

**Parte IV**

---

**O PROBLEMA MACRO-LOGÍSTICO**

---

## 8. PRODUÇÃO, ESTOQUE, TRANSFERÊNCIA E DISTRIBUIÇÃO

## 8.1. O problema macro-logístico

Até este ponto analisamos aspectos isolados do sistema logístico, tais como o problema do transporte e distribuição, as instalações de interface (depósitos e armazens), etc. Na verdade o problema logístico global envolve, de maneira integrada, os diversos segmentos da sequência de escoamento do produto, desde sua fabricação até o consumo final. Essa é uma distinção importante entre os problemas típicos de transportes e os problemas logísticos.

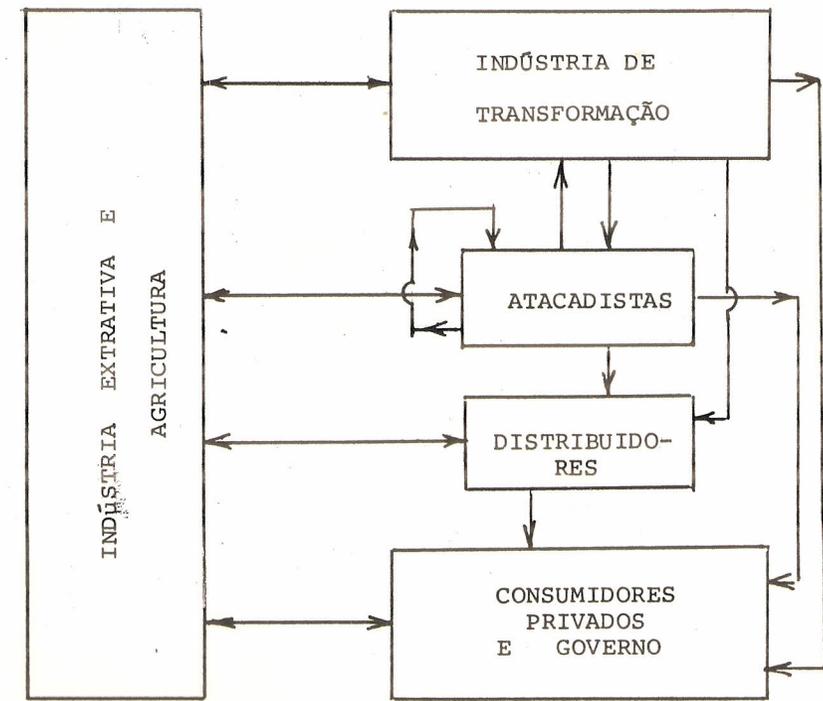
Os produtos, logo que são fabricados, podem permanecer estocados por algum tempo na origem, ou podem ser transferidos para pontos intermediários estrategicamente localizados, ou podem ser distribuídos para os agentes de comercialização, formando estoques individualizados locais. As ênfases variam de caso para caso, havendo também soluções intermediárias, com os três tipos de estocagem co-existindo.

As indústrias, por sua vez, absorvem matéria prima proveniente de outras indústrias, bem como da agricultura e da indústria extrativa mineral, em alguns casos. A Fig. 8.1, extraída de Bowersox (3), mostra os diversos canais de escoamento e distribuição de insumos e produtos no processo macro-logístico. Observa-se que não há uma linha definida de escoamento, podendo ser observadas sequências diversas.

O problema macro-logístico, conforme delineado, é bastante complexo porque envolve um grande número de variáveis e se apresenta de inúmeras formas, conforme o caso. Neste capítulo vamos nos concentrar na análise de um problema típico, cujos contornos são apresentados a seguir:

a) O produto, imediatamente após fabricação, vai se acumulando na indústria de origem, constituindo um primeiro estoque do processo.

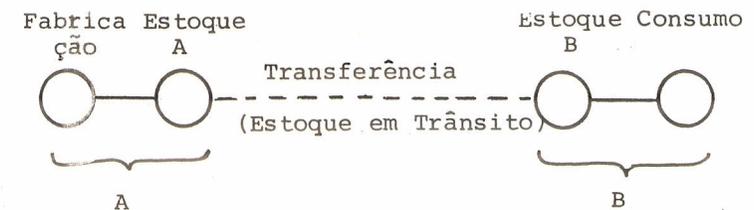
b) A intervalos definidos o produto é transferido, a partir do estoque inicial na indústria, para um depósito de triagem



Fonte: Bowersox (3)

Canais Típicos de Escoamento e Distribuição de Insumos e Produtos

Figura 8.1



Transferência Direta Indústria-Distribuidor

Figura 8.2

e transferência. O processo de transferência se caracteriza as sim de duas formas: é um transporte de mercadorias, de um lado, mas gera também um estoque em trânsito, já que o produto permanece retido no veículo durante todo o tempo de deslocamento.

c) Uma vez no depósito a mercadoria é descarregada e ve rificada. É feita, a seguir, a triagem da mesma em função dos pontos de destino final (distribuição). O produto se acumula nos boxes à espera do carregamento nos veículos de distribuição, sendo finalmente embarcados. Aparecem assim custos de manipula ção e de abrigo da carga, como também o custo de retenção (estoque) da mercadoria pelo tempo que permanece no depósito.

d) A seguir a mercadoria é distribuída aos seus destina tários. O processo envolve despesas de distribuição e, mais uma vez, custo de estocagem em trânsito.

e) Finalmente a mercadoria permanece estocada no agente de comercialização até seu consumo final.

O esquema descrito pode sofrer variações diversas. No entanto, ao analisar esse caso, teremos condições de estendê-lo a situações mais complexas sem muita dificuldade.

Antes de chegarmos ao sistema macro-logístico acima descrito vamos analisar situações mais simples, generalizando ao fim para o caso mais completo.

## 8.2. Transferência direta indústria-consumidor

Nêste caso simples admitimos que a transferência da mercadoria seja processada diretamente da indústria para o consu midor (ou distribuidor local), sem passar por instalação intermediária de triagem (depósito, armazém). O processo segue, então, o esquema da Fig. 8.2. Este caso corresponde às situações de carregamento pleno entre fabricante e consumidor.

Seja  $Q$  o consumo mensal médio do distribuidor, medido em toneladas por mês, ou  $m^3/mês$ , ou outra unidade apropriada. A mercadoria apresenta um valor médio unitário igual a  $\mu$  (medida em CZ\$/ton ou outra unidade apropriada). O tempo médio de transfe

rência, da fábrica ao distribuidor, é representado por  $\tau$ , ( em dias).

Seja  $\alpha$ , por outro lado, a taxa de custo financeiro, medida em termos mensais (juros, despesas de estocagem e mais outras despesas financeiras). Seja  $U$ , por outro lado, o tamanho médio dos lotes de mercadoria na transferência entre os pontos A e B.

Finalmente  $t_R$  é o intervalo de tempo entre remessas sucessivas, medido em dias.

Inicialmente devemos estabelecer a relação entre o tamanho do lote ( $U$ ), o intervalo entre remessas ( $t_R$ ) e o fluxo  $Q$ :

$$Q = \left[ \begin{array}{l} \text{fluxo} \\ \text{[médio]} \\ \text{diário} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{l} \text{intervalo} \\ \text{[entre]} \\ \text{remessas} \end{array} \right] = \frac{Q}{30} \cdot t_R \quad (8.1)$$

Analisaremos, a seguir, o estoque nos seus três está gios, conforme indicado na Fig. 8.2.

### a) Estoque na indústria

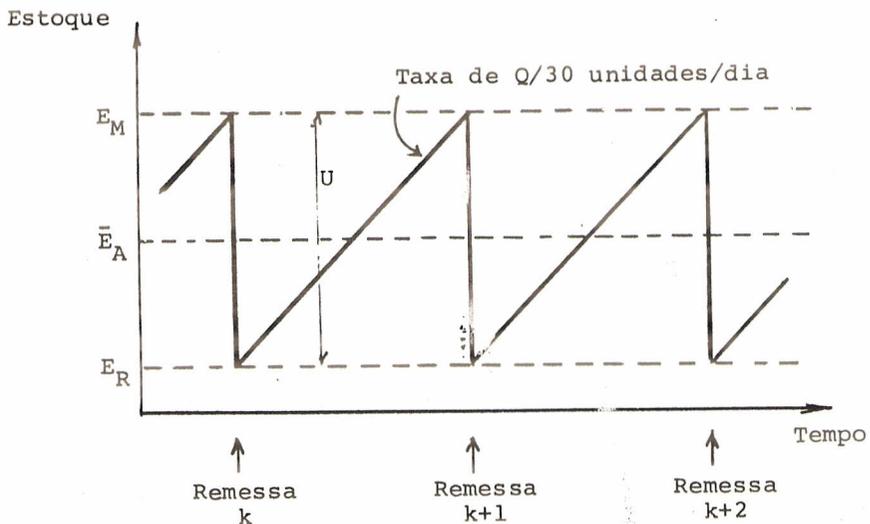
A mercadoria vai sendo produzida num ritmo de  $Q/30$  unidades por dia, sendo acumulada no estoque até que uma remessa seja liberada para o distribuidor. O processo, no ponto A (in dústria), segue o diagrama da Fig. 8.3. O nível de estoque os cilará, então, entre um nível mínimo (estoque de reserva  $E_R$ ) e um nível máximo  $E_M$ .

Vê-se, através da Fig. 8.3, que:

$$E_M = E_R + U \quad (8.2)$$

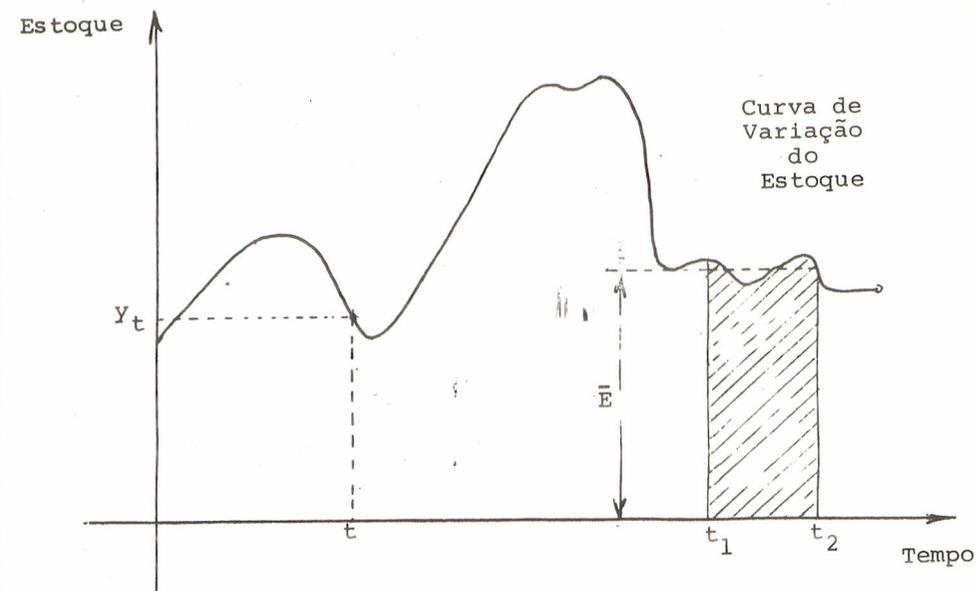
O estoque médio, por sua vez, é representado por  $\bar{E}_A$  e é igual à média aritmética entre  $E_M$  e  $E_R$  dado o caráter linear da função:

$$\bar{E}_A = \frac{E_M + E_R}{2} = \frac{2 \cdot E_R + U}{2} = E_R + \frac{U}{2} \quad (8.3)$$



Evolução do Estoque na Origem (indústria)

Figura 8.3



Variação do Estoque no Tempo

Figura 8.4

b) Estoque em trânsito

O tempo médio de transferência da mercadoria, da indústria ao distribuidor, é representado por  $\tau$ . Toda vez que ocorre uma remessa da mercadoria o produto permanece estocado em trânsito durante o intervalo  $\tau$ .

É necessário distinguir aqui os conceitos de estoque instantâneo, momento de estoque e estoque médio. Considere-se, para isso, uma curva de variação do nível do estoque no tempo, conforme mostrada na Fig. 8.4. A curva pode ser uma função qualquer, representada genericamente por  $y = f(t)$ .

Num determinado instante  $t$  o nível de estoque tem o valor  $y_t$ , conforme mostra a Fig. 8.4. O nível  $y_t$  representa assim o estoque instantâneo no instante  $t$ .

Se calcularmos a área embaixo da curva, entre dois instantes  $t_1$  e  $t_2$  (Fig. 8.4), temos:

$$M_E = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \left[ \begin{array}{l} \text{área sob} \\ \text{a curva} \\ \text{entre } t_1 \text{ e } t_2 \end{array} \right] \quad (8.4)$$

O valor de  $M_E$  representa o momento de estoque entre  $t_1$  e  $t_2$ .

Finalmente, se dividirmos o momento de estoque  $M_E$  pelo intervalo de tempo  $t_2 - t_1$  correspondente, temos o estoque médio naquele intervalo:

$$\bar{E} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \cdot \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \frac{M_E}{t_2 - t_1} \quad (8.5)$$

Voltando à análise do estoque em trânsito, traçamos o diagrama da variação temporal do nível de estoque, conforme mostra a Fig. 8.5. Vamos considerar um intervalo de tempo entre duas remessas consecutivas, com duração  $t_R$ . Enquanto a transferência da mercadoria se realiza o produto permanece em estoque (gerando um momento de estoque igual a  $U \cdot \tau$ , correspondente aos retângulos hachurados da Fig. 8.5. O momento de estoque no intervalo restante  $t_R - \tau$  é zero, pois não há estoque em trânsito.

Assim, o estoque médio referente ao intervalo entre



Somando-se os três estoques médios anteriormente calculados, obtemos o estoque médio total:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \bar{E}_A + \bar{E}_T + \bar{E}_B = E_R \tau + \frac{U}{2} + \frac{2 \cdot \tau}{30} + E_R + \\ &+ \frac{U}{2} = 2 \cdot E_R \tau + U + \frac{Q \cdot \tau}{30} \end{aligned} \quad (8.10)$$

Para o período de um mês o momento médio de estoque é igual à  $30 \cdot \bar{E}$ . Multiplicando-se o momento de estoque pela taxa diária de custo financeiro (isto é,  $\alpha/30$ ) e pelo valor médio unitário da mercadoria ( $\mu$ ) obtém-se o custo mensal médio de estoque:

$$CM_E = 30 \cdot \bar{E} \cdot \frac{\alpha}{30} \cdot \mu = \alpha \cdot \mu \cdot \bar{E} \quad (8.11)$$

O fluxo mensal de produtos entre a indústria e o distribuidor é  $Q$ . Dessa forma o custo médio de estoque por tonelada é dado por:

$$\bar{C}_E = \left[ \begin{array}{l} \text{custo médio} \\ \text{de estoque} \\ \text{por unidade} \\ \text{de mercadoria} \end{array} \right] = \frac{\alpha \cdot \mu \cdot \bar{E}}{Q} \quad (8.12)$$

Substituindo o valor de  $\bar{E}$ , dado pela expressão (8.10), em (8.12), vem:

$$\bar{C}_E = \frac{\alpha \cdot \mu}{Q} \left[ 2 \cdot E_R \tau + U + \frac{Q \cdot \tau}{30} \right] \quad (8.13)$$

que é o custo médio de estoque por unidade do produto (tonelada, metro cúbico, etc).

Vamos analisar agora o custo de transporte na transferência da mercadoria do ponto A (indústria) para o ponto B (distribuidor). Sejam  $CF$  e  $CKM$  respectivamente o custo fixo e o custo quilométrico do caminhão, o primeiro expresso e CZ\$ por hora de operação e o segundo, em CZ\$/Km.

No Quadro 8.1 são apresentados custos unitários para doze veículos de carga, variando de 0,5 toneladas de capacidade,

até 25 toneladas. Os valores indicados no Quadro 8.1 foram calculados a partir de dados de custo fornecidos pelo Sindicato das Empresas Transportadoras de Carga - NTC. Em razão das atualizações frequentes geradas pela economia inflacionária que tem assolado o País, o leitor interessado deve repetir os cálculos aqui apresentados para valores vigentes no momento da análise. De qualquer forma, as deduções e considerações apresentadas são válidas em essência, podendo se alterar os resultados em termos numéricos.

Seja  $d$  a distância, em km, entre a fábrica e o distribuidor. Admitimos que o caminhão percorra 300 km por dia. Admitimos também que sejam gastas 12 horas em cada extremo da viagem (carregamento, preparação da viagem, descarga, etc). Dessa forma o tempo de deslocamento da mercadoria entre A e B é dado por:

$$\tau = 2 \times 12 + \left( \frac{d}{300} \right) \times 24 = 24 + \frac{d}{12,5} \quad (\text{horas}) \quad (8.14)$$

O custo total para transferir o carregamento do ponto A para o ponto B é dado pela seguinte expressão:

$$CT = CD \cdot W + f_R [CF \cdot \tau + CKM \cdot d] \quad (8.15)$$

onde:

$CD$  - custo médio de carga/descarga, em CZ\$/ton.

$W$  - capacidade de carga do veículo (toneladas)

$CF$  - custo fixo (CZ\$/hora)

$\tau$  - tempo total de viagem (horas)

$CKM$  - custo variável (CZ\$/km)

$d$  - distância percorrida (km)

$f_R$  - fator para levar em conta o custo de retorno vazio (no caso, admitimos  $f_R = 1,5$ )

## Quadro 8.1

Custos Unitários de Caminhões Nacionais  
(baseados em dados de Set'88 e corrigidos  
para Maio de 1987)

<u>nº de ordem</u>	<u>Veículo</u>	<u>Capacidade de carga útil (ton)</u>	<u>Custo fixo(*) (CZ\$/hora)</u>	<u>Custo variável (CZ\$/km)</u>
1	Pick-up Chevy 500	0,5	82,20	1,74
2	Ford Pampa	0,5	90,11	1,93
3	Ford F-100	0,56	95,37	3,38
4	Kombi Furgão	1,0	88,84	3,03
5	VW 6.80	3,5	161,70	4,30
6	MB L 608 D/35	3,5	164,25	4,40
7	GM 11.000-F.D.S/3º eixo	6,0	178,80	4,90
8	MBL-1114/48 F.D.C/3º eixo	12,0	251,10	6,41
9	MBL-1114/48 F.D.S/3º eixo	12,0	227,40	5,50
10	MBL 1525/42	18,0	344,75	9,81
11	Scania T 112 HS	25,0	462,59	13,12
12	Volvo N 10 3 eixos	25,0	447,77	12,41

(\*) Calculado a partir do custo fixo mensal e admitindo-se 230 horas de operação por mês.

Admitindo  $CD = C \$ 300,00/\text{ton}$ , e variando  $d$  de 500 a 3000 km, foram ajustadas curvas de variação de  $C_T$  em função de  $W$ , utilizando para isso técnicas de regressão estatística. A fórmula matemática para as curvas de custo, adotada nessa análise, é a seguinte:

$$CT = a_0 + a_1 \cdot W^b \quad (8.16)$$

onde  $a_0$ ,  $a_1$  e  $b$  são coeficientes a determinar via regressão.

Esse tipo de expressão permite evidenciar eventuais economias de escala, isto é, decréscimos no custo unitário global (CZ\$/ton) quando cresce a capacidade do veículo. Isso normalmente ocorre nos sistemas de transportes de uma maneira geral, trazendo um comportamento comum em praticamente todo o processo produtivo: quanto maior a instalação ou equipamento, menores tendem a ser os custos unitários.

Efetuada as calibrações através de regressão, foram obtidos os resultados do Quadro 8.2. Observa-se que o coeficiente  $b$  apresenta valores em torno de 0,6, indicando claramente a existência de economias de escala.

Dividindo-se a expressão (8.16) por  $W$ , obtém-se o custo unitário médio, em CZ\$ por tonelada:

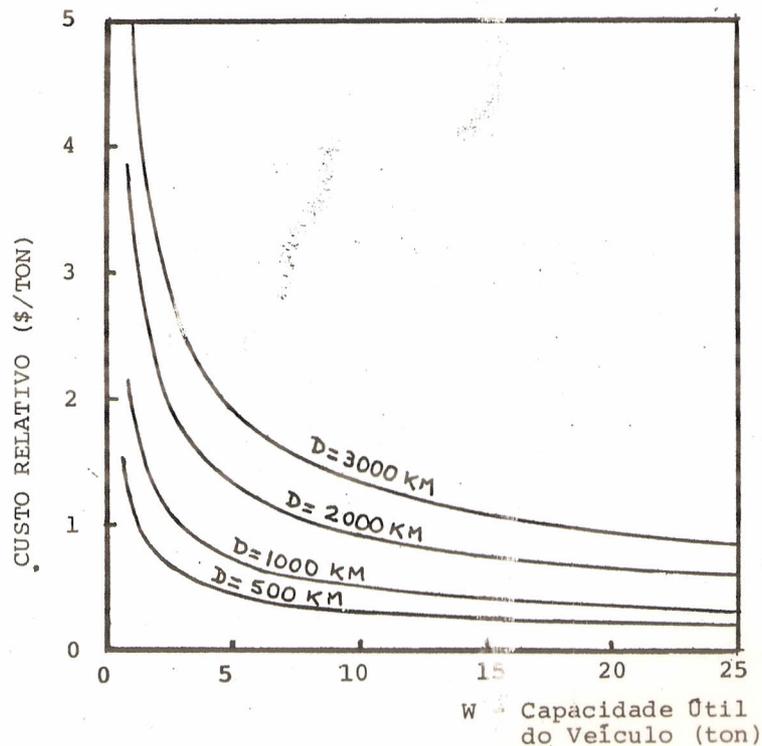
$$\bar{C} = \frac{a_0}{W} + \frac{a_1}{W^{1-b}} \quad (8.17)$$

Representando  $\bar{C}$  em função de  $W$  (Fig. 8.7) vê-se que o custo médio  $\bar{C}$  é decrescente, com fortes decréscimos na faixa 0-12 toneladas e menores na faixa 12-25 toneladas.

Vamos somar agora o custo médio de estoque por unidade do produto (expressão 8.13) com o custo médio de transporte (expressão 8.17). Tem-se assim o custo total de transferência da mercadoria, do ponto A para o ponto B:

$$\bar{C} = \bar{C}_E + \bar{C}_T = \frac{\alpha \mu}{Q} [2 \cdot E_R + U + \frac{Q \cdot \tau}{30}] + \frac{a_0}{W} + \frac{a_1}{W^{1-b}} \quad (8.18)$$

Sendo  $W = 25$  toneladas a máxima capacidade prática para caminhões, é necessário estabelecer uma relação entre o lote  $U$  e a tonagem útil do veículo. Assim, adotamos as seguintes



Curvas de Variação do Custo Unitário  
Relativo de Transporte

Fig. 8.7

Quadro 8.2  
Ajuste de Função Custo para Transporte  
de Mercadorias

$$CT = a_0 + a_1 \cdot W^b$$

<u>Distância</u> (km)	$a_0$	$a_1$	b	$R^2$ (*)
500	5000	7090,7	0,590	0,975
1000	9000	11148,4	0,594	0,973
2000	18000	18148,9	0,615	0,971
3000	26000	26253,4	0,611	0,970

(\*) Coeficiente de determinação da regressão

relações:

$$W = U \quad \text{se} \quad U \leq 25 \text{ toneladas} \quad (8.19)$$

$$W = \frac{U}{N} \quad \text{se} \quad U > 25 \text{ toneladas} \quad (8.20)$$

onde N é o inteiro imediatamente superior a U/25 (isto é, N é o número de veículos de igual capacidade, necessários para efetuar o deslocamento).

O lote econômico  $U^*$  é aquele que corresponde ao mínimo valor de  $\bar{C}$ , dado pela expressão (8.18). O método clássico para determinar esse ponto é o da derivação: calcula-se a derivada de  $\bar{C}$  em relação a U, igualando-a a zero. Resolvendo-se a equação resultante, obtém-se  $U^*$ . No presente caso esse método não é adequado em razão da descontinuidade da derivada de W em relação a U, conforme mostram as relações (8.19) e (8.20).

Se simplificarmos as relações (8.18 a 8.20), adotando  $W = U$  e  $b = 1$ , a solução é encontrada imediatamente. Substituí-

do W por U em (8.18), e fazendo  $b = 1$ , vem:

$$\bar{C} = \frac{\alpha \mu}{Q} [2 \cdot E_R + U + \frac{C \tau}{30}] + \frac{a_0}{U} + a_1 \quad (8.21)$$

Derivando  $\bar{C}$  em relação a U e igualando a zero:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial U} = \frac{\alpha \mu}{Q} - \frac{a_0}{U^2} = 0 \quad (8.22)$$

De onde se tira:

$$U = \left( \frac{a_0 Q}{\alpha \mu} \right)^{1/2} \quad (8.23)$$

A resolução do caso mais geral é apresentada a seguir, através de um exemplo.

Exemplo 8.1 Determinar o lote econômico para transferência de mercadorias entre dois pontos A e B, variando parametricamente o valor unitário da carga ( $\mu$ ) e a distância ( $d$ ). Adotar taxa de custo financeiro  $\alpha = 16\%$  ao mês e um fluxo  $Q = 100$  toneladas por mês. Os valores de  $a_0$ ,  $a_1$  e  $b$  são os indicados no Quadro 8.2. Adotamos  $E_R = 10$  toneladas, sendo  $\tau$  calculado via expressão (8.14).

Inicialmente devemos notar que o ponto de mínimo da expressão (8.18) não depende dos parâmetros  $E_R$  e  $\tau$ . De fato, explicitando (8.18):

$$\bar{C} = \frac{2 \alpha \mu E_R}{Q} + \frac{\alpha \mu}{Q} \cdot U + \frac{\alpha \mu \tau}{30} + \frac{a_0}{U} + \frac{a_1}{1 - b} \quad (8.24)$$

Os termos  $2 \alpha \mu E_R / Q$  e  $\alpha \mu \tau / 30$  são constantes para uma determinada configuração, não influenciando, portanto, no cálculo de  $U^*$ . Não obstante esses dois parâmetros influem no valor do custo médio final.

Na Fig. 8.8 são apresentadas curvas de variação do lote ótimo  $U^*$  com o valor unitário do produto ( $\mu$ ) e com a distância  $d$  entre os pontos A e B. Dois aspectos importantes devem ser considerados: (a) à medida que o valor unitário  $\mu$  vai crescendo o lote otimizado  $U^*$  vai caindo, porque as despesas financeiras vão pesando mais pronunciadamente no cômputo do custo total; (b) o lote econômico, para um certo valor unitário  $\mu$  qualquer, tende a aumentar com a distância percorrida. Essa é uma das razões principais para justificar o fato real de haver predomínio de caminhões pesados no tráfego de longa distância.

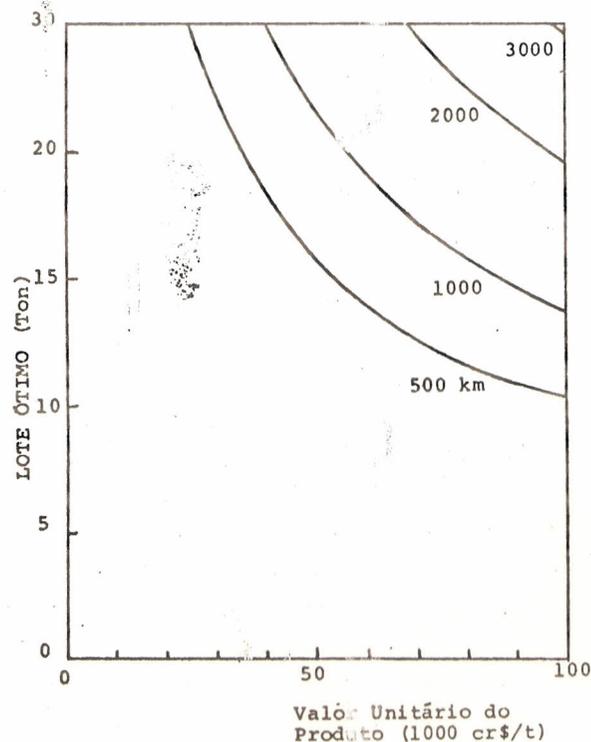
Para obter o lote ótimo  $U^*$  utilizamos o método de Fibonacci, que é bastante eficiente para funções de uma única variável com um único ponto extremo no intervalo de busca. Esse método, de execução bastante simples, é descrito e analisado nas seções 4.2.3 e 4.2.4 da referência (12). Para resolução deste problema foi desenvolvido o Programa nº 7, do Anexo.

No Quadro 8.3 é apresentada uma saída típica do programa, correspondente aos resultados obtidos para  $d = 1000$  km. Foi executada análise paramétrica para  $\mu$  variando de CZ\$ 10.000,00 por tonelada, à CZ\$ 100.000,00/ton. O programa fornece o lote ótimo  $U^*$ , o intervalo  $t_R$  entre remessas e o custo logístico unitário total.

Outro resultado útil fornecido pelo programa refere-se às elasticidades do custo logístico em relação às principais variáveis do problema. No Quadro 8.4 são fornecidos como exemplo dois resultados obtidos  $Q = 100$  ton/mês e  $\mu = CZ\$ 50.000,00/ton$ . O primeiro refere-se a uma distância mais longa, de 3000 km entre A e B, e o segundo corresponde a  $d = 500$  km.

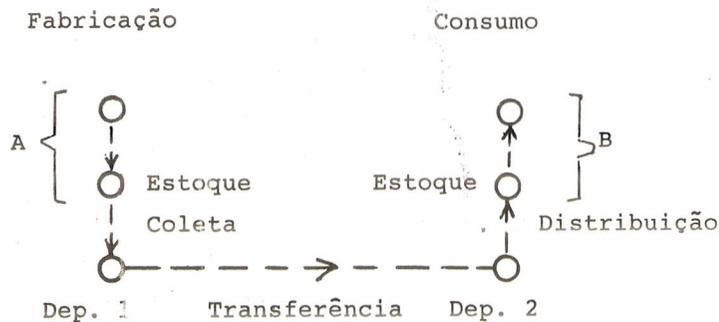
A elasticidade do custo em relação a uma variável  $x$  qualquer é calculada no exemplo da seguinte forma:

- Calcula-se o custo  $\bar{C}$  para o valor corrente da variável  $x$ .
- Faz-se uma perturbação na variável  $x$ , considerando um



Variação do Lote Econômico para Transferência Direta (Ex. 8.1)

Fig. 8.8



Esquema do Processo de Distribuição de Produtos Via Depósito

Fig. 8.9

Quadro 8.3

Lotês Otimizados para Transferência Direta (Ex. 8.1)

\*\* RESULTADOS - LOTE ÓTIMO \*\*

DISTANCIA (KM): 1000.0

VALOR UNITARIO (CZ\$/TON)	LOTE ÓTIMO (TON)	INTERV. REMESSA (DIAS)	CAPAC. VEIC. (TON)	CUSTO UNIT. (CZ\$/TON)
10000.0	25.0	7.5	25.0	4328.67
20000.0	25.0	7.5	25.0	5279.76
30000.0	25.0	7.5	25.0	6230.86
40000.0	24.8	7.5	24.8	7181.91
50000.0	21.5	6.5	21.5	8102.22
60000.0	19.1	5.7	19.1	8977.46
70000.0	17.3	5.2	17.3	9819.62
80000.0	15.9	4.8	15.9	10636.27
90000.0	14.8	4.4	14.8	11432.54
100000.0	13.8	4.1	13.8	12212.08

Quadro 8.4

Resultados - Análise de Sensibilidade (Exemplo 8.1)

\*\* RESULTADOS - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE \*\*

DISTANCIA (KM):	500.0	3000.0
FLUXO MENSAL (TON):	100.0	100.0
TEMPO TRANSF. (DIAS):	2.7	11.0
VALOR UNIT. MEDIO (CZ\$/TON):	50000.00	50000.00
CUSTO UNITARIO GLOBAL (CZ\$/TON):	6178.40	15079.04

ELASTICIDADES DO CUSTO EM RELACAO A:

* AO FLUXO MENSAL:	-0.44	-0.23
* AO VALOR UNIT. DA MERCADORIA:	0.57	0.43
* AO TEMPO TRANSFERENCIA:	0.12	0.19
* A TAXA DE JUROS:	0.57	0.43

(ACIONE RETURN P/ CONTINUAR)

valor  $x'$  5% maior do que  $x$ , ou seja,  $x' = 1,05 x$ .

(c) Calcula-se o novo valor de  $\bar{C}$  entrando com  $x = x'$ , e obtendo-se  $\bar{C}'$ .

(d) A elasticidade de  $\bar{C}$  em relação à  $x$  é calculada dividindo-se as variações relativas de  $\bar{C}$  e de  $x$ :

$$\epsilon_x = \frac{\left( \frac{\bar{C}' - \bar{C}}{\bar{C}} \right)}{\left( \frac{x' - x}{x} \right)} \quad (8.25)$$

As elasticidades são úteis para análises de sensibilidade do custo logístico. Nos resultados apresentados no Quadro 8.4 observamos, por exemplo, que o fluxo mensal tem importância relativa menor no caso de longas distâncias: o valor da elasticidade é de - 0,23 para  $d = 3000$ , sendo de - 0,44 para  $d = 500$  km. Já o tempo de transferência  $\tau$  entre os pontos A e B tem efeito maior nos deslocamentos a longa distância. Observa-se no entanto, valores baixos para a elasticidade (0,19 e 0,12 respectivamente) indicando não ser essa variável muito importante (em termos relativos) na composição do custo global.

Outro aspecto importante é o sinal da elasticidade. Quando é negativa, como é o caso da elasticidade em relação ao fluxo mensal, significa que o custo decresce quando a variável aumenta, e vice-versa. Esse aspecto é importante para analisar tendências e verificar se o modelo apresenta resultados coerentes com o esperado nas condições reais de operação.

### 8.3. Distribuição via depósito de triagem

No caso anterior foi admitido que a transferência se dá diretamente da indústria, localizada no ponto A, para o distribuidor ou consumidor, sediado em B. Tal situação é observada nas transferências de volumes apreciáveis de mercadoria como, por exemplo, entre a fábrica e um armazém intermediário, ou um grande distribuidor.

Há muitos casos, no entanto, em que as quantidades des

tinadas aos diversos clientes são pequenas, não justificando a transferência direta. As empresas transportadoras procuram então reduzir os custos através da implantação de depósitos de triagem intermediária. Obtém-se, assim, ganhos de custo, além de melhores condições operacionais na transferência e na distribuição dos produtos.

O primeiro ganho de custo é obtido na transferência da mercadoria desde o depósito situado na cidade de origem até o depósito localizado na região de destino. Utilizando veículos de maior tonelage, com lotação plena, obtém-se níveis de custo mais baixos por unidade de carga (tonelada, metro cúbico). Para obter economias de escala a transportadora consolida os lotes de vários clientes no depósito, formando carregamentos de maior volume.

O segundo ganho é obtido através do adensamento do processo de distribuição dentro da região de destino. Agregando a carga de vários clientes, a transportadora pode melhorar o desempenho de seus veículos de distribuição obtendo carregamentos maiores e reduzindo a distância percorrida em cada zona de entrega. (vide Capítulos 5 e 6).

Esses ganhos positivos têm, em contrapartida, um fator oposto, que é constituído pelo custo adicional da movimentação da carga nos depósitos intermediários, o que antes não ocorria. É claro que esta configuração (depósitos de triagem) só é vantajosa se a soma dos ganhos for significativamente maior do que o custo adicional gerado pela existência dos depósitos intermediários.

Na Fig. 8.9 é mostrado o esquema típico de escoamento e estocagem da mercadoria, desde a fabricação até o consumo final. As seguintes variáveis são definidas:

$Q_1$  - fluxo mensal de produtos entre A e B, correspondente ao cliente em questão.

$Q_2$  - fluxo mensal dos demais clientes, com produtos originados no depósito 1 e distribuídos na mesma região situada no entorno do depósito 2.

$\mu$  - valor médio unitário da carga (CZ\$/ton ou CZ\$/m<sup>3</sup>).

$t_A$  - tempo de coleta e triagem da mercadoria na origem, desde o momento do recebimento no cliente, até o despacho no depósito 1 (horas).

$C_A$  - custo médio unitário de coleta e triagem na origem (CZ\$/ton ou CZ\$/m<sup>3</sup>).

$\tau$  - tempo de transferência da carga entre o depósito 1 e o depósito 2 (horas).

$C_T$  - custo unitário de transferência entre depósitos (CZ\$/ton).

$C_B$  - custo médio unitário de triagem no depósito 2 e distribuição final do produto (CZ\$/ton).

$t_B$  - tempo de triagem e distribuição da carga na região de destino (horas).

$t$  - periodicidade entre entregas sucessivas na zona de distribuição (dias).

Neste caso admitimos que  $Q_1$  seja desprezível perto de  $Q_2$ , ou seja, o fluxo total originado pela soma dos volumes dos demais clientes suplanta, de muito, o fluxo da indústria em questão. Dada essa hipótese, pode-se admitir que o custo unitário do transporte via depósitos praticamente não se altera quando adicionamos o novo cliente. Ou seja:

$$\bar{C}_{Q_1 + Q_2} \approx \bar{C}_{Q_2} \quad (8.25)$$

onde  $\bar{C}_{Q_1 + Q_2}$  é o custo médio por tonelada após introdução do novo cliente e  $\bar{C}_{Q_2}$  representa o custo médio vigente antes de sua entrada no sistema.

Se a indústria optasse pela transferência direta, conforme analisado na seção 8.1, o custo médio unitário seria dado

(10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) (35) (36) (37) (38) (39) (40) (41) (42) (43) (44) (45) (46) (47) (48) (49) (50) (51) (52) (53) (54) (55) (56) (57) (58) (59) (60) (61) (62) (63) (64) (65) (66) (67) (68) (69) (70) (71) (72) (73) (74) (75) (76) (77) (78) (79) (80) (81) (82) (83) (84) (85) (86) (87) (88) (89) (90) (91) (92) (93) (94) (95) (96) (97) (98) (99) (100)

$$\bar{C} = \frac{\alpha \mu}{Q_1} \left[ 2 \cdot E_R + U^* + \frac{Q_1 \cdot \tau}{30} \right] + \frac{a_0}{W} + \frac{a_1}{W^1 - b} \quad (8.27)$$

onde  $U^*$  representa o lote econômico.

Se a indústria entregar sua carga à transportadora que executa a transferência e a distribuição via depósito, o custo passa a ser calculado como segue:

(a) Custo médio de estoque:

$$\bar{C}'_E = \frac{\alpha \mu}{Q_1} \left[ 2 \cdot E_R + U + \frac{Q_1 (\tau + t_A + t_B)}{30} \right] \quad (8.28)$$

A periodicidade da distribuição é fixada agora pela transportadora, correspondendo a um intervalo de  $t$  dias, conforme definido anteriormente. O cliente poderá escolher, para suas remessas, uma periodicidade igual a um múltiplo inteiro de  $t$ . Ou seja:

$$t_R = \left[ \frac{\text{intervalo entre remessas}}{t} \right] = k \cdot t \quad (8.29)$$

ou  $k$  é um número inteiro positivo ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Aplicando a expressão (8.4), tem-se:

$$U = \frac{Q_1 \cdot k \cdot t}{30} \quad (8.30)$$

Substituindo em (8.28):

$$\bar{C}'_E = \frac{\alpha \mu}{Q_1} \left[ 2 \cdot E_R + \frac{Q_1 \cdot k \cdot t}{30} + \frac{Q_1 (\tau + t_A + t_B)}{30} \right] \quad (8.31)$$

(b) Custo médio de transporte e distribuição

Somando-se o custo de coleta e triagem na origem, com

o custo de transferência, mais o custo de movimentação no depósito 2, e distribuição, tem-se:

$$\bar{C}'_T = C_A + C_T + C_B \quad (8.32)$$

(c) Custo unitário total

É dado pela soma de (8.31) e (8.32):

$$\bar{C}' = \bar{C}'_E + \bar{C}'_T \quad (8.33)$$

Uma vez que o custo  $\bar{C}'_T$  não depende do lote  $U$ , a indústria tenderá a optar pelo menor lote possível já que, assim o fazendo, tornará mínimo seu custo médio de estoque. Isso corresponde a se fazer  $k = 1$  na expressão (8.31), ou seja:

$$\bar{C}'_E = \frac{\alpha \mu}{Q_1} \left[ 2 \cdot E_R + \frac{Q_1 \cdot t}{30} + \frac{Q_1(\tau + t_A + t_B)}{30} \right] \quad (8.34)$$

O tempo total de coleta, triagem, transferência e distribuição é dado agora pela soma de  $\tau$ ,  $t_A$  e  $t_B$ , ou seja:

$$\tau_T = \tau + t_A + t_B \quad (8.35)$$

Dessa forma, o custo unitário total passa a ser calculado através de:

$$\begin{aligned} \bar{C}' = & \frac{\alpha \mu}{Q_1} \left[ 2 \cdot E_R + \frac{Q_1 \cdot t}{30} + \frac{Q_1(\tau + t_A + t_B)}{30} \right] + \\ & + C_A + C_T + C_B \end{aligned} \quad (8.36)$$

A decisão entre efetuar a transferência direta ou optar por um sistema integrado, com triagem intermediária, vai depender da comparação entre o custo médio  $\bar{C}$ , dado pela expressão (8.27), e o custo alternativo  $\bar{C}'$ , dado pela expressão (8.36).

**Exemplo 8.2** A distância entre A e B é de 1000 km. Adotamos  $\alpha = 16\%$  ao mês e  $t_A = t_B = 48$  horas. A periodicidade do processo de distribuição na zona de entrega é  $t = 7$  dias.

Os custos unitários, para a segunda alternativa, são  $C_A = \text{CZ\$ } 120/\text{ton}$ ,  $C_B = \text{CZ\$ } 160/\text{ton}$  e  $C_T = \text{CZ\$ } 2800,00/\text{ton}$ . Os valores de  $a_0$ ,  $a_1$  e  $b$ , necessários para aplicar a expressão (8.27), são extraídos do Quadro 8.2, com  $d = 1000$  km. O estoque de reserva  $E_R$ , no caso, foi admitido igual à 10% do fluxo mensal  $Q_1$ .

Para resolver este problema foi desenvolvido o Programa 8, do Anexo. O Programa oferece três opções: (a) análise de uma configuração específica, (b) análise paramétrica e (c) de terminação do fluxo de transição entre as duas alternativas para um determinado valor unitário da carga.

No Quadro 8.5 são apresentados resultados parametrizados, variando-se o fluxo  $Q_1$  de 0,5 ton/mês, até 100 ton/mês. O valor unitário da carga varia, por sua vez, de CZ\$ 10000,00/ton a CZ\$ 100000,00/ton, com incrementos de CZ\$ 10000,00.

Observa-se que, para fluxos pequenos, a alternativa 2 (distribuição via depósito) é sempre mais econômica. Num determinado ponto a situação se inverte, passando a alternativa 1 a ser a mais vantajosa.

A terceira opção do programa permite determinar o ponto de transição entre alternativas. Para isso entra-se com o valor de  $\mu$ , e o programa busca o valor de  $Q_1$  correspondente à transição entre as alternativas. Esse ponto ocorre quando o custo médio da alternativa 1 iguala o custo correspondente da alternativa 2.

Para determinar esse ponto de transição o programa utiliza um processo de busca (método de Fibonacci, referência 12), usando como figura de mérito, o valor absoluto da diferença de custos entre alternativas 1 e 2. Ou seja, a sub-rotina busca o ponto que torna mínima a expressão:

$$\Delta C = |\bar{C} - \bar{C}'| \quad (8.37)$$

onde  $\bar{C}$  e  $\bar{C}'$  são dados respectivamente pelas expressões (8.27) e (8.36).

No Quadro 8.6 são apresentados os fluxos de transição correspondentes a diversos valores de  $\mu$ . Esses valores são apresentados de forma gráfica na Fig. 8.10. Observa-se que, para va

Quadro 8.5

Transferência Direta Versus Sistema Integrado  
de Distribuição - Resultados (Exemplo 8.2)

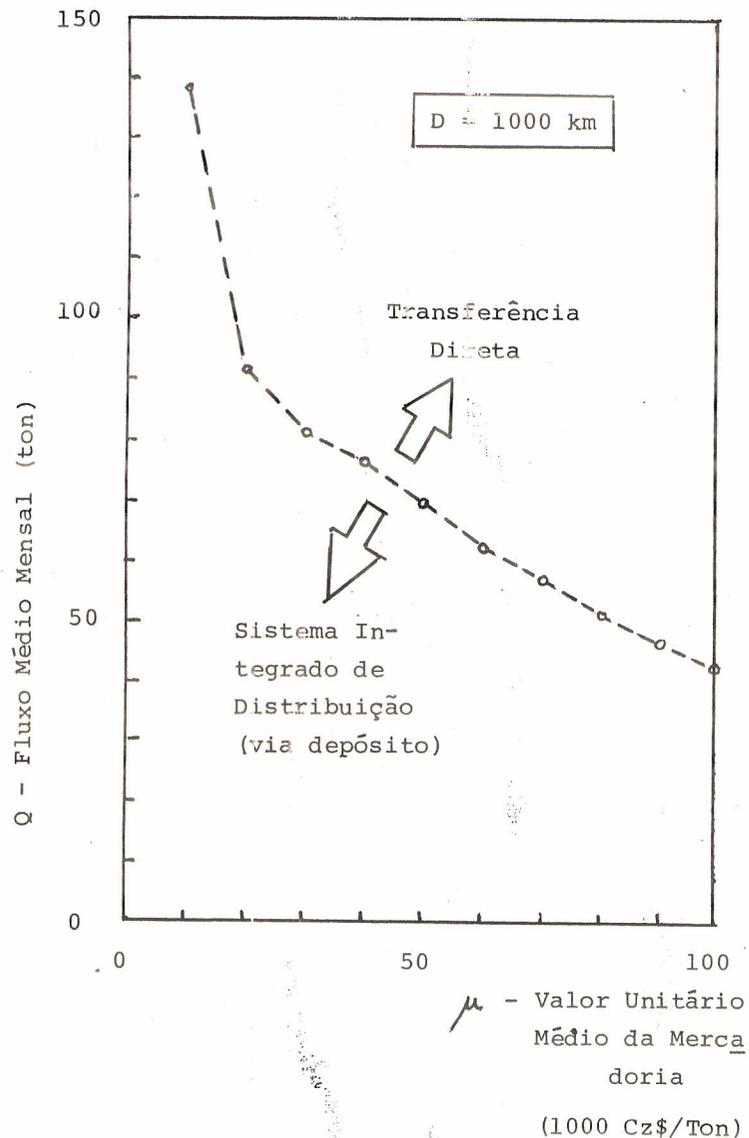
RESULTADOS		ANÁLISE PARAMETRIZADA						
Q	VALOR	CUSTO 1	TEMPO 1	FREQ 1	CUSTO 2	TEMPO 2	FREQ 2	ALTERN.
T/MES	CZ\$/TON	CZ\$/TON	DIAS	DIAS	CZ\$/TON	DIAS	DIAS	OTIMA
0.5	10000.0	19771.95	4.3	135.6	4217.78	8.3	7.0	ALT 2
0.5	20000.0	26156.82	4.3	91.3	5355.56	8.3	7.0	ALT 2
0.5	30000.0	31025.49	4.3	72.6	6493.33	8.3	7.0	ALT 2
0.5	40000.0	35141.71	4.3	61.9	7631.11	8.3	7.0	ALT 2
0.5	50000.0	38789.20	4.3	54.7	8768.89	8.3	7.0	ALT 2
0.5	60000.0	42109.76	4.3	49.4	9906.67	8.3	7.0	ALT 2
0.5	70000.0	45186.06	4.3	45.4	11044.44	8.3	7.0	ALT 2
0.5	80000.0	48071.14	4.3	42.2	12182.22	8.3	7.0	ALT 2
0.5	90000.0	50801.44	4.3	39.6	13320.00	8.3	7.0	ALT 2
0.5	100000.0	53403.18	4.3	37.4	14457.78	8.3	7.0	ALT 2
10.0	10000.0	7252.08	4.3	41.4	4217.78	8.3	7.0	ALT 2
10.0	20000.0	9550.83	4.3	26.9	5355.56	8.3	7.0	ALT 2
10.0	30000.0	11358.45	4.3	20.9	6493.33	8.3	7.0	ALT 2
10.0	40000.0	12928.76	4.3	17.6	7631.11	8.3	7.0	ALT 2
10.0	50000.0	14353.82	4.3	15.3	8768.89	8.3	7.0	ALT 2
10.0	60000.0	15678.90	4.3	13.8	9906.67	8.3	7.0	ALT 2
10.0	70000.0	16930.05	4.3	12.5	11044.44	8.3	7.0	ALT 2
10.0	80000.0	18123.85	4.3	11.6	12182.22	8.3	7.0	ALT 2
10.0	90000.0	19271.56	4.3	10.8	13320.00	8.3	7.0	ALT 2
10.0	100000.0	20381.25	4.3	10.2	14457.78	8.3	7.0	ALT 2
50.0	10000.0	4728.65	4.3	15.0	4217.78	8.3	7.0	ALT 2
50.0	20000.0	6079.69	4.3	14.9	5355.56	8.3	7.0	ALT 2
50.0	30000.0	7324.13	4.3	11.5	6493.33	8.3	7.0	ALT 2
50.0	40000.0	8431.83	4.3	9.5	7631.11	8.3	7.0	ALT 2
50.0	50000.0	9456.53	4.3	8.3	8768.89	8.3	7.0	ALT 2
50.0	60000.0	10424.46	4.3	7.4	9906.67	8.3	7.0	ALT 2
50.0	70000.0	11350.66	4.3	6.7	11044.44	8.3	7.0	ALT 2
50.0	80000.0	12244.61	4.3	6.2	12182.22	8.3	7.0	ALT 2
50.0	90000.0	13112.77	4.3	5.7	13320.00	8.3	7.0	ALT 1
50.0	100000.0	13959.72	4.3	5.4	14457.78	8.3	7.0	ALT 1
100.0	10000.0	4328.66	4.3	7.5	4217.78	8.3	7.0	ALT 2
100.0	20000.0	5279.78	4.3	7.5	5355.56	8.3	7.0	ALT 1
100.0	30000.0	6230.88	4.3	7.5	6493.33	8.3	7.0	ALT 1
100.0	40000.0	7181.91	4.3	7.5	7631.11	8.3	7.0	ALT 1
100.0	50000.0	8102.22	4.3	6.5	8768.89	8.3	7.0	ALT 1
100.0	60000.0	8977.46	4.3	7.7	9906.67	8.3	7.0	ALT 1
100.0	70000.0	9819.62	4.3	7.2	11044.44	8.3	7.0	ALT 1
100.0	80000.0	10636.27	4.3	6.8	12182.22	8.3	7.0	ALT 1
100.0	90000.0	11432.54	4.3	6.4	13320.00	8.3	7.0	ALT 1
100.0	100000.0	12212.08	4.3	6.1	14457.78	8.3	7.0	ALT 1

Quadro 8.6

Fluxo de Transição entre Transferência Direta  
e Sistema Integrado de Distribuição (Ex. 8.2)

RESULTADOS		PONTO TRANSICAO						
Q	VALOR	CUSTO 1	TEMPO 1	FREQ 1	CUSTO 2	TEMPO 2	FREQ 2	ALTERN.
T/MES	CZ\$/TON	CZ\$/TON	DIAS	DIAS	CZ\$/TON	DIAS	DIAS	OTIMA
138.3	10000.0	4217.80	4.3	5.4	4217.78	8.3	7.0	AMBAS
91.3	20000.0	5355.62	4.3	8.2	5355.56	8.3	7.0	AMBAS
82.0	30000.0	6493.18	4.3	9.1	6493.33	8.3	7.0	AMBAS
76.4	40000.0	7631.14	4.3	8.2	7631.11	8.3	7.0	AMBAS
69.8	50000.0	8768.96	4.3	7.3	8768.89	8.3	7.0	AMBAS
62.8	60000.0	9906.93	4.3	6.8	9906.67	8.3	7.0	AMBAS
56.7	70000.0	11043.91	4.3	6.4	11044.44	8.3	7.0	AMBAS
51.2	80000.0	12181.99	4.3	6.1	12182.22	8.3	7.0	AMBAS
46.4	90000.0	13319.16	4.3	5.9	13320.00	8.3	7.0	AMBAS
42.3	100000.0	14456.58	4.3	5.7	14457.78	8.3	7.0	AMBAS

(ACIONE ENTER P/ CONTINUAR)



Transição entre Alternativas de Distribuição (exemplo 2)

lores baixos do fluxo e do valor unitário da carga, a alternativa 2, que corresponde ao sistema integrado de distribuição via depósitos, é a mais econômica para a indústria. Acima de um determinado fluxo mensal (fluxo de transição) passa a ser mais vantajosa a transferência direta. Observa-se, também, através da Fig. 8.10, que o fluxo de transição entre as alternativas tende a cair à medida que  $\mu$  cresce.

Se o leitor repetir a análise para diferentes distâncias observará que a alternativa 2 (distribuição via depósito de triagem) vai ficando mais vantajosa à medida que  $d$  cresce. Isso ocorre porque os custos de coleta, triagem e distribuição, que são invariáveis com a distância, se diluem mais facilmente no cômputo total, aumentando as vantagens comparativas da alternativa 2.

É importante notar, no entanto, que a decisão do usuário quanto a melhor alternativa está condicionada também a outros fatores, além do custo logístico imediato. O fator segurança pode, por exemplo, implicar em preferência pela alternativa 1 (distribuição direta) nos casos em que a mercadoria seja frágil, delicada, perecível, etc. Da mesma forma, produtos de alto valor unitário, mesmo em pequenas quantidades, podem ser entregues diretamente, de forma a se evitar furtos, roubos, extravios, etc.

Finalmente deve-se lembrar que resultados, como os do Quadro 8.6 e outros, obtidos através deste exemplo, devem ser entendidos como meros exemplos. Para conclusões ligadas a casos reais, deve-se recalculá-los com base em informações específicas.

#### 8.4. Sistema diferenciado de distribuição

No caso anterior foram comparadas duas alternativas de transferência/distribuição: transferência direta versus distribuição via depósitos intermediários. Nesta seção admitimos a segunda hipótese e procuraremos otimizar o sistema de distribuição, encarando os diversos clientes de forma diferenciada.

O problema que se coloca é o seguinte: a empresa transportadora oferece um serviço de distribuição de mercadorias numa determinada região, com periodicidade  $t$ . Assim, cada zona em que a região é sub-dividida, será visitada a intervalos fixos de  $t$  dias.

Cada cliente poderá optar por uma periodicidade de distribuição para sua carga equivalente a um múltiplo inteiro de  $t$ . Assim, se as entregas forem feitas diariamente na região de distribuição, o cliente poderá optar por frequência diária, a cada dois dias, de três em três dias, etc. A questão que se coloca é a de determinar o esquema ótimo, considerando a operação de todos os clientes em conjunto. Esse tipo de problema foi analisado inicialmente por Hall (6).

Seja  $NC$  o número de clientes (indústrias) que se utilizam do sistema de distribuição oferecido pela empresa de transportes. Representamos por  $Q_i$  o fluxo mensal de produtos do cliente  $i$ . Da mesma forma, o valor médio unitário da carga dos diversos clientes é representado por  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, \dots, NC$ ).

Na região de distribuição da carga há  $N_1$  pontos de entrega do cliente 1,  $N_2$  pontos do cliente 2, etc, totalizando  $N$  pontos:

$$N = N_1 + N_2 + \dots = \sum_i N_i \quad (8.38)$$

Suponhamos inicialmente que todos os pontos de entrega sejam visitados a intervalos iguais a  $t$ . Ou seja, admitimos inicialmente que a periodicidade  $t_i$  de um cliente  $i$  qualquer seja igual a  $t$ .

Suponhamos, por outro lado, que a região de distribuição, com área total  $S$  ( $\text{km}^2$ ), seja dividida em  $M$  zonas de entrega. Assim, o número médio de paradas, em cada zona, por visita, é igual a  $N/M$ .

De acordo com as análises dos Capítulos 5 e 6, a distância total média percorrida dentro de cada zona é dada por (seção 5.3):

$$E[L] = a_0 \cdot \sqrt{\frac{N}{M}} \cdot \frac{S}{M} = \frac{a_0}{M} \sqrt{N \cdot S} \quad (8.39)$$

O custo de uma viagem de distribuição, a partir do depósito e atendendo a uma determinada zona de entrega, pode ser dividido em duas parcelas. A primeira parcela corresponde à parte do custo que varia com o tempo (salários de motorista e aju

dante, depreciação do veículo, licenciamento, etc). A segunda parcela, por sua vez, corresponde aos itens de custo ligados à quilometragem (combustível, pneus, etc). Assim:

$$C_D = \left[ \begin{array}{l} \text{custo de uma} \\ \text{viagem de} \\ \text{distribuição} \end{array} \right] = C_H \cdot T_D + C_{KM} \cdot D \quad (8.40)$$

onde:

$C_H$  - custo horário do veículo, englobando os itens correlacionados com o tempo (CZ\$/hora).

$T_D$  - tempo total de distribuição (ciclo), desde o início do carregamento no depósito até o retorno (horas).

$C_{KM}$  - custo quilométrico do veículo, englobando os itens correlacionados com a distância percorrida (CZ\$/km).

$D_E$  - distância total percorrida na viagem de distribuição, desde a saída do depósito até o retorno (km).

O tempo de ciclo  $T_D$  (horas) é dado por:

$$T_D = \frac{N}{M} \cdot \frac{t_p}{60} + (2 d_1 + E[L])/V \quad (8.41)$$

onde:

$\frac{N}{M}$  - número médio de pontos de entrega (paradas) por zona de entrega, que é igual à relação entre o número total de pontos ( $N$ ) e o número de zonas ( $M$ ).

$t_p$  - tempo médio de parada em cada ponto de entrega (minutos).

$d_1$  - distância média do depósito à zona de entrega (km).

$E[L]$  - valor esperado da distância percorrida dentro da zona

de entrega (km), dado pela expressão (8.39).

V - velocidade média do veículo (km/hora)

A distância total  $D_E$ , percorrida na viagem de distribuição, é dada por:

$$D_E = 2 \cdot d_1 + E \quad (8.42)$$

O custo médio por entrega (isto é, por parada na distribuição) é obtido dividindo-se o custo  $C_D$  pelo número médio de pontos em cada zona (N/M):

$$\bar{C}_D = \frac{C_D}{(N/M)} = \frac{M}{N} \cdot (C_H \cdot T_D + C_{KM} \cdot D_E) \quad (8.43)$$

Para determinar o custo de distribuição por tonelada, para o cliente i, é necessário calcular a tonelagem média por entrega:

$$q_i = \left( \frac{Q_i \cdot t}{30} \right) / N_i \quad (8.44)$$

O fator entre parênteses representa o fluxo médio de carga do cliente i acumulado durante  $t$  horas. Dividindo-se esse valor pelo número de pontos, obtém-se a tonelagem média  $q_i$  por parada.

Dividindo  $\bar{C}_D$ , dado por (8.43), pela tonelagem média  $q_i$ , dada por (8.44), obtém-se o custo médio de distribuição por tonelada, para cliente i:

$$\bar{C}_q^{(i)} = \frac{\bar{C}_D}{q_i} = \frac{30 \cdot M \cdot N_i}{Q_i \cdot t \cdot N} (C_H \cdot T_D + C_{KM} \cdot D_E) \quad (8.45)$$

O custo logístico total, por sua vez, é calculado cliente por cliente através da expressão (8.36), substituindo  $C_B$  pelo valor de  $\bar{C}_q^{(i)}$  dado pela expressão (8.45):

$$\bar{C}_i = \frac{\alpha \mu_i}{Q_i} \left[ 2 \cdot ER_i + \frac{Q_i \cdot t}{30} + \frac{Q_i (\tau + T_A + t_B)}{30} \right] + C_A + C_T + C_B + \frac{30 \cdot M \cdot N_i}{Q_i \cdot t \cdot N} (C_H \cdot T_D + C_{KM} \cdot D_E) \quad (8.46)$$

Na expressão acima, a primeira parcela do segundo membro, assume valor diferente para cada cliente i. Os custos unitários  $C_A$ ,  $C_T$  e  $C_B$ , por sua vez, são considerados fixos. O custo unitário  $\bar{C}_q^{(i)}$ , por outro lado, reflete um custo médio de distribuição resultante da operação conjunta de todos os clientes usuários do sistema. Tem-se assim, três tipos de parcelas:

- Parcela do custo que é função das características da carga de cada cliente.
- Parcelas fixas ( $C_A$ ,  $C_T$  e  $C_B$ ).
- Parcela variável por cliente, mas dependente da operação conjunta de todos os clientes no processo de distribuição ( $\bar{C}_q^{(i)}$ ).

Deve-se notar que o custo de distribuição  $\bar{C}_q^{(i)}$  é função da densidade de pontos por  $km^2$ . Dessa forma esse custo depende das condições de concentração de carga. Se um cliente decidir espaçar suas entregas, essa decisão afetará de certa forma os demais, porque gerará novas densidades e novas condições no processo de distribuição.

O processo que se coloca nesta secção é exatamente o de definir condições logísticas ótimas para cada cliente que participa do sistema integrado, levando em consideração a operação conjunta na distribuição das mercadorias.

Na prática cada cliente procurará utilizar o sistema com uma periodicidade igual a um múltiplo inteiro do ciclo  $t$  oferecido pela transportadora, ou seja:

$$t_i = k_i \cdot t \quad (i = 1, 2, \dots, NC) \quad (8.47)$$

onde  $k_i$  é um número inteiro positivo.

Dessa forma, o número esperado de pontos de entrega numa zona qualquer, em cada viagem de distribuição, que era igual à  $N/M$ , é agora dado por:

$$N_Z = \frac{1}{M} \cdot \sum_i \frac{N_i}{k_i} \quad (8.48)$$

Na expressão acima  $N_i/k_i$  representa o número esperado de entregas do cliente  $i$  numa zona, a cada ciclo  $t$ . Somando-se em relação a  $i$  e dividindo-se pelo número de zonas ( $M$ ), obtém-se o número esperado de pontos de parada por viagem de distribuição.

Substituindo  $t$  por  $k_i \cdot t$ , e  $N/M$  pela expressão (8.48) em (8.46), obtemos o custo logístico médio por tonelada de carga e por cliente:

$$\begin{aligned} \bar{C}_i = & \frac{\alpha \mu_i}{Q_i} \left[ 2 \cdot ER_i + \frac{Q_i \cdot k_i \cdot t}{30} + \frac{Q_i (\tau + t_A + t_B)}{30} \right] + \\ & + C_A + C_T + C_B + \left( \frac{30 \cdot N_i \cdot M}{Q_i \cdot d_i \cdot k_i \cdot t \cdot \sum_i \frac{N_i}{k_i}} \right) \cdot (C_H \cdot T_D + C_{KM} \cdot D_E) \end{aligned} \quad (8.49)$$

É importante notar que o tempo  $T_D$  e a quilometragem  $D_E$  são afetados pela periodicidade  $k_i$ . Uma vez que o número de pontos de parada por zona passa a ser dado pela expressão (8.48), a distância média  $E[L]$ , percorrida pelo veículo de distribuição dentro da zona de entrega, passa a ser dada por:

$$\begin{aligned} E[L] &= a_0 \cdot \sqrt{N_Z \cdot S_Z} = a_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{M} \cdot \left( \sum_i \frac{N_i}{k_i} \right) \cdot \frac{S}{M}} = \\ &= \frac{a_0}{M} \cdot \sqrt{S \cdot \left( \sum_i \frac{N_i}{k_i} \right)} \end{aligned} \quad (8.50)$$

onde:

$N_Z$  - número médio de pontos de parada por zona (relação 8.48).

$S_Z$  - área média de uma zona ( $\text{km}^2$ ).

$S$  - área total da região de distribuição ( $\text{km}^2$ ).

$M$  - número de zonas.

$a_0$  - coeficiente (vide secção 5.3).

O tempo de ciclo de distribuição ( $T_D$ ), por sua vez, é dado por:

$$T_D = \frac{1}{M} \cdot \left( \sum_i \frac{N_i}{k_i} \right) \cdot \frac{t_P}{60} + (2 \cdot d_1 + E[L])/V \quad (8.51)$$

já que o número de paradas por zona foi substituído pela expressão (8.48).

Devemos lembrar que o tempo total de uma viagem de distribuição pode estar limitado em razão de restrições trabalhistas. Sendo  $H$  o número máximo de horas por viagem, e fazendo-se  $T_D = H$  na expressão (8.51), re-calculamos o número médio de zonas de forma a garantir a restrição retromencionada:

$$M' = \frac{\left( \sum_i \frac{N_i}{k_i} \right) \cdot \frac{t_P}{60}}{[H - (2 \cdot d_1 + E[L])/V]} \quad (8.52)$$

O objetivo do problema é determinar os valores de  $k_i$  de forma a tornar mínimo o custo logístico para cada cliente, lembrando, no entanto, que o custo de distribuição depende das condições de operação conjunta de todos os usuários.

Para fins computacionais é interessante dividir o processo de cálculo do custo logístico em três etapas. Na primeira, calcula-se o custo médio de distribuição por parada, que é igual

para todos os clientes.

Em seguida obtém-se o custo de distribuição, por tonelada, para cada cliente. Para isso divide-se o custo médio de entrega por parada, pela tonelagem média correspondente ao cliente  $i$ .

Finalmente, na terceira etapa, soma-se o custo médio de distribuição às demais parcelas de custo, obtendo-se o custo médio logístico, cliente por cliente.

As etapas são detalhadas a seguir.

a) Custo médio de distribuição por parada.

Para um certo vetor  $K = \{K_1, K_2, \dots, K_{NC}\}$  calcula-se, através de (8.50), a distância média  $E[L]$ , percorrida por um veículo de distribuição dentro da zona:

$$E[L] = \frac{a_0}{M} \sqrt{S \cdot \left( \sum_i \frac{N_i}{k_i} \right)} \quad (8.53)$$

Calcula-se, a seguir, o tempo de ciclo da viagem de distribuição, dado por (8.51):

$$T_D = \frac{1}{M} \cdot \left( \sum_i \frac{N_i}{k_i} \right) \cdot \frac{t_p}{60} + (2 \cdot d_1 + E[L])/V \quad (8.54)$$

Aplica-se a expressão (8.52) de forma a corrigir o número de zonas para garantir a restrição  $T_D \leq H$ , onde  $H$  é a jornada máxima (horas) de uma viagem de entrega. Deve-se lembrar que  $E[L]$  depende de  $M$ , conforme relação (8.50), o que obriga iterar o processo até convergir. Ou seja, calcula-se  $M'$  através da expressão (8.52); recalcula-se  $E[L]$  através de (8.50) com o novo valor de  $M$ , recalcula-se novamente o número de zonas e assim por diante. O processo termina quando dois valores sucessivos de  $M$  forem iguais.

b) Sendo  $N_z$  o número médio de paradas por viagem, dado pela expressão (8.48), o custo médio de distribuição por parada é dado pela relação entre (8.40) e (8.48):

$$\bar{C}_P = (C_H \cdot T_D + C_{KM} \cdot D_E)/N_Z =$$

$$\bar{C}_P = (C_H \cdot T_D + C_{KM} \cdot D_E) \cdot M / \left( \sum_i \frac{N_i}{k_i} \right) \quad (8.55)$$

c) Custo médio de distribuição por tonelada.

Para determinar o peso médio em cada parada, para cliente  $i$ , utilizamos a expressão (8.44) substituindo  $t$  por  $k_i t$ :

$$q_i = \left( \frac{Q_i \cdot k_i \cdot t}{30} \right) / N_i \quad (8.56)$$

O custo médio de distribuição, por tonelada, é calculado agora, cliente por cliente, dividindo-se  $\bar{C}_P$  por  $q_i$ :

$$\bar{C}_q^{(i)} = \frac{30 \cdot N_i}{Q_i \cdot k_i \cdot t} \cdot \bar{C}_P \quad (8.57)$$

Finalmente o custo logístico médio por tonelada de carga do cliente  $i$  é obtido somando-se as diversas parcelas:

$$\bar{C}_i = \frac{\alpha \mu_i}{Q_i} \left[ 2 \cdot ER_i + \frac{Q_i \cdot k_i \cdot t}{30} + \frac{Q_i (\tau + t_A + t_B)}{30} \right] + C_A + C_T + C_B + \frac{30 \cdot N_i}{Q_i \cdot k_i \cdot t} \cdot \bar{C}_P \quad (8.58)$$

O processo computacional iterativo, devisado por Hall (6), tem a seguinte sequência:

(a) Faz-se inicialmente  $k_i^* = 1$  para todos os clientes ( $i = 1, 2, \dots, NC$ ). Isso equivale a imaginar que todos os clientes se utilizarão do sistema adotando a periodicidade original do serviço de distribuição, que é igual à  $t$ . Esse caso correspon

de à máxima densidade de pontos de parada por zona de entrega.

(b) Calcula-se o custo médio por parada  $\bar{C}_p$ , através da relação (8.55). Esse custo médio é igual para todos os clientes.

(c) Para cada cliente determina-se o custo médio por tonelada,  $\bar{C}_q^{(i)}$ , dado pela expressão (8.57).

(d) Através de um método qualquer, procura-se o valor de  $k_i$  que torna mínimo o custo logístico  $\bar{C}_i$ , dado pela expressão (8.58). Esse cálculo do valor sub-ótimo de  $k_i$ , que denominaremos de  $k_i^{**}$ , é feito individualmente, cliente por cliente.

(e) De posse dos valores sub-ótimos  $k_1^{**}, k_2^{**}, \dots, k_{NC}^{**}$ , recicla-se o processo passando à etapa (b) e repetindo-se os cálculos.

(f) O processo termina quando o vetor  $K^{**} = \{k_1^{**}, k_2^{**}, \dots, k_{NC}^{**}\}$  for exatamente igual ao vetor anterior  $K^* = \{k_1^*, k_2^*, \dots, k_{NC}^*\}$ , isto é, quando  $k_i^{**} = k_i^*$  para todos os  $i$ 's.

Hall (op. cit.) demonstra que o processo é convergente, tendo em vista a natureza das funções que formam o custo logístico  $\bar{C}_i$ .

O resultado assim obtido indica a periodicidade ótima para cada cliente e permite calcular o custo médio final para cada caso. O mesmo princípio vale para classes diversas de mercadorias num sistema de distribuição próprio de uma grande indústria, loja de departamentos, etc.

**Exemplo 8.3** Trata-se de analisar o processo de distribuição de um sistema formado por dez clientes, cujas características principais são apresentadas no Quadro 8.7.

O sistema apresenta as seguintes características gerais: a região de entrega cobre uma área  $S = 1600 \text{ km}^2$ , sendo dividida em  $M = 20$  zonas. A distância entre os depósitos A e B (transferência) é de 1000 km.

O processo de distribuição local tem as seguintes características:

Quadro 8.7  
Características Principais Médias de  
Cliente do Sistema Integrado  
de Distribuição do Exemplo 8.3

Nº de ordem	Fluxo mensal	Valor médio	Número de
	de carga (ton)	da carga (CZ\$/ton)	pontos de entrega
	$Q_i$	$\mu_i$	$N_i$
1	0,5	10000	10
2	7	40000	80
3	12	15000	60
4	1	4000	12
5	15	30000	12
6	2	20000	40
7	3	8000	20
8	5	50000	30
9	120	150000	200
10	8	70000	60
TOTAL	173,5		524

- distância média entre o depósito de triagem B até a zona de entrega:  $d_i = 15 \text{ km}$ .
- tempo médio de parada por entrega:  $t_p = 25 \text{ minutos}$ .
- velocidade média de tráfego:  $v = 40 \text{ km/h}$ .
- periodicidade do sistema de distribuição:  $t = 7 \text{ dias}$ .

- (e) custo horário do veículo de distribuição:  $C_H = 179,00$  CZ\$/hora.
- (f) custo quilométrico do veículo de distribuição:  $C_{KM} = 4,90$  CZ\$/km.
- (g) custo de movimentação no depósito B:  $C_B = 40,00$  CZ\$/ton.
- outros dados gerais sobre o sistema:
- (h) custo de transferência entre pontos A e B:  $C_T = 2800$  CZ\$/ton.
- (i) custo de coleta e movimentação na origem A:  $C_A = 80,00$  CZ\$/ton. Custo de movimentação no depósito de triagem:  $C_M = 40,00$  CZ\$/ton.
- (j) tempo de coleta e consolidação no ponto A:  $t_A = 48$  horas.
- (k) tempo de triagem e distribuição no depósito B:  $t_B = 48$  horas.
- (l) jornada máxima por viagem de distribuição:  $H = 10$  horas/viagem.
- (m) taxa mensal de juros:  $\alpha = 16\%$ .
- (n) estoque de reserva: 10% do fluxo mensal  $Q_i$ .

O coeficiente  $a_0$  da expressão (8.39) utilizada para calcular a distância média percorrida dentro da zona, é igual à 0,765, multiplicada por um coeficiente de correção, devido à malha viária, igual à 1,11. Esse coeficiente leva em conta as discrepâncias entre a distância real rodoviária e a distância Euclídeana (vide Cap. 2, secção 2.3).

Para resolver este tipo de problema logístico foi desenvolvido o programa (1), anexo. O programa resolve iterativa

mente o processo de distribuição das mercadorias, considerando individualmente os clientes mas levando em conta a operação conjunta.

Inicialmente o programa faz  $k_1 = 1$  para todos os dez clientes. Isso significa que a periodicidade de remessa é igual a  $t$  dias (no caso,  $t = 7$  dias) para todos os clientes. No Quadro 8.8, a primeira tabela mostra os custos logísticos, por tonelada de carga, para cada cliente, adotando-se a periodicidade retro mencionada.

Na segunda iteração o programa calcula, o valor de  $k_1$  que torna mínimo o custo logístico global para cada cliente, seguindo a metodologia descrita nesta secção. Os resultados parciais, da segunda iteração, são mostrados também no Quadro 8.8. Nota-se que diversos clientes optariam por intervalos bem mais espaçados do que a hipótese original. O cliente nº 1, por exemplo, que tem um fluxo bastante baixo (meia tonelada por mês) e um valor unitário da carga também baixo, optaria por uma frequência de remessa a cada 5 semanas.

Repetindo-se iterativamente o processo, observa-se que os valores de  $k_1$ , para os dez clientes, não se alteram ao passar da iteração 2 para a 3. Isso significa que o processo convergiu, representando assim os resultados finais.

Comparando-se os valores finais de custo médio com os correspondentes à iteração nº 1, nota-se que houve ligeiro aumento nos custos dos clientes que permaneceram com  $k_1 = 1$ . É o caso dos clientes 5 e 8. Para esses clientes o ideal seria que os demais usuários mantivessem o esquema original porque, assim o fazendo, diluiriam mais os custos de distribuição. No entanto, os primeiros não tem condições de influir na decisão dos demais pois cada cliente decidirá por si próprio sobre a melhor frequência de remessa de suas mercadorias.

Como observação final cabe destacar que o processo iterativo utilizado poderá ser desdobrado, considerando-se classes de mercadoria para cada cliente. A busca dos  $k_1$  otimizados poderá ser feita então considerando-se o mínimo custo para cada cliente, envolvendo todas as classes de mercadoria de cada usuário.

Outros esquemas mais complexos podem também ser abordados, fazendo-se as adaptações necessárias no programa.

## Quadro 8.8

## Resultados Parciais e Finais - Exemplo 8.3

* RESULTADOS *						ITERACAO NUM --> 1
CLASS.MERC.	QUANT.(TON)	VALOR UNIT.	N.ENTREG.	PERIODIC.	CUSTO/TON	
1	0.50	10000.00	10	1	12969.26	
2	7.00	40000.00	80	1	7174.04	
3	12.00	15000.00	60	1	3690.75	
4	1.00	4000.00	12	1	8706.00	
5	15.00	30000.00	12	1	6651.39	
6	2.00	20000.00	40	1	14107.04	
7	3.00	8000.00	20	1	6774.05	
8	5.00	50000.00	30	1	11254.33	
9	120.00	150000.00	200	1	20065.87	
10	8.00	70000.00	60	1	9500.57	

NUMERO DE ZONAS: 26

* RESULTADOS *						ITERACAO NUM --> 2
CLASS.MERC.	QUANT.(TON)	VALOR UNIT.	N.ENTREG.	PERIODIC.	CUSTO/TON	
1	0.50	10000.00	10	5	7314.37	
2	7.00	40000.00	80	1	6466.39	
3	12.00	15000.00	60	1	3272.55	
4	1.00	4000.00	12	6	4983.41	
5	15.00	30000.00	12	1	6653.98	
6	2.00	20000.00	40	3	9654.32	
7	3.00	8000.00	20	3	5389.37	
8	5.00	50000.00	30	1	11273.78	
9	120.00	150000.00	200	1	19984.39	
10	8.00	70000.00	60	1	8873.27	

NUMERO DE ZONAS: 23

* RESULTADOS *						ITERACAO NUM --> 3
CLASS.MERC.	QUANT.(TON)	VALOR UNIT.	N.ENTREG.	PERIODIC.	CUSTO/TON	
1	0.50	10000.00	10	5	7314.37	
2	7.00	40000.00	80	1	6466.39	
3	12.00	15000.00	60	1	3272.55	
4	1.00	4000.00	12	6	4983.41	
5	15.00	30000.00	12	1	6653.98	
6	2.00	20000.00	40	3	9654.32	
7	3.00	8000.00	20	3	5389.37	
8	5.00	50000.00	30	1	11273.78	
9	120.00	150000.00	200	1	19984.39	
10	8.00	70000.00	60	1	8873.27	

NUMERO DE ZONAS: 23

## 9. LOCALIZAÇÃO DE DEPÓSITOS E DE INSTALAÇÕES DE ARMAZENAGEM

Um problema **macro-logístico** bastante comum nas empresas é o de buscar um ponto (ou mais do que um) no espaço geográfico para localização de depósito de triagem e/ou de instalação de armazenagem. O primeiro tipo está essencialmente ligado ao problema operacional de consolidação/desconsolidação da carga e com o processo de distribuição espacial da mercadoria. O segundo tipo refere-se à questão de manutenção de estoques intermediários para fins de comercialização, regulação, etc.

O problema da localização de instalações tem sido tratado de forma ampla na literatura. O assunto envolve desde simples problemas de localização de uma facilidade, até problemas bastante complexos, englobando diversas instalações, fluxos de natureza diversa (passando ou não pelos depósitos), etc.

Neste capítulo procuraremos abordar os tipos de problemas mais comuns na vida real. **No contexto brasileiro, por exemplo, é comum o planejamento paulatino do sistema: inicialmente se implanta um depósito/armazém, posteriormente outro, e as sim sucessivamente.** Dessa forma os casos de localização de uma instalação são os mais comuns. Por essa razão é dado destaque a esse tipo de problema, incluindo o caso de um novo depósito na presença de outros já existentes.

Outra divisão metodológica importante na abordagem desse tipo de problema está ligada à representação do universo espacial em que se apoia a localização. Uma forma de representar esse universo é admiti-lo como uma superfície plana contínua. Sobre essa superfície aplica-se um sistema de coordenadas, que pode ser euclidiano ou retangular, conforme visto nos Capítulos 2, 3 e 4.

Outra forma de representação é a de considerar como base a rede de transporte disponível. Nesse caso as instalações somente poderão se localizar num tramo da rede ou, mais particularmente, num nó.

**O primeiro tipo de abordagem fornece resultados aproximados em termos de localização espacial, mas é muito útil nos casos de planejamento e nas situações em que a rede seja suficientemente densa para garantir cobertura espacial uniforme e abrangente.** O segundo tipo de abordagem é mais específico, sendo co

num nas fases de detalhamento do projeto ou em condições operacionais específicas.

As técnicas de abordagem são bastantes distintas para os dois tipos de problema. Neste capítulo abordaremos problemas do primeiro tipo, em que a localização se apoia sobre um espaço contínuo. Problemas do segundo tipo são abordados amplamente na literatura de Pesquisa Operacional. Para uma análise inicial dos principais tipos de problema dessa categoria e dos métodos de solução, o leitor pode consultar o texto de Larson e Odoni (9), seção 6.5.

### 9.1. Localização de uma instalação, métrica Euclidiana

O problema de buscar a localização otimizada de uma instalação é bastante comum, por uma série de razões. De um lado, um grande número de empresas não tem o porte suficiente para manter mais do que uma instalação, principalmente no caso brasileiro.

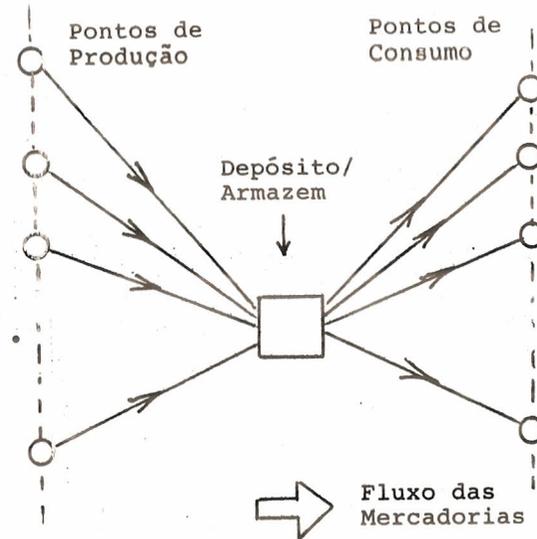
Em segundo lugar, mesmo no caso das grandes empresas, pode-se separar com relativa facilidade os territórios servidos pelas diversas instalações. Ballou (1), Cap. 8), tratando cada caso como um problema isolado.

Finalmente há que se considerar o fato de que a implantação de vários depósitos numa região se faz, na maioria dos casos, de forma sequencial ao longo de um período de tempo bastante extenso. Assim, o problema mais usual é o da localização de uma instalação, sozinha ou na presença de outras facilidades já implantadas.

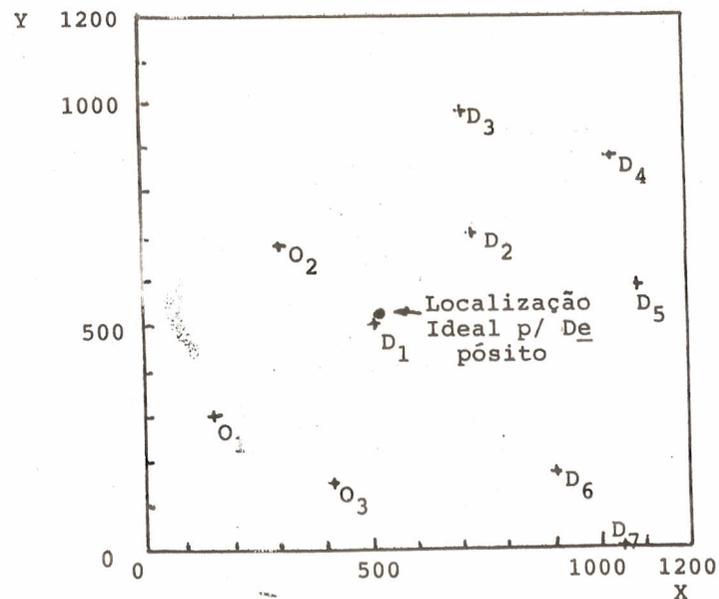
Na Fig. 9.1 é apresentado o esquema geral do problema. Existem  $N$  pontos de produção da(s) mercadoria(s), representados pelo índice  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). No extremo oposto há  $M$  pontos de consumo, representados pelo índice  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ). Cada ponto é representado por suas coordenadas cartesianas  $x_i, y_i$  ou  $x_j, y_j$ . O problema consiste em determinar as coordenadas do depósito  $x_D, y_D$ , de modo a otimizar uma função pré-definida.

O caso mais comum é o de considerar o custo global de transporte como função objetivo a minimizar.

Seja  $O_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) o fluxo gerado no ponto



Localização Espacial de um Depósito - Esquema Geral  
Fig. 9.1



Localização dos Pontos de Produção e de Consumo - Exemplo 9.1

Fig. 9.2

de produção  $i$  e destinado ao depósito. Seja  $D_j$  o fluxo consumido no ponto  $j$ , ( $j = 1, 2, \dots, M$ ), proveniente do depósito/armazém intermediário. Admitindo equilíbrio entre entradas e saídas, deve-se observar:

$$\sum_i O_i = \sum_j D_j \quad (9.1)$$

Eventualmente poderá ocorrer, no período de tempo considerado, um excesso de produção, ou seja:

$$\sum_i O_i > \sum_j D_j \quad (9.2)$$

Nesse caso a diferença (excesso) corresponde à quantidade estocada para o período seguinte, de forma a cobrir variações sazonais, problemas temporais de comercialização, etc. É claro que esse excesso, mesmo permanecendo em estoque, acabará sendo escoado mais cedo ou mais tarde. Por isso é conveniente considerar todo o volume produzido no problema da localização, de forma a levar em conta o custo global de transporte do sistema no seu todo. Por isso a adoção da igualdade (9.1) constitui uma condição típica.

Seja  $C_i$  o custo unitário de transporte, em cruzados por tonelada-km, entre o ponto de produção  $i$  e o depósito. Da mesma forma,  $C_j$  é o custo unitário de transporte entre o depósito e o destino  $j$ . O custo de transporte global do sistema, para representação Euclideana, é dado por:

$$C_T = \sum_{i=1}^N C_i \cdot O_i [(x_D - x_i)^2 + (y_D - y_i)^2]^{1/2} + \sum_{j=1}^M C_j \cdot D_j [(x_D - x_j)^2 + (y_D - y_j)^2]^{1/2} \quad (9.3)$$

O processo para determinação do par  $x_D, y_D$  que torna mínimo o custo global de transporte  $C_T$  é semelhante ao método usa

do para encontrar o ponto central do sistema (Capítulo 3, seção 3.1). Basta considerar os produtos  $C_i \cdot O_i$  e  $C_j \cdot D_j$  como os pesos  $P_i$  adotados naquela formulação (no caso do ponto central, os  $P_i$ 's eram as populações).

Derivando a função custo (9.3) em relação a  $x_D$  e  $y_D$  respectivamente, e igualando a zero, vem:

$$\frac{\partial C_T}{\partial x_D} = \sum_{i=1}^N C_i \cdot O_i (x_D - x_i) \cdot [(x_D - x_i)^2 + (y_D - y_i)^2]^{-1/2} + \sum_{j=1}^M C_j \cdot D_j (x_D - x_j) \cdot [(x_D - x_j)^2 + (y_D - y_j)^2]^{-1/2} = 0 \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial C_T}{\partial y_D} = \sum_{i=1}^N C_i \cdot O_i (y_D - y_i) \cdot [(x_D - x_i)^2 + (y_D - y_i)^2]^{-1/2} + \sum_{j=1}^M C_j \cdot D_j (y_D - y_j) \cdot [(x_D - x_j)^2 + (y_D - y_j)^2]^{-1/2} = 0 \quad (9.5)$$

Para resolver o sistema de duas equações e duas incógnitas acima utilizamos um processo iterativo análogo ao descrito na seção 3.1. Partimos de uma primeira aproximação para as coordenadas do depósito, dada por:

$$x_D^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^N C_i \cdot O_i \cdot x_i + \sum_{j=1}^M C_j \cdot D_j \cdot x_j}{\sum_{i=1}^N C_i \cdot O_i + \sum_{j=1}^M C_j \cdot D_j} \quad (9.6)$$

$$e \quad y_D^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^N C_i \cdot O_i \cdot y_i + \sum_{j=1}^M C_j \cdot D_j \cdot y_j}{\sum_{i=1}^N C_i \cdot O_i + \sum_{j=1}^M C_j \cdot D_j} \quad (9.7)$$

Adotando provisoriamente essas coordenadas podemos calcular as distâncias Euclidianas dos diversos pontos ao depósito:

$$\overline{DE}_i^{(0)} = [(x_D^{(0)} - x_i)^2 + (y_D^{(0)} - y_i)^2]^{1/2} \quad (9.8)$$

$$e \quad \overline{DE}_j^{(0)} = [(x_D^{(0)} - x_j)^2 + (y_D^{(0)} - y_j)^2]^{1/2} \quad (9.9)$$

As equações (9.4) e (9.5) fornecem agora novas estimativas para  $x_D$  e  $y_D$ . De uma maneira geral, o cálculo da iteração de ordem  $l$ , de  $x_D$  e  $y_D$ , é feito através das relações:

$$x_D^{(l)} = \frac{\sum_{i=1}^N C_i \cdot O_i \cdot x_i / \overline{DE}_i^{(l-1)} + \sum_{j=1}^M C_j \cdot D_j \cdot x_j / \overline{DE}_j^{(l-1)}}{\sum_{i=1}^N C_i \cdot O_i / \overline{DE}_i^{(l-1)} + \sum_{j=1}^M C_j \cdot D_j / \overline{DE}_j^{(l-1)}} \quad (9.10)$$

$$e \quad y_D^{(l)} = \frac{\sum_{i=1}^N C_i \cdot O_i \cdot y_i / \overline{DE}_i^{(l-1)} + \sum_{j=1}^M C_j \cdot D_j \cdot y_j / \overline{DE}_j^{(l-1)}}{\sum_{i=1}^N C_i \cdot O_i / \overline{DE}_i^{(l-1)} + \sum_{j=1}^M C_j \cdot D_j / \overline{DE}_j^{(l-1)}} \quad (9.11)$$

Para testar a convergência pode-se adotar dois critérios diversos. O primeiro corresponde a considerar as diferenças relativas entre os valores das coordenadas do depósito, em iterações sucessivas. O processo termina quando tais diferenças

relativas forem menores do que a precisão desejada:

$$|x_D^{(l)} - x_D^{(l-1)}| / x_D^{(l-1)} \leq \epsilon \quad (9.12)$$

$$|y_D^{(l)} - y_D^{(l-1)}| / y_D^{(l-1)} \leq \epsilon \quad (9.13)$$

Outro critério envolve o teste das derivadas parciais (9.4) e (9.5), que devem ser nulas no limite:

$$\frac{\partial C_T}{\partial x_D} \leq \epsilon \quad (9.14)$$

$$\frac{\partial C_T}{\partial y_D} \leq \epsilon \quad (9.15)$$

A escolha de um ou outro critério vai depender da sensibilidade do analista em relação aos parâmetros físicos do problema. Por exemplo, se estamos trabalhando num contexto regional, com transporte interurbano de longa distância, pode-se adotar o primeiro critério com um erro de, digamos, meio por cento. Caso não se tenha uma idéia clara da ordem de grandeza do resultado é melhor fixar a precisão para a derivada.

Uma outra questão a considerar é a possibilidade de os pontos situarem-se exatamente num dos pontos de produção ou de consumo. Nesse caso a distância desse ponto ao depósito,  $\overline{DE}_i$  ou  $\overline{DE}_j$  conforme o caso, será nula. Consequentemente as expressões (9.10) e (9.11) não são definidas.

Kuhn e Kuenne (7) desenvolveram um processo eficaz para verificar se a localização do depósito coincide ou não com o ponto de ordem  $k$ .

Seja  $W_k$  o produto do custo unitário pelo fluxo, para o ponto  $k$ . Se  $k$  coincidir com um ponto de produção, temos:

$$W_k = C_k \cdot O_k \quad (9.16)$$

e se  $k$  for um ponto de consumo:

$$W_k = C_k \cdot D_k \quad (9.17)$$

Da mesma forma definimos os pesos  $W_i$  e  $W_j$  para os demais pontos:

$$W_i = C_i \cdot O_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (9.18)$$

$$W_j = C_j \cdot D_j \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (9.19)$$

Seja  $\overline{DE}_{kj}$  a distância Euclideana entre o ponto  $k$  e outro ponto  $j$  qualquer. Definimos também as grandezas  $GA_j$  e  $GB_j$  da seguinte forma:

$$GA_j = (x_j - x_k) / \overline{DE}_{kj} \quad (j \neq k) \quad (9.20)$$

$$e \quad GB_j = (y_j - y_k) / \overline{DE}_{kj} \quad (j \neq k) \quad (9.21)$$

O teste desenvolvido por Kuhn-Kuenne, e que constitui uma condição necessária e suficiente para que o ponto  $k$  seja a solução do problema, se baseia na análise da desigualdade:

$$W_k^2 \geq \left( \sum_{j \neq k} W_j \cdot GA_j \right)^2 + \left( \sum_{j \neq k} W_j \cdot GB_j \right)^2 \quad (9.22)$$

Se a desigualdade (9.22) for verdadeira, então o ponto  $k$  é a solução do problema. Se, no entanto,  $W_k^2$  for menor do que o segundo membro da inequação, a localização do depósito não coincide com o ponto  $k$ .

No Programa 10, do Anexo, foi introduzido o teste de Kuhn-Kuenne, que é chamado quando uma das distâncias  $\overline{DE}_i$  ou  $\overline{DE}_j$  tende a zero. Se o teste for positivo, o programa suspende o processo iterativo, apresentando imediatamente a solução final na

tela.

Exemplo 9.1 Uma indústria possui três fábricas, localizadas nos pontos  $O_1$ ,  $O_2$  e  $O_3$  do diagrama da Fig. 9.2. Os principais centros consumidores são constituídos por sete cidades, representadas pelos pontos  $D_1$ ,  $D_2$ , ...,  $D_7$ . As produções e consumos, em toneladas do produto, são as seguintes:

$O_1 = 220$ t	$D_1 = 130$ t
$O_2 = 370$ t	$D_2 = 80$ t
$O_3 = 185$ t	$D_3 = 165$ t
TOTAL 775	$D_4 = 130$ t
	$D_5 = 140$ t
	$D_6 = 50$ t
	$D_7 = 80$ t
	TOTAL 775

As coordenadas dos 10 pontos da Fig. 9.2 são as seguintes:

$O_1 \equiv (150, 310)$	$O_2 \equiv (300, 680)$	$O_3 \equiv (410, 150)$
$D_1 \equiv (520, 510)$	$D_2 \equiv (730, 700)$	$D_3 \equiv (720, 980)$
$D_4 \equiv (1040, 870)$	$D_5 \equiv (1090, 580)$	$D_6 \equiv (910, 160)$
$D_7 \equiv (1050, 0)$		

No que se refere ao custo de transporte, admitimos, neste exemplo, que a transferência da mercadoria entre fábricas e depósito se faça por meio de veículos de 18 toneladas, a um custo unitário de CZ\$ 3,50 por tonelada-km. A distribuição dos

produtos a partir do depósito é feita, por sua vez, em veículos de 12 toneladas, com custo unitário de CZ\$ 4,10 por tonelada-km.

Para resolver este tipo de problema foi desenvolvido o Programa 10, do Anexo. Adotando-se uma precisão  $\epsilon$  de 0,1 para as derivadas, obtiveram-se os resultados do Quadro 9.1. O processo convergiu em 41 iterações, obtendo-se as coordenadas  $x_D = 520,4$  e  $y_D = 526,7$  para o depósito, localização essa nas vizinhanças do ponto  $D_1$ .

## 9.2. Localização de uma instalação, métrica retangular

A metodologia para resolver este tipo de problema é análoga à desenvolvida na secção 3.2, para determinação de ponto central. Nesse caso a função objetivo a minimizar assume a forma da relação (3.16), separável em duas somatórias de módulos, um em  $x_i$ , outro em  $y_i$ .

O exemplo seguinte ilustra, de forma prática, a metodologia utilizada.

**Exemplo 9.2** Uma cadeia de lojas possui uma matriz, localizada no ponto 1 da Fig. 9.3, e dez filiais, localizadas nos pontos de 2 a 11, da Fig. 9.3. As vendas são proporcionais ao contingente populacional da área atendida, de um lado, e da renda per capita, de outro.

No Quadro 9.2 são fornecidas as coordenadas dos 11 pontos, bem como as populações e os índices relativos de renda de cada zona.

A empresa deseja construir um depósito a partir do qual será efetuada a distribuição das mercadorias, tanto para as lojas, como para as entregas à domicílio.

Admite-se, numa primeira aproximação, que as entregas domiciliares estão concentradas nos centróides das zonas (que coincidem com os pontos 1, 2, ..... da Fig. 9.3). A rede viária tem características tipicamente retangulares.

A empresa tem em vista 9 terrenos potencialmente adequados para a localização do depósito representados pelos pontos  $L_1, L_2, \dots, L_9$  na Fig. 9.3. As coordenadas desses pontos também são fornecidas no Quadro 9.2.

Quadro 9.1

### Resultados Parciais e Finais, Localização de Depósito (Exemplo 9.1)

\* RESULTADOS \*

ITERACAO	COORD. X	COORD. Y	DERIV. X	DERIV. Y
1	591.53	545.03	0.0000	0.0000
2	548.72	554.97	847.7073	-196.7293
3	530.81	549.38	420.5606	131.2700
4	524.01	543.44	181.3014	158.3893
5	521.71	539.12	67.7469	127.2371
6	520.98	536.11	23.4075	95.9931
7	520.73	533.97	8.3806	72.8271
8	520.63	532.40	3.5994	56.1580
9	520.58	531.23	1.9997	43.9528
10	520.54	530.33	1.3498	34.8149
11	520.52	529.63	1.0047	27.8385
12	520.50	529.07	0.7802	22.4262
13	520.49	528.64	0.6181	18.1729
14	520.47	528.28	0.4953	14.7957
15	520.46	528.00	0.3999	12.0918
16	520.46	527.77	0.3247	9.9121
17	520.45	527.58	0.2648	8.1456
18	520.45	527.43	0.2167	6.7074
19	520.44	527.31	0.1779	5.5323
20	520.44	527.20	0.1463	4.5693
21	520.44	527.12	0.1206	3.7781
22	520.43	527.05	0.0996	3.1268
23	520.43	526.99	0.0823	2.5897
24	520.43	526.94	0.0681	2.1462
25	520.43	526.90	0.0564	1.7796
26	520.43	526.87	0.0467	1.4762
27	520.43	526.84	0.0387	1.2250
28	520.43	526.82	0.0321	1.0169
29	520.43	526.80	0.0266	0.8443
30	520.43	526.79	0.0221	0.7011
31	520.42	526.77	0.0184	0.5824
32	520.42	526.76	0.0152	0.4838
33	520.42	526.75	0.0127	0.4019
34	520.42	526.75	0.0105	0.3339
35	520.42	526.74	0.0087	0.2775
36	520.42	526.74	0.0073	0.2306
37	520.42	526.73	0.0060	0.1916
38	520.42	526.73	0.0050	0.1593
39	520.42	526.72	0.0042	0.1324
40	520.42	526.72	0.0035	0.1100
41	520.42	526.72	0.0029	0.0914

NUMERO DE ITERACOES: 41  
COORD. X: 520.42  
COORD. Y: 526.72

Quadro 9.2  
Dados Referentes ao Exemplo 9.2

## ZONAS:

ZONA	Centrôides		POPULAÇÃO	ÍNDICE RELATIVO DE RENDA
	x (km)	y (km)		
1	0	0	21000	100
2	- 2,0	+ 3,7	43000	125
3	+ 1,3	+ 6,1	28000	85
4	+ 3,2	+ 2,5	78500	68
5	+ 3,1	- 1,0	52000	65
6	+ 0,7	- 2,5	24800	153
7	- 2,2	- 0,6	18300	138
8	- 4,3	+ 1,7	5400	115
9	- 5,7	- 1,5	3900	55
10	- 1,5	- 4,3	23000	90
11	+ 4,0	- 4,6	87500	75

## LOCAIS POTENCIAIS PARA O DEPÓSITO:

	x (km)	y (km)
L <sub>1</sub>	- 4,3	- 2,3
L <sub>2</sub>	- 0,3	- 1,8
L <sub>3</sub>	+ 3,2	- 3,3
L <sub>4</sub>	+ 2,5	+ 1,2
L <sub>5</sub>	+ 4,2	+ 4,2
L <sub>6</sub>	+ 0,7	+ 7,7
L <sub>7</sub>	- 4,8	+ 5,5
L <sub>8</sub>	- 0,7	+ 1,2

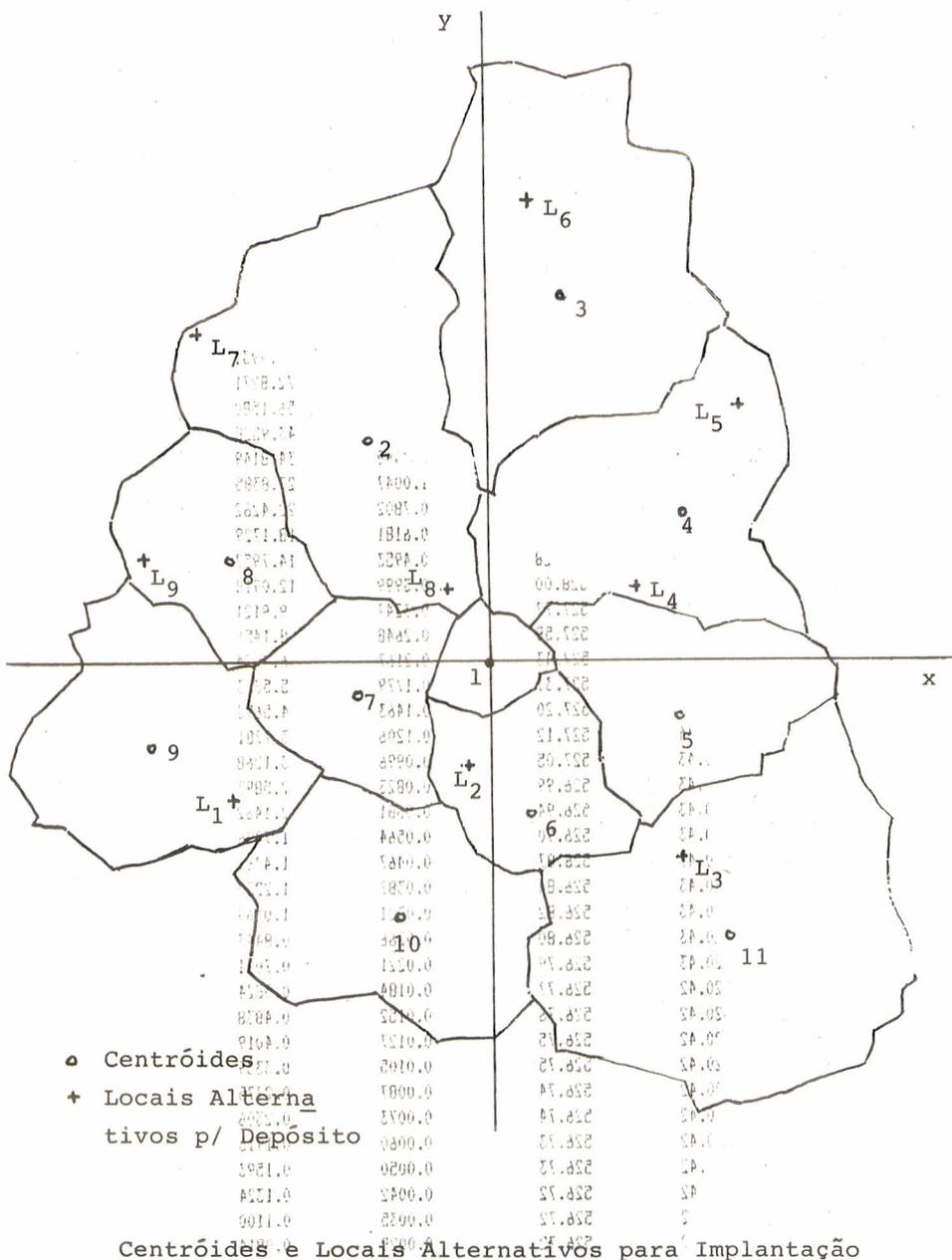


Fig. 9.3

O objetivo do problema é avaliar os méritos relativos dos nove locais, em termos de acessibilidade.

O esforço de deslocamento é proporcional ao volume de vendas e à distância do depósito aos centróides. As vendas, por sua vez, são proporcionais à população e ao nível de renda. Assim, adotamos a seguinte função objetivo:

F = alpha . sum\_i P\_i . IR\_i [ |x\_D - x\_i| + |y\_D - y\_i| ] (9.23)

onde alpha é uma constante.

A função (9.23) é separável em x\_i e y\_i:

F = alpha . sum\_i P\_i . IR\_i |x\_D - x\_i| + alpha . sum\_i P\_i . IR\_i |y\_D - y\_i| (9.24)

Essa propriedade permite que se proceda à determinação de x\_D e y\_D de forma independente, facilitando a solução do problema.

O Programa 11, do Anexo, foi desenvolvido para resolver esse tipo de problema. Utiliza o método de Fibonacci para determinar as coordenadas x\_D e y\_D. No Quadro 9.3 são apresentados os resultados: a localização de mínimo esforço de deslocamento (máxima acessibilidade) tem coordenadas x\_D = 1,3 e y\_D = -0,6.

Ocorre que o ponto ideal está localizado em região densamente habitada, onde os preços dos terrenos são elevados para esse tipo de empreendimento. Na prática temos que nos restringir aos terrenos disponíveis, levando em conta não somente o problema do preço e da localização, como também as necessidades mínimas de área útil e as características topográficas.

As nove áreas alternativas são as indicadas no Quadro 9.2 e na Fig. 9.3 com as letras L\_1, L\_2, ..., L\_9.

Para cada ponto potencial o programa calcula a função F, através da relação (9.24), onde x\_D e y\_D assumem os valores das coordenadas do ponto. O valor de F para o ponto (1,3, -0,6) é mínimo, sendo denominado de F\*.

Definimos um índice de mérito relativo para o ponto

ideal j, dado por:

V\_j = (F\* / F\_j) . 100 (9.25)

onde F\* é o valor de F, dado pela expressão (9.24), para o ponto de mínimo esforço de deslocamento (máxima acessibilidade) e F\_j é o valor de F para o ponto j, candidato à localização.

Para o ponto ideal (1,3, -0,6) o valor de V\_j é obviamente igual a 100. Para os demais pontos tem-se V\_j <= 100. Os resultados do Quadro 9.3 mostram os valores de V\_j para os nove pontos potenciais. Observa-se que o menor valor de V corresponde a 44,5, para o ponto L\_7. O máximo valor, igual a 92,4, corresponde ao ponto L\_4. Em termos de acessibilidade, quanto maior o valor de V\_j, melhor é a localização.

Esse tipo de figura de mérito, relacionada com a acessibilidade, pode ser utilizada, juntamente com outros fatores, para seleção de áreas. No exemplo 9.4 voltaremos a esse tipo de problema, considerando também fatores qualitativos na análise.

Quadro 9.3

LOCALIZ.FACILIDADE, METRICA RETANG. EXEMPLO 9.2

\*\* RESULTADOS \*\*

Table with 4 columns: LOCAL, COORD. X, COORD. Y, IND. MERITO. Rows 1-9.

LOCALIZACAO IDEAL:

X= 1.3
Y= -0.6

MELHOR LOCAL DENTRE DISPONIVEIS:

PONTO: 4
X= 2.5
Y= 1.2

### 9.3. Localização de depósito na presença de outras instalações

São muito comuns, na prática, situações em que a empresa já disponha de um certo número de depósitos em operação e deseja analisar a implantação de uma instalação adicional. Nesse caso os fluxos que passam através dos depósitos não são previamente conhecidos, devendo ser calculados através de um processo de otimização.

Seja  $O_i$  o fluxo de mercadoria produzido no ponto  $i$  e  $D_j$  o fluxo consumido no destino  $j$ . Denominamos de  $F_{ik}$  a parte do fluxo que se origina em  $i$  e se destina ao depósito de ordem  $k$ . Analogamente denominamos de  $F_{kj}$  o fluxo que parte do depósito  $k$  e se destina no ponto de consumo  $j$ .

A determinação dos  $F_{ik}$ 's e  $F_{kj}$ 's que minimizam o custo total de transporte pode ser feita através de um modelo de programação linear<sup>(1)</sup>. As restrições que formam o problema de PL são de três tipos:

(a) Restrições de capacidade nos pontos de produção.

Em cada nó  $i$ , a soma dos fluxos que partem do nó deve ser menor ou igual à produção  $O_i$  daquele ponto:

$$\sum_{k=1}^{ND} F_{ik} \leq O_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9.26)$$

onde  $ND$  é o número de depósitos.

(b) Restrições de demanda nos pontos de consumo.

Em cada nó  $j$ , a soma dos fluxos que chegam ao nó deve ser maior ou igual à demanda  $D_j$  daquele ponto:

$$\sum_{k=1}^{ND} F_{kj} \geq D_j \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (9.27)$$

(1) Vide Novaes, referência (12), Capítulo 6.

(c) Equações de continuidade nos depósitos.

Em cada depósito  $k$  a soma total dos fluxos que chegam deve ser igual à soma dos fluxos que partem:

$$\sum_{i=1}^N F_{ik} = \sum_{j=1}^M F_{kj} \quad (k = 1, 2, \dots, ND) \quad (9.28)$$

O número total de restrições do problema de PL é igual à soma de  $N + M + ND$ , onde  $N$  é o número de pontos de produção,  $M$  é o número de pontos de consumo e  $ND$  é o número de depósitos.

É fácil verificar que o número de variáveis (os fluxos entre pontos de produção e depósitos e entre depósitos e pontos de consumo) é igual à  $(N + M) \cdot ND$ .

A função objetivo, a minimizar, corresponde ao custo total de transporte, ou seja:

$$C_T = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{ND} C_i \cdot F_{ik} [(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2]^{1/2} + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{ND} C_j \cdot F_{kj} [(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2]^{1/2} \quad (9.29)$$

Um problema logístico típico é o de analisar as localizações alternativas de um depósito adicional, na presença dos depósitos existentes.

Exemplo 9.3 Trata-se de analisar a localização de um segundo depósito no esquema previamente analisado do Exemplo 9.1.

Naquele exemplo a localização ideal do primeiro depósito apresentou coordenadas  $x_D = 520,4$  e  $y_D = 526,7$ .

O Programa 12, do Anexo, permite determinar, por meio de Programação Linear, a distribuição otimizada dos fluxos para  $ND$  depósitos.

Primeiramente analisamos o sistema com apenas o depósito original de forma a calcular o custo total. Nesse caso, co

mo ND = 1, a resposta é trivial, já que todos os fluxos passam pela instalação intermediária. Entrando com  $X_D = 520,4$  e  $Y_D = 526,7$ , obtêm-se os resultados apresentados na parte superior do Quadro 9.4. O custo total de transporte é  $C_1 = 2.380.438$ . Passa pelo depósito um total de 775 toneladas.

A seguir procedemos à análise da localização de um depósito adicional no ponto de coordenadas (850, 800). O programa calcula, através de programação linear, a nova distribuição otimizada dos fluxos. Os resultados são apresentados na parte inferior do Quadro 9.4. Para essa configuração o custo total de transporte é  $C_2 = 2.275.602$ . Nesse caso passam 480 toneladas pelo depósito 1 e 295 toneladas pelo depósito 2. Observa-se uma redução de custo total da ordem de apenas 4.4%.

O Programa 12 pode ser utilizado iterativamente, testando-se diversos pontos para posterior análise e confrontação.

#### 9.4. Avaliação de alternativas com critérios múltiplos

É muito comum, nos problemas de localização, a ocorrência de fatores de natureza diversa, além do custo de transporte que foi utilizado como critério único nos exemplos deste capítulo. Alguns fatores, como é o caso do custo global de transporte, apresentam características tipicamente quantitativas. Outros fatores, como, por exemplo, impacto urbano na região circunvizinha, são de natureza qualitativa.

A preocupação crescente com as condições ambientais, tanto no contexto urbano como no regional, e a maior complexidade de dos fatores que influem na avaliação de alternativas locais, induziram os pesquisadores a devisar métodos para incorporar ambos os tipos de fatores à análise. Em particular os trabalhos de Paelinck (14), Nijkamp (11) e Voogd (15) apresentam avanços significativos nesse campo de aplicação. O desenvolvimento desta seção segue principalmente o trabalho de Voogd.

Nosso modelo envolve dois tipos de variáveis. As do primeiro tipo são denominados variáveis cardinais correspondendo aos parâmetros de mensuração contínua. Como exemplos citam-se o custo global de transporte, utilizado como critério de avaliação nos exemplos 9.1, 9.2 e 9.3, o preço do terreno, etc.

As variáveis do segundo tipo são denominadas ordinais,

#### Quadro 9.4

### Sistema com Um Depósito Adicional na Presença de Outro(s) Depósito(s) - Exemplo 9.3

NUMERO DE PONTOS DE PRODUÇÃO: 3  
NUMERO DE PONTOS DE CONSUMO: 7  
NUMERO DE DEPOSITOS: 1

\* COORDENADAS DOS DEPOSITOS \*

DEPOSITO NUMERO: 1 X= 520.4 Y= 526.7

\* FLUXOS VIA DEPOSITOS \*

ORIG./DEST.	DEPOSITO 1
ORIGEM 1	220.0
ORIGEM 2	370.0
ORIGEM 3	185.0
DESTINO 1	130.0
DESTINO 2	0.0
DESTINO 3	80.0
DESTINO 4	0.0
DESTINO 5	0.0
DESTINO 6	0.0
DESTINO 7	0.0

CUSTO TOTAL: 2380438.05

NUMERO DE PONTOS DE PRODUÇÃO: 3  
NUMERO DE PONTOS DE CONSUMO: 7  
NUMERO DE DEPOSITOS: 2

\* COORDENADAS DOS DEPOSITOS \*

DEPOSITO NUMERO: 1 X= 520.4 Y= 526.7  
DEPOSITO NUMERO: 2 X= 850.0 Y= 800.0

\* FLUXOS VIA DEPOSITOS \*

ORIG./DEST.	DEPOSITO 1	DEPOSITO 2
ORIGEM 1	220.0	0.0
ORIGEM 2	75.0	295.0
ORIGEM 3	185.0	0.0
DESTINO 1	130.0	0.0
DESTINO 2	80.0	0.0
DESTINO 3	0.0	165.0
DESTINO 4	0.0	130.0
DESTINO 5	140.0	0.0
DESTINO 6	50.0	0.0
DESTINO 7	80.0	0.0

CUSTO TOTAL: 2275602.21

sendo medidas em termos relativos através de uma escala numérica. Por exemplo, a variável "impacto urbano" pode ser representada por uma escala em três níveis, a saber:

<u>Descrição</u>	<u>Nível</u>
a) <u>Pequeno impacto urbano</u> : regiões em que o uso do solo é compatível com as atividades do depósito/armazém; áreas com ocupação rarefeita, abrangendo uso residencial e comercial de âmbito local.....	3
b) <u>Médio impacto urbano</u> : regiões em que a ocupação urbana já está definida, com ocupação rarefeita mas existindo conjuntos habitacionais expressivos, havendo, no entanto, permissão legal para atividades do tipo contemplado.....	2
c) <u>Grande impacto urbano</u> : regiões com ocupação tipicamente residencial, densificadas, com grande proximidade de conjuntos habitacionais; áreas com restrições urbanísticas.....	1

Deve-se notar que atribuímos nível máximo, igual a 3, à situação de pequeno impacto urbano, e nível mínimo, igual a 1, ao caso oposto.

É descrita, a seguir, os principais aspectos da metodologia desenvolvida por Voogd (15).

#### A) Normalização das variáveis ordinais e medida de dominância

Utilizamos o índice  $K$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ) para representar as alternativas de localização. No caso do exemplo 9.2 tivemos nove alternativas, constituídas pelos pontos  $L_1, L_2, \dots, L_9$  da Fig. 9.3. O índice  $j$ , por sua vez, representa os critérios ordinais utilizados na avaliação ( $j = 1, 2, \dots, NO$ ), sendo  $NO$  o número total de critérios ordinais adotados na análise.

A normalização das variáveis é feita da seguinte forma:

$$\hat{e}_{kj} = \frac{e_{kj} - e_j^{(-)}}{e_j^{(+)} - e_j^{(-)}} \quad (9.30)$$

onde:

$e_j^{(-)}$  - menor valor do atributo ordinal  $j$ , dentre as  $M$  alternativas de localização analisadas.

$e_j^{(+)}$  - maior valor do atributo ordinal  $j$ , dentre as  $M$  alternativas analisadas.

$e_{kj}$  - valor do atributo ordinal  $j$ , para alternativa  $k$ .

$\hat{e}_{kj}$  - variável normalizada.

Vê-se, através da relação (9.30), que  $\hat{e}_{kj}$  está compreendida no intervalo:

$$0 \leq \hat{e}_{kj} \leq 1 \quad (9.31)$$

Daí a denominação de "variável normalizada".

Uma vez definidas as variáveis normalizadas, é calculada uma medida de dominância, representada por uma matriz quadrada  $\{\alpha\}$ , cujo elemento  $\alpha_{ij}$  é dado pela relação:

$$\alpha_{ij} = \left\{ \sum_{k \in O} [W_k \cdot \text{sgn}(\hat{e}_{ki} - \hat{e}_{kj})] \right\}^{1/\gamma} \quad (9.32)$$

onde:

$\alpha_{ij}$  - medida de dominância da alternativa  $i$  sobre a alternativa  $j$ .

$\hat{e}_{ki}$  - variável ordinal normalizada, para atributo ordinal  $k$  e alternativa  $i$

$\hat{e}_{kj}$  - idem, alternativa  $j$ .

$W_k$  - peso alocado ao atributo ordinal  $k$

$\gamma$  - parâmetro de escala, sendo sempre um número ímpar positivo (isto é, 1, 3, 5, .....). No modelo e no trabalho de Voogd, o parâmetro  $\gamma$  assume o valor unitário.

$k$  - índice do atributo ordinal, que formam o conjunto  $O$  de critérios ordinais.

$\text{sgn}(\hat{e}_{ki} - \hat{e}_{kj})$  - função definida da seguinte forma:

$$\text{sgn}(\hat{e}_{ki} - \hat{e}_{kj}) = \begin{cases} +1 & \text{se } \hat{e}_{ki} > \hat{e}_{kj} \\ 0 & \text{se } \hat{e}_{ki} = \hat{e}_{kj} \\ -1 & \text{se } \hat{e}_{ki} < \hat{e}_{kj} \end{cases} \quad (9.33)$$

B) Normalização das variáveis cardinais e medida de dominância.

A normalização da variável cardinal  $j$  se faz de forma análoga à seção anterior, ou seja:

$$\hat{e}_{kj} = \frac{e_{kj} - e_j^{(-)}}{e_j^{(+)} - e_j^{(-)}} \quad (9.34)$$

A medida de dominância da alternativa  $i$  sobre a alternativa  $j$  é dada por:

$$\beta_{ij} = \left\{ \sum_{k \in C} [W_k (\hat{e}_{ki} - \hat{e}_{kj})]^\gamma \right\}^{1/\gamma} \quad (9.35)$$

onde  $C$  representa o conjunto de atributos cardinais.

C) Medida de dominância global.

A medida de dominância global da alternativa  $i$  sobre a alternativa  $j$  é dada por:

$$m_{ij} = W_O \cdot \lambda_{ij} + W_C \cdot \phi_{ij} \quad (9.36)$$

onde:

$m_{ij}$  - medida de dominância global da alternativa  $i$  sobre a alternativa  $j$ .

$W_O$  - Soma dos pesos referentes às variáveis ordinais ( $W_O = \sum_{k \in O} W_k$ ).

$W_C$  - soma dos pesos referentes às variáveis cardinais ( $W_C = \sum_{k \in C} W_k$ ).

$$\lambda_{ij} = \alpha_{ij} \left[ \sum_i \sum_j |\alpha_{ij}| \right]^{-1} \quad (9.37)$$

$$\phi_{ij} = \beta_{ij} \left[ \sum_i \sum_j |\beta_{ij}| \right]^{-1} \quad (9.38)$$

D) Figura de mérito global para cada alternativa.

A figura de mérito global de uma alternativa  $i$  é obtida somando-se as dominâncias globais de  $i$  em relação às demais alternativas, e dividindo o resultado pelo número  $M$  de alternativas:

$$S_i = \frac{1}{M} \cdot \sum_j m_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (9.39)$$

Quanto maior o valor de  $S_i$ , melhor será a alternativa  $i$ .

Pode-se normalizar a figura de mérito adotando-se o índice 100 para melhor alternativa e zero para a pior. Assim, a figura de mérito normalizada, para a alternativa  $i$ , é dada por:

$$MR_i = \frac{S_i - S_i^{(-)}}{S_i^{(+)} - S_i^{(-)}} \cdot 100 \quad (9.40)$$

onde:

$S_i$  - figura de mérito global da alternativa  $i$ , dada pela relação (9.39).

$S_i^{(-)}$  - valor de  $S_i$  correspondente a pior alternativa.

$S_i^{(+)}$  - valor de  $S_i$  correspondente a melhor alternativa.

$MR_i$  - figura de mérito normalizada, para alternativa  $i$ .

#### F) Pesos.

Paelinck (14) mostrou que o vetor de pesos  $W = \{W_1, W_2, \dots, W_{NF}\}$  pode ser aproximado através de combinações dos vetores extremantes. Para isso é conveniente adotar um vetor de pesos normalizados, isto é, tal que a soma  $\sum W_k = 1$ .

Os vetores extremantes correspondem às condições limites de cada atributo, obtidas a partir de relações de dominância de um atributo sobre outro.

Por exemplo, admitamos que o problema envolva dois atributos apenas,  $A_1$  e  $A_2$ , e que haja uma relação de dominância do primeiro em relação ao segundo. Simbolicamente temos  $A_1 \geq A_2$ .

Um vetor extremante seria aquele que desse o máximo peso possível ao atributo  $A_1$ :

$$W^{(1)} = \{1 \ 0\} \quad (9.41)$$

Nessa situação extrema daríamos peso 1 ao atributo  $A_1$  e peso zero ao atributo  $A_2$ .

Outro vetor extremante corresponderia ao máximo peso possível para o atributo  $A_2$ . Como, no entanto, devemos respeitar a relação  $A_1 \geq A_2$ , o vetor extremante para o atributo  $A_2$  seria:

$$W^{(2)} = \{1/2 \ 1/2\} \quad (9.42)$$

Continuando a exemplificação, suponhamos um caso com cinco atributos, com a seguinte relação simbólica de dominância:

$$A_1 \geq A_2 = A_3 \geq A_4 = A_5 \quad (9.43)$$

Para esse caso tem-se três vetores extremantes, a saber:

$$W^{(1)} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$$

$$W^{(2)} = \{1/3 \ 1/3 \ 1/3 \ 0 \ 0\} \quad (9.44)$$

$$W^{(3)} = \{1/5 \ 1/5 \ 1/5 \ 1/5 \ 1/5\}$$

Voogd (15) sugere um processo de Monte Carlo para obter combinações aleatórias dos vetores dominantes. Para o segundo exemplo, em que temos três vetores extremantes, podemos gerar vetores através de um processo de Monte Carlo, utilizando, para isso, a relação:

$$W = r_1 \cdot W^{(1)} + r_2 \cdot W^{(2)} + r_3 \cdot W^{(3)} \quad (9.45)$$

onde  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  são números aleatórios, definidos no intervalo  $0 \leq r_j \leq 1$ , e tal que o último seja igual ao complemento dos demais:

$$r_3 = 1 - r_1 - r_2 \quad (9.46)$$

O processo de Monte Carlo envolve a aplicação sucessiva do modelo para um número razoavelmente elevado de casos, em que os números aleatórios  $r_j$  vão sendo sorteados de forma independente. O resultado final é obtido comparando-se os valores da figura de mérito  $MR_i$  obtida através da soma dos valores parciais gerados em cada situação aleatória:

$$MZ_i = \sum_{l=1}^L MR_i^{(l)} \quad (9.47)$$

onde:

$MR_i^{(k)}$  - figura de mérito normalizada, obtida na  $k$ ésima avaliação.

$MZ_i$  - figura de mérito global, alternativa  $i$ .

$L$  - número total de avaliações do processo de Monte Carlo.

É conveniente normalizar os resultados através da relação:

$$\overline{MZ}_i = \frac{MZ_i - MZ_i^{(-)}}{MZ_i^{(+)} - MZ_i^{(-)}} \cdot 100 \quad (9.48)$$

onde:

$MZ_i^{(-)}$  - valor de  $MZ_i$  correspondente à pior alternativa.

$MZ_i^{(+)}$  - valor de  $MZ_i$  correspondente à melhor alternativa.

$\overline{MZ}_i$  - figura de mérito normalizada, variando no intervalo de 0 a 100.

A hierarquização das alternativas se faz de acordo com os valores de  $\overline{MZ}_i$ , em que a melhor alternativa apresentará valor 100 e, a pior, o valor zero.

Há casos simples em que os diversos atributos não apresentam relação de dominância entre si, ou seja:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_k \quad (9.49)$$

Nesses casos utiliza-se um único vetor de pesos, todos iguais, dado por:

$$W = \{1/NF \quad 1/NF \quad \dots \quad 1/NF\} \quad (9.50)$$

onde  $NF$  é o número total de atributos. Para esse tipo de problema basta aplicar a metodologia uma única vez, já que o vetor (9.50) é fixo (determinístico).

Exemplo 9.4 Trata-se de avaliar as 9 alternativas de localização do Exemplo 9.2, adotando como critérios os seguintes atributos:

Quadro 9.5  
Atributos Relacionados às Áreas Alternativas  
para Localização do Depósito - Exemplo 9.4

Local (1)	Índice de	Impacto (3)	Facilida <sup>(3)</sup>	Existência (3)
	acessibi-		de de	
	lidade (2)	Urbano	obtenção	estrutura
	(I)		da área	
L <sub>1</sub>	59,4	3	4	3
L <sub>2</sub>	90,5	1	3	3
L <sub>3</sub>	82,9	2	4	1
L <sub>4</sub>	92,4	2	1	1
L <sub>5</sub>	66,5	3	1	1
L <sub>6</sub>	51,2	3	2	2
L <sub>7</sub>	44,5	3	4	3
L <sub>8</sub>	87,4	1	1	3
L <sub>9</sub>	50,7	3	2	2

(1) Vide Fig. 9.3

(2) Variável cardinal. Vide Quadro 9.3

(3) Variável ordinal.

- a) Índice de acessibilidade global, representados pela variável I determinada no Exemplo 9.2, e fornecida no Quadro 9.3.
- b) Impacto urbano, medido numa escala de três níveis (1, 2 e 3), sendo o nível 3 o de menor impacto e o 1 o de maior efeito negativo.
- c) Facilidade de obtenção da área, medido numa escala de quatro níveis (1 a 4), representando o maior valor a condição mais favorável.
- d) Existência de infra-estrutura, medida através de uma escala de três níveis (1 a 3), com o maior valor representando a situação mais favorável.

No Quadro 9.5 são apresentados os dados referentes às 9 alternativas consideradas na análise.

O Programa 13, do Anexo, permite resolver este tipo de problema. Para isso entra-se com as coordenadas das diversas áreas alternativas e com os respectivos atributos, inclusive os valores do índice de acessibilidade. Deve-se notar que as coordenadas, neste exemplo, servem tão somente de referência para melhor identificação das áreas. Pode o leitor fundir os programas dos Exemplos 9.2 e 9.4 num só, de forma a unificar os cálculos.

Dos quatro atributos adotados na análise, o primeiro, acessibilidade, foi considerado prioritário, ou seja:

$$A_1 \geq A_2 = A_3 = A_4 \quad (9.51)$$

Dessa forma tem-se dois vetores extremantes,

$$W^{(1)} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (9.52)$$

e

$$W^{(2)} = \{1/4 \ 1/4 \ 1/4 \ 1/4\} \quad (9.53)$$

Para resolver o problema utilizou-se o método de Monte Carlo num total de 100 iterações, obtendo-se os resultados in

dicados no Quadro 9.6. Das nove alternativas a melhor é a  $L_2$ , seguida pelas  $L_3$  e  $L_8$ . A última, na escala hierarquizada, é a alternativa  $L_9$ .

O Programa 13 foi desenvolvido na forma conversacional, de uso auto-explicativo. Os atributos cardinais devem ser introduzidos antes dos atributos ordinais, em razão do sequenciamento dos cálculos.

Quadro 9.6  
Hierarquização dos Locais Alternativos para  
Localização do Depósito - Exemplo 9.4

AVALIAÇÃO DE LOCAIS ALTERNATIVOS

EXEMPLO 9.4

HIERARQUIZAÇÃO DAS ALTERNATIVAS

NUMERO ITERACOES: 100

ALTERN.	COORD X	COORD Y	ACESS.	IMP.URB.	FAC.OBT.	INF.EST.	MÉRITO
L 2	-0.30	-1.80	90.50	1.00	3.00	3.00	100.00
L 3	3.20	-3.30	82.90	2.00	4.00	1.00	69.96
L 8	-0.70	1.20	87.40	1.00	1.00	3.00	65.82
L 1	-4.30	-2.30	59.40	3.00	4.00	3.00	65.34
L 4	2.50	1.20	92.40	2.00	1.00	1.00	56.54
L 7	-4.80	5.50	44.50	3.00	4.00	3.00	25.48
L 5	4.20	4.20	66.50	3.00	1.00	1.00	9.91
L 6	0.70	7.70	51.20	3.00	2.00	2.00	1.34
L 9	-5.80	1.70	50.70	3.00	2.00	2.00	0.00

Referências, Parte IV

- (1) BALLOU, R.: "Business Logistics Management", Prentice-Hall Inc, U.S.A., 1973 (Cap. 8).
- (2) BLUMENFELD, D. ; L. BURNS e J. DILTZ.: "Analyzing Trade-Offs Between Transportation, Inventory and Production Cost on Freight Networks", Transportation Research, Vol 19B, nº 5, pp 361-380, outubro, 1985.
- (3) BOWERSOX, D.J.: "Logistical Management", Mac Millan Publishing Co, Inc., New York, 1978.
- (4) DAGANZO, C. e G. NEWELL.: "Physical Distribution from a Warehouse: Vehicle Coverage and Inventory Levels", Transportation Research, Vol 19B, nº 5, pp 397-407, outubro, 1985.
- (5) DAGANZO, C.: "Supplying a Single Location from Heterogeneous Sources", Transportation Research, Vol 19B, nº 5, pp 409-419, outubro, 1985.
- (6) HALL, R.N.: "Determining Vehicle Dispatch Frequency When Shipping Frequency Differs Among Suppliers", Transportation Research, Vol 19B, nº 5, pp 421-431, outubro, 1985.
- (7) KUHN, H.W. e R.E. KUENNE.: "An Efficient Algorithm for the Numerical Solution of the Generalized Weber Problem in Spatial Economics", Journal of Regional Science, Vol 4, nº 2, 1962.
- (8) LA LONDE, B.J.: "The Logistics of Retail Location", in Management Perspectives in Retailing, R.R. Gist (edit.), John Wiley & Sons, Inc, U.S.A., 1967 (pp 204-208).
- (9) LARSON, R.C. e A.R. ODONI.: "Urban Operations Research" Prentice-Hall Inc., U.S.A., 1981 (secção 6.5).
- (10) NELSON, R.L.: "Principles of Retail Location", in Management Perspectives in Retailing, R.R. Gist (edit.), John Wiley & Sons, Inc., U.S.A., pp 204-208, 1967.
- (11) NIJKAMP, P.: "Soft Multicriteria Analysis as a Tool in Urban Land-Use Planning", Environment and Planning B, Vol. 9, pp 197-208, 1982.
- (12) NOVAES, A.G.: "Métodos de Otimização: Aplicações aos Transportes", Editora Edgard Blücher, S. Paulo, 1978.
- (13) NOVAES, A.G.: "Localização de Polos Comerciais Diferenciais em Áreas Urbanas", XX Simpósio de pesquisa Operacional, Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional, Salvador, outubro, 1987.
- (14) PAELINCK, J.H.P.: "Qualitative Multiple Criteria Analysis - Environment Protection and Multi-Regional Development", Papers of the Regional Science Association, Vol 36, pp 59-74, 1976.
- (15) VOOGD, H.: "Multicriteria Evaluation with Mixed Qualitative and Quantitative Data", Environment and Planning B, Vol 9, pp 221-236, 1982.
- (16) BURNS, L.D. ; R.W. HALL ; D.E. BLUMENFELD e C.F. DAGANZO: "Distribution Strategies that Minimize Transportation and Inventory Costs", Operations Research, Vol 33. pp 469-490, 1985.

## 10. ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS

Os problemas de coleta/distribuição estudados nos Capítulos 5 e 6 consideravam o espaço geográfico como um plano contínuo, sobre o qual se associava uma métrica Euclideana ou retangular, conforme o caso. Há aplicações, no entanto, em que os pontos de parada e os percursos possíveis estão vinculados a uma rede de transporte pré-definida. Tais problemas ocorrem na fase operacional ou em estudos de planejamento em que a rede e os pontos de atendimento já estejam definidos, permitindo assim que se chegue a soluções mais realistas.

O principal problema logístico associado a redes de transporte é o do roteirização de veículos, nas suas várias modalidades.

Antes de abordar os problemas de roteirização de veículos é necessário introduzir alguns conceitos, definições e propriedades ligados a redes de transporte.

### 10.1. Redes de transporte: definições e propriedades

Uma rede de transporte, tratada em termos matemáticos, é na realidade um grafo  $G(N, A)$  constituído por um conjunto finito  $N$  de nós e um conjunto finito  $A$  de arcos que interligam pares de nós (Fig. 10.1).

Um arco que liga os nós  $i$  e  $j$  de uma rede é representado pela notação  $(i, j)$ . Se a todos os arcos de uma rede for associada uma direção de fluxo definida, o grafo se diz orientado (Fig. 10.2a). Se nenhum dos arcos for direcionado, o grafo se diz não orientado. Quando ocorrerem arcos direcionados na presença de outros sem orientação, o grafo é misto. (Fig. 10.2b).

Um arco incide sobre os dois nós ligados por ele. Dois nós ligados por um arco são ditos nós adjacentes. Da mesma forma, os arcos que incidem num mesmo nó também são chamados adjacentes.

Para grafos orientados o grau de convergência de um nó  $i$  é dado pelo número de arcos que incidem sobre  $i$ . O grau de divergência de um nó é dado pelo número de arcos que saem desse nó.

Uma trilha de um grafo não orientado é uma sequência de nós e de arcos adjacentes (Fig. 10.3). No caso de grafos