* ou matemática. Essa parte se inicia com os nomes das potências de dez até a décima e em seguida dá instruções quanto a raízes quadradas e cúbicas de inteiros. Seguem-se as regras de mensuração, cerca de metade delas erradas. A área de um triângulo é dada corretamente, como a metade do produto da base pela altura, mas também o volume da pirâmide é tomada como a metade do produto da base pela altura[17]. A área do círculo é achada corretamente como produto da circunferência pela metade do raio, mas o volume da esfera é incorretamente dado como produto da área de um círculo máximo pela raiz quadrada dessa área. Também no cálculo de áreas de quadriláteros aparecem lado a lado regras corretas e incorretas. A área de um trapézio é expressa como metade da soma dos lados paralelos multiplicada pela perpendicular

[17]*The Aryabhatiya of Aryabhata*, traduzido para o inglês por W. E. Clarck (1930), p. 26

entre eles; mas depois vem a afirmação incompreensível de que a área de qualquer figura plana é obtida determinando dois lados e multiplicando-os. Uma afirmação no *Aryabhatiya* que os estudiosos hindus assinalam com orgulho é a seguinte[18].

Some-se 4 a 100, multiplique-se por 8, e some-se 62 000. O resultado é aproximadamente a circunferência de um círculo cujo diâmetro é 20 000.

Aqui vemos o equivalente de 3,1416 para π, mas deve-se lembrar que esse é essencialmente o valor usado por Ptolomeu. A probabilidade de Aryabhata aqui ser influenciado por predecessores gregos é reforçada pela adoção da miríade, 10 000, como número de unidades do raio.

Uma parte típica do *Aryabhatiya* é a que trata de progressões aritméticas, e contém regras arbitrárias para achar a soma dos termos numa progressão e determinar o número de termos de uma progressão, dados o primeiro termo, a razão e a soma dos termos. A primeira regra há muito era conhecida por autores anteriores. A segunda constitui uma explanação curiosamente complicada:

Multiplique-se a soma da progressão por oito vezes a razão, some-se o quadrado da diferença entre duas vezes o primeiro termo e a razão, extraia-se a raiz quadrada disso, subtraia-se duas vezes o primeiro termo, divida-se pela razão, some-se um, divida-se por dois. O resultado será o número de termos.

Aqui, como no resto do *Aryabhatiya*, não se dá motivação ou justificação para a regra. Provavelmente chegou-se a ela resolvendo uma equação quadrática, o que poderia ter sido aprendido da Mesopotâmia ou da Grécia. Após alguns problemas complicados sobre juros compostos (isto é, progressões geométricas), o autor se volta, em linguagem floreada, para o problema muito elementar de achar o quarto termo de uma proporção simples:

Na regra de três multiplique-se o fruto pelo desejo e divida-se pela medida. O resultado será o fruto do desejo.

Isto, é claro, é a regra familiar que diz que se $a/b = c/x$, então $x = bc/a$, onde a é a "medida", b o "fruto", c o "desejo", e x o "fruto do desejo". A obra de Aryabhata é na verdade uma miscelânia de coisas simples e complexas, corretas e incorretas. O estudioso árabe Al-Biruni, meio milênio mais tarde, caracterizou a matemática hindu como uma mistura de pedregulho e cristal valioso, uma descrição muito adequada para o *Aryabhatiya*.

14 A segunda metade do *Aryabhatiya* trata da medida do tempo e de trigonometria esférica; aqui observamos um elemento que iria deixar marca permanente na matemática de gerações posteriores — a numeração decimal posicional. Não se sabe exatamente como Aryabhata efetuava seus cálculos, mas sua frase "de lugar para lugar cada um vale dez vezes o precedente" é uma indicação de que tinha em mente a aplicação do princípio de posição. "Valor local" tinha sido uma parte essencial da numeração babilônica, e talvez os hindus percebessem sua aplicabilidade à notação decimal para inteiros em uso na Índia. O desenvolvimento de notações numéricas na Índia parece ter seguido a mesma linha que se encontra na Grécia. As inscrições mais antigas em Mohenjo Daro mostram a princípio simples traços verticais, dispostos em grupos, mas pela época de Asoka (terceiro século A. C.) estava em uso um sistema semelhante ao herodiânico. No novo sistema continuava vigorando o princípio de repetição, mas foram adotados novos símbolos de ordem superior para quatro, dez, vinte e cem. Essa escrita, dita karosthi, aos poucos cedeu lugar a uma outra notação, dos caracteres ditos brahmi, que se assemelhava à alfabética do sistema grego jônico; é de se perguntar se foi coincidência que a mudança na Índia se desse pouco depois do período em que na Grécia os numerais herodiânicos foram substituídos pelos jônicos.

[18]*Aryabhatiya*, p. 28. As traduções, aqui e abaixo, provêm da edição de Clark citada na nota de rodapé 17.

Para passar dos numerais cifrados brahmi à notação usual para inteiros são necessários dois passos. O primeiro é uma percepção de que, pelo uso do princípio posicional, os símbolos para as primeiras nove unidades podem servir também para os múltiplos correspondentes de dez, ou igualmente bem para os múltiplos correspondentes de qualquer potência de dez. Essa percepção tornaria supérfluos todos os símbolos brahmi além dos nove primeiros. Não se sabe quando ocorreu essa redução a nove símbolos, e é provável que a transição para a notação mais econômica se tenha processado gradualmente. Parece, pela evidência existente, que a mudança se deu na Índia, mas a fonte de inspiração para isso não é conhecida. Possivelmente os chamados numerais hindus foram resultado de desenvolvimento interno apenas; talvez se desenvolvessem primeiro ao longo dos limites ocidentais entre Índia e Pérsia, onde a lembrança da notação posicional babilônica pode ter levado à modificação do sistema brahmi. É possível que o novo sistema tenha surgido ao longo dos limites orientais entre Índia e China, onde os numerais em barras pseudo-posicionais podiam sugerir a redução a nove símbolos. Há ainda uma teoria que diz que essa redução pode ter sido feita primeiro em Alexandria, dentro do sistema alfabético grego, e daí se propagado para a Índia[19]. Durante o segundo período alexandrino o hábito grego antigo de escrever frações comuns com o numerador embaixo do denominador foi invertido, e foi nessa forma que os hindus o adotaram, sem a barra entre eles. Infelizmente, os hindus não aplicaram a nova numeração para inteiros ao domínio das frações decimais; assim perdeu-se a principal vantagem potencial da mudança de notação.

A primeira referência específica aos numerais hindus se encontra em 662 nos escritos de Severus Sebokt, um bispo sírio. Depois que Justiniano fechou as escolas filosóficas de Atenas alguns de seus membros se mudaram para a Síria, onde fundaram centros de cultura grega. Sebokt evidentemente se sentia irritado com o desdém para com a cultura não-grega expresso por alguns desses membros; por isso achou conveniente lembrar aos que falavam grego que "também há outros que sabem alguma coisa". Para ilustrar esse ponto ele chamou a atenção para os hindus e suas "sutis descobertas em astronomia", especialmente "seus valiosos métodos de cálculo, e sua computação que ultrapassa descrições. Quero só dizer que essa computação é feita por meio de nove sinais."[20] Que os numerais estavam em uso já havia algum tempo é indicado pelo fato de que a primeira ocorrência na Índia é sobre um objeto do ano 595, onde a data 346 está escrita em notação decimal posicional[21].

15 Deve-se notar que a referência a *nove* símbolos, em vez de *dez*, significa que os hindus ainda não tinham dado o segundo passo na transição para o moderno sistema de numeração — a introdução de uma notação para uma posição vazia, isto é, um símbolo zero. A história da matemática contém muitas anomalias, e a não menor dessas é que "a mais antiga ocorrência indubitável de um zero na Índia se acha numa inscrição de 876"[22] isto é, mais de dois séculos depois da primeira referência aos nove outros numerais. Não se sabe sequer se o número zero (diferente do símbolo para posição vazia) surgiu em conjunção com os outros nove numerais hindus. É bem possível que o zero seja originário do mundo grego, talvez de Alexandria, e que tivesse sido transmitido à Índia depois que o sistema decimal posicional já estava estabelecido lá[23].

A história do zero para ocupar um lugar na notação posicional fica mais complicada ainda quando se observa que o conceito apareceu independentemente, bem antes dos dias de Colombo, no hemisfério ocidental como no oriental. Os maias do Yucatan, em sua representação de intervalos de tempo entre datas do calendário, usavam numeração posicional, em geral com vinte como base primária e com cinco como base au-

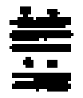
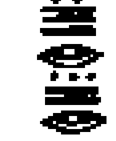
[19]Ver Harriet P. Lattin, "The Origin of Our Present System of Notation According to the Theories of Nicholas Bubnov", *Isis*, 19 (1933), 181-194

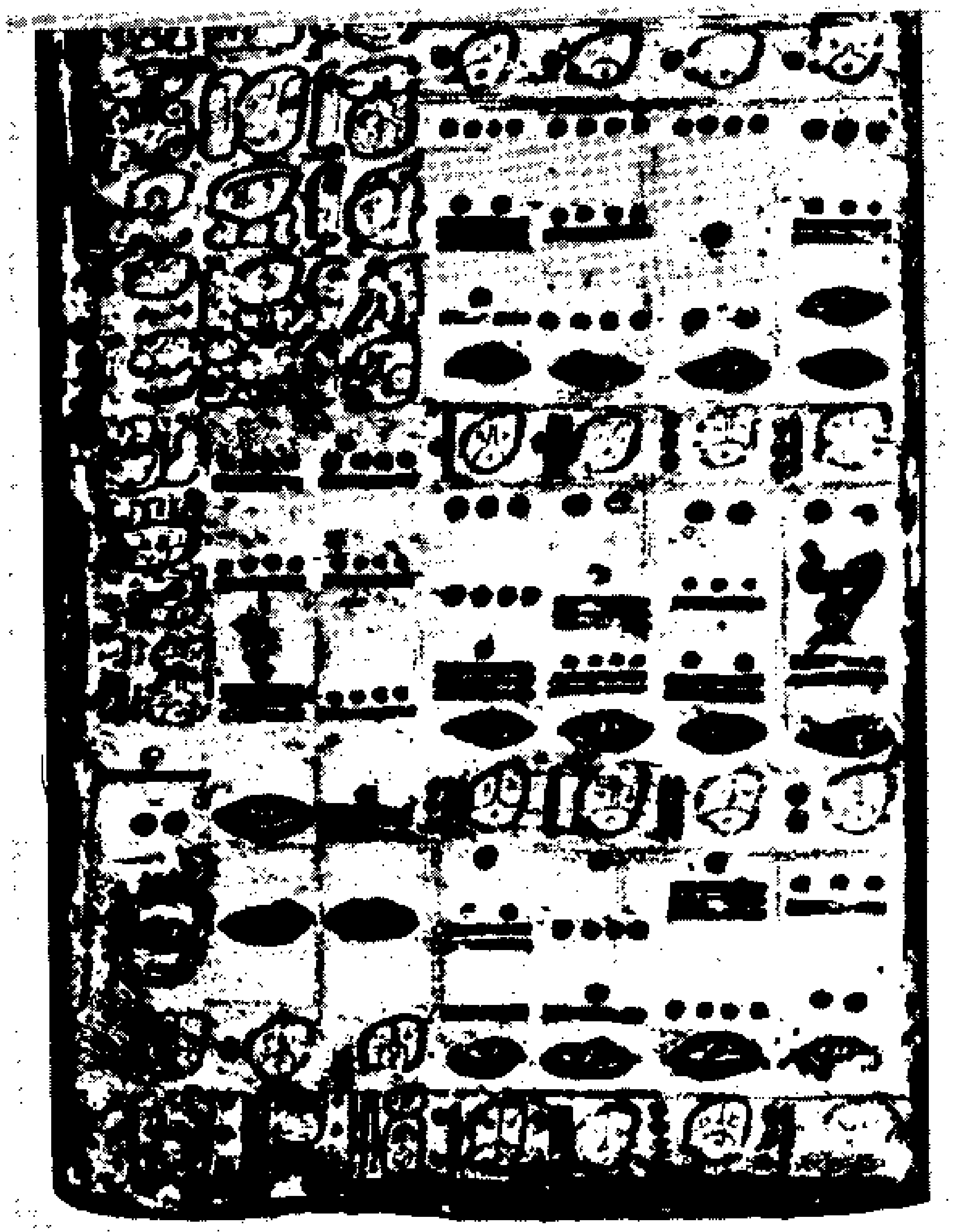
[20]Citado de D. E. Smith, *History of Mathematics*, I, 167

[21]Ver D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 3.ª ed. (New York: Dover, 1967), p. 71

[22]Smith, *History of Mathematics*, II, 69

[23]Ver, por exemplo, B. L. van der Waerden, *Science Awakening* (1961), pp. 56-58

xiliar (correspondendo ao uso babilônico de sessenta e dez respectivamente). Unidades eram representadas por pontos e cincos por barras horizontais, de modo que o número dezessete, por exemplo, apareceria como [isto é, como 3(5) + 2]. Um arranjo posicional vertical era usado, com as unidades maiores de tempo acima; portanto a notação  denotava 352 [isto é, 17(20) + 12]. Como o sistema se destinava primariamente a contar dias num calendário de 360 dias num ano, a terceira posição usualmente não representava múltiplos de (20) (20), como num sistema vigesimal puro, mas (18) (20). No entanto, para além desse ponto a base vinte novamente prevalecia. Com essa notação posicional os maias indicavam posições vazias por meio de um símbolo, que aparecia em formas variadas, semelhante a um olho meio-aberto. Em seu sistema, portanto, a notação  indicava 17(20 · 18 · 20) + 0(18 · 20) + 13(20) + 0.



Do Códex de Dresde, dos maias, exibindo números. A segunda coluna da esquerda, de cima para baixo, contém os números 9, 9, 16, 0, 0, que indicam 9 × 144 000 + 9 × 7 200 + 16 × 360 + 0 + 0 = = 1 366 560. Na terceira coluna estão os numerais 9, 9, 9, 16, 0, representando 1 364 360. O original é nas cores preta e vermelha. (Tirado de Morley, *An Introduction to the Study of the Maya Hieroglyphys*. p. 266)

Com a introdução, na notação hindu, do décimo numeral, um ovo de ganso redondo para o zero, o moderno sistema de numeração para os inteiros estava completo. Embora as formas hindus medievais dos dez numerais sejam bastante diferentes das em uso hoje, os princípios do sistema estavam firmados. A nova numeração, que chamamos em geral o sistema hindu, é apenas uma nova combinação dos três princípios básicos, todos de origem antiga: (1) base decimal; (2) uma notação posicional; e (3) uma forma cifrada para cada um dos dez numerais. Nenhum desses se deveu originalmente aos hindus, mas presumivelmente foi devido a eles que os três foram ligados pela primeira vez para formar o moderno sistema de numeração.

Talvez convenha dizer uma palavra sobre a forma do símbolo hindu para o zero — que também é a do nosso. Supôs-se anteriormente que a forma redonda vinha da letra grega ômicron letra inicial da palavra *ouden* ou vazio, mas investigações recentes parecem desmentir tal origem. Embora o símbolo para uma posição vazia, em algumas versões existentes das tabelas de cordas de Ptolomeu, se assemelhe de fato a um ômicron, os antigos símbolos para o zero nas frações sexagesimais gregas são formas redondas com ornatos variados e diferindo bastante de um simples ovo de ganso. Além disso, quando no século quinze, no Império Bizantino, foi elaborado um sistema decimal posicional a partir dos antigos numerais alfabéticos abandonando as últimas dezoito letras e ajuntando um símbolo para o zero às primeiras nove letras, o sinal zero tomou formas muito diferentes do ômicron[24]. Às vezes ele parecia uma forma invertida de nossa letra h minúscula, às vezes aparecia como um ponto.

16 O desenvolvimento de nosso sistema de notação para os inteiros foi uma das duas contribuições da Índia de maior influência na história da matemática. A outra foi a introdução de um equivalente da função seno na trigonometria para substituir a tabela grega de cordas. As mais antigas tabelas da função seno que se preservaram são as do *Siddhāntas* e do *Aryabhatiya*. Aqui são dados os senos dos ângulos até 90°, para vinte e quatro intervalos iguais de 3 3/4° cada um. Para exprimir o comprimento de arco e o comprimento do seno em termos da mesma unidade, o raio era tomado como 3 438 e a circunferência como 360 × 60 = 21 600. Isso significa um valor para π concordando com o de Ptolomeu até quatro algarismos significativos. Em outra situação Aryabhata usou o valor $\sqrt{10}$ para π, valor que apareceu tão freqüentemente na Índia que às vezes é chamado o valor hindu.

Para o seno de 3 3/4° o *Siddhāntas* e o *Aryabhatiya* tomaram o número de unidades no arco — isto é, 60 × 3 3/4 ou 225. Em linguagem moderna, o seno de um ângulo pequeno é quase igual à medida em radianos do ângulo (que é virtualmente o que os hindus estavam usando). Para os demais valores na tabela os hindus usaram uma fórmula de recorrência que pode ser expressa como segue. Se o n-ésimo seno na seqüência de $n = 1$ a $n = 24$ é denotado por s_n, e se a soma dos n primeiros senos é S_n, então $s_{n+1} = s_n + s_1 - S_n/s_1$. Dessa regra se deduz facilmente que sen 7 1/2° = 449, sen 11 1/4° = 671, sen 15° = 890, e assim por diante até sen 90° = 3 438 — os valores dados nas tabelas nos *Siddhāntas* e no *Aryabhatiya*. Além disso, a tabela contém também os valores do que denotamos por seno versor ou $1 - \cos\theta$ em trigonometria moderna ou $3\,438(1 - \cos\theta)$ em trigonometria hindu — desde vers 3 3/4° = 7 a vers 90° = 3 438. Se dividirmos os valores da tabela por 3 438 verificamos que estão bem próximos dos valores correspondentes em tabelas atuais[25].

17 A trigonometria hindu era evidentemente um instrumento útil e preciso para a astronomia. Como os hindus obtiveram resultados como a fórmula de recorrência acima não se sabe bem, mas sugeriu-se[26] que uma investigação intuitiva de equações de diferenças e interpolação pode ter levado a elas. A matemática indiana é freqüentemente

[24]Ver O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, 2.ª ed. (Providence, R. I.: Brown University Press, 1957), p. 14

[25]A tabela da *Sūrya Siddhānta* está reproduzida em Smith, *History of Mathematics*, II

[26]E. S. Kennedy no artigo "Trigonometry", *Yearbook on History of Mathematics* do National Council of Teachers of Mathematics

descrita como "intuitiva", em contraste com o severo racionalismo da geometria grega. Embora na trigonometria hindu haja traços de influência grega, os indianos não parecem ter tido ocasião de tomar emprestada a geometria grega, preocupados como estavam com simples regras de mensuração. Dos problemas geométricos clássicos, ou do estudo das curvas além do círculo, há poucos sinais na Índia, e mesmo as secções cônicas não parecem ter sido consideradas pelos hindus, como também não pelos chineses. Os matemáticos hindus se sentiam fascinados, de outro lado, pelo trabalho com números, que envolvesse as operações aritméticas ordinárias ou a solução de equações determinadas ou indeterminadas. A adição e a multiplicação eram efetuadas na Índia de modo muito semelhante ao que usamos hoje, só que parecem a princípio ter preferido escrever os números com as unidades menores à esquerda, portanto trabalhar da esquerda para a direita, usando pequenas lousas com tinta removível branca ou uma tábua coberta de areia ou farinha. Entre os esquemas usados para a multiplicação havia um que é conhecido sob vários nomes: multiplicação em reticulado, multiplicação em *gelosia*, ou em célula ou em grade ou quadrilateral. A idéia atrás disso é fácil de perceber em dois exemplos. No primeiro (Fig. 12.3) o número 456 é multiplicado por 34. O multiplicando foi escrito

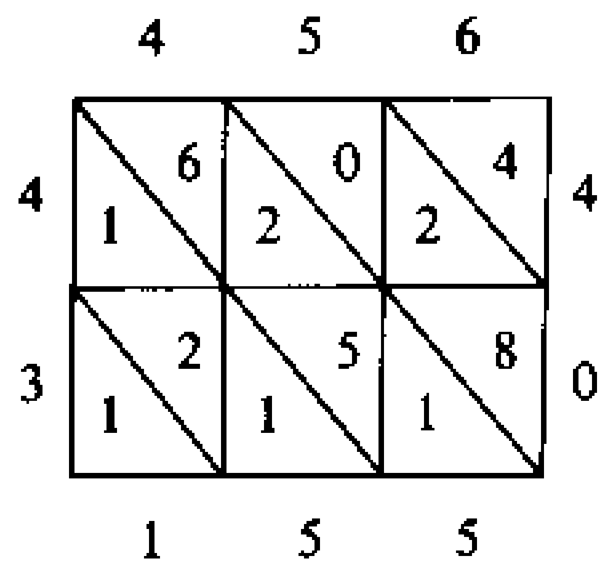


Figura 12.3

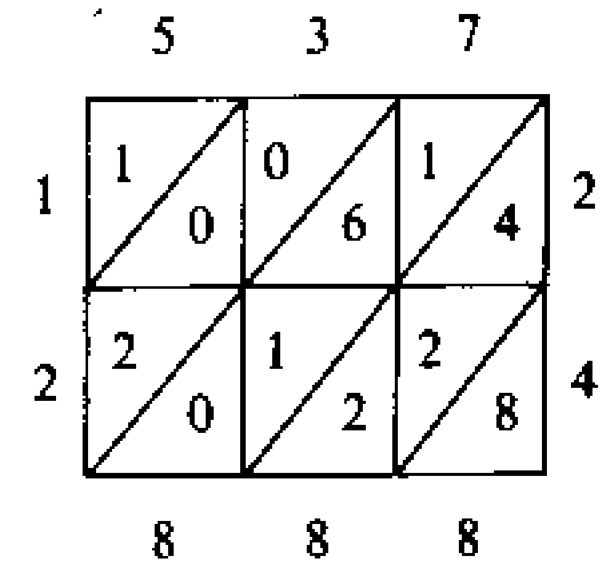
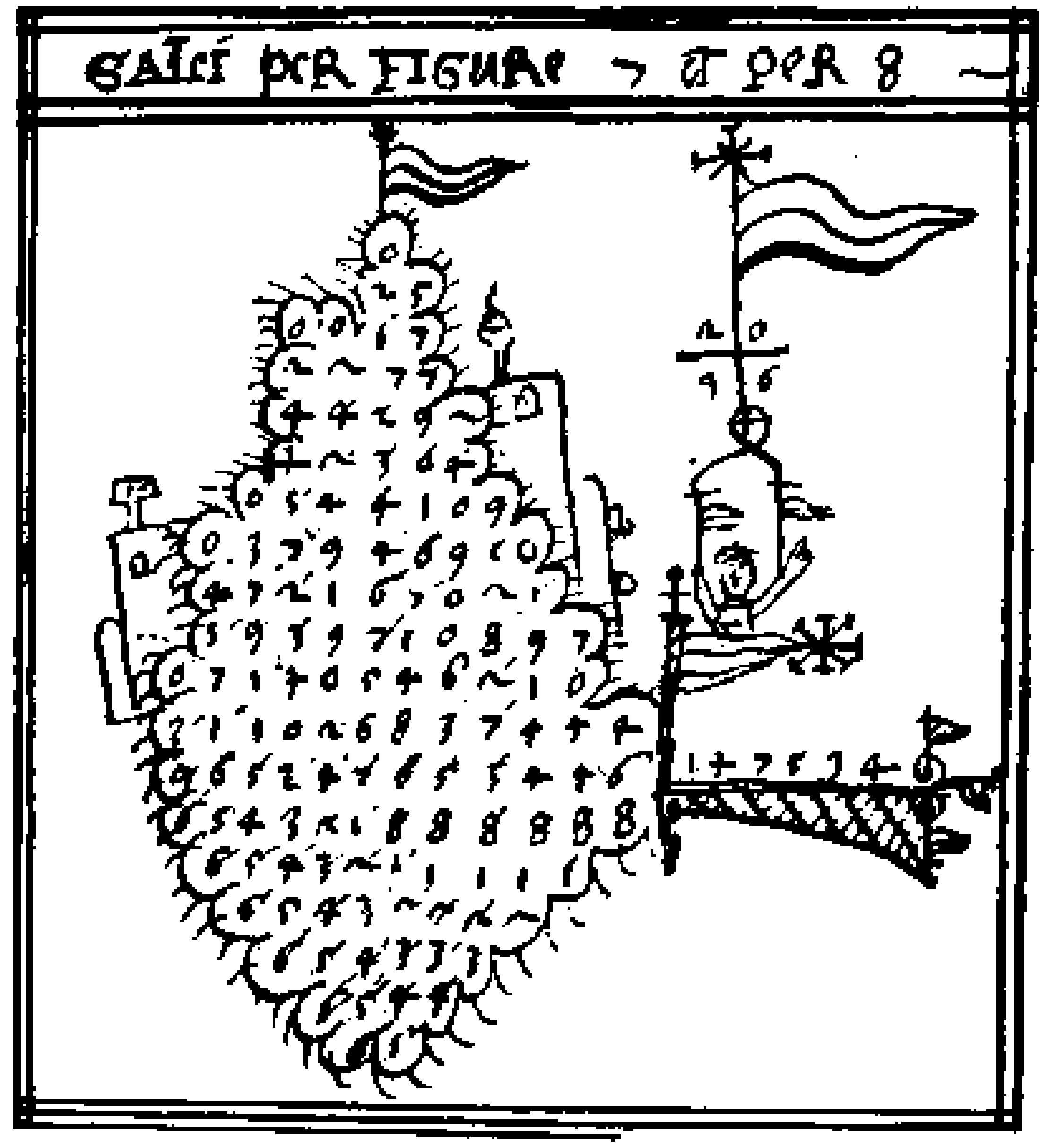


Figura 12.4

acima do reticulado e o multiplicador aparece à esquerda, com os produtos parciais ocupando as células quadradas. Os dígitos nas fileiras diagonais são somados e o produto 15 504 aparece em baixo e à direita. Para indicar que outros arranjos são possíveis, damos um segundo exemplo na Fig. 12.4, em que o multiplicando 537 é colocado no alto e o multiplicador 24 à direita, o produto 12 888 aparecendo à esquerda e em baixo. Ainda outras variantes são facilmente construídas. O princípio fundamental da multiplicação em *gelosia* evidentemente é o mesmo da nossa, o arranjo em células sendo apenas um estratagema conveniente para aliviar a concentração mental necessária ao "transportar" de lugar para lugar as dezenas que aparecem nos produtos parciais. O único "transporte" necessário na multiplicação em reticulado aparece nas adições finais ao longo das diagonais.

18 Não se sabe quando ou onde a multiplicação em gelosia apareceu, mas a Índia parece ser a fonte mais provável; foi usada lá pelo menos desde o século doze, e onde parece ter sido levada à China e à Arábia. Dos árabes passou para a Itália nos séculos quatorze e quinze e lá o nome gelosia lhe foi associado por causa da semelhança com os gradeados colocados em frente às janelas em Veneza e outros lugares. (A palavra atual *jalousie* parece provir da gelosia italiana, e significa veneziana na França, Alemanha, Holanda e Rússia.) Os árabes (e através deles os europeus mais tarde) parecem ter adotado a maior parte de seus métodos aritméticos da Índia, e por isso é provável que o esquema de divisão conhecido como o "método de riscar" ou "método do galeão" (por sua semelhança com um navio) também venha da Índia. Para ilustrar o método, suponhamos que se queira dividir 44 977 por 382. Na Fig. 12.5 damos o método moderno, na Fig. 12.6 o do galeão[27]. Esse último se assemelha muito ao primeiro, apenas o dividendo aparece no meio, porque as subtrações são executadas cancelando dígitos e colocando as diferenças *acima* em vez de *abaixo* dos minuendos. Por isso o resto, 283,

[27]Para mais descrições dos inúmeros esquemas computacionais que têm sido usados, ver F. A. Yeldham, *The Story of Reckoning in the Middle Ages* (1926)



Divisão em galeão, século dezesseis. De um manuscrito não publicado de um monge veneziano. O título da obra é *Opus Arithmetica D. Honorati veneti monachj coenobiy S. Lauretig.* Da biblioteca Plimpton

```
      117
382)44977
    382
    ---
     677
     382
     ---
     2957
     2674
     ----
      283
```

Figura 12.5

```
              2
             2 3
             3 9 8
     | 1 6 7 5 3 |
 382 | 4 4 9 7 7 | 117
     | 3 8 2 2 4 |
         3 8 7
           2 6
```

Figura 12.6

aparece acima e à direita, em vez de embaixo. O processo na Fig. 12.6 é fácil de acompanhar se observarmos que os dígitos num dado subtraendo, como 2 674, ou numa dada diferença, como 2 957, não estão todos necessariamente na mesma linha e que subtraendos são escritos abaixo do meio e diferenças acima. A posição numa coluna é significativa, mas não a posição numa linha. A determinação de raizes de números provavelmente seguia um esquema "em galeão" semelhante, associado em anos posteriores com o teorema binomial em forma de "triângulo de Pascal"; mas os autores hindus não forneceram explicações de seus cálculos ou provas de suas afirmações. É possível que influências babilônicas e chinesas desempenhassem um papel no problema da evolução ou extração de raiz. Diz-se freqüentemente que a "prova por noves fora" é invenção hindu, mas parece que os gregos conheciam já antes essa propriedade, sem usá-la muito, e o método se tornou de uso comum somente com os árabes do século onze.

19 Os últimos parágrafos acima podem ter dado a impressão injustificada de que havia uniformidade na matemática hindu, pois freqüentemente localizamos desenvolvimentos simplesmente como sendo de "origem indiana", sem especificar o período. Porém a dificuldade é que há um alto grau de incerteza na cronologia hindu. O material no importante manuscrito Bakshali, contendo uma aritmética anônima, data, ao que alguns supõem, do terceiro ou quarto século, mas outros crêem que é do oitavo ou nono século ou ainda de mais tarde; e há uma sugestão de que pode não ser sequer de origem hindu[28]. Co-

[28]Ver Florian Cajori, *A History of Mathematics* (1919), pp. 84-85; Smith, *History of Mathematics*, I, 164; Hofman, *Geschichte der Mathematik*, I, 59

locamos a obra de Aryabhata em 500 aproximadamente, mas a data é duvidosa porque houve dois matemáticos chamados Aryabhata e não podemos com certeza atribuir resultados ao nosso Aryabhata, o mais antigo. A matemática hindu apresenta mais problemas históricos do que a grega, pois os matemáticos indianos raramente se referiam a seus predecessores e exibiam surpreendente independência em seu trabalho matemático. Assim é que Brahmagupta (viveu em 628), que viveu na Índia Central um pouco mais de cem anos depois de Aryabhata, tem pouco em comum com seu predecessor, que tinha vivido no leste da Índia. Brahmagupta menciona dois valores de π — o "valor prático" 3 e o "valor bom" $\sqrt{10}$ — mas não o valor mais preciso de Aryabhata; na trigonometria de sua obra mais conhecida, o *Brahmasphuta Siddhānta*, ele usou um raio de 3 270 em vez de 3 438 como Aryabhata. Num aspecto ele se assemelha a seu predecessor — na justaposição de resultados bons e ruins. Achou a área "bruta" de um triângulo isósceles multiplicando a metade da base por um dos lados iguais; para o triângulo escaleno com base quatorze e lados treze e quinze ele achou a área "bruta" multiplicando a metade da base pela média aritmética dos outros lados. Ao achar a área "exata" ele utilizou a fórmula arquimediana-heroniana. Para o raio do círculo circunscrito a um triângulo ele deu o equivalente do resultado trigonométrico correto $2R = a/\text{sen } A = b/\text{sen } B = c/\text{sen } C$, mas isto, é claro, é apenas uma reformulação de um resultado que Ptolomeu já conhecia na linguagem de cordas. Talvez o resultado mais belo na obra de Brahmagupta seja a generalização da "fórmula de Heron" para achar a área do quadrilátero. Essa fórmula — $K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, onde a, b, c, d são os lados e s é o semiperímetro — ainda leva seu nome; mas a glória de seu sucesso é obscurecida pelo fato de ele não observar que a fórmula só é correta no caso de um quadrilátero *cíclico*[29]. (A fórmula correta para um quadrilátero arbitrário é $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)-abcd\cos^2\alpha}$, onde α é metade da soma de dois ângulos opostos.) Como regra para a área "bruta" de um quadrilátero Brahmagupta deu a fórmula pré-helênica, o produto das médias aritméticas dos lados opostos. Para o quadrilátero de lados $a = 25$, $b = 25$, $c = 25$, $d = 39$, por exemplo, ele achou uma área "bruta" de 800.

20 As contribuições de Brahmagupta à álgebra são de ordem mais alta que suas regras de mensuração, pois aqui achamos soluções gerais de equações quadráticas, inclusive duas raízes mesmo quando uma delas é negativa. A aritmética sistematizada dos números negativos e do zero, na verdade, encontra-se pela primeira vez em sua obra. Equivalentes das regras sobre grandezas negativas eram já conhecidas através dos teoremas geométricos dos gregos sobre subtração, como por exemplo $(a-b)(c-d) = ac + bd - ad - bc$, mas os hindus as converteram em regras numéricas sobre números negativos e positivos. Ainda mais, embora os gregos tivessem um conceito do nada, eles nunca o interpretaram como um número, como fizeram os hindus. No entanto também aqui Brahmagupta estragou um pouco as coisas afirmando que $0 \div 0 = 0$, e na delicada questão de $a \div 0$ para $a \neq 0$ ele não se comprometeu:

> Positivo dividido por positivo, ou negativo por negativo, é afirmativo. Cifra dividida por cifra é nada. Positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por afirmativo é negativo. Positivo ou negativo dividido por cifra é uma fração com esse denominador[30].

Deve-se mencionar aqui que os hindus, diferentemente dos gregos, consideravam as raízes irracionais dos números como números. Isso era de enorme utilidade na álgebra, e os matemáticos indianos têm sido muito elogiados por terem dado esse passo; mas é preciso lembrar que a contribuição hindu nesse caso foi resultado de inocência lógica mais do que de visão matemática. Vemos a ausência de distinção cuidadosa, da parte dos matemáticos hindus, entre resultados exatos e inexatos, e era natural que não levassem

[29]Uma prova da fórmula pode ser encontrada em R. A. Johnson, *Modern Geometry* (New York: Houghton Mifflin, 1929), pp. 81-82

[30]Ver H. T. Colebrooke, *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara* (1817)

a sério a diferença entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Para eles não havia dificuldade em aceitar números irracionais, e gerações posteriores seguiram seu exemplo sem análise crítica até que os matemáticos do século dezenove estabeleceram o sistema dos números reais sobre base sólida.

A matemática indiana era, como dissemos, uma mistura de bom e ruim. Mas parte do bom era magnificamente bom, e aqui Brahmagupta merece grande louvor. A álgebra hindu é especialmente notável em seu desenvolvimento da análise indeterminada, à qual Brahmagupta fez várias contribuições. Por exemplo em sua obra achamos uma regra para a formação de tríadas pitagóricas expressas na forma m, $1/2\,(m^2/n - n)$, $1/2\,(m^2/n + n)$; mas isso é apenas uma forma modificada da antiga regra babilônica, que ele pode ter conhecido. A fórmula de Brahmagupta para a área do quadrilátero, mencionada acima, foi usada por ele em conjunção com as fórmulas

$$\sqrt{(ab + cd)(ac + bd)/(ad + bc)} \quad \text{e} \quad \sqrt{(ac + bd)(ad + bc)/(ab + cd)}$$

para as diagonais[31], para achar quadrados cujos lados, diagonais, e áreas sejam todos racionais. Entre esses estava o quadrilátero de lados $a = 52$, $b = 25$, $c = 39$, $d = 60$, e diagonais 63 e 56. Brahmagupta deu a área "bruta" como sendo 1 933 3/4, apesar de sua fórmula fornecer a área exata, 1 764, nesse caso.

21 Como muitos de seus conterrâneos, Brahmagupta evidentemente amava a matemática por ela mesma, pois nenhum engenheiro de espírito prático proporia questões como as que Brahmagupta fazia sobre quadriláteros. Admiramos ainda mais sua atitude quanto à matemática quando percebemos que aparentemente ele foi o primeiro a dar uma solução *geral* da equação linear diofantina $ax + by = c$, onde a, b e c são inteiros. Para que essa equação tenha soluções inteiras, o máximo divisor comum de a e b deve dividir c; e Brahmagupta sabia que se a e b são primos entre si, todas as soluções da equação são dadas por $x = p + mb$, $y = q - ma$, onde m é um inteiro arbitrário. Ele sugeriu também a equação diofantina quadrática $x^2 = 1 + py^2$, que erradamente tira seu nome de John Pell (1611-1685) mas que aparece pela primeira vez no problema do gado de Arquimedes. A equação de Pell foi resolvida para alguns casos pelo conterrâneo de Brahmagupta, Bhaskara (1114 a cerca de 1185).

Brahmagupta merece muito louvor por ter dado *todas* as soluções inteiras da equação linear diofantina, enquanto que o próprio Diofante tinha se contentado em dar uma solução particular de uma equação indeterminada. Como Brahmagupta usou alguns dos exemplos de Diofante, vemos de novo a probabilidade de ter havido influência grega na Índia — ou a possibilidade de terem usado uma fonte comum, talvez babilônica. É interessante notar também que a álgebra de Brahmagupta, como a de Diofante, era abreviada. A adição era indicada por justaposição, a subtração colocando um ponto sobre o subtraendo, e a divisão colocando o divisor sob o dividendo, como em nossa notação para frações mas sem a barra. As operações de multiplicação e evolução (extração de raízes) bem como quantidades desconhecidas, eram representadas por abreviações de palavras adequadas.

22 A Índia produziu muitos matemáticos na segunda metade da Idade Média, mas descreveremos apenas a obra de um deles Bhaskara (1114 a cerca de 1185), o mais importante matemático do século doze. Foi ele quem preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta, por exemplo dando uma solução geral da equação de Pell e considerando o problema da divisão por zero. Aristóteles observara que não existe uma razão pela qual um número como quatro excede o número zero[32]; mas a aritmética do zero não entrava na matemática grega, e Brahmagupta não se comprometera quanto à divisão de um número diferente de zero por zero. É pois na *Vija-Ganita* de Bhaskara que achamos pela primeira vez a afirmação de que um tal quociente é infinito.

[31]Para indicações de prova dessas fórmulas ver Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics* (1964), pp. 202-203

[32]Ver C. B. Boyer, "An Early Reference to Division by Zero", *American Mathematical Monthly*, **50** (1943), 487-491

> Afirmação: Dividendo 3. Divisor 0. Quociente a fração 3/0. Essa fração cujo denominador é cifra, chama-se uma quantidade infinita. Nessa quantidade, que consiste no que tem cifra como divisor, não há alteração mesmo que muito seja acrescentado ou retirado; como nenhuma alteração se dá no Deus infinito e imutável.

Essa afirmação parece prometedora, mas a falta de compreensão clara da situação é sugerida pela asserção seguinte de Bhaskara de que $a/0 \cdot 0 = a$.

Bhaskara foi o último matemático medieval importante da Índia, e sua obra representa a culminação de contribuições hindus anteriores. Em seu tratado mais conhecido, o *Lilavati*, ele compilou problemas de Brahmagupta e outros, acrescentando observações próprias novas. O próprio título dessa obra pode ser tomado como indicação da qualidade desigual do pensamento hindu, pois o nome no título é o da filha de Bhaskara que, segundo a lenda, perdeu a oportunidade de se casar por causa da confiança de seu pai em suas predições astrológicas. Bhaskara tinha calculado que sua filha só poderia se casar de modo propício numa hora determinada de um dia dado. No dia que deveria ser o de seu casamento a jovem ansiosa estava debruçada sobre um relógio de água quando se aproximava a hora do casamento, quando uma pérola em seu cabelo caiu, sem ser observada, e deteve o fluxo de água. Antes que o acidente fosse notado, a hora propícia passava. Para consolar a infeliz moça, o pai deu seu nome ao livro que estamos descrevendo.

23 O *Lilavati* como o *Vija-Ganita*, contém numerosos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas, simples mensuração, progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros. O problema do "bambu quebrado", popular na China (e considerado também por Brahmagupta), aparece na forma seguinte: se um bambu de 32 cúbitos de altura é quebrado pelo vento de modo que a ponta encontra o chão a 16 cúbitos da base, a que altura a partir do chão ele foi quebrado? Também usando o teorema de Pitágoras temos o problema seguinte: um pavão está sobre o topo de uma coluna em cuja base há um buraco de cobra. Vendo a cobra a uma distância da coluna igual a três vezes a altura da coluna, o pavão avançou para a cobra em linha reta alcançando-a antes que chegasse a sua cova. Se o pavão e a cobra percorreram distâncias iguais a quantos cúbitos da cova eles se encontraram?

Esses dois problemas ilustram bem a natureza heterogênea do *Lilavati*, pois apesar de sua semelhança aparente e do fato de se pedir uma única resposta, um dos problemas é determinado e o outro não. Ao tratar do círculo e da esfera o *Lilavati* não distingue também afirmações exatas das aproximadas. A área do círculo é corretamente dada como igual a um quarto da circunferência vezes o diâmetro e o volume da esfera como um sexto do produto da área da superfície pelo diâmetro, mas para a razão da circunferência para o diâmetro de um círculo Bhaskara sugere ou 3 927 para 1 250 ou o valor "bruto" 22/7. O primeiro valor equivale à razão mencionada, mas não usada, por Aryabhata. Não há indicação em Bhaskara ou em outros escritores hindus de que soubessem que todas as razões propostas eram apenas aproximações. No entanto, Bhaskara condena severamente seus predecessores por usarem as fórmulas de Brahmagupta para a área e as diagonais do quadrilátero geral, porque percebeu que um quadrilátero não é univocamente determinado por seus lados. Evidentemente ele não percebeu que as fórmulas são realmente corretas para todos os quadriláteros cíclicos.

Muitos dos problemas de Bhaskara no *Lilavati* e no *Vija-Ganita* evidentemente provinham de fontes hindus anteriores, por isso não é surpreendente que o autor tenha seus melhores momentos ao tratar a análise indeterminada. Com relação à equação de Pell $x^2 = 1 + py^2$, proposta antes por Brahmagupta, Bhaskara deu soluções particulares para os cinco casos $p = 8$, 11, 32, 61 e 67. Para $x^2 = 1 + 61y^2$, por exemplo, ele deu a solução $x = 1\,776\,319\,049$ e $y = 22\,615\,390$. Esse é um notável feito de cálculo, e sua verificação só por si dará trabalho ao leitor se ele não dispuser de um computador

moderno. Os livros de Bhaskara estão cheios de outros exemplos de problemas diofantinos[33].

24 Bhaskara morreu pelo fim do século doze, e por vários séculos houve poucos matemáticos na Índia de importância comparável. É interessante notar, no entanto, que Srinivasa Ramanujan (1887-1920), o gênio hindu do século vinte, tinha a mesma incrível habilidade manipulativa em aritmética e álgebra que se encontra em Bhaskara. O matemático inglês G. H. Hardy uma vez visitou Ramanujan num hospital em Putney e mencionou a seu amigo que viera num taxi com o número desinteressante 1 729, e Ramanujan imediatamente observa que esse número ao contrário é interessante, pois é o menor inteiro que pode ser representado de dois modos diferentes como soma de dois cubos $1^3 + 12^3 = 1\,729 = 9^3 + 10^3$. Na obra de Ramanujan também observamos o caráter desorganizado, a força do raciocínio intuitivo, e o pouco caso pela geometria que eram tão evidentes em seus predecessores. Embora em Ramanujan tais características se tivessem desenvolvido em grande parte por ele ser autodidata, não podemos deixar de ver a diferença notável entre o desenvolvimento da matemática na Índia e na Grécia. Mesmo quando os hindus emprestavam dos gregos, eles adaptavam o material ao seu estilo peculiar. Embora em atitude e interesses tivessem mais em comum com os chineses, não compartilhavam da fascinação que esses tinham por boas aproximações, como as que levaram ao método de Horner. E embora compartilhassem com os mesopotâmicos sua visão preponderantemente algébrica, tendiam a evitar a numeração sexagesimal. Em resumo, os ecléticos matemáticos hindus adotaram e desenvolveram só os aspectos que lhes agradaram. De um certo ponto de vista foi uma infelicidade que seu primeiro amor fosse a teoria dos números em geral, e a análise indeterminada em particular, pois não foi desses temas que veio o posterior desenvolvimento da matemática. A geometria analítica e o cálculo tiveram raízes gregas, não hindus, e a álgebra européia não veio da Índia mas dos países islâmicos. No entanto, na matemática moderna há pelo menos duas coisas a lembrar que a matemática deve seu desenvolvimento à Índia como a muitos outros países. A trigonometria da função seno presumivelmente veio da Índia; nosso sistema de numeração para os inteiros é apropriadamente chamado indo-arábico, para indicar sua origem provável na Índia e sua transmissão através dos árabes.

BIBLIOGRAFIA

Boyer, C. B., "Fundamental Steps in the Development of Numeration," *Isis*, 35 (1944), 153-168

Cajori, Florian, *A History of Mathematics*, 2.ª ed. (New York: Macmillan, 1919)

Clark, W. E., ed., *The Aryabhatiya of Aryabhata* (Chicago: Open Court, 1930)

Colebrooke, H. T., *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara* (Londres, 1817)

Datta, B., e A. N. Singh, *History of Hindu Mathematics* (Lahore, 1935-1938, 2 volumes; Bombaim: Ásia Publishing House, 1962)

Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, 2.ª ed. (New York: Holt, 1964)

Goldschmidt, Victor, *Die Entstehung unserer Ziffern* (Heidelberg: C. Winter, 1932)

Hill, G. F., *The Development of Arabic Numerals in Europe* (Oxford, 1915)

Ho Peng-Yoke, articles on Liu Hui, Chu Shih-chieh, Ch'in Chiu-shao, Li Chih, e Yang Hui, em *Dictionary of Scientific Biography* (New York: Scribner's)

Juschkewitsch, A. P., *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (Leipzig: Teubner, 1964)

Kaye, G. R., "Indian Mathematics," *Isis*, 2 (1914), 326-356

Lattin, Harriet P., "The Origin of Our Present System of Notation According to the Theories of Nicholas Bubnov," *Isis*, 19 (1933), 181-194

Loeffler, Eugen, *Ziffern und Ziffernsysteme* (Leipzig e Berlin: Teubner, 1912)

Menninger, Karl, *Zahlwort und Ziffer* (2.ª ed., Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1957-1958, 2 vols.)

Mikami, Yoshio, *The Development of Mathematics in China and Japan* (1913; reimpresso, New York: Chelsea, n.d.)

[33]Uma exposição excepcionalmente completa da obra de Bhaskara se encontra em J. F. Scott, *A History of Mathematics* (1958). Ver também Colebrooke, obra citada

Morley, S. G., *An Introduction to the Study of Maya Hieroglyphics* (Washington: Carnegie Institution, 1915)
Needham, Joseph, *Science and Civilization in China* (Cambridge: Cambridge University Press, 1959), Vol. III
Rajagopal, C. T., e T. V. Vedamurthi Aiyar, "On the Hindu Proof of Gregory's Series," *Scripta Mathematica*, XVII (1951) 65-74. Ver também XV (1949) 201-209 e XVIII (1952) 25-30
Sarton, George, *An Introduction to the History of Science* (Baltimore: Carnegie Institution of Washington, 1927-1948, 3 vols. in 5)
Scott, J. F., *A History of Mathematics* (Londres: Taylor & Francis, 1958)
Smith, D. E., *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 vols., reimpressão em brochura, New York: Dover, 1958)
Smith, D. E. e L. C. Karpinski: *The Hindu-Arabic Numerals* (Boston: Ginn, 1911)
Struik, D. J., "On Ancient Chinese Mathematics," *The Mathematics Teacher*, 56 (1963), 424-432
Winter, H. J. J., *Eastern Science* (Londres: John Murray, 1952)
Yeldham, F. A., *The Story of Reckoning in the Middle Ages* (Londres: G. G. Harrap, 1926)

EXERCÍCIOS

1. Compare as matemáticas hindu e chinesa quanto a tópicos favoritos e nível de realização.
2. Qual delas teve maior influência no pensamento moderno, a matemática chinesa ou a hindu? Explique.
3. Que evidência há de influência grega na matemática hindu? Há evidência de influência hindu na Grécia?
4. É provável que matemáticos chineses e hindus tenham feito um intercâmbio de conhecimentos? Explique.
5. Como se explica a indiferença chinesa e hindu quanto às secções cônicas?
6. Descreva alguns pontos em que a álgebra hindu diferia marcadamente da grega.
7. Resolva o sistema

$$\begin{aligned} 4x + y + z &= 40, \\ 2x + 3y + z &= 30, \\ x + y + 2z &= 20, \end{aligned}$$

pelo método chinês de matrizes.

8. Escreva o número 7 834 679 em numerais chineses em barra e na notação posicional maia.
9. Usando o método de Ch'in Chiu-shao, ache a raiz quadrada de 29 584.
10. Escreva na notação de Chu Shih-chieh os coeficientes da expansão da nona potência de um binômio.
11. Justifique que a regra de Aryabhata para achar o número de termos numa progressão aritmética, dados o primeiro termo, a razão e a soma dos termos.
12. Ache sen 15° pela fórmula de recorrência no *Siddhānta* e compare isso com o valor encontrado nas tabelas atuais.
13. Use um esquema em gelosia para achar o produto de 345 e 256.
14. Divida 56 789 por 273 usando o método do "galeão".
15. Verifique a multiplicação no Exerc. 13 tirando noves fora no multiplicando, multiplicador e produto.
16. Da fórmula de Brahmagupta para a área deduza a de Heron como caso especial.
17. Mostre que $21x + 14y = 3$ não tem solução em inteiros.
18. Das fórmulas de Brahmagupta para as diagonais de um quadrilátero (cíclico) deduza o teorema de Ptolomeu.
19. Resolva o problema do bambu quebrado de Bhaskara.
20. Resolva o problema do pavão e a cobra de Bhaskara.

*21. Verifique que o quadrilátero de Brahmagupta de lados $a = 52$, $b = 25$, $c = 39$, $d = 60$ e diagonais $e = 56$ e $f = 63$ é cíclico.

*22. O quadrilátero de Brahmagupta de lados $a = 25$, $b = 25$, $c = 25$, $d = 39$ pode ser cíclico? Explique.

*23. Mostre que a fórmula de Liu Hui vale para o volume do tetraedro $(0, 0, 0)$, $(0, 0, a)$, $(b, 0, 0)$, $(c, d, 0)$. Vale para todos os tetraedros com um par de arestas opostas ortogonais? Explique.

Capítulo 13

A hegemonia árabe

> Ah, mas meus cálculos, dizem as pessoas, trouxeram o Ano à Medida humana? Então, foi por cortar do Calendário o Amanhã que ainda não nasceu e o morto Ontem.
>
> *Omar Khayyam* (Rubayat, *segundo Fitz Gerald*)

1 Pela época em que Brahmagupta escrevia, o Império Sabeano da Arábia Felix tinha caído e a península passava por uma crise séria. Era habitada principalmente por nômades do deserto, chamados beduínos, que não sabiam ler nem escrever; entre eles estava o profeta Maomé, nascido em Meca em cerca de 570. Durante suas viagens Maomé entrou em contato com judeus e cristãos, e o amálgama dos sentimentos religiosos que surgiram em sua mente levou-o a considerar-se como o apóstolo de Deus enviado para conduzir seu povo. Por cerca de dez anos ele pregou em Meca, mas em 622, perante uma conspiração para matá-lo aceitou um convite para ir a Medina. Essa "fuga", conhecida como Hégira, marcou o início da era maometana — era que exerceria forte influência sobre o desenvolvimento da matemática. Maomé tornou-se um líder militar além de religioso. Dez anos depois ele estabeleceu um estado maometano, com centro em Meca no qual os judeus e cristãos, sendo também monoteistas, recebiam proteção e liberdade de culto. Em 632, enquanto planejava atacar o Império Bizantino, Maomé morreu em Medina. Sua morte súbita não impediu a expansão do domínio islâmico, pois seus seguidores invadiram territórios vizinhos com espantosa rapidez. Dentro de poucos anos Damasco e Jerusalém e grande parte do vale mesopotâmico caíram perante os conquistadores; em 641 Alexandria, que por muitos anos fora o centro matemático do mundo, foi capturada. Há uma lenda que diz que quando o chefe das tropas vitoriosas perguntou o que devia ser feito com os livros na biblioteca, foi-lhe dito que os queimasse; pois se estivessem de acordo com o Corão, eram supérfluos, se estivessem em desacordo eram pior que supérfluos. No entanto, as estórias de que os banhos por muito tempo foram aquecidos com fogueiras de livros queimados são sem dúvida exagerados. Após as depredações de fanáticos militares e religiosos anteriores, e longos períodos de abandono, provavelmente havia relativamente poucos livros na biblioteca que antes fora a maior do mundo.

Por mais de um século os conquistadores árabes lutaram entre si e com seus inimigos, até que por volta de 750 o espírito guerreiro se abrandou. Nessa época surgira um cisma entre os árabes ocidentais de Marrocos e os árabes orientais que, sob o califa al-Mansur, tinham estabelecido uma nova capital em Bagdá, cidade que logo se transformaria no novo centro da matemática. No entanto, o califa de Bagdá não podia sequer conseguir a obediência de todos os muçulmanos da metade oriental de seu império, embora seu nome aparecesse nas moedas e fosse incluído nas orações de seus "súditos". A unidade do mundo árabe, em outras palavras, era mais econômica e religiosa do que política. A língua árabe não era necessariamente usada por todos, embora fosse a língua franca dos intelectuais. Por isso é mais apropriado falar de cultura islâmica, em vez de árabe, embora usemos ambos os termos mais ou menos indiferentemente.

Durante o primeiro século das conquistas árabes houvera confusão política e cultural, e possivelmente isto explica a dificuldade de localizar a origem do moderno sistema de numeração. Os árabes no início não tinham interesses intelectuais, e tinham pouca cultura, além da língua, a impor aos povos que venciam. Nisso vemos uma repetição da situação de quando Roma conquistou a Grécia, da qual se disse que, num sentido cultural, a Grécia cativa capturou Roma. Por volta de 750 os árabes estavam prontos a deixar que a história se repetisse, pois os vencedores se mostraram ansiosos por absorver a cultura das civilizações que tinham sobrepujado. Por 766 sabemos que uma obra astronômico-matemática, conhecida pelos árabes como *Sindhind* foi trazida a Bagdá da Índia. Pensa-se em geral que se tratasse do *Brahmasphuta Siddhānta*, embora possa ter sido o *Sūrya Siddhānta*. Poucos anos depois, talvez em 775 mais ou menos, esse *Siddhānta* foi traduzido para o árabe e não muito tempo depois (cerca de 780) o *Tetrabiblos* astrológico de Ptolomeu foi traduzido do grego para o árabe. A alquimia e a astrologia estiveram entre os primeiros estudos a estimular o interesse dos conquistadores. O "milagre árabe" não está tanto na rapidez com que surgiu o império político como no entusiasmo com que, uma vez despertado seu gosto, os árabes absorveram a cultura de seus vizinhos.

2 O primeiro século do império muçulmano fora destituído de realizações científicas. Esse período (de cerca de 650 a 750) foi na verdade, talvez, o nadir no desenvolvimento da matemática, pois os árabes ainda não tinham entusiasmo intelectual, e o interesse pela cultura tinha quase desaparecido no resto do mundo. Não fosse o súbito despertar cultural do Islam na segunda metade do oitavo século, certamente muito mais se teria perdido da ciência e da matemática antigas. A Bagdá, nesse tempo, foram chamados estudiosos da Síria e Mesopotâmia inclusive judeus e cristãos nestorianos; sob três grandes patronos da cultura abássida — al-Mansur, Harum al-Rachid e al-Mamum — a cidade se tornou uma nova Alexandria. Durante o reino do segundo desses califas, familiar hoje através das *Mil e uma noites*, parte de Euclides foi traduzida. Foi durante o califado de al-Mamum (809-833), no entanto, que os árabes se entregaram totalmente à sua paixão por tradução. Diz-se que o califa teve um sonho em que apareceu Aristóteles, e em conseqüência al-Mamum decidiu mandar fazer versões árabes de todas as obras gregas em que conseguisse deitar as mãos, inclusive o *Almajesto* de Ptolomeu e uma versão completa de *Os elementos* de Euclides. Do Império Bizantino, com o qual os árabes mantinham uma paz inquieta, foram obtidos, mediante tratados, manuscritos gregos.

Al-Mamum estabeleceu em Bagdá uma "Casa da Sabedoria" (Bait al-hikma) comparável ao antigo Museu de Alexandria. Entre os mestres havia um matemático e astrônomo Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi, cujo nome, como o de Euclides, iria tornar-se familiar na Europa Ocidental[1]. Esse sábio, que morreu algum tempo antes de 850, escreveu mais de meia dúzia de obras de astronomia e matemática, das quais as mais antigas provavelmente se baseavam nos *Sindhind* derivados da Índia. Além de tabelas astronômicas, e tratados sobre o astrolábio e relógio do sol, al-Khowarizmi escreveu dois livros sobre aritmética e álgebra que tiveram papéis muito importantes na história da matemática. Um deles sobrevive apenas numa única cópia de uma tradução latina com o título *De numero hindorum* (Sobre a arte hindu de calcular), a versão árabe original tendo sido perdida. Nessa obra, baseada provavelmente numa tradução árabe de Brahmagupta, al-Khowarizmi deu uma exposição tão completa dos numerais hindus que provavelmente foi o responsável pela impressão muito difundida mas falsa de que nosso sistema de numeração é de origem árabe. Al-Khowarizmi não manifesta nenhuma pretensão de originalidade quanto ao sistema, cuja origem hindu ele assume como fato; mas quando mais traduções latinas de sua obra apareceram na Europa, leitores descuidados começaram a atribuir não só o livro, mas a numeração, ao autor. A nova notação veio a ser conhecida como a de al-Khowarizmi, ou mais descuidadamente, algorismi; finalmente o esquema de numeração usando numerais hindus veio a ser chamado simplesmente algorismo ou algoritmo, palavra que, originalmente derivada do nome de al-Khowarizmi, agora significa, mais geralmente, qualquer regra especial de processo ou operação — como o método de Euclides para encontrar o máximo divisor comum, por exemplo.

3 Através de sua aritmética, o nome de al-Khowarizmi tornou-se uma palavra vernácula; através do título de seu livro mais importante, *Al-jabr wa'l muqābalah* ele nos

[1]Para dois estudos recentes sobre a ciência de al-Khowarizmi, ver *Isis*, 54 (1963), 97-119

deu uma palavra ainda mais familiar. Desse título veio o termo *álgebra* pois foi por esse livro que mais tarde a Europa aprendeu o ramo da matemática que tem esse nome. Diofante é às vezes chamado o "pai da álgebra", mas esse título pertence mais a al-Khowarizmi. É verdade que em dois aspectos a obra de al-Khowarizmi representa um retrocesso com relação à de Diofante. Primeiro é de nível muito mais elementar que o que se encontra nos problemas de Diofante e, segundo, a álgebra de al-Khowarizmi é inteiramente expressa em palavras, sem nada da sincopação que se encontra na *Aritmética* do grego ou na obra de Brahmagupta. Mesmo os números são escritos em palavras em vez de símbolos! É muito improvável que al-Khowarizmi conhecesse a obra de Diofante, mas deve ter conhecido ao menos as partes de astronomia e computação de Brahmagupta; no entanto, nem al-Khowarizmi nem outros estudiosos árabes usaram sincopação ou números negativos. Mesmo assim, o *Al-jabr* está mais próximo da álgebra elementar de hoje que as obras de Diofante e de Brahmagupta, pois o livro não se ocupa de problemas difíceis de análise indeterminada mas contém uma exposição direta e elementar da resolução de equações, especialmente de segundo grau. Os árabes em geral gostavam de uma boa e clara apresentação indo da premissa à conclusão, e também de organização sistemática — pontos em que nem Diofante nem os hindus se destacavam. Os hindus eram fortes em associação e analogias, em intuição e faro artístico e imaginativo, ao passo que os árabes tinham mente mais prática e terra a terra na sua abordagem matemática.

O *Al-jabr* chegou a nós em duas versões, latina e árabe, mas na tradução latina, *Liber algebrae et almucabola*, falta uma parte considerável do texto árabe. Na tradução latina, por exemplo, não há prefácio, talvez porque o prefácio do autor em árabe elogiasse profusamente o profeta Maomé, e al-Mamum, "o Comendador dos Crentes". Al-Khowarizmi escreve que esse último o tinha encorajado a "compor uma breve obra sobre cálculos por (regras de) complementação e redução, restringindo-a ao que é mais fácil e útil na aritmética, tal como os homens constantemente necessitam em casos de heranças, legados, partições, processos legais e comércio, e em todas as suas transações uns com os outros, ou onde se trata de medir terras, escavar canais, computação geométrica e de outras coisas de vários tipos e espécies"[2].

Não se sabe bem o que significam os termos *al-jabr* e *muqābalah*, mas a interpretação usual é semelhante à que a tradução acima implica. A palavra *al-jabr* presumivelmente significa algo como "restauração" ou "completação" e parece referir-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação, a palavra *muqābalah*, ao que se diz, refere-se à "redução" ou "equilíbrio" — isto é, ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação[3]. A influência árabe na Espanha muito depois do tempo de al-Khowarizmi pode ser vista no *Don Quixote*, onde a palavra *algebrista* é usada para indicar um "restaurador" de ossos.

4 A tradução latina da *Álgebra* de al-Khowarizmi se inicia com uma breve explanação introdutória do princípio posicional para números e daí passa à resolução, em seis capítulos curtos, dos seis tipos de equações formadas com as três espécies de quantidades: raízes, quadrados, e números (isto é, x, x^2, e números). Um autor de textos um pouco posterior, abu-Kamil Shoja ben Aslam, assim descreveu a situação:

> A primeira coisa necessária para os estudantes dessa ciência (álgebra) é entender as três espécies que são assinaladas por Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi em seu livro. São elas *raízes, quadrados* e *números*[4].

[2]Ver *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi*, ed. por L. C. Karpinski (1915), p. 46. As traduções aqui provêm dessa edição

[3]Deve-se notar, no entanto, que essa interpretação foi questionada por Solomon Gandz, "The Origin of the Term 'Algebra'", *American Mathematical Monthly*, 33 (1926), 437-440. Gandz acha que "jabr" era uma palavra assíria para equação e que *al-muqābalah* é simplesmente a tradução árabe de *al-jabr*

[4]L. C. Karpinski, "The Algebra of Abu Kamil", *American Mathematical Monthly*, 21 (1914), 37-48

O Cap. 1, em três parágrafos curtos, abrange o caso de quadrados iguais a raízes, expresso em notação moderna como $x^2 = 5x$, $x^2/3 = 4x$ e $5x^2 = 10x$, dando as respostas $x = 5$, $x = 12$ e $x = 2$ respectivamente. (A raiz $x = 0$ não era reconhecida.) O Cap. II abrange o caso de quadrados iguais a números, e o Cap. III resolve o caso de raízes iguais a números, sempre com três ilustrações por capítulo para cobrir os casos em que o coeficiente do termo variável é igual a, maior que ou menor que um. Os Caps. IV, V e VI são mais interessantes pois abrangem sucessivamente os três casos clássicos de equações quadráticas com três termos: (1) quadrados e raízes iguais a números, (2) quadrados e números iguais a raízes, e (3) raízes e números iguais a quadrados. As soluções são dadas por regras "culinárias" para "completar o quadrado" aplicadas a exemplos específicos. O Cap. IV, por exemplo, contém as três ilustrações $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$, e $(1/2)x^2 + 5x = 28$. Em cada caso só é dada a resposta positiva. No Cap. V só é usado um exemplo — $x^2 + 21 = 10x$ — mas ambas as raízes, 3 e 7, são dadas, correspondendo à regra $x = 5 \mp \sqrt{25-21}$. Aqui al-Khowarizmi chama a atenção para o fato de que o que chamamos de discriminante deve ser positivo:

> É preciso que vocês entendam também que quando tomam a metade das raízes nessa forma da equação e então multiplicam a metade por ela mesma; se o que resulta da multiplicação for menor que as unidades mencionadas acima como acompanhando o quadrado, então vocês têm uma equação.

No Cap. VI novamente o autor usa um só exemplo — $3x + 4 = x^2$ — pois quando o coeficiente de x^2 não for a unidade, o autor nos lembra de dividir primeiro por esse coeficiente (como no Cap. IV). Mais uma vez os passos para completar o quadrado são meticulosamente indicados, sem justificação, o processo sendo equivalente à solução $x = 1\,1/2 + \sqrt{(1\,1/2)^2 + 4}$. Também aqui só uma raiz é dada, porque a outra é negativa.

5 Os seis casos de equações dados acima esgotam as possibilidades quanto a equações lineares e quadráticas que têm uma raiz positiva. A exposição de al-Khowarizmi era tão sistemática e completa que seus leitores não devem ter tido dificuldade para aprender as soluções. Nesse sentido, pois, al-Khowarizmi merece ser chamado "o pai da álgebra". No entanto, nenhum ramo da matemática aparece já maduro, e não podemos deixar de perguntar de onde veio a inspiração para a álgebra árabe. A essa pergunta não se pode dar resposta categórica; mas a arbitrariedade das regras e a forma estritamente numérica dos seis capítulos nos lembram a matemática da Babilônia antiga e da Índia medieval. A exclusão da análise indeterminada, um tópico favorito dos hindus, e a ausência de qualquer sincopação, como a que se encontra em Brahmagupta, podem sugerir a Mesopotâmia como fonte mais provável que a Índia. Quando lemos além do sexto capítulo, no entanto, uma luz inteiramente nova é lançada sobre a questão. Al-Khowarizmi continua:

> Já dissemos o bastante, no que se refere a números, sobre os seis tipos de equações. Agora, porém, é necessário que demonstremos geometricamente a verdade dos mesmos problemas que explicamos com números.

O tom dessa passagem é obviamente grego, não babilônio ou indiano. Há, pois, três diferentes teorias quanto à origem da álgebra árabe; uma dá ênfase a influências hindus, outra ressalta a tradição mesopotâmica, ou sírio-persa, e a terceira aponta inspiração grega[5]. Provavelmente chegaremos perto da verdade combinando as três teorias. Os filósofos do Islam admiravam Aristóteles a ponto de imitá-lo servilmente, mas os ecléticos matemáticos maometanos parecem ter escolhidos os elementos adequados de várias fontes.

6 A *Álgebra* de al-Khowarizmi revela inconfundíveis elementos gregos, mas as primeiras demonstrações geométricas têm pouco em comum com a matemática grega clássica. Para a equação $x^2 + 10x = 39$ al-Khowarizmi traça um quadrado ab para representar x^2, e sobre os quatro lados desse quadrado coloca retângulos c, d, e e f cada um com largura 2 1/2. Para completar o quadrado maior é preciso acrescentar os quatro pequenos quadrados nos cantos (pontilhados na Fig. 13.1), cada um dos quais tem uma área de 6 1/4 unidades. Portanto para "completar o quadrado" somamos 4 vezes 6 1/4 unidades ou 25 unidades, obtendo pois um quadrado de área total 39 + 25 = 64 unidades (como fica claro do segundo membro da equação). O lado do quadrado grande deve pois ser de 8 unidades, de que subtraímos 2 vezes 2 1/2 ou 5 unidades, achando $x = 3$, e provando assim que a resposta encontrada no Cap. IV está correta.

As demonstrações geométricas para os Caps. V e VI são um pouco mais complicadas. Para a equação $x^2 + 21 = 10x$ o autor traça o quadrado ab para representar x^2 e o retângulo bg para representar 21 unidades. Então o retângulo grande formado com o quadrado e o retângulo bg deve ter uma área igual a $10x$, de modo que o lado ag ou hd deve ser de 10 unidades. Se, então, bissectamos hd em e, traçamos et perpendicular a hd, estendemos te até c tal que $tc = tg$, e completamos os quadrados $tclg$ e $cmne$ (Fig. 13.2), a área tb será igual à área md. Mas o quadrado te é 25 e o gnômon $tenmlg$ é 21 (pois o gnômon é igual ao retângulo bg). Portanto o quadrado nc é 4 e seu lado ec é 2. Como $ec = be$ e como $he = 5$, vemos que $s = hb = 5 - 2$ ou 3, o que prova que a solução aritmética dada no Cap. V está correta. Um diagrama modificado é dado para a raiz $x = 5 + 2 = 7$, e um tipo análogo de figura é usado para justificar geometricamente o resultado achado algebricamente no Cap. VI.

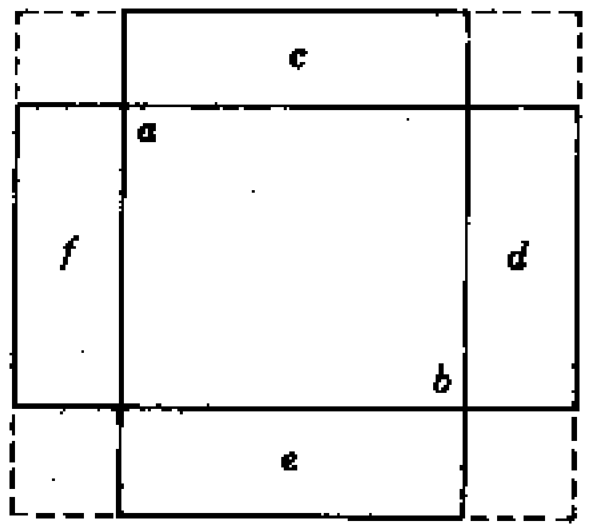


Figura 13.1

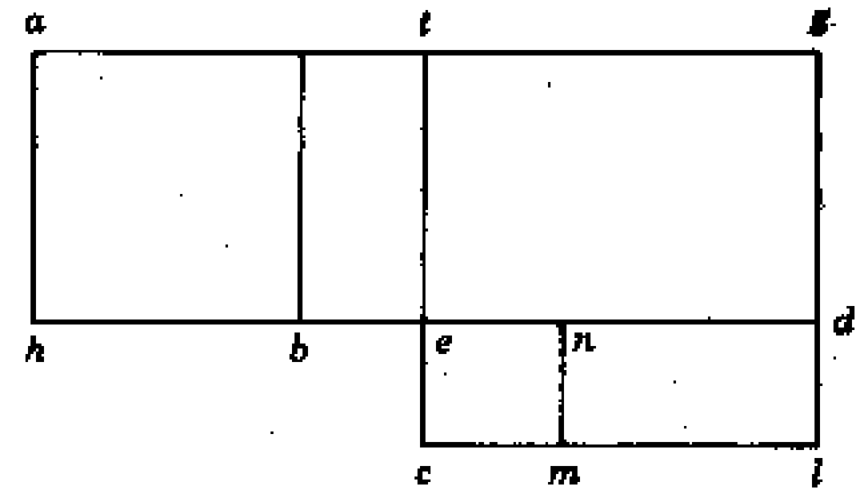


Figura 13.2

7 Uma comparação entre a Fig. 13.2, tirada da *Álgebra* de al-Khowarizmi, com diagramas encontrados em *Os elementos* de Euclides em conexão com a álgebra geométrica grega (como nossa Fig. 7.7), leva inevitavelmente à conclusão de que a álgebra árabe tinha muito em comum com a geometria grega; no entanto, a primeira parte, aritmética, da *Álgebra* de al-Khowarizmi evidentemente é estranha ao pensamento grego. O que aparentemente aconteceu em Bagdá foi exatamente o que seria de se esperar num centro intelectual cosmopolita. Os sábios árabes tinham grande admiração pela astronomia, matemática, medicina e filosofia gregas, assuntos que dominaram o melhor que podiam. No entanto, não podiam deixar de observar que, como tinha dito o Bispo nestoriano Sebokt quando em 662 ele pela primeira vez chamou a atenção para os nove maravilhosos dígitos hindus, "há também outros que sabem alguma coisa". É provável que al-Khowarizmi fosse um exemplo típico do ecletismo árabe que será tão freqüentemente observado em outros casos. Seu sistema de numeração muito provavelmente vinha da Índia, sua sistemática resolução de equações pode ter sido desenvolvida na Mesopotâmia, e o quadro geométrico lógico para suas soluções evidentemente vinha da Grécia.

A *Álgebra* de al-Khowarizmi contém mais que a resolução de equações, material que ocupa a primeira metade. Há, por exemplo, regras para operações com expressões binomiais, inclusive produtos como $(10 + 2)(10 - 1)$ e $(10 + x)(10 - x)$. Embora os árabes rejeitassem as raízes negativas e grandezas negativas, conheciam as regras que governam o que chamamos números com sinal. Há também provas geométricas alternativas de alguns dos seis casos de equações do autor. Finalmente, a *Álgebra* contém uma ampla variedade de problemas ilustrando os seis capítulos ou casos. Como ilustração para o quinto capítulo, por exemplo, al-Khowarizmi pede a divisão de dez em duas partes de modo que "a soma dos produtos obtidos multiplicando cada parte por si mesma seja

[5] Ver Solomon Gandz, "The Sources of al-Khowarizmi's Algebra" *Osiris*, 1, (1936), 263-277; também H. J. J. Winter, "Formative Influences in Islamic Science", *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 6 (1953), 171-192

igual a cinqüenta e oito". A versão árabe existente, ao contrário da latina, contém também uma extensa discussão de problemas de herança, como o seguinte:

> Um homem morre deixando dois filhos e legando um terço de seu capital a um estranho. Deixa dez dirhems de propriedade e uma dívida de dez dirhems sobre um filho.

A resposta não é o que se espera, pois o estranho só recebe 5 dirhems. Segundo a lei árabe, um filho que deve à herança de seu pai uma quantia maior que a sua parte, conserva toda a soma que deve, uma sendo considerada como sua parcela na propriedade e o resto como doação de seu pai. Até certo ponto parecem ter sido as complicadas leis que regiam a herança a encorajar o estudo da álgebra na Arábia.

8 Alguns dos problemas de al-Khowarizmi constituem prova bastante clara da dependência dos árabes com relação à matemática babilônico-herodiana. Um deles presumivelmente foi tirado diretamente de Heron, pois a figura e as dimensões são iguais. Dentro de um triângulo isósceles tendo lados de 10 m e base de 12 m (Fig. 13.3) deve-se inscrever um quadrado, e o lado deste quadrado é pedido. O autor da *Álgebra* primeiro mostra pelo teorema de Pitágoras que a altura do triângulo é 8 m, de modo que a área do triângulo é 48 m². Chamando o lado do quadrado a "coisa", ele observa que o quadrado da "coisa" será encontrado tirando da área do triângulo grande as áreas de três triângulos pequenos que jazem fora do quadrado, mas dentro do triângulo grande. A soma das áreas dos pequenos triângulos embaixo ele sabe ser igual ao produto da "coisa" por seis menos metade da "coisa"; e a área do triângulo pequeno de cima é o produto de oito menos a "coisa" por metade da "coisa". Então ele é levado à conclusão óbvia de que a "coisa" é 4 4/5 m — o lado do quadrado. A diferença principal entre a forma desse problema em Heron e em al-Khowarizmi é que Heron exprimiu a resposta em termos de frações unitárias como 4 1/2 1/5 1/10. As semelhanças são tão mais acentuadas que as diferenças que podemos tomar esse caso como confirmação do axioma geral de que a continuidade na história da matemática é a regra e não a exceção. Quando parece haver uma descontinuidade, devemos primeiro considerar a possibilidade de que o salto aparente possa ser explicado pela perda de documentação.

9 A *Álgebra* de al-Khowarizmi é em geral considerada como a primeira obra sobre o assunto, mas uma publicação recente na Turquia põe algumas dúvidas quanto a isso. Um manuscrito de uma obra por abd-al-Hamid ibn-Turk, chamada "Necessidades Lógicas em Equações Mistas" era parte de um livro sobre *Al-jabr wa'l muqābalah* que era evidentemente muito semelhante ao de al-Khowarizmi e publicado mais ou menos ao mesmo tempo, talvez até antes. Os capítulos preservados sobre "Necessidades Lógicas" dão exatamente o mesmo tipo de demonstração geométrica que a *Álgebra* de al-Khowarizmi e num caso o mesmo exemplo ilustrativo $x^2 + 21 = 10x$. Num ponto a exposição de abd-al-Hamid é mais completa que a de al-Khowarizmi, pois, ele fornece figuras geométricas para provar que se o discriminante é negativo uma equação quadrática não tem solução. Semelhanças nas obras dos dois homens e na organização sistemática que nelas se encontra parecem indicar que a álgebra em seus dias não era um desenvolvimento tão recente quanto se supunha[6]. Quando aparecem simultaneamente textos com uma exposição convencional e bem ordenada é provável que o assunto esteja bem adiante do estágio formativo. Os sucessores de al-Khowarizmi podiam dizer, depois que um problema fora posto em forma de equação, "Operem segundo as regras da álgebra e almucabala". De qualquer forma, a preservação da *Álgebra* de al-Khowarizmi pode ser tomada como indício de que era um dos melhores textos típicos da álgebra da época. Foi para a álgebra o que *Os elementos* de Euclides foi para a geometria — a melhor exposição elementar disponível até os tempos modernos — mas a obra de al-Khowarizmi tinha uma deficiência séria que precisava ser removida antes de poder servir eficazmente aos seus fins nos tempos modernos: uma notação simbólica tinha que ser desenvolvida

[6]Ver Aydin Sayili, *Logical Necessities in Mixed Equations by Abd al Hamid ibn Turk and the Algebra of His Time* (1962)

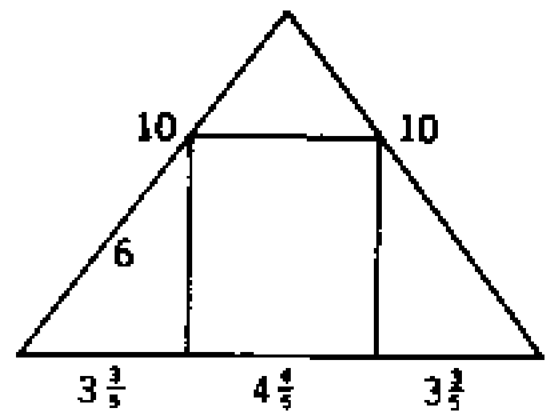


Figura 13.3

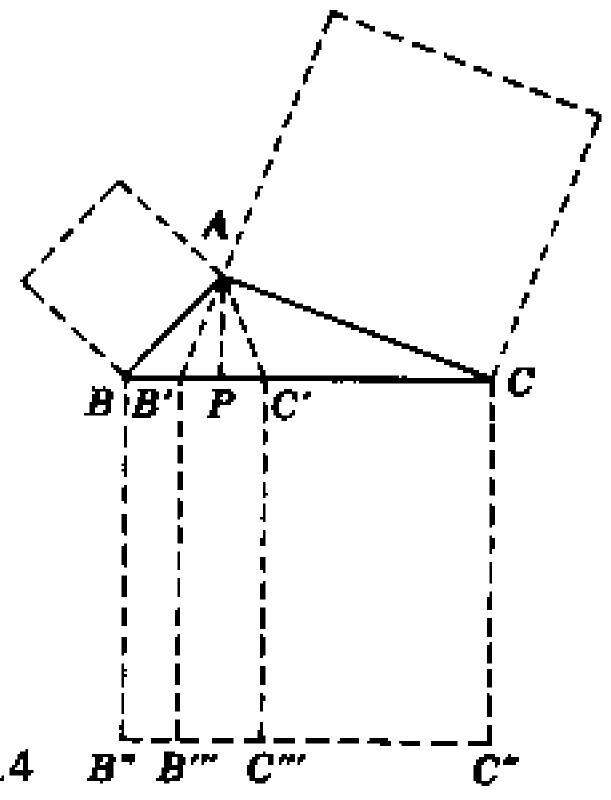


Figura 13.4

para substituir a forma retórica. Esse passo os árabes nunca deram, exceto quanto a substituir as palavras — número por sinais — número.

10 O século nove foi glorioso para a matemática árabe, pois produziu não só al-Khowarizmi na primeira metade do século, como também Thabit ibn-Qurra (826-901) na segunda metade. Se o al-Khowarizmi se assemelhava a Euclides como "elementador" então Thabit é o equivalente árabe de Papus, o comentador da matemática superior. Thabit fundou uma escola de tradutores, especialmente do grego e sírio, e com ele temos uma dívida imensa, por traduções para o árabe de obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio, Ptolomeu e Eutócio. (Observe-se a omissão de Diofante e Papus, autores que evidentemente não foram a princípio conhecidos na Arábia, embora a *Arithmetica* diofantina se tornasse familiar pelo fim do décimo século.) Não fossem seus esforços, o número de obras gregas existentes hoje seria menor. Por exemplo, teríamos apenas os quatro primeiros livros, em vez dos sete primeiros, de *As cônicas* de Apolônio. Além disso, Thabit dominava tão completamente o conteúdo dos clássicos que traduziu que sugeriu modificações e generalizações. Deve-se a ele uma fórmula notável para números amigáveis: Se p, q e r são primos, e se são da forma $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ e $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$, então $2^n pq$ e $2^n r$ são números amigáveis, pois cada um é igual à soma dos divisores próprios do outro. Como Papus, ele também deu uma generalização do teorema de Pitágoras que se aplica a todos os triângulos, sejam retângulos, sejam escalenos. Se do vértice A de um triângulo qualquer ABC traçamos retas que cortam BC em pontos B' e C' tais que os ângulos $AB'B$ e $AC'C$ são cada um igual ao ângulo A (Fig. 13.4) então $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}(\overline{BB'} + \overline{CC'})$. Thabit não forneceu prova do teorema, mas é fácil dá-la por teorema sobre triângulos semelhantes. Na verdade, o teorema fornece uma bela generalização do diagrama usado por Euclides para a prova do teorema de Pitágoras. Se, por exemplo, o ângulo A é obtuso, então o quadrado sobre o lado AB é igual ao retângulo $BB'B''B'''$, e o quadrado sobre AC é igual ao retângulo $CC'C''C'''$, onde $BB'' = CC'' = BC = B''C''$. Isto é, a soma dos quadrados sobre AB e AC é o quadrado sobre BC menos o retângulo $B'C'B'''C'''$. Se o ângulo A for agudo, então as posições de B' e C' são trocadas com relação a AP, onde P é a projeção de A sobre BC, e nesse caso a soma dos quadrados sobre AB e AC é igual ao quadrado sobre BC *aumentado* do retângulo $B'C'B'''C'''$. Se A for um ângulo reto então B' e C' coincidem com P, e nesse caso o teorema de Thabit se reduz ao de Pitágoras. (Thabit[7] não traçou as linhas pontilhadas mostradas na Fig. 13.4, mas ele efetivamente considerou os diferentes casos.)

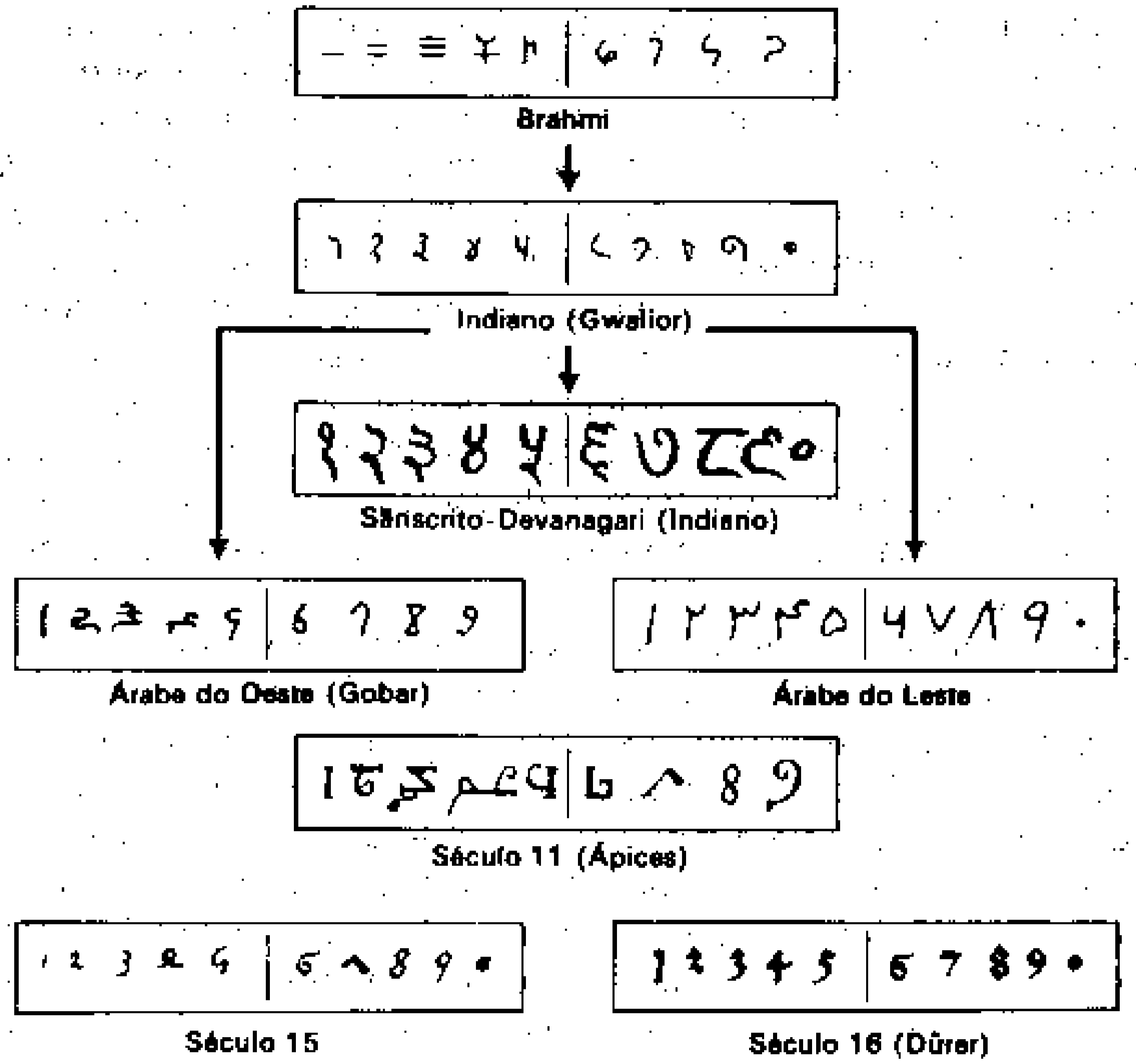
Provas alternativas do teorema de Pitágoras, trabalhos sobre segmentos parabólicos e paraboloidais, uma discussão de quadrados mágicos, trissecções de ângulos e novas teorias astronômicas estão entre as outras contribuições de Thabit à cultura matemática. Às vezes os árabes são descritos como imitadores servis dos gregos na ciência e na filosofia, mas tais acusações são exageradas. Thabit, por exemplo, audaciosamente

[7]Ver Aydin Sayili, "Thabit ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem", *Isis*, 51 (1960), 35-37. Ver também *Isis*, 55 (1964), 68-70 e 57 (1966), 56-66

acrescentou uma nona esfera às oito previamente assumidas em versões simplificadas da astronomia Aristotélico-Ptolomaica; e em vez da precessão dos equinócios de Hiparco, só num sentido, Thabit propôs uma "trepidação dos equinócios" num tipo de movimento reciprocante. Tal discussão de pontos da astronomia grega pode bem ter sido um fator a abrir caminho para a revolução na astronomia iniciada por Copérnico.

11 Mencionamos já várias vezes que os árabes eram rápidos na absorção da cultura dos vizinhos que conquistavam; deve-se notar também que dentro das fronteiras do império árabe viviam povos de origens étnicas muito variadas: sírios, gregos, egípcios, persas, turcos e muitos outros. A maior parte deles tinha uma língua comum, o árabe, embora fossem usadas às vezes o grego e o hebraico. No entanto não devemos esperar grande uniformidade cultural. Havia considerável dose de facciosismo sempre, e às vezes esse explodia em conflitos. O próprio Thabit vivia numa comunidade pró-grega, que se opunha a ele por causa de suas simpatias pró-árabes. Na matemática árabe tais diferenças culturais ocasionalmente se tornavam evidentes, como nas obras de Abu'l Wefa (940-988) e al-Karkhi (ou al-Karagi, cerca de 1029). Em algumas de suas obras eles usavam numerais hindus, que tinham chegado à Arábia através do *Sindhind* astronômico; em outras eles adotavam o tipo grego de numeração alfabética (naturalmente com equivalentes árabes para as letras gregas). No fim, os numerais hindus, por serem superiores, predominaram, mas mesmo no círculo dos que usavam a numeração da Índia as formas dos numerais variavam consideravelmente. Obviamente tinha havido variação na Índia, mas na Arábia as variantes eram tão marcadas que há teorias sugerindo origens inteiramente diferentes para as formas usadas nas metades oriental e ocidental do mundo árabe. Talvez os numerais dos sarracenos do leste tenham vindo diretamente da Índia, enquanto que os dos mouros do oeste derivavam de formas gregas ou romanas. É mais provável que as variantes resultassem de mudanças graduais, que se verificam no espaço e no tempo, pois os numerais arábicos de hoje são muito diferentes dos numerais Devanagari (ou "divinos") ainda em uso na Índia. Afinal, são os princípios que regem o sistema de numeração que importam, não as formas específicas dos numerais. Nossos numerais são freqüentemente conhecidos como arábicos, apesar de pouco se parecerem com os em uso agora no Egito, Iraq, Síria, Arábia, Iran e outros países de cultura islâmica — isto é, as formas ١٢٣٤٥٦٧٨٩٠. Chamamos de arábicos os nossos numerais porque os princípios nos dois sistemas são os mesmos e porque nossas formas derivam das arábicas. No entanto, os princípios governando os numerais arábicos presumivelmente vieram da Índia; por isso é melhor chamar nosso sistema de hindu ou indo-arábico.

12 Assim como na numeração havia competição entre os sistemas de origens grega e indiana, também nos cálculos astronômicos houve a princípio na Arábia dois tipos de trigonometria — a geometria grega das cordas, como é encontrada no *Almajesto*, e as tabelas hindus de senos, derivadas através dos *Sindhind*. Aqui, também o conflito terminou com o triunfo do sistema hindu, e quase toda a trigonometria árabe finalmente se baseou na função seno. Na verdade, foi também através dos árabes, não diretamente dos hindus, que essa trigonometria do seno chegou à Europa. A astronomia de al-Battani (cerca de 850-929), conhecido na Europa como Albategnius, serviu como o veículo primário de transmissão, embora Thabit ibn Qurra pareça ter usado senos um pouco antes. Num livro chamado *Sobre o movimento das estrelas* Albategnius deu fórmulas, tais como $b = [a \text{ sen } (90° - A)]/\text{sen } A$ (ver Fig. 13.5) em que aparecem as funções seno e seno versor. Pelo tempo de Abu'l-Wefa, um século depois, a função tangente era bastante conhecida, de modo que a relação acima podia ser expressa mais simplesmente como $a = b \tan A$. Aqui estamos em contato mais imediato com a trigonometria moderna, pois a função tangente dos árabes ao contrário da função seno hindu, em geral era dada para um círculo unitário. Ainda mais com Abu'l-Wefa a trigonometria assume uma forma mais sistemática em que são provados teoremas tais como as fórmulas para ângulo duplo ou metade. Embora a função seno hindu tivesse sobrepujado a corda grega, foi no entanto o *Almajesto* de Ptolomeu que motivou o arranjo lógico de resultados trigonométricos. A lei dos senos em sua essência era conhecida por Ptolomeu e está contida por



Genealogia de nossos dígitos. Segundo Karl Menninger, *Zahlwort und Ziffer* (Göttingen, RFA: Vandenhoeck & Ruprecht, 1957-1958, 2 vols.) II, 233

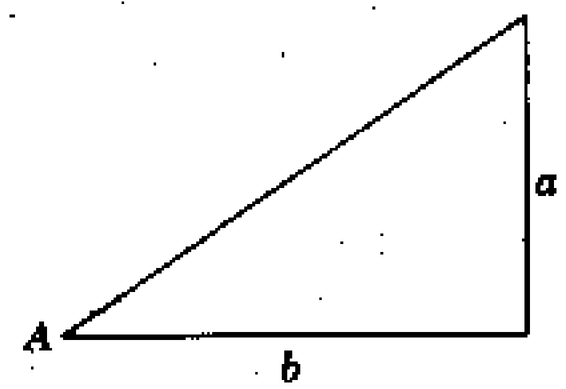


Figura 13.5

implicação na obra de Brahmagupta, mas é freqüentemente atribuída a Abu'l-Wefa por causa de sua formulação clara da lei para triângulos esféricos. Abu'l-Wefa também fez uma nova tabela para senos para ângulos diferentes, diferindo por $(1/4)°$, usando o equivalente de oito casas decimais. Forneceu também uma tabela de tangentes e usou todas as seis funções trigonométricas comuns, bem como relações entre elas, mas seu uso das novas funções não parece ter tido muitos seguidores no período medieval.

Tenta-se às vezes atribuir às funções tangente, co-tangente, secante e co-secante datas específicas e mesmo autorias específicas, mas isto não pode ser feito com nenhuma segurança. Na Índia e na Arábia houve uma teoria geral dos comprimentos das sombras, relativas a uma unidade de comprimento, ou gnômon, para altitudes solares variáveis. Não havia uma unidade de comprimento padrão para a barra ou gnômon usado, embora um palmo ou a altura de um homem fossem freqüentemente adotados. A sombra horizontal, para um gnômon vertical de comprimento dado, era o que chamamos a co-tangente do ângulo de elevação do Sol. A "sombra reversa" — isto é, a sombra lançada numa parede vertical por uma barra ou gnômon que se projeta da parede horizontalmente — era o que chamamos tangente da elevação do Sol. A "hipotenusa da sombra" — isto é, a distância da ponta do gnômon à ponta da sombra — era o equivalente de nossa função co-secante; e a "hipotenusa da sombra reversa" desempenhava o papel da nossa secante. Essa tradição quanto a sombras parece ter estado bem estabelecida na Ásia pelo tempo de Thabit ibn Qurra[8], mas raramente eram tabulados valores da hipotenusa (secante ou co-secante).

[8] Ver E. S. Kennedy, "Overview on Trigonometry", a aparecer no *Yearbook on History of Mathematics* of the National Council of Teachers of Mathematics

13 Abu'l-Wefa era um algebrista competente além de trigonômetra. Comentou a *Álgebra* de al-Khowarizmi e traduziu do grego um dos últimos grandes clássicos — a *Arithmetica* de Diofante. Seu sucessor al-Karkhi evidentemente usou essa tradução para se tornar um discípulo árabe de Diofante — mas sem análise diofantina! Isto é, al-Karkhi se interessava pela álgebra de al-Khowarizmi, não pela análise indeterminada dos hindus; mas como Diofante (e diferentemente de al-Khowarizmi) ele não se limitou a equações quadráticas — apesar de seguir o costume árabe de dar provas geométricas para quadráticas. Em particular, a al-Karkhi são atribuídas as primeiras soluções numéricas de equações da forma $ax^{2n} + bx^n = c$ (só eram consideradas equações com raízes positivas), onde a restrição diofantina a números racionais foi abandonada. Foi exatamente nessa direção, busca de solução algébrica (em termos de radicais) das equações de grau superior a dois, que estavam destinados a se verificar os primeiros desenvolvimentos da matemática na Renascença.

14 O tempo de al-Karkhi — começo do século onze — foi uma era brilhante na história da cultura árabe, e muitos de seus contemporâneos merecem uma breve menção — breve não porque fossem menos capazes, mas porque não eram primariamente matemáticos. Ibn-Sina (980-1037), mais conhecido no ocidente como Avicena, foi o mais importante sábio e cientista do Islam mas em seus interesses enciclopédicos a matemática tinha papel menos importante que a medicina e a filosofia. Fez uma tradução de Euclides e explicou a regra de noves fora (que por isso é às vezes injustificadamente atribuída a ele), mas é mais lembrado por sua aplicação da matemática à astronomia e à física. Assim como Avicena conciliava a cultura grega com o pensamento muçulmano, também seu contemporâneo al-Biruni (973-1048) através de seu conhecido livro chamado *Índia* fez com que a matemática e a cultura hindus se tornassem familiares aos árabes, e, portanto, a nós. Infatigável viajante e pensador crítico, deu uma exposição simpática mas candida, com descrições completas dos *Siddhāntas* e do princípio posicional para a numeração. Foi ele quem controu que Arquimedes conhecia a fórmula de Heron, e deu uma prova desta e da fórmula de Brahmagupta, insistindo corretamente que a última se aplica apenas a quadriláteros cíclicos. Ao inscrever um nonágono num círculo al-Biruni reduziu o problema, através da fórmula trigonométrica para $\cos 3\theta$, a resolver a equação $x^3 = 1 + 3x$, e para esta deu a solução aproximada em frações sexagesimais como 1;52,15,17,13 — equivalente a precisão a mais de seis casas[9]. Al-Biruni também nos deu, num capítulo sobre comprimentos de gnômon, uma exposição do cálculo de sombras hindu. A audácia de seu pensamento é ilustrada por sua discussão sobre se a terra roda ou não em torno de seu eixo, pergunta a que não deu resposta. (Aryabhata parece ter sugerido uma terra que gira no centro do espaço.) Al-Biruni contribuiu também para a física, especialmente por seus estudos sobre a gravidade específica, e as causas dos poços artesianos; mas como físico e matemático foi superado por ibn-al-Haitham (cerca de 965-1039), conhecido no Ocidente como Alhazen. O tratado mais importante escrito por Alhazen é o *Tesouro da óptica*, livro inspirado na obra de Ptolomeu sobre reflexão e refração e que por sua vez inspirou os cientistas da Europa medieval e do começo do período moderno. Entre as questões que Alhazen considerou estão a estrutura do olho, o aumento aparente do tamanho da Lua quando está próxima do horizonte, e uma avaliação, partindo de que o crepúsculo dura até o Sol atingir 19° abaixo do horizonte, da altura da atmosfera. O problema de achar o ponto num espelho esférico em que a luz de uma fonte será refletida para o olho de um observador é conhecido até hoje como "problema de Alhazen". É um "problema sólido" no sentido grego, resolúvel por secções cônicas, assunto que Alhazen conhecia bem. Estendeu os resultados de Arquimedes sobre conóides achando o volume gerado girando em torno da tangente no vértice a área limitada por um arco parabólico, o eixo e uma ordenada da parábola.

15 A matemática árabe pode, bastante razoavelmente, ser dividida em quatro partes: (1) uma aritmética, derivada presumivelmente da Índia e baseada no princípio posicional; (2) uma álgebra que, embora viesse de fontes gregas, hindus e babilônicas, tomou nas mãos dos muçulmanos uma forma caracteristicamente nova e sistemática; (3) uma trigonometria cuja substância vinha principalmente da Grécia mas à qual os árabes aplicaram a forma hindu e acrescentaram novas funções e fórmulas; (4) uma geometria que vinha da Grécia, mas para a qual os árabes contribuíram com generalizações aqui e ali. Com relação a (3) deve-se notar que ibn-Yunus (morreu em 1008), contemporâneo de Alhazen, e seu conterrâneo (ambos viveram no Egito) introduziu a fórmula $2\cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$. Essa é uma das quatro fórmulas de "produto para soma" que na Europa do século dezesseis serviram, antes da invenção dos logaritmos, para converter produtos em somas pelo método dito de *prosthaphaeresis* (adição e subtração em grego). Em conexão com (4) houve uma contribuição significativa cerca de um século depois de Alhazen por um homem que no Oriente é conhecido como cientista mas que o Ocidente olha como um dos maiores poetas persas. Omar Khayyam (cerca de 1050-1122), o "fabricante de tendas", escreveu uma *Álgebra*[10] que ia além da de al-Khowarizmi, incluindo equações de terceiro grau. Como seus predecessores árabes, Omar Khayyam dava para equações de segundo grau tanto soluções aritméticas quanto geométricas; para as equações cúbicas gerais, ele acreditava (erradamente, como se demonstrou mais tarde no século dezesseis) que soluções aritméticas eram impossíveis; por isso, deu apenas soluções geométricas. A idéia de usar cônicas que se cortam para resolver cúbicas tinha sido usada antes por Menaecmus, Arquimedes e Alhazen, mas Omar Khayyam deu o passo importante de generalizar o método para cobrir todas as equações de terceiro grau (que tinham raízes positivas). Quando numa obra anterior ele encontrou uma equação cúbica, ele observou especificamente: "Isso não pode ser resolvido por geometria plana — isto é, usando apenas régua e compasso — pois contém um cubo. Para a solução precisamos de secções cônicas"[11].

Para equações de grau superior a três Omar Khayyam evidentemente não imaginava métodos geométricos semelhantes, pois o espaço não contém mais do que três dimensões, "o que os algebristas chamam quadrado-quadrado em grandeza contínua é um fato teórico. Não existe de modo nenhum na realidade". O processo que Omar Khayyam aplicou tão tortuosamente — e orgulhosamente — às equações cúbicas pode ser enunciado com brevidade muito maior em notação e conceitos modernos como segue. Seja a cúbica $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$. Então se nessa equação substituirmos x^2 por $2py$ obtemos (lembrando que $x^3 = x^2 \cdot x$) o resultado $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$. Como a equação resultante representa uma hipérbole, e a igualdade $x^2 = 2py$ representa uma parábola, é claro que se traçarmos a parábola e a hipérbole sobre o mesmo conjunto de eixos de coordenadas, então as abscissas dos pontos de intersecção das duas curvas serão as raízes da equação cúbica. Evidentemente muitos outros pares de secções cônicas podem ser usados de modo semelhante para resolver a cúbica.

Nossa exposição da obra de Omar Khayyam não faz justiça ao seu gênio, pois, não tendo o conceito de coeficientes negativos, ele tinha que decompor o problema em muitos casos distintos conforme os parâmetros a, b, c fossem positivos, negativos ou zero. Além disso, ele tinha de identificar especificamente suas secções cônicas para cada caso, pois o conceito de parâmetro geral não existia. Nem todas as raízes de uma cúbica dada eram fornecidas, pois ele não aceitava as raízes negativas e não considerava todas as intersecções das secções cônicas. Deve-se observar também que nas antigas soluções geométricas gregas das equações cúbicas os coeficientes eram segmentos de retas, enquanto que na obra de Omar Khayyam eram números específicos. Uma das mais frutíferas contribuições do ecletismo árabe foi a tendência a fechar a separação entre a álgebra numérica e a geométrica. O passo decisivo nesta direção veio muito mais tarde, com Descartes, mas Omar Khayyam estava avançado nesta direção quando escreveu, "Quem

[9]Ver Pierre Dedron e Jean Itard, *Mathématiques et mathématiciens* (1959), p. 126

[10]Ver *The Algebra of Omar Khayyam*, ed. por D. S. Kasir (1931); também D. J. Struik, "Omar Khayyam, Mathematician", *The Mathematics Teacher*, 51 (1958), 280-285

[11]A. R. Amir-Moez, "A Paper of Omar Khayyam", *Scripta Mathematica*, 26 (1963), 323-337, p. 328

quer que imagine que a álgebra é um artifício para achar quantidades desconhecidas pensou em vão. Não se deve dar atenção ao fato de a álgebra e a geometria serem diferentes na aparência. As álgebras são fatos geométricos que são provados."[12] Ao substituir a teoria das proporções de Euclides por um método numérico, ele chegou perto da definição de números irracionais e lutou com o conceito de número real em geral[13].

6 Em sua *Álgebra* Omar Khayyam escreveu que tinha exposto em outra obra uma regra que tinha descoberto para encontrar as potências quarta, quinta, sexta e mais altas de um binômio, mas essa obra se perdeu. Presume-se que ele se refere ao arranjo do triângulo de Pascal, que parece ter aparecido ao mesmo tempo na China. Não é fácil explicar tal coincidência, mas enquanto não for encontrada nova evidência deve-se presumir a independência das descobertas. A intercomunicação entre a Arábia e a China não era grande na época; mas havia uma rota da seda ligando a China à Pérsia, e alguma informação poderia ter-se filtrado por ela.

Os árabes claramente se sentiam mais atraídos pela álgebra e pela trigonometria que pela geometria, mas um aspecto da geometria tinha um fascínio especial para eles — a prova do quinto postulado de Euclides. Mesmo entre os gregos a tentativa de provar o postulado tinha-se transformado virtualmente num "quarto famoso problema de geometria", e vários matemáticos muçulmanos continuaram o esforço. Alhazen tinha começado por um quadrilátero tri-retângulo (às vezes conhecido como "quadrângulo de Lambert" em homenagem aos esforços deste no século dezoito) e julgava ter provado que o quarto ângulo também tinha que ser reto. Desse "teorema" sobre o quadrilátero resulta facilmente o quinto postulado. Em sua "prova" Alhazen assumia que o lugar de um ponto que se move de modo a permanecer equidistante de uma reta dada é necessariamente uma reta paralela à reta dada — mas isso, como se provou no período moderno é equivalente ao quinto postulado de Euclides. Omar Khayyam criticou a prova de Alhazen com o argumento de que Aristóteles tinha condenado o uso do movimento em geometria. Omar Khayyam partiu então de um quadrilátero com dois lados iguais, ambos perpendiculares à base (usualmente chamado "quadrilátero de Saccheri", novamente em reconhecimento de esforços no século dezoito) e perguntou como seriam os outros ângulos (os superiores) do quadrilátero, que são necessariamente iguais um ao outro. Há, é claro, três possibilidades. Os ângulos podem ser (1) agudos, (2) retos, ou (3) obtusos. Omar Khayyam excluiu a primeira e a terceira possibilidades baseando-se em um princípio, que atribuiu a Aristóteles, que diz que duas retas convergentes devem cortar-se — novamente um enunciado equivalente ao postulado das paralelas de Euclides.

7 Quando Omar Khayyam morreu em 1123 a ciência árabe declinava. Excessos de faccionismo político e religioso — situação bem exemplificada pela origem de nossa palavra "assassino" — parecem ter sido parte das causas do declínio. Nunca mais o Islam alcançaria de novo o nível de cultura da era gloriosa de Avicenna e al-Karkhi, mas as contribuições muçulmanas não cessaram subitamente após Omar Khayyam. Tanto no século treze, quanto de novo no século quinze, achamos um matemático árabe merecedor de atenção. Em Maragha, por exemplo, Nasir Eddin al-Tusi (ou at-Tusi, 1201-1274), astrônomo de Hulagu Khan, neto do conquistador Gengis Khan e irmão de Kublai Khan continuou os esforços para provar o postulado das paralelas, partindo das três hipóteses usuais sobre um quadrilátero de Saccheri. Sua "prova" depende da seguinte hipótese, também equivalente à de Euclides:

> Se uma reta u é perpendicular a uma reta w em A e se a reta v é oblíqua a w em B, então as perpendiculares traçadas de u sobre v são menores que AB do lado em que v faz um ângulo agudo com w e maiores do lado em que v faz um ângulo obtuso com w[14].

[12] Amir-Moez, obra citada, p. 329

[13] Ver D. J. Struik, "Omar Khayyam, Mathematician", *The Mathematics Teacher*, **51** (1958), 280-285

[14] Ver Roberto Bonola, *Non-Euclidean Geometry* (New York: Dover reprint, 1955), p. 10. Ver também D. E. Smith, "Euclid, Omar Khayyam, and Saccheri", *Scripta Mathematica*, **3** (1935), 5-10

Os escritos de Nasir Eddin, o último da seqüência de três precursores árabes da geometria não-euclidiana, foram traduzidos e publicados por Wallis no século dezessete; parece que essa obra foi o ponto de partida para os desenvolvimentos de Saccheri no primeiro terço do século dezoito.

Nasir Eddin tinha os interesses característicos dos árabes; por isso deu contribuições também à trigonometria e à astronomia. Continuando a obra de Abu'l-Wefa, foi responsável pelo primeiro tratado sistemático sobre trigonometria plana e esférica, tratando o material como assunto independente e não apenas como servidor da astronomia, como se fazia na Grécia e na Índia. São usadas as seis funções trigonométricas usuais, e são dadas regras para resolver os vários casos de triângulos planos e esféricos. Infelizmente a obra de Nasir Eddin teve influência limitada por não ter sido bem conhecida na Europa. Na astronomia, no entanto, Nasir Eddin deu uma contribuição que pode bem ter chegado ao conhecimento de Copérnico. Os árabes tinham adotado teorias tanto de Aristóteles quanto de Ptolomeu para os céus; observando elementos de conflito entre as cosmologias, tentaram conciliá-las e refiná-las. Quanto a isso, Nasir Eddin observou que uma combinação de dois movimentos circulares uniformes na construção epicíclica usual pode produzir um movimento retilíneo. Isto é, se um ponto se move com movimento circular uniforme em sentido horário ao longo do epiciclo, enquanto o centro deste se move em sentido anti-horário com metade da velocidade ao longo de um círculo diferente igual, o ponto descreverá um segmento de reta. (Em outras palavras, se um círculo rola sem deslizar ao longo do interior de um círculo cujo diâmetro é duas vezes maior, o lugar de um ponto sobre a circunferência do círculo menor será um diâmetro do círculo maior.) Esse "teorema de Nasir Eddin" foi conhecido, ou redescoberto, por Copérnico e Cardan no século dezesseis[15].

18 A matemática árabe continuou a declinar, após Nasir Eddin, mas nossa exposição sobre a matemática árabe seria insatisfatória sem uma referência à obra de uma figura do começo do século quinze. Al-Kashi (morreu em 1436) achou um patrono no príncipe Ulugh Beg, neto do conquistador mongol Tamerlão. Em Samarkand, onde tinha sua corte, Ulugh Beg construíra um observatório, e al-Kashi se uniu ao grupo de cientistas reunidos lá. Em numerosas obras, escritas em persa e árabe al-Kashi contribuiu para a matemática e a astronomia. Merece nota a precisão de seus cálculos, especialmente no que se refere à resolução de equações pelo método de Horner, proveniente talvez da China. Também da China al-Kashi pode ter tomado o hábito de usar frações decimais. Al-Kashi é uma figura importante na história das frações decimais, e ele percebeu a importância de sua contribuição a esse assunto, considerando-se o inventor das frações decimais[16]. Embora até certo ponto ele tivesse precursores, ele foi talvez, dentre os que usavam frações sexagesimais, o primeiro a sugerir que as decimais são igualmente convenientes para problemas que exigem muitas casas exatas. No entanto em seu cálculo sistemático de raízes ele continuou a usar as sexagesimais. Ao ilustrar seu método para achar a raiz n-ésima, de um número, ele extraiu a raiz sexta da sexagesimal

$$34,59,1,7,14,54,23,3,47,37;40.$$

Esse foi um prodigioso sucesso de computação, usando os passos que seguimos no método de Horner — localização da raiz, subtração, e aumento ou multiplicação das raízes — e usando um esquema semelhante ao nosso para divisão.

Al-Kashi obviamente se deliciava com cálculos longos, e se orgulhava com razão de sua aproximação para π, que era melhor que qualquer das aproximações fornecidas por

[15] Veja C. B. Boyer, "Note on Epicycles and the Ellipse from Copernicus to Lahire", *Isis*, **38** (1947)

[16] Ver Abdul-Kader Kakhel, *Al-Kashi on Root Extraction* (1960), p. 2. Uma exposição inusitadamente extensa de parte da obra de al-Kashi se encontra em P. Luckey, "Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik", *Mathematische Annalen*, **120** (1948), 217-274. Muito recentemente foi observado que o uso de frações decimais na Arábia se encontra numa obra de abu-al-Hasan, Ahmad ibn-Ibrahim al-Uqlidisi datando de 952-953. Ver A. S. Saidan, "The Earliest Extant Arabic Arithmetic", *Isis*, **57** (1966), 475-490

seus predecessores. Fiel ao gosto dos árabes por notações variadas, ele exprimiu seu valor para 2π em *ambas* as formas, sexagesimal e decimal. Uma — 6;16,59,28,34,51,46,15,50 é mais reminiscente do passado e a outra — 6,2831853071795865 num certo sentido pressagiava o uso de frações decimais. Nenhum matemático até o fim do século dezesseis se aproximou da precisão desse *tour de force* computacional. Em al-Kashi o teorema binomial sob a forma do "triângulo de Pascal" aparece de novo, quase exatamente um século depois de sua publicação na China e cerca de um século antes de ser impresso em livros europeus.

Com a morte de al-Kashi em 1436 aproximadamente podemos encerrar a exposição da matemática árabe, pois o colapso cultural do mundo muçulmano foi mais completo que a desintegração política do império. O número de árabes que deram contribuições significativas à matemática antes de al-Kashi foi consideravelmente maior do que nossa exposição sugere, pois nos concentramos nas figuras principais[17]; mas depois dele o número é insignificante. Foi realmente uma sorte que quando a cultura árabe começou a declinar a ciência na Europa estivesse em ascenção e preparada para aceitar a herança intelectual legada por eras anteriores. Diz-se às vezes que os árabes fizeram pouco mais que pôr a ciência grega em "conservação a frio" à espera de que a Europa estivesse preparada para aceitá-la. Mas a exposição neste capítulo mostrou que, pelo menos no caso da matemática, a tradição transmitida ao mundo latino nos séculos doze e treze era mais rica do que a que os iletrados conquistadores árabes encontraram no século sete.

BIBLIOGRAFIA

Amir-Moez, A. R., "A Paper of Omar Khayyam", *Scripta Mathematica*, **26** (1963), 323-337

Cajori, Florian, *History of Mathematics*, 2.ª edição (New York: Macmillan, 1919)

Dedron, Pierre, e Jean Itard, *Mathématiques et mathématiciens* (Paris: Magnard, 1959)

Gandz, Solomon, "The Sources of al-Khowarizmi's Algebra". *Osiris*, **1** (1936), 263-277

Hill, G. F., *The Development of Arabic Numerals in Europe* (Oxford: Clarendon, 1915)

Kakhel, Abdul-Kader, *Al-Kashi on Root Extraction* (Libano, 1960)

Kasir, D. S., ed., *The Algebra of Omar Khayyam* (New York: Columbia Teachers College, 1931)

Karpinski, L. C., "The Algebra of Abu Kamil", *American Mathematical Monthly*, **21** (1914, 37-48

Karpinski, L. C., ed., *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi* (New York: Macmillan, 1915)

Kennedy, E. S., "Overview on Trigonometry", *Yearbook on History of Mathematics*, The National Council of Teachers of Mathematics (Washington, D. C.)

Levey, Martin, ed., *The Algebra of Abu Kamil* (Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1966)

Luckey, P., "Die Ausziehung der *n*-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik", *Mathematische Annalen*, **120** (1948), 217-274

Rosenfeld, B. A., e A. P. Youschkevitch, *Omar Khayyam* (Moscou: Izdatelestvo "Nauka", 1965)

Saidan, A. S., "The Earliest Extant Arabic Arithmetic", *Isis*, 57 (1966), 475-490

Sánchez Pérez, José, *La arithmética en Roma, en India y en Arabia* (Madrid: Instituto Miguel Asín, 1949)

Sarton, George, *Introduction to the History of Science* (Baltimore: Carnegie Institution of Washington, 1927-1948, 3 volumes em 5)

Sayili, Aydin, *Logical Necessities in Mixed Equations by' Abd al Hamid ibn Turk and the Algebra of His Time* (Ankara, 1962)

Sayili, Aydin, "Thabit ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem", *Isis*, **51** (1960), 35-37

Smith, D. E., *History of Mathematics* (Boston: Ginn, 1923-1925, 2 volumes; reimpresso em brochura, New York: Dover, 1958)

Smith, D. E., e L. C. Karpinski, *The Hindu-Arabic Numerals* (Boston, 1911)

Struik, D. J., "Omar Khayyam, Mathematician", *The Mathematics Teacher*, **51** (1958), 280-285

Suter. Heinrich, *Die Mathematiker und Astronomer der Araber und ihre Werke* (Leipzig, 1900)

Vogel, Kurt, ed., *Mohammed ibn Musa Alchwarizmis Algorismus* (Aalen: O. Zeller, 1963)

Winter, H. J. J., "Formative Influences in Islamic Science", *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, **6** (1953), 171-192

[17]Ver Heinrich Suter, *Die Mathematiker und Astronomer der Araber und ihre Werke* (1900), para uma menção de mais de 500 estudiosos

EXERCÍCIOS

1. Comparar, quanto ao seu efeito sobre a cultura, a conquista árabe das terras vizinhas com as conquistas anteriores de Alexandre, o Grande, e com as conquistas dos romanos.
2. Explique por que a *Álgebra* de al-Khowarizmi não contém equação quadrática do caso em que quadrados e raízes e números sejam iguais a zero.
3. Quais dos numerais usados na Arábia moderna se parecem com os nossos? Há alguma vantagem ou desvantagem nas formas árabes?
4. Foi uma sorte ou um azar para o futuro da matemática que Charles Martel repelisse os árabes em Tours, em 732? Dê razões para sua resposta.
5. Como explica o fato de após 1500 os árabes não terem feito praticamente nenhuma contribuição à matemática?
6. Mencione algumas partes da matemática grega que se teriam perdido sem a ajuda árabe.
7. Compare a matemática árabe e a hindu quanto a forma, conteúdo, nível e influência.
8. Compare os papéis da lógica e da filosofia na matemática grega e na árabe.
9. Usando um diagrama geométrico como o de al-Khowarizmi, resolva $x^2 + 12x = 64$.
10. Verifique a resposta dada por al-Khowarizmi e Heron para as dimensões de um quadrado inscrito num triângulo de lados 10, 10 e 12.
11. Verifique o teorema de Thabit ibn-Qurra sobre números amigáveis.
12. Prove a generalização de Thabit ibn-Qurra do teorema de Pitágoras.
13. Resolva a cúbica de al-Biruni, $x^3 = 1 + 3x$ para a raiz positiva, correta até os centésimos, e verifique que até aí sua resposta coincide com a dele.
14. Prove a fórmula de ibn-Yunus $2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$.
15. Use essa fórmula para transformar o produto de 0,4567 e 0,5678 em soma.
16. Resolva a equação $x^3 = x^2 + 20$ geometricamente, à maneira de Omar Khayyam.
17. Resolva a equação $x^3 + x = 20$ geometricamente à maneira de Omar Khayyam.
18. Usando a avaliação de Alhazen quanto à duração do crepúsculo e tomando o raio da terra como 4 000 milhas, ache aproximadamente a altura da atmosfera. (O crepúsculo é ocasionado pela reflexão dos raios solares em partículas da atmosfera.)
19. Ache o volume obtido girando em torno do eixo dos y a área limitada por $y^2 = 2px$ e pela reta $x = a$. Dentre gregos e árabes, quais podiam resolver esse problema?
20. Mostre que as primeiras três casas sexagesimais do valor de al-Kashi para 2π concordam com as cinco primeiras da sua forma decimal.
21. Nasir Eddin mostrou que a soma de dois quadrados impares não pode ser um quadrado. Prove esse teorema, usando as propriedades de quadrados de números ímpares e pares.

*22. Como caso especial do problema de Alhazen, considere um espelho esférico com secção circular dada pela equação $x^2 + y^2 = 1$, seja uma fonte de luz colocada no ponto (0, 3), e seja o olho colocado no ponto (4, 0). Mostre que o ponto em que a luz será refletida pelo espelho pode ser encontrado por intersecção do círculo com uma hipérbole.

Capítulo **14**

A Europa na Idade Média

> O abandono da matemática traz dano a todo o conhecimento, pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciências ou as coisas deste mundo.
>
> *Roger Bacon*

1 O tempo e a história são, é claro, sem emendas, como o contínuo da matemática, e qualquer subdivisão em períodos é obra do homem: mas assim como um sistema de coordenadas é útil na geometria, também a subdivisão dos acontecimentos em períodos ou eras é conveniente para a história. No que se refere à história política é costume designar a queda de Roma em 476 como o começo da Idade Média, e a queda de Constantinopla perante os turcos em 1453 como o fim. Deixando de lado a política, seria melhor encerrar o período antigo com o ano de 524, que é ao mesmo tempo o ano da morte de Boécio e aproximadamente a época em que o abade romano Dionísio Exiguus propôs a cronologia baseada na era cristã que a partir daí então vem sendo usada. Para a história da matemática, dissemos, no Cap. XI, preferir o ano de 529 como marco para o começo do período medieval, e designaremos como fim, um tanto arbitrariamente, o ano de 1436.

A data 1436 é provavelmente a da morte de al-Kashi, um matemático muito capaz que já descrevemos como tendo duas faces como Janus — olhando para o passado mas em certos pontos antecipando o futuro. O ano 1436 marca também o nascimento de outro eminente matemático — Johann Müller (1436-1476), mais conhecido pelo nome de Regiomontanus, forma latinizada de sua cidade natal, Königsberg. O ano de 1436, em outras palavras, simboliza o fato de que durante a Idade Média os que se destacavam em matemática escreviam em árabe e viviam na Ásia e na África islâmicas, ao passo que durante a nova era que surgia os principais matemáticos escreviam em latim e viviam na Europa cristã.

Uma visão demasiado simplificada da Idade Média resulta freqüentemente de uma exposição centrada em demasia na Europa; por isso lembramos aos leitores que cinco grandes civilizações, escrevendo em cinco línguas diferentes, fornecem a maior parte da história da matemática medieval. Nos dois capítulos precedentes descrevemos as contribuições da China, Índia e Arábia, três das cinco principais culturas medievais. Neste capítulo examinamos a matemática das outras duas: (1) o Império do Oriente ou Bizantino, com centro em Constantinopla (ou Bizâncio), em que a língua oficial era o grego; e (2) o Império do Ocidente, ou Romano, que não tinha um centro único nem uma única língua falada, mas onde o latim era a língua franca dos estudiosos.

2 Quando Justiniano em 529 fechou as escolas filosóficas pagãs de Atenas, seus sábios se dispersaram e alguns se estabeleceram permanentemente na Síria, Pérsia e outros lugares. No entanto, alguns permaneceram e outros voltaram alguns anos depois, e em conseqüência não houve hiato grande na cultura grega do mundo bizantino. Mencionamos já brevemente a obra de vários gregos do sexto século: Eutócio, Simplício, Isidoro de Mileto, e Antêmio de Trales. Foi o próprio Justiniano quem encarregou os dois últimos da construção de Hágia Sophia. À lista de sábios bizantinos devemos acrescentar também o nome de Filoponus, que viveu em Alexandria no começo do sexto século e foi o mais importante físico de sua época no mundo todo. Filoponus questionava as leis aristotélicas do movimento e a impossibilidade do vácuo, e sugeriu a operação de uma espécie de princípio de inércia, sob o qual corpos em movimento continuavam

a mover-se. Como Galileu mais tarde, negava que a velocidade adquirida por um corpo em queda livre seja proporcional a seu peso:

> Se deixarmos cair da mesma altura dois pesos, dos quais um é várias vezes mais pesado do que o outro, verão que a razão dos tempos necessários para o movimento não depende da razão dos pesos, mas que a diferença no tempo é muito pequena[1].

Filoponus era um cientista cristão (como talvez também Eutócio e Antêmio) que usava antigas fontes pagãs e cujas idéias influenciaram os pensadores islâmicos posteriores, indicando assim a continuidade da tradição científica apesar das diferenças religiosas e políticas.

Filoponus não era primariamente um matemático, mas parte de sua obra, como seu tratado sobre o astrolábio, pode ser considerada como referente a matemática aplicada. A maior parte das contribuições bizantinas à matemática era de nível elementar e consistia principalmente de comentários sobre os clássicos. A matemática bizantina, muito mais do que a árabe, era uma espécie de ação de conservação, destinada a preservar ao máximo o legado da antiguidade, até que o Ocidente estivesse preparado para ir adiante. Filoponus ajudou nessa obra por seu comentário sobre a *Introdução à aritmética* de Nicômaco. O pensamento neoplatônico continuou a exercer forte influência no Império do Oriente, o que explica a popularidade do tratado de Nicômaco. De novo, no século onze, ele foi tema de um comentário, dessa vez de Miguel Constantino Psellus, (1018-1080?), um filósofo de Atenas e Constantinopla que contava entre seus discípulos o Imperador Miguel VII. Outra obra de Psellus, um compêndio muito elementar sobre o *quadrivium*, teve grande popularidade no Ocidente durante o século dezesseis. Dois séculos mais tarde assinalamos outro resumo grego sobre o *quadrivium* matemático, dessa vez de Georgios Pachymeres (1242-1316). Tais compêndios eram significativos apenas por mostrar que um filete de tradição grega antiga se manteve no Império do Oriente até o fim do período medieval.

Pachymeres escreveu também um comentário sobre a *Aritmética* de Diofante, como também seu contemporrâneo, Maximos Planudes (1255?-1310), um monge grego, embaixador do Imperador Andronicus II em Veneza, o que indica ter havido algum contato cultural entre o Oriente e o Ocidente. Planudes escreveu também uma obra sobre o sistema hindu de numeração, que finalmente chegara ao mundo grego. Em Bizâncio, como se poderia prever, os numerais alfabéticos não foram totalmente abandonados, pois até hoje estão em uso na Grécia em documentos legais, administrativos e eclesiásticos. A secção LXXVIII de um documento, por exemplo, é designada por *οη* (isto é, ômicron eta) como nos dias de Alexandria. Ainda mais, mesmo dentro do novo sistema hindu, os bizantinos do século quatorze conservaram as primeiras nove letras do sistema alfabético, acrescentando-lhes um símbolo para o zero, semelhante a um h invertido. O número 7 890, por exemplo, seria escrito ζηθч, uma forma tão conveniente quanto a nossa. Manuel Moschopoulos (viveu em 1300), um discípulo de Planudes, escreveu sobre quadrados mágicos, e a exposição de Planudes sobre a numeração foi comentada pelo aritmético e geômetra Nicolau Rhabdas (morreu em 1350). Este escreveu também uma obra sobre computação nos dedos; mas a matemática bizantina, que nunca fora muito forte, tinha então ficado quase nula. Pelo século quatorze o mundo grego tinha sido claramente superado pelo latino no Ocidente, e para este nos voltamos agora.

3 O Cap. II contém referências aos tratados latinos de Boécio no fim do período antigo, com uma menção de seu nível muito elementar. Mesmo a partir desse nível era possível deteriorar-se ainda mais a matemática, como vemos pelo compêndio trivial sobre as artes liberais, escrito por Cassiodoro (cerca de 480 a cerca de 575), um discípulo de Boécio que passou seus últimos anos num mosteiro que fundara. As obras primitivas de Cassiodoro serviram de texto nas escolas eclesiásticas no começo da Idade Média e às vezes também como fonte para livros de nível ainda inferior, tais como o *Origens* ou

[1] Citado de Marshall Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages* (1959), p. 546

Etimologias de Isidoro de Sevilha (570-636), sendo um dos vinte livros desse um resumo breve da aritmética de Boécio. Quando observamos que seus contemporâneos consideravam Isidoro como o homem mais culto de seu tempo, podemos entender bem o lamento de seu tempo, que "o estudo das letras está morto entre nós". Essa foi de fato a "idade das trevas" da ciência, mas não deveríamos cometer o erro de supor que isso fosse verdade para a Idade Média como um todo. Pelos dois séculos seguintes as sombras se mantiveram a tal ponto que se tem dito que nada de erudito podia ser ouvido na Europa, a não ser o arranhar da pena do venerável Beda (cerca de 673-735) escrevendo na Inglaterra sobre a matemática necessária para o calendário eclesiástico, ou sobre a representação dos números por meio dos dedos.

4 Alcuin de York (cerca de 735-804) nasceu no ano em que Beda morreu; foi chamado por Carlos Magno para revitalizar a instrução na França, e houve uma melhoria suficiente para levar alguns historiadores a falar num Renascimento carolingiano. Alcuin explicou que o ato de criação levara seis dias, porque seis era um número perfeito; mas além de alguma aritmética, geometria e astronomia, que se diz que Alcuin escreveu para principiantes, pouca matemática houve na França ou na Inglaterra, por mais dois séculos. Na Alemanha Hrabanus Maurus (784-856) continuou os débeis esforços matemáticos e astronômicos de Beda, especialmente para o cálculo da data da Páscoa. Mas passou-se ainda século e meio antes de haver alguma modificação do clima matemático da Europa Ocidental, e então ela se deu através daquele que viria a tornar-se o Papa Silvestre II.

Gerbert (cerca de 940-1003) nasceu na França e estudou na Espanha e Itália, depois serviu na Alemanha como tutor e mais tarde conselheiro do Imperador do Santo Império Romano, Otto III. Tendo sido arcebispo, primeiro em Reims e depois em Ravenna, Gerbert em 999 foi elevado ao papado, tomando o nome de Silvestre — talvez em memória de um papa anterior que fora conhecido pela erudição, mas mais provavelmente porque Silvestre I, papa durante os dias de Constantino, simbolizava a união do papado e do império. Gerbert se ocupava ativamente de política, tanto leiga quanto eclesiástica, mas tinha tempo também para questões educacionais. Escreveu sobre aritmética e geometria, dependendo provavelmente da tradição de Boécio, que dominara o ensino nas escolas eclesiásticas do Ocidente e não se aperfeiçoara! Mais interessante que essas obras expositórias, no entanto, é o fato de Gerbert ser talvez o primeiro a ter ensinado na Europa os numerais indo-arábicos. Não se sabe bem como ele os conheceu. Uma possível explicação é que quando ele foi à Espanha em 967 tenha tido conhecimento, talvez em Barcelona, da cultura moura, inclusive da numeração arábica com a forma ocidental ou Gobar (pó) dos numerais, embora exista pouca evidência de influência árabe nos documentos preservados. Uma cópia espanhola do *Origens* de Isidoro, datando de 992, contém os numerais, sem o zero, e Gerbert talvez nunca tenha sabido dessa última parte do sistema indo-arábico. Em certos manuscritos de Boécio, no entanto, aparecem formas numerais, ou ápices, semelhantes, para uso no ábaco; e talvez seja por essas que Gerbert primeiro aprendeu o novo sistema. Os ápices de Boécio, de outro lado, podem ter sido interpolações posteriores. A situação quanto à introdução dos numerais na Europa é mais ou menos tão confusa quanto a da invenção do sistema talvez meio milênio antes. Além disso, não se sabe se houve um uso continuado dos novos numerais na Europa durante os dois séculos seguintes a Gerbert. Somente no século treze é que o sistema indo-arábico ficou definitivamente estabelecido na Europa, e isto não foi realização de um homem mas de vários[2].

5 A Europa, antes e durante o tempo de Gerbert, ainda não estava preparada para o desenvolvimento da matemática. A atitude cristã, expressa por Tertuliano, a princípio fora a mesma do antigo Islam, citada com referência à Biblioteca de Alexandria. A pesquisa científica, escreveu Tertuliano, se tornara supérflua desde que fora recebido o Evangelho de Jesus Cristo. A época de Gerbert fora o ponto alto da cultura muçulmana, mas os estudiosos latinos contemporâneos mal poderiam apreciar os tratados árabes

[2]Ver G. F. Hill, *The Development of Arabic Numerals in Europe* (1915) e D. E. Smith e L. C. Karpinski, *The Hindu-Arabic Numerals* (1911)

se viessem a conhecê-los. Pelo começo do século doze a situação começou a mudar num sentido que lembrava o século nove na Árabia. Não se pode absorver a ciência do vizinho sem lhe conhecer a língua. Os muçulmanos tinham quebrado a barreira de linguagem que os separava da cultura grega no século nove, e os europeus latinos superaram a barreira com a cultura árabe no século doze. No começo do século doze nenhum europeu poderia pretender ser um matemático ou astrônomo verdadeiro sem um bom conhecimento da língua árabe; e a Europa, durante a primeira parte do século doze, não podia orgulhar-se de qualquer matemático que não fosse mouro, judeu ou grego. Pelo fim do século surgiu na Itália cristã o mais importante e original matemático do mundo todo. A época foi tão evidentemente de transição de um ponto de vista antigo para um mais novo que C. H. Haskins denominou sua obra *The Renaissance of the Twelfth Century*[3]. O ressurgimento que ele descreveu começou, inevitavelmente, com uma série de traduções. A princípio essas foram quase exclusivamente do árabe para o latim, mas pelo século treze havia muitas variantes — do árabe para o espanhol, do árabe para o hebraico, do grego para o latim, ou combinações como do árabe para o hebraico para o latim. *Os elementos* de Euclides foi uma das primeiras obras matemáticas clássicas a aparecer em tradução latina do árabe, a versão tendo sido feita em 1142 por Adelard de Bath (cerca de 1075-1160). Não se sabe como o inglês travara conhecimento com a cultura árabe. Havia na época três pontes principais entre o mundo islâmico e o cristão — Espanha, Sicília e o Império do Oriente — e dessas a primeira era a mais importante. Adelard, no entanto, parece não ter sido um dos muitos que utilizaram a ponte intelectual espanhola. Não é fácil dizer se as cruzadas religiosas tiveram uma influência positiva sobre a transmissão da cultura, mas é provável que mais tenham interrompido que facilitado a comunicação. De qualquer modo, as vias pela Espanha e pela Sicília eram as mais importantes no século doze, e essas quase *não* foram perturbadas pelos exércitos predadores dos cruzados entre 1096 e 1272. O renascimento da cultura na Europa latina teve lugar *durante* as cruzadas, mas provavelmente *apesar* delas.

A tradução de *Os elementos* de Adelard não teve grande influência antes de haver passado mais um século, mas não foi de modo algum um acontecimento isolado. Antes disso (1126) Adelard tinha traduzido as tabelas astronômicas de al-Khowarizmi do árabe para o latim, e mais tarde (por volta de 1155) o *Almajesto* de Ptolomeu do grego para o latim. Entre os primeiros tradutores, no entanto, Adelard foi excepcional no sentido de não pertencer ao grande grupo que trabalhava na Espanha. Lá, especialmente em Toledo, onde o arcebispo encorajava tal trabalho, uma verdadeira escola de tradução se desenvolvia. A cidade, outrora uma capital visigoda, mais tarde esteve nas mãos dos mouros por vários séculos, antes de ser conquistada pelos cristãos, e era um lugar ideal para a transmissão da cultura. Nas bibliotecas de Toledo havia uma quantidade de manuscritos muçulmanos; e grande parte da população, composta de cristãos, maometanos e judeus, falava o árabe, o que facilitava o fluxo interlíngüe de informação. O cosmopolitismo dos tradutores na Espanha é evidente pelos nomes: Robert de Chester, Hermann o Dálmata, Platão de Tivoli, Rudolph de Bruges, Gerardo de Cremona, e John de Sevilha, esse um judeu convertido. Esses são apenas uns poucos dentre os homens ocupados com traduções na Espanha[4].

Dos tradutores na Espanha talvez o maior tenha sido Gerardo de Cremona (1114-1187). Tinha ido à Espanha para aprender o árabe, a fim de entender Ptolomeu, mas dedicou o resto de sua vida a traduções do árabe. Entre essas estava a tradução para o latim de uma edição revista da versão árabe de Thabit ibn Qurra de *Os elementos* de Euclides, trabalho superior ao de Adelard. Em 1175 Gerardo traduziu o *Almajesto*, e foi principalmente através dessa obra que Ptolomeu veio a ser conhecido no Ocidente. São atribuídas a Gerardo de Cremona traduções de mais de oitenta e cinco obras, mas so-

[3]Existe edição cartonada (New York: Meridian Books, 1957)

[4]Quanto a outros, ver George Sarton, *Introduction to the History of Science*, II (1), 113 e seguintes, 338 e seguintes

mente a tradução de Ptolomeu tem data. Entre as obras de Gerardo encontra-se uma adaptação em latim da *Álgebra* de al-Khowarizmi, mas em 1145 tinha sido feita uma tradução mais popular da *Álgebra* por Robert de Chester. Essa, a primeira tradução do tratado de al-Khowarizmi (como também a tradução do Corão feita por Robert alguns anos antes fora uma "primeira") pode ser tomada como marcando o início da álgebra na Europa.

Robert de Chester voltou à Inglaterra em 1150, mas a obra de tradução continuou na Espanha sem esmorecimento através de Gerardo e outros. As obras de al-Khowarizmi evidentemente estavam entre as mais traduzidas na época, e os nomes de Platão de Tivoli e John de Sevilha estão ligadas a ainda outras adaptações da *Álgebra*. Subitamente a Europa Ocidental mostrou inclinação muito maior pela matemática árabe do que jamais mostrara pela geometria grega. Parte do motivo para isso talvez fosse que a aritmética e a álgebra árabes fossem de nível muito mais elementar do que fora a geometria grega durante os dias da república e império romanos. No entanto, os romanos nunca mostraram grande interesse pela trigonometria grega, relativamente útil e elementar como era; mas os estudiosos latinos do século doze devoraram a trigonometria árabe tal como aparecia nas obras de astronomia. Foi da tradução de Robert de Chester do árabe que proveio nossa palavra "seno". Os hindus tinham dado o nome de *jiva* à metade da corda, e os árabes tinham transformado isso em *jiba*. Na língua árabe há também a palavra *jaib* que significa "baía" ou "enseada". Quando Robert de Chester veio a traduzir a palavra técnica *jiba* aparentemente confundiu-a com a palavra *jaib* (talvez devido à omissão das vogais); daí usou a palavra *sinus*, que em latim significa "baía" ou "enseada". Ás vezes era usada a frase mais específica *sinus rectus* ou "seno vertical"; daí a frase *sinus versus*, ou "seno reverso" que designava a "flecha" ou o "seno virado de lado".

Foi durante o período de traduções do século doze e no século seguinte que surgiu a confusão quanto ao nome de al-Khowarizmi que levou à palavra "algoritmo", como se explicou no capítulo precedente. Os numerais hindus tinham sido explicados aos leitores latinos por Adelard de Bath e John de Sevilha mais ou menos na mesma ocasião em que um sistema semelhante foi apresentado aos judeus por Abraham ibn Ezra (cerca de 1090-1167), autor de livros sobre astrologia, filosofia, e matemática. Assim como na cultura bizantina os numerais alfabéticos gregos, acrescidos de um símbolo especial para o zero, substituíram os numerais hindus, também Ibn Ezra usou os nove primeiros numerais alfabéticos hebraicos, e um círculo para o zero, no sistema decimal posicional para os inteiros. Apesar de surgirem numerosas exposições dos numerais indo-arábicos, a transição do sistema numérico romano para o novo foi surpreendentemente lenta. Talvez isso se devesse a que a computação com o ábaco fosse bastante comum, e nesse caso as vantagens do novo sistema não seriam tão claras quanto nos cálculos com pena e papel apenas. Durante vários séculos houve acirrada rivalidade entre os "abacistas" e os "algoristas" e somente no século dezesseis esses triunfaram definitivamente.

6 Diz-se às vezes que pelo fim da Idade Média havia duas espécies de matemáticos — os das escolas religiosas ou de universidades e os que se ocupavam de negócios e comércio — e que entre as duas havia rivalidade. Parece haver pouco fundamento para essa tese; certamente ambos os grupos participaram na difusão dos numerais indo-arábicos. No século treze autores de várias classes sociais ajudaram a popularizar o "algorismo", mas mencionaremos somente três deles: Alexandre de Villedieu (viveu por volta de 1225), era um franciscano francês; John de Halifax (cerca de 1200-1256), também conhecido como Sacrobosco, era um mestre inglês; e o terceiro era Leonardo de Pisa (cerca de 1180-1250), mais conhecido como Fibonacci ou "filho de Bonaccio", um comerciante italiano. *Carmen de algorismo* de Alexandre é um poema em que são completamente descritas as quatro operações fundamentais sobre os inteiros, usando numerais indo-arábicos e tratando o zero como um número. O *Algorismus vulgaris* de Sacrobosco era uma exposição prática da computação que rivalizava em popularidade com seu *Sphaera*, uma obra elementar sobre astronomia usada para ensino nas escolas durante todo o fim da Idade Média. O livro em que Fibonacci descreve o novo algorismo é um clássico

Gravura sobre madeira de Gregor Reisch, *Margarita Philosophica* (Freiburg, 1503). A aritmética ensina ao algorista e ao abacista, aqui impropriamente representados por Boécio e Pitágoras

célebre, completado em 1202, mas tem um título enganador — *Liber abaci* (ou livro do ábaco). *Não* é sobre o ábaco; é um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos em que o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado.

O pai de Leonardo, natural de Pisa, tinha negócios no norte da África e o filho estudou com um professor muçulmano e viajou pelo Egito, Síria e Grécia. Era pois natural que Fibonacci conhecesse a fundo os métodos algébricos árabes, inclusive, felizmente, os numerais indo-arábicos e, infelizmente, a forma retórica de expressão. O *Liber abaci* se inicia com uma idéia que parece quase moderna, mas que era característica da forma de pensar medieval tanto islâmica quanto cristã — que a aritmética e a geometria são interligadas e se auxiliam mutuamente. Isso, é claro, faz lembrar a *Álgebra* de al-Khowarizmi, mas era aceito igualmente na tradição latina oriunda de Boécio. No entanto o *Liber abaci* trata muito mais de números que de geometria. Descreve primeiro "as nove cifras indianas", juntamente com o símbolo 0, "chamado zephirum em árabe". Incidentalmente é de *zephirum* e suas variantes que derivam nossas palavras "cifra" e "zero". A exposição de Fibonacci da numeração indo-arábica foi importante no processo de transmissão; mas, como vimos, não foi a primeira dessas exposições, nem alcançou a popularidade das descrições posteriores mas mais elementares, de Sacrobosco e Villedieu. A barra horizontal para frações, por exemplo, era usada regularmente por Fibonacci (e já era conhecida antes na Arábia), mas somente no século dezesseis seu uso tornou-se comum. (A barra inclinada foi sugerida em 1845 por De Morgan.)

7 O *Liber abaci*[5] não é uma leitura interessante para o leitor moderno, pois, depois de expor os processos usuais algorítmicos ou aritméticos, inclusive a extração de raízes, demora-se em problemas sobre transações comerciais, usando um complicado sistema de frações para calcular câmbios de moedas. É uma das ironias da história que a vantagem principal da notação posicional — sua aplicabilidade a frações — escapasse quase com-

[5]Não há tradução para o inglês dessa importante obra, nem mesmo uma versão latina facilmente encontrável. Está incluída no *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Mathematiche e Fisiche* de Baldassare Boncompagni (Roma, 1868-1887, 2 volumes). Quanto às notações usadas por Fibonacci e outros veja Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations* (Chicago, 1928-1929, 2 volumes)

pletamente aos que usavam os numerais indo-arábicos durante os primeiros mil anos de sua existência. Quanto a isso Fibonacci tem tanta responsabilidade quanto qualquer outro, pois usou três tipos de frações — comuns, sexagesimais, e unitárias — mas não frações decimais. Na verdade, no *Liber abaci*, os dois piores dentre esses sistemas — as frações unitárias e as comuns — são muito usados. Além disso, há numerosos problemas do seguinte tipo desinteressante: Se 1 solidus imperial, que vale 12 deniers imperiais, é vendido por 31 deniers pisanos, quantos deniers pisanos se deve obter em troca de 11 deniers imperiais? Numa exposição do tipo receita acha-se com muito esforço a resposta $\frac{5}{12}28$ (ou, como escreveríamos, $28\frac{5}{12}$). Fibonacci costumava colocar a parte fracionária de um número misto antes da parte inteira. Em vez de escrever $11\frac{5}{6}$, por exemplo, ele escrevia $\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,11$, a justaposição de frações unitárias e inteiros implicando adição.

Fibonacci evidentemente gostava das frações unitárias — ou julgava que seus leitores gostassem — pois o *Liber abaci* contém tabelas de conversão de frações comuns a unitárias. A fração $\frac{98}{100}$ por exemplo é decomposta em $\frac{1}{100}\,\frac{1}{50}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$ e $\frac{99}{100}$ aparece como $\frac{1}{25}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$. Um estranho capricho de sua notação levou-o a exprimir a soma de $\frac{1}{5}\,\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{10}\,\frac{2}{9}$ como $\frac{1\;6\;2}{2\;9\;10}1$, a notação $\frac{1\;6\;2}{2\;9\;10}$ significando nesse caso

$$\frac{1}{2\cdot 9\cdot 10}+\frac{6}{9\cdot 10}+\frac{2}{10}$$

Assim também em outro dos muitos problemas sobre conversão de moedas no *Liber abaci* lemos que se $\frac{1}{4}\,\frac{2}{3}$ de um rótulo vale $\frac{1}{7}\,\frac{1}{6}\,\frac{2}{5}$ de um bizâncio, então $\frac{1\;4\;7}{8\;9\;10}$ de um bizâncio vale $\frac{3}{4}\,\frac{8}{10}\,\frac{83}{149}\,\frac{11}{12}$ de um rótulo. Pobre do homem de negócios medieval que devia operar com tal sistema!

8 Muito do *Liber abaci* é desinteressante, mas alguns dos problemas são tão estimulantes que foram usados por autores posteriores. Entre esses acha-se um perene, que pode ter sido sugerido por um problema semelhante no papiro Ahmes. Fibonacci propõe:

> Sete velhas foram a Roma; cada uma tinha sete mulas; cada mula carregava sete sacos, cada saco continha sete pães; e com cada pão havia sete facas; cada faca estava dentro de sete bainhas.

Sem dúvida o problema no *Liber abaci* que mais inspirou aos futuros matemáticos foi o seguinte:

> Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

Esse problema célebre dá origem à "seqüência de Fibonacci" 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., u_n, ..., onde $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, isto é, em que cada termo após os dois primeiros é a soma dos dois imediatamente precedentes. Verificou-se que essa seqüência tem muitas propriedades belas e significativas. Por exemplo, pode-se provar que dois termos sucessivos quaisquer são primos entre si e que $\lim_{n\to\infty} u_{n-1}/u_n$ é a razão da secção áurea $(\sqrt{5}-1)/2$. A seqüência se aplica também a questões de filotaxia e crescimento orgânico[6].

9 O *Liber abaci* é o livro mais conhecido de Fibonacci, e apareceu em nova edição em 1228, mas evidentemente não foi muito amplamente apreciado nas escolas, e não foi impresso senão no século dezenove. Leonardo de Pisa foi sem dúvida o matemático mais original e capaz do mundo cristão medieval, mas muito de sua obra era demasiado avançado para ser entendido por seus contemporâneos. Seus outros tratados também contêm muita coisa interessante. No *Flos*, que data de 1225, há problemas indeterminados que lembram Diofante, e problemas determinados que lembram Euclides, os árabes e os chineses.

Fibonacci evidentemente usou muitas e variadas fontes. Especialmente interessante pela combinação de algoritmo e lógica é o tratamento que deu à equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. O autor exibe uma atitude quase moderna ao provar primeiro a impossibilidade da existência de raiz no sentido euclidiano, como razão de inteiros, ou da forma $a + \sqrt{b}$, onde a e b são racionais. Naquela época isso significava que não se podia achar solução exata por meios algébricos. Fibonacci então tratou de exprimir a raiz positiva aproximadamente como uma fração sexagesimal com meia dúzia de casas — 1;22,7,42,33,4,40. Esse foi um notável sucesso, mas não sabemos como o conseguiu. Talvez dos árabes tivesse aprendido o que chamamos o "método de Horner", processo conhecido já antes na China. Essa é a aproximação européia mais precisa de uma raiz irracional de uma equação algébrica conseguida até então — ou em qualquer parte da Europa pelos 300 anos seguintes e mais. É característico da época que usasse frações sexagesimais em obra matemática teórica, mas não em questões mercantis. Talvez isso explique por que os numerais indo-arábicos não foram logo usados em tabelas astronômicas como as tabelas Alfonsinas do século treze. Onde eram usadas as frações "dos físicos" (sexagesimais) havia menos urgência em substituí-las do que em relação às frações comuns e unitárias do comércio.

10 Em 1225 Leonardo de Pisa publicou não só o *Flos*, mas também o *Liber quadratorum*, uma obra brilhante sobre análise indeterminada. Essa obra, como o *Flos*, contém uma variedade de problemas, alguns dos quais provenientes das competições matemáticas realizadas na corte do imperador Frederick II, às quais Fibonacci fora convidado. Um dos problemas propostos se assemelha notavelmente aos do tipo com que Diofante se deliciava — achar um número racional tal que se se somar, ou subtrair, cinco do quadrado do número, o resultado seja o quadrado de um número racional. Tanto o problema como a solução $3\frac{5}{12}$, são dados no *Liber quadratorum*. O livro usa freqüentemente as identidades

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (ac+bd)^2+(bc-ad)^2\\ &= (ad+bc)^2+(ac-bd)^2\end{aligned}$$

que aparecem em Diofante e foram muito usadas pelos árabes. Em alguns de seus problemas Fibonacci parece seguir de perto os árabes[7].

Fibonacci era antes de tudo um algebrista, mas escreveu também, em 1220, um livro intitulado *Practica geometriae*. Esse parece ser baseado numa versão árabe da *Divisão de figuras* de Euclides (hoje perdida) e nas obras de Heron sobre mensuração. Contém, entre outras coisas, uma prova de que as medianas de um triângulo se dividem na razão de 2 para 1, e um análogo tridimensional do teorema de Pitágoras. Continuando uma tendência babilônia e árabe, ele usava álgebra para resolver problemas geométricos.

11 Pelos poucos exemplos que demos já fica claro que Leonardo de Pisa era um matemático excepcionalmente capaz. É verdade que não teve rival à sua altura nos 900 anos de cultura européia medieval, mas não é uma figura tão isolada quanto às vezes se diz. Em Jordanus Nemorarius (data incerta) teve um contemporâneo mais jovem, competente embora menos dotado. Alguns[8] identificam esse homem com Jordanus Teutonicus ou Jordanus de Saxônia, um líder da Ordem Dominicana, que morreu em 1237. De qualquer modo, nosso Jordanus Nemorarius, ou Jordanus de Nemore, representa um lado da ciência mais aristotélico do que os outros que encontramos no século treze, e tornou-se o fundador do que às vezes se chama de escola medieval da mecânica. A ele

[6]Para outras propriedades matemáticas veja N. N. Vorob'ev, *Fibonacci Numbers*, traduzido por H. Mors (New York: Blaisdell, 1961); S. M. Plotnick, "The Sum of Terms of the Fibonacci Series", *Scripta Mathematica*, **9** (1943), 197. Quanto à importância da seqüência na biologia, veja D. W. Thompson, *On Growth and Form*, 2.ª edição (Cambridge University Press, 1952). Veja também números do *The Fibonacci Quartely*. Aplicações interessantes, e mais referências, são dadas em H. S. M. Coxeter, "The Golden Section, Phyllotaxis and Wythoff's Game", *Scripta Mathematica*, **19** (1953), 135-143

[7]Ver L. C. Karpinski, "The Algebra of Abu Kamil", *American Mathematical Monthly*, **21** (1914), 37-48

[8]Ver, por exemplo, D. E. Smith, *History of Mathematics*, I, 226, e George Sarton, *Introduction to the History of Science*, II (2), 613 e seguintes. A identificação é negada por Joseph Hoffman, *Geschichte der Mathematik*, 2.ª ed. (Berlim, 1963), 1, 96

devemos a primeira formulação correta da lei do plano inclinado, lei que os antigos tinham buscado em vão: a força ao longo de uma trajetória inclinada é inversamente proporcional à obliqüidade, sendo a obliqüidade medida pela razão de um segmento dado da trajetória pela porção da vertical interceptada por ele[9]. Na linguagem trigonométrica isso significa que $F:P = 1/\text{cossec}\ \theta$, o que equivale à formulação moderna $F = P$ sen θ, onde P é o peso, F é a força, e θ é o ângulo de inclinação.

Jordanus escreveu livros de aritmética, geometria e astronomia, além de mecânica. Sua *Arithmetica* em particular serviu de base a comentários muito difundidos na Universidade de Paris até o século dezesseis; não era um livro sobre computação, mas uma obra quase filosófica na tradição de Nicômaco e Boécio. Contém resultados teóricos tais como o teorema que diz que todo múltiplo de um número perfeito ou abundante é abundante e que o divisor de um número perfeito é deficiente. A *Arithmetica* é significativa especialmente por usar letras em vez de numerais para denotar números, o que torna possível enunciar teoremas algébricos gerais. Nos teoremas aritméticos de *Os elementos* VII-IX de Euclides os números eram representados por segmentos de retas a que eram associadas letras, e as provas geométricas na *Álgebra* de al-Khowarizmi usavam diagramas com letras; mas todos os coeficientes nas equações usadas na *Álgebra* são números específicos, sejam representados em numerais, sejam escritos em palavras. A idéia de generalidade está contida na exposição de al-Khowarizmi, mas ele não tinha um método para exprimir algebricamente as proposições gerais que aparecem tão claramente na geometria. Na *Arithmetica* o uso de letras sugere o conceito de "parâmetro"; mas os sucessores de Jordanus em geral abandonaram o uso de letras. Parecem ter estado mais interessados nos aspectos arábicos da álgebra que se encontram em outra obra de Jordanus, *De numeris datis*, uma coleção de regras algébricas para encontrar, a partir de um número dado, outros números a ele relacionados segundo certas condições, ou para mostrar que um número satisfazendo a certas restrições especificas está determinado. Um exemplo típico é o seguinte: Se um número dado é dividido em duas partes, tais que o produto de uma parte pela outra seja dado, então cada uma das duas partes está necessariamente determinada. A regra é deselegantemente expressa por Jordanus como segue:

> Seja o número dado *abc*, e seja ele dividido em duas partes *ab* e *c*, e seja *d* o produto dado das partes *ab* e *c*. Seja *e* o quadrado de *ab* e quatro vezes *d* seja *f*, e seja *g* o resultado de subtrair *f* de *e*. Então *g* é o quadrado da diferença entre *ab* e *c*. Seja *h* a raiz quadrada de *g*. Então *h* é a diferença entre *ab* e *c*. Como *h* é conhecido, *c* e *ab* estão determinados[10].

Observe-se que o modo de Jordanus de usar letras é um tanto confuso, pois, como Euclides, às vezes ele usa duas letras para indicar um número e às vezes só uma letra. Evidentemente ele seguia Euclides ao considerar o número dado como um segmento de reta *ac* e as duas partes em que era subdividido como *ab* e *bc*; mas usa as duas letras de extremidades para designar a primeira parte do número, e somente a letra isolada *c* para representar o número do segmento de reta *bc*. Porém merece grandes elogios por ter sido o primeiro a enunciar completamente, em forma geral, a regra equivalente à resolução de uma equação quadrática. Só depois é que ele dá um exemplo específico da regra, expresso em numerais romanos: para dividir o número X em duas partes cujo produto é XXI, Jordanus efetua os passos indicados acima para achar as partes III e VII.

12 A Jordanus é também atribuído um *Algorismus* (ou *Algorithmus*) *demonstratus*, uma exposição de regras aritméticas que foi popular durante três séculos. O *Algorismus demonstratus* novamente exibe inspiração em Boécio e Euclides, bem como características algébricas arábicas. Uma preponderância ainda maior de influência de Euclides aparece na obra de Johannes Campanus de Novara (viveu por volta de 1260), capelão

[9]Ver Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, p. 74

[10]Para uma exposição extensa de muitos aspectos da obra de Jordanus ver Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (1880-1908), II, 49-79

do Papa Urbano IV. A ele o fim do período medieval deve uma tradução boa de Euclides do árabe para o latim, aquela que foi a primeira a aparecer em forma impressa em 1482. Ao fazer a tradução Campanus usou várias fontes árabes, bem como a versão latina feita antes por Adelard. Tanto Jordanus como Campanus discutiram o ângulo de contato, ou em chifre, tópico que suscitou animada discussão no fim do período medieval quando a matemática tomou uma forma mais filosófica e especulativa. Campanus observou que se se compara o ângulo de contato — isto é, o ângulo formado por um arco de círculo e a tangente numa extremidade — com o ângulo entre duas retas, parece haver uma inconsistência com *Os elementos* X, 1 (Euclides), a proposição fundamental do método de exaustão. O ângulo retilíneo é evidentemente maior que o ângulo em chifre. Então, se do ângulo maior tiramos mais que a metade, e do resto tiramos mais que a metade, e se continuamos assim, de cada vez tirando mais que a metade, deveríamos chegar a um ângulo retilíneo menor que o de contato; mas isto evidentemente não é verdade. Campanus concluiu corretamente que a proposição se aplica a grandezas de mesma espécie, e que os ângulos de contato são diferentes dos ângulos retilíneos.

A semelhança de interesses entre Jordanus e Campanus transparece no fato de Campanus, no fim do Livro IV de sua tradução de *Os elementos* descrever uma trissecção do ângulo que é exatamente a mesma que tinha aparecido no *De triangulis* de Jordanus. A única diferença é que no diagrama de Campanus as letras são latinas, enquanto que no de Jordanus são grego-arábicas. A trissecção, diferente das da antiguidade, é essencialmente como segue. Seja o ângulo AOB a ser trissectado colocado com o vértice no centro de um círculo de raio qualquer $OA = OB$ (Fig. 14.1). De O traçar um raio $OC \perp OB$, e por A passar uma reta AED de tal modo que $DE = OA$. Finalmente, por O traçar a reta OF paralela a AED. Então $\angle\ FOB$ é um terço do $\angle\ AOB$, como se queria.[11]

13 O século treze apresenta um progresso tão grande com relação ao que o precede na Idade Média que ocasionalmente, e não imparcialmente, tem sido considerado como "o maior dos séculos"[12]. Vimos como, na obra de Leonardo de Pisa, a Europa Ocidental veio a rivalizar com as outras civilizações no nível de suas realizações matemáticas; mas isto era apenas uma pequena parte do que estava acontecendo com a cultura latina em seu todo. Muitas das universidades famosas — Bologna, Paris, Oxford e Cambridge — foram fundadas no fim do século doze ou início do século treze, e esse foi também o período em que as grandes catedrais góticas — Chartres, Notre Dame, Westminster, Reims — foram construídas. A filosofia e a ciência aristotélicas tinham sido recuperadas e eram ensinadas nas universidades e nas escolas religiosas. O século treze é o período dos grandes eruditos e homens da igreja como Alberto Magno, Robert Grosseteste, Tomás de Aquino e Roger Bacon. Incidentalmente, dois particularmente, Grosseteste e Bacon, sustentaram fortemente a importância da matemática no currículo escolar, embora nenhum dos dois fosse matemático. Foi durante o século treze que muitas invenções

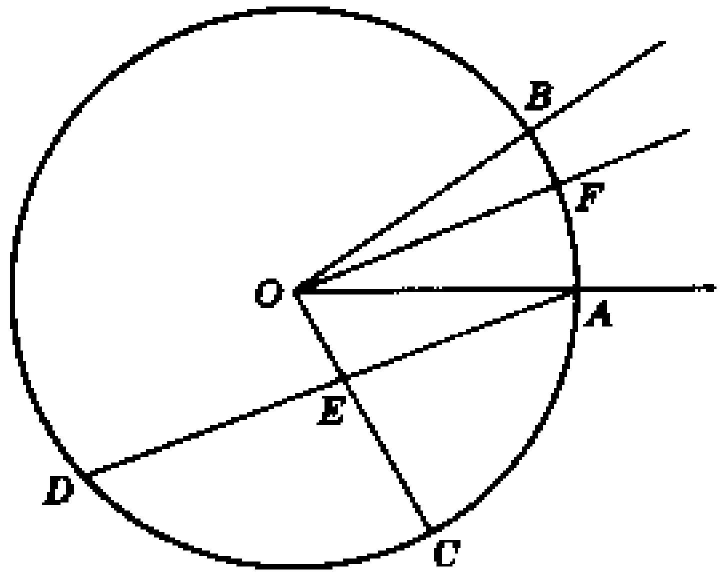


Figura 14.1

[11]Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages* (1964), I, 681. Ver também Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathenatik*, II, 75 e seguintes, 94. Uma trissecção mais sofisticada, usando o limaçon, é atribuída a Jordanus (ver Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, pp. 666-677)

[12]J. J. Walsh, *The Thirteenth, Greatest of Centuries* (New York, 1909)