Aplicações de Derivadas

Teorema do Valor Médio (TVM)

A partir deste momento, passaremos a estudar seqüência, limites e continuidade de uma função real. Leia com atenção, caso tenha dúvidas busque esclarece-las nas bibliografias indicadas e também junto ao Sistema de Acompanhamento

Suponha que a função f seja contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e que $f'(x)$ exista no intervalo aberto $a < x < b$. Então, existe pelo menos um valor c entre a e b, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometricamente, o teorema afirma que existe pelo menos um ponto $c \in (a,\ b)$ tal que a reta tangente ao gráfico da função no ponto $\left(c, f(c)\right)$ é paralela à reta que passa pelos pontos $A = \left(a, f(a)\right)$ e $B = \left(b, f(b)\right)$, como indica a figura 6.1 a seguir:

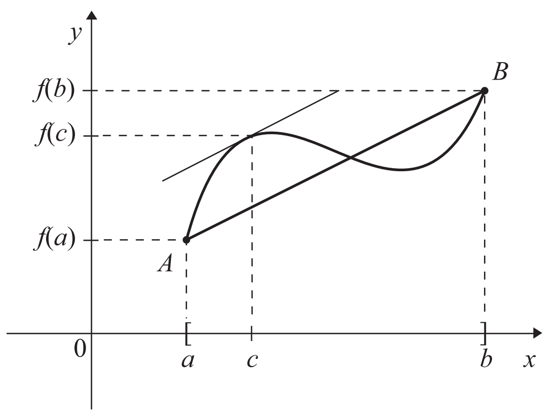

Figura 6.1

Exemplo 6.1 *Seja* $f(x) = x^2$ *definida no intervalo* $\left[-1,3\right]$. *Calcular o valor de* c *que o TVM garante existir.*

Resolução: Aqui $a = -1$ e $b = 3$. Vamos calcular $f(a)$ e $f(b)$, assim

$$f(a) = f(-1) = \left(-1\right)^2 = 1 \text{ e } f(b) = f(3) = 3^2 = 9\,.$$

Como $f(x) = x^2$ é contínua para todo x, $f'(x) = 2x$ existe em $-1 < x < 3$ e $f'(c) = 2c$ para $-1 < c < 3$, temos

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow 2c = \frac{9 - 1}{3 - (-1)} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1\,,$$

ou seja,

$$c = 1\,.$$

Portanto, o valor de c que o TVM garante existir em $\left(-1,3\right)$ vale 1.

Exemplo 6.2 Seja $f(x) = x^3$, $a = -2$ e $b = 2$. *Determine os pontos desse intervalo onde se verifica a afirmação do teorema do valor médio.*

Resolução: A função é um polinômio e como tal satisfaz as hipóteses do TVM. Queremos determinar $c \in \left(-2,2\right)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Assim, $f'(x) = 3x^2$ e $f'(c) = 3c^2$ para $c \in \left(-2,2\right)$. Então

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{8 - (-8)}{2 - (-2)} = 4\,,$$

de forma que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow 3c^2 = 4 \Rightarrow c^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Logo, os dois valores de c são: $c_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $c_2 = +\frac{2}{\sqrt{3}}$ entre $a = -2$ e $b = 2$, nos quais a tangente à curva $y = x^3$ é paralela à corda que passa pelos pontos $(-2,-8)$ e $(2,8)$.

Portanto, os pontos onde se verifica a afirmação do TVM são

$$c_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ e } c_2 = +\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Fórmula de Taylor

A fórmula de Taylor é uma extensão do teorema do valor médio. Isto nos motiva a seguinte definição:

Seja f uma função tal que f e suas n primeiras derivadas f', f'',..., $f^{(n-1)}, f^{(n)}$ sejam contínuas em $[a,b]$. Além disso, $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo x no intervalo aberto (a,b). Então, a fórmula de Taylor ou polinômio de Taylor de ordem n, no ponto a, da função f é definida por

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Observação *No caso de $a = 0$ temos*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

*a qual é chamado de **fórmula de Maclaurin** de $f(x)$.*

A fórmula de Taylor pode ser utilizada para calcular um valor aproximado de determinada função por meio de somas parciais, por exemplo, calcular um valor aproximando de $\ln(3,74)$, $e^{4,289}$, etc.

Exemplo 6.3 *Seja* $f(x) = \ln x$. *Determine a fórmula ou o polinômio de Taylor no ponto* $a = 1$, *de ordem:*

(i) 3;

(ii) n, *sendo* n *um número natural qualquer.*

(iii) Use o polinômio do item (i) para calcular um valor aproximado de $\ln(1{,}1)$.

Resolução: Vamos inicialmente determinar o polinômio de Taylor de ordem 3, no ponto $a = 1$, ou seja, devemos ter

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Assim,

$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = 0$;

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$;

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$;

$f'''(x) = \dfrac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2!$;

$f^{iv}(x) = -\dfrac{6}{x^4} \Rightarrow f^{iv}(1) = -3!$;

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$.

Logo, respondendo (i), vem

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

ou,

$$\ln x = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3,$$

ou seja,

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

Agora, para responder (ii), vem

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Finalmente, respondendo (iii), temos

Para calcular $\ln(1,1)$, fazendo $x = 1,1$ em (i), vem

$$\ln 1,1 = 0,1 - \frac{1}{2}(0,1)^2 + \frac{1}{3}(0,1)^3.$$

Simplificando a expressão acima, obtemos

$$\ln(1,1) = 0,09533.$$

Exemplo 6.4 *Determinar a fórmula ou o polinômio de Taylor de ordem* n*, no ponto zero da função* $f(x) = e^x$.

Resolução: Vamos determinar a expressão

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

É dado que $f(x) = e^x$, então

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = f^n(x) = e^x,$$

e

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1.$$

Logo,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Portanto, a fórmula ou o polinômio de Taylor de ordem n, no ponto zero da função $f(x) = e^x$ é dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Isto significa que para valores de x próximos de zero,

$$e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Observação *Quanto maior* n*, melhor a aproximação.*

Por exemplo, fazendo $x = 1$ e $n = 6$, obtemos:

$$e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}.$$

De fato, a soma à direita aproxima o número té a terceira casa decimal, sendo o "erro" igual a $2{,}26 \times 10^{-4}$.

Exemplo 6.5 *Seja a função* $f(x) = \sqrt{x}$. *Obter uma aproximação de Taylor de terceira ordem no ponto* $a = 9$.

Resolução: Vamos determinar

$$f(x) = f(9) + \frac{f'(9)}{1!}(x-9) + \frac{f''(9)}{2!}(x-9)^2 + \frac{f'''(9)}{3!}(x-9)^3.$$

Assim,

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \Rightarrow f(9) = \sqrt{9} = 3,$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4\sqrt[2]{x^3}} = -\frac{1}{4x\sqrt[2]{x}}$$

$$\Rightarrow f''(9) = -\frac{1}{4\cdot 9\cdot\sqrt{9}} = -\frac{1}{4\cdot 9\cdot 3} = -\frac{1}{108},$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{8}.x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\cdot\sqrt[2]{x^5}} = \frac{3}{8\cdot x^2\cdot\sqrt[2]{x}}$$

$$\Rightarrow f'''(9) = \frac{3}{8\cdot 9^2\cdot\sqrt[2]{9}} = \frac{3}{8\cdot 81\cdot 3} = \frac{1}{648}.$$

Logo,

$$f(x) = f(9) + \frac{f'(9)}{1!}(x-9) + \frac{f''(9)}{2!}(x-9)^2 + \frac{f'''(9)}{3!}(x-9)^3,$$

ou seja,

$$f(x) = 3 + \frac{\frac{1}{6}}{1!}(x-9) + \frac{-\frac{1}{108}}{2!}(x-9)^2 + \frac{\frac{1}{648}}{3!}(x-9)^3,$$

isto é,

$$f(x) = 3 + \frac{1}{6\cdot 1}(x-9) - \frac{1}{108\cdot 2}(x-9)^2 + \frac{1}{648\cdot 6}(x-9)^3$$

Portanto, a aproximação de Taylor de terceira ordem de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $a = 9$ é

$$f(x) = \sqrt{x} = 3 + \frac{1}{6}(x-9) - \frac{1}{216}(x-9)^2 + \frac{1}{3888}(x-9)^3.$$

Por exemplo, um valor aproximado de $\sqrt{5}$ seria

$$\sqrt{5} \cong 3 + \frac{1}{6}(5-9) - \frac{1}{216}(5-9)^2 + \frac{1}{3888}(5-9)^3,$$

ou seja,

$$\sqrt{5} \cong 3 + \frac{(-4)}{6} - \frac{(-4)^2}{216} + \frac{(-4)^3}{3888},$$

ou seja,

$$\sqrt{5} \cong 3 - \frac{4}{6} - \frac{16}{216} - \frac{64}{3888}$$

$$= 3 - 0{,}6667 - 0{,}0741 - 0{,}0165$$

$$= 3 - 0{,}7572 = 2{,}2428.$$

Portanto,

$$\sqrt{5} \cong 2{,}2428.$$

Regra de L´Hospital

Vamos estudar, nesta seção, outra aplicação das derivadas, que consiste num modo bastante útil de calcular limites de formas indeterminadas, a chamada Regra (ou Teorema) de L'Hospital*, que nos permite levantar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, estudadas na unidade 4, provenientes do cálculo do limite do quociente de duas funções deriváveis.

Nesta seção, queremos calcular o limite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, nos seguintes casos

(a) $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$;

(b) $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to \infty$ quando $x \to a$.

Em ambos, calculamos $f'(x)$, $g'(x)$ e $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Se este limite existe, segue que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ também existe. Caso a indeterminação continua, isto é, $f'(x)$ e $g'(x)$ satisfazem (a) e (b), calcule $f''(x)$ e $g''(x)$ e $\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$. E assim por diante.

GLOSSÁRIO

Regra de L'Hospital*: foi incorporada por Guillaume François Antoine, Marquês de l'Hospital, em 1696. Seu objetivo é calcular o limite de frações nos casos em que há indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 6.6 *Usando a regra de L'Hospital, calcular o valor do limite*

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}.$$

Resolução: Aqui $f(x)=x^2-x-12$ e $g(x)=x^2-3x-4$. Aplicando o Teorema 4.3, da seção 4.2.2 letras (d) e (a), vem

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}(x^2-x-12)=4^2-4-12=0$$

e

$$\lim_{x\to 4} g(x)=\lim_{x\to 4}(x^2-3x-4)=4^2-3\cdot 4-4=0.$$

Como $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to 4} g(x)=0$, temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Calculando $f'(x)$ vem $f'(x)=2x-1$ e calculando $g'(x)$ vem $g'(x)=2x-3$.

Aplicando a regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{2x-1}{2x-3}=\frac{2\cdot 4-1}{2\cdot 4-3}=\frac{7}{5}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}=\frac{7}{5}.$$

Exemplo 6.7 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-e^x}$.

Resolução: Aqui $f(x)=x$ e $g(x)=1-e^x$. Aplicando o Teorema 4.3 da seção 4.2.2, letras (d) e (a), vem

$$\lim_{x\to 0} x=0 \text{ e } \lim_{x\to 0}(1-e^x)=1-e^0=1-1=0.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ e $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^x)=0$, temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Calculando $f'(x)$ e $g'(x)$ vem $f'(x)=1$ e $g'(x)=-e^x$.

Aplicando a regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{-e^x}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^x}=-1.$$

Exemplo 6.8 *Calcular* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

Resolução: Como $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$, temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Logo,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}.$$

A indeterminação continua. Aplicando novamente a regra, vem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(2x\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0.$$

Exemplo 6.9 Calcular

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\log x\right).$$

Resolução: Aplicando o Teorema 4.3, da seção 4.2.2, letra (c), vem

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left(\log x\right) = \log\left(\lim_{x\to 0} x\right) = \infty.$$

Temos uma indeterminação do tipo $0\times\infty$, pois $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$, no caso, $f(x)\to 0$ e $g(x)\to\infty$, quando $x\to 0$.

Vamos escrever

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

obtendo assim as indeterminações do tipo

$$\frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\log x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-2}},$$

ou,

$$\lim_{x \to 0}\left(x^2 \cdot \log x\right) = \lim_{x \to 0}\frac{\log x}{x^{-2}}.$$

Como $\lim_{x \to 0}\left(\log x\right) = \log\left(\lim_{x \to 0} x\right) = \infty$ e $\lim_{x \to 0} x^{-2} = \infty$, temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Aplicando a regra de L'Hospital, vem

$$\lim_{x \to 0}\left(x \cdot \log x\right) = \lim_{x \to 0}\frac{\left(\log x\right)'}{\left(x^{-2}\right)'} = \lim_{x \to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-2 \cdot x^{-3}}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{x^{-1}}{-2 \cdot x^{-3}} = \lim_{x \to 0}\frac{x^{-1-(-3)}}{2} = \lim_{x \to 0}\frac{x^2}{2} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0}\left(x^2 \cdot \log x\right) = 0.$$

Máximos e mínimos de uma função

Esta seção tem como objetivo estudar aplicações da derivada para determinar os valores máximos e mínimos de uma função. Para isto, necessitamos da seguinte definição.

Dada a função $f: I \to \mathbb{R}$, um ponto $x_0 \in I$ é chamado de

(i) *ponto de máximo relativo (ou local) da função, quando* $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$;

(ii) *ponto de mínimo relativo (ou local) da função, quando* $f(x_0) \leq f(x)$ *para todo* $x \in I$.

O valor $f(x_0)$ é chamado de máximo ou mínimo relativo (ou local) de f, e $(x_0, f(x_0))$ são as coordenadas do ponto de máximo ou mínimo relativo (ou local) de f.

Os máximos e mínimos de uma função são também chamados de extremos relativos.

Dada a função $f(x)$, um ponto x_0 onde f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = 0$ ou f não é derivável em x_0 é chamado de ponto crítico da função f.

Exemplo 6.10 *Seja a função $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Determinar os pontos críticos de f.*

Resolução: Sabemos que $f(x) = x^3 - 3x^2$ é uma função polinomial derivável em todo $x \in \mathbb{R}$.

Calculando $f'(x)$, temos $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

Agora $f'(x) = 0$ implica em $3x^2 - 6x = 0$, ou seja, $x = 0$ e $x = 2$ são os pontos críticos da função $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Exemplo 6.11 Determinar o ponto crítico da função $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}, x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Calculando $f'(x)$, temos

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}},$$

ou,

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}.$$

A função dada não derivável em $x = 1$, isto é, não existe $f'(1)$. Nesse caso, $x = 1$ é o único ponto crítico de f.

Exemplo 6.12 *Calcular os pontos críticos da função* $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, *no intervalo* $[-2, \frac{1}{2}]$.

Resolução: Inicialmente temos $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, então $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

Fazendo $f'(x) = 0$, vem $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Resolvendo a equação pela fórmula de Bháskara, encontramos as raízes $x = -1$ e $x = \dfrac{1}{3}$.

Portanto, $x = -1$ e $x = \dfrac{1}{3}$ são os pontos críticos de $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ em $[-2, \frac{1}{2}]$.

Seja f uma função derivável em x_0. Se f tem um máximo ou mínimo relativo (ou local) em x_0, então $f'(x_0) = 0$.

Por exemplo, a função $f(x) = x^2$, para $x \in (-1, 1)$, tem derivada $f'(x) = 2x$. Em $x = 0$, a função tem um mínimo relativo e $f'(0) = 0$.

Vimos na Unidade 3, que dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$, f é crescente no intervalo I quando dados $x_1, x_2 \in I$, quaisquer, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$ e f é decrescente no intervalo I quando dados $x_1, x_2 \in I$, quaisquer, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

O teorema a seguir estabelece um critério para determinar onde uma função f é crescente ou decrescente.

Teorema *Seja* $f(x)$ *uma função derivável no intervalo* $(a,\ b)$, *então*
(a) Se $f'(x)=0$ *em* $(a,\ b)$, *então* $f(x)$ *é constante em* $(a,\ b)$;
(b) Se $f'(x)>0$ *em* $(a,\ b)$, *então* $f(x)$ *é crescente em* $(a,\ b)$;
(c) Se $f'(x)<0$ *em* $(a,\ b)$, *então* $f(x)$ *é decrescente em* $(a,\ b)$.

Exemplo 6.13 *Seja* $f(x)=x^2$. *Determinar os intervalos onde* f *é crescente e decrescente.*

Resolução: Temos $f(x)=x^2$ e $f'(x)=2x$.
Agora, $f'(x)=2x\le 0$ se, e somente se, $x\le 0$ então $f'(x)\le 0$, logo, f é decrescente em $(-\infty,0]$ e $f'(x)=2x\ge 0$ se, e somente se, $x\ge 0$ então $f'(x)\ge 0$, logo, f é crescente em $(-\infty,0]$.
Utilizando o sistema de sinais, podemos interpretar assim:

x	$f(x)$	Conclusão
$x<0$	$-$	$f(x)$ decrescente em $(-\infty,0]$
$x>0$	$+$	$f(x)$ crescente em $[0,-\infty)$

Veja a figura abaixo:

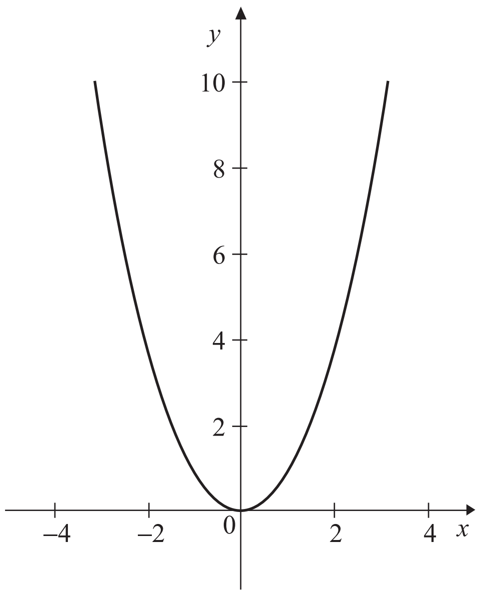

Figura 6.2

Exemplo 6.14 *Determinar os intervalos onde* f *é crescente e decrescente, onde* $f(x) = x^3$.

Resolução: De $f(x) = x^3$ temos $f'(x) = 3x^2$. Agora, $3x^2 \geq 0$ então $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e f é crescente em $\mathbb{R}$.

Exemplo 6.15 Seja $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ definida para todo x real. Determinar os intervalos onde f é crescente e decrescente.

Resolução: Temos $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ então $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Agora, fazendo $f'(x) = 0$, vem $3x^2 - 12x + 9 = 0$. Resolvendo esta equação pela regra de Bhaskara, temos as raízes $x = 3$ e $x = 1$. Logo, $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$.
Utilizando o sistema de sinais, podemos interpretar assim,

x	$f(x)$	**Conclusão**
1	0	ponto crítico de f
$x < 1$	$+$	f é crescente
$1 < x < 3$	$-$	f é decrescente
$x = 3$	0	ponto crítico de f
$x > 3$	$+$	f é crescente

Portanto, $f(x)$ é crescente em $(-\infty, 1]$ e $[3, \infty)$ e decrescente em $[1, 3]$. Também $x = 3$ e $x = 1$ são extremos da função (pontos críticos).

Teste da segunda derivada para extremos relativos

Este teste é empregado para pesquisar o(s) ponto(s) de máximo(s) e mínimo(s) relativo de uma dada função. Para isto, temos a seguinte definição.

Seja x_0 um ponto crítico de uma função, na qual $f'(x_0) = 0$ e f' existe para todos os valores de x, em algum intervalo aberto que contenha o ponto x_0. Então, $f''(x_0)$ existe e:

(i) se $f''(x_0) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em x_0;
(ii) se $f''(x_0) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em x_0.

Exemplo 6.16 *Pesquisar máximos e mínimos relativos da função $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$, pelo critério ou teste da segunda derivada.*

Resolução: Temos, $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$, então:
$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x$.
Agora, $f'(x) = 0$ vem $4x^3 + 4x^2 - 8x = 0$. Fatorando a expressão $4x^3 + 4x^2 - 8x = 0$, vem

$$4x(x^2 + x - 2) = 4x(x + 2)(x - 1) = 0.$$

A partir desta fatoração, fica claro que $f'(x)$ será igual a zero se, e somente

$$x = 0,\ x = -2 \text{ e } x = 1.$$

Logo, $x = 0$, $x = -2$ e $x = 1$ são pontos críticos da função f.
Vamos analisar agora, os pontos críticos obtidos separadamente.
Calculando $f''(x)$, temos

$$f''(x) = 12x^2 + 8x - 8.$$

Analisando para $x = 0$, vem $f''(0) = 12 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$, assim, $x = 0$ é um ponto de máximo relativo da função f e seu valor no ponto $x = 0$ é $f(0) = 0^4 + \frac{4}{3} \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 = 0$ ou $f(0) = 0$.
Analisando para $x = 1$, vem $f''(1) = 12 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 8 = 12 > 0$, assim $x = 1$ é um ponto de mínimo relativo da função f e seu valor no ponto é $f(1) = 1^4 + \frac{4}{3} \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 = 1 + \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3}$ ou $f(1) = -\frac{8}{3}$.

Finalmente, analisando para $x = -2$, vem
$f''(-2) = 12 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) - 8 = 12 \cdot 4 - 16 - 8 = 24 > 0$.

Assim, $x = -2$ é um ponto de mínimo relativo da função f e seu valor no ponto é:

$$f(-2) = (-2)^4 + \frac{4}{3}\cdot(-2)^3 - 4\cdot(-2)^2 = 16 + \frac{4}{3}\cdot(-8) - 4\cdot 4 = -\frac{32}{3},$$

ou seja,

$$f(-2) = -\frac{32}{3}.$$

Portanto, $x = 0$ é um ponto de máximo relativo da função f , $x = 1$ é um ponto de mínimo relativo da função f e $x = -2$ é um ponto de mínimo relativo da função f. Veja a figura abaixo:

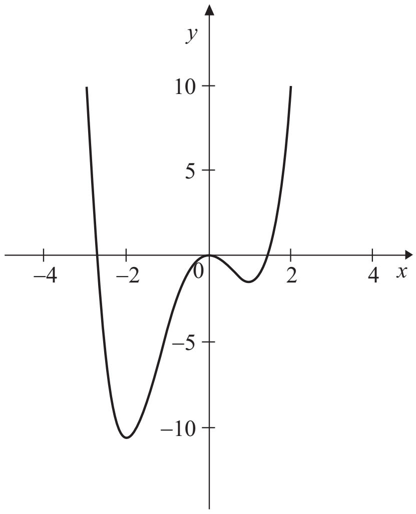

Figura 6.3

Exemplo 6.17 *Encontrar os extremos relativos da função* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ *usando o critério da segunda derivada.*

Resolução: Temos, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, então $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ e $f''(x) = 6x - 12$.

Agora, para calcular os pontos críticos de f é só igualar $f'(x)$ a zero, ou seja, $f'(x) = 0$, isto é, $3x^2 - 12x + 9 = 0$, fatorando, vem $3(x-3)(x-1) = 0$.

A partir desta fatoração, fica claro que $f'(x)$ será zero se, e somente se, $x = 1$ e $x = 3$.

Logo, $x = 1$ e $x = 3$ são pontos críticos de f .

Vamos determinar agora os extremos relativos de f .

Para $x = 1$, temos $f''(1) = 6\cdot 1 - 12 = -6 < 0$, logo $x = 1$ é um ponto de máximo relativo da função f.

Para $x = 3$, temos $f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0$, logo $x = 3$ é um ponto de mínimo relativo da função f.

Portanto, $x = 0$ é um ponto de máximo relativo da função f e $x = 3$ é um ponto de mínimo relativo da função f.

Veja a figura abaixo:

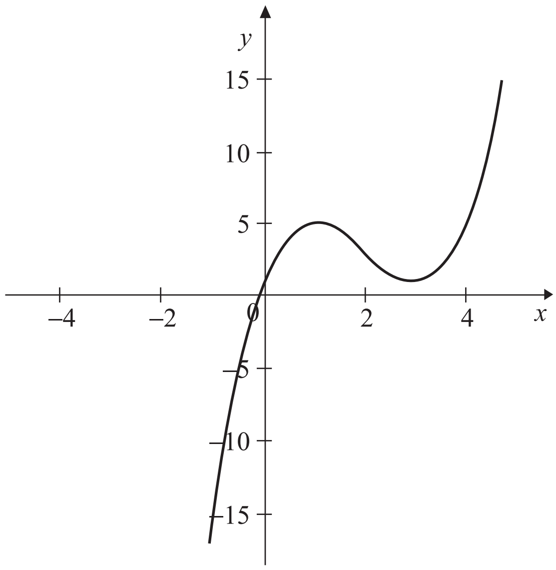

Figura 6.4.

Exemplos práticos

Exemplo 6.18 *A função custo mensal de fabricação de um produto é dada por* $C(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 10x + 1$ *e a função de demanda mensal* (p), *do mesmo produto, é dada por* $p(x) = 10 - x$. *Qual o preço* x *que deve ser cobrado para maximizar o lucro?*

Resolução: O lucro total é dado por

$Lucro(L) = \text{Re}\,ceita(R) - Custo(C)$ e a receita será

$\text{Re}\,ceita = p \cdot x$, assim $R = p \cdot x = (10 - x) \cdot x = 10x - x^2$. Logo,

$$L = R - C = 10x - x^2 - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 10x + 1\right)$$

$$= 10x - x^2 - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 10x - 1,$$

ou ainda,

$$L(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - 1.$$

Calculando a derivada primeira da função lucro, em relação a x, temos

$$L'(x) = -x^2 + 2x \text{ e } L''(x) = -2x + 1.$$

Agora, para calcular os pontos críticos de L é só igualar $L'(x)$ a zero, ou seja, $L'(x) = 0$ e vem $-x^2 + 2x = 0$. Resolvendo esta equação pela fórmula de Bháskara, temos as raízes $x = 0$ e $x = 2$. Logo, $x = 0$ e $x = 2$ são os pontos críticos de L.

Vamos determinar agora os extremos relativos de L.

Para $x = 0$, temos $L''(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$, logo, é um ponto de mínimo relativo de L.

Para $x = 2$, temos $L''(2) = -2 \cdot 2 + 1 = -3 < 0$, logo, é um ponto de máximo relativo de L.

Portanto, o preço que deve ser cobrado para maximizar o lucro é $x = 2$.

Exemplo 6.19 *A empresa "Sempre Alerta" produz um determinado produto, com um custo mensal dado pela função* $C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 10x + 20$. *Cada unidade deste produto é vendido por R$31,00. Determinar a quantidade que deve ser produzida e vendida para dar o máximo lucro mensal.*

Resolução: Seja x a quantidade a ser produzida e vendida para dar o máximo lucro mensal.

O lucro mensal é dado por:

$$Lucro(L) = \text{Re}\,ceita(R) - Custo(C),$$

assim

$$L = R - C = 31x - \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 10x + 20\right)$$

$$= 31x - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 10x - 20$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 21x - 20$$

ou ainda,

$$L(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 21x - 20.$$

Calculando a derivada primeira da função lucro, em relação a x, temos

$$L'(x) = -x^2 + 4x + 21 \text{ e } L''(x) = -2x + 4.$$

Agora, para calcular os pontos críticos de L é só igualar $L'(x)$ a zero, ou seja, $L'(x) = 0$ e vem $-x^2 + 4x + 21 = 0$. Resolvendo esta equação pela fórmula de Bháskara, temos as raízes $x = -3$ e $x = 7$.

Logo, $x = -3$ e $x = 7$ são os pontos críticos de L.

Vamos determinar agora os extremos relativos de L.

Para $x = -3$, temos $L''(-3) = (-2)\cdot(-3) + 4 = 10 > 0$, logo, é um ponto de mínimo relativo de L.

Para $x = 7$, temos $L''(7) = -2\cdot 7 + 4 = -10 < 0$, logo, é um ponto de máximo relativo de L.

Portanto, a quantidade a ser produzida e vendida para dar o máximo lucro mensal é $x = 7$.

Exercícios propostos - 1

1) Verifique se as condições do teorema do valor médio são satisfeitas pela função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ em $[-1,\ 2]$. Determine os pontos desse intervalo onde se verifica a afirmação do teorema.

2) Seja $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [-3,\ 3]$. Determine $c \in (-3, 3)$ pelo TVM tal que $f'(c) = \dfrac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$.

3) Obtenha uma aproximação de Taylor de quarta ordem da função $f(x) = sen x$ no ponto $x = \pi$

4) Determine a fórmula de Taylor de ordem n da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ no ponto $a = 1$.

5) Dê a fórmula da Taylor de ordem 4 da função $f(x) = e^{-2x}$ no ponto zero.

6) Encontre a fórmula de Taylor de ordem 3 da função $f(x) = tgx$ no ponto zero.

7) Aplicando a regra de L'Hospital, calcular os seguintes limites.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(6x)}{4x}$.

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left[\left(1 - \dfrac{2x}{\pi}\right) \operatorname{tg} x\right]$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{senx}$.

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{e^x - 1}$.

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-8}$.

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$.

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-2x-1}$.

8) Seja $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$.

a) Determine os pontos críticos de f.

b) Determine os intervalos onde f é crescente e decrescente.

9) Seja $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 8$, determine:

a) os pontos críticos,

b) os intervalos onde f é crescente e decrescente,

c) os valores máximos e mínimos de f.

10) O custo total de produção de x aparelhos de certa TV Plasma por dia é $R\$\left(\dfrac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right)$ e o preço unitário que elas podem ser vendidas é $R\$\left(50 - \dfrac{1}{2}x\right)$ cada. Qual deve ser a produção diária para que o lucro seja máximo?

11) A produção de bicicletas da empresa "Roda Viva" é de x por mês, ao custo dado por $C(x) = 100 + 3x$. Se a equação de demanda for $p = 25 - \frac{x}{3}$, obtenha o número de unidades que devem ser produzidas e vendidas para maximizar o lucro mensal.

12) A equação de demanda de um produto é $p = 30 - 5\ln x$. Determinar:

a) a função receita $R(x)$;

b) o valor de x que maximiza a receita.

Saiba Mais...

Para aprofundar os temas abordados neste capítulo consulte:

- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: Funções, Limite, Derivação, Integração, 5ª ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
- KUELKAMP, Nilo. **Cálculo 1**. 3ed. Florianópolis: UFSC, 2006.
- LEITHOLD, Louis. **Matemática aplicada à economia e administração**. São Paulo: Harbra, 1988.
- SILVA, Sebastião Medeiros da; SILVA, Elio Medeiros da; SILVA, Ermes Medeiros da. **Matemática**: para os cursos de economia, administração e ciências contábeis. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1988.

RESUMO

Nesta Unidade, você estudou a importância do Teorema do Valor Médio e viu que a fórmula de Taylor é uma extensão deste teorema. Você aprendeu, também, a calcular limites de formas indeterminados do tipo $\frac{0}{0}$, aplicando a regra de L'Hospital. Conheceu aplicações da derivada na determinação de pontos de máximos e mínimos.

RESPOSTAS

- **Exercícios propostos - 1**

1) $c = -1 + \sqrt{3}$.

2) $c = 0$

3) $f(x) = sen x = (-1)(x - \pi) + \frac{1}{6}(x - \pi)^3$.

4) $f(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots + (-1)^n (x-1)^n + (-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}$

5) $e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4$.

6) $\text{tg}\, x = x + \frac{x^3}{3!}$.

7) a) $\frac{6}{4}$. b) $\frac{2}{\pi}$. c) 0.

d) 0. (e) $\frac{1}{3}$. (f) 0.

(g) $+\infty$. (h) 3.

8) a) 1 e $-\frac{5}{3}$.

b) f é crescente no intervalo $x < -\frac{5}{3}$;

f é decrescente no intervalo $-\frac{5}{3} < x < 1$;

f é crescente no intervalo $x > 1$.

9) a) 2 e -3.

b) f é crescente no intervalo $x < -3$;

f é decrescente no intervalo $-3 < x < 2$;

f é crescente no intervalo $x > 2$.

c) em $x = -3$, f tem ponto de máximo e em $x = 2$, f tem ponto de mínimo.

10) 10 aparelhos de TV Plasma por dia.

11) 33 bicicletas.

12) a) $R(x) = 30x - 5x \ln x$; b) $x = e^5$.