Primera parte

Teoría general

Titulo de la obra original
Functional Analysis

Edición original en lengua inglesa publicada por
McGraw-Hill Book Company, New York

Versión española por
Jesús Fernández Novoa
Profesor Adjunto de la Facultad de Ciencias
de la Universidad Complutense de Madrid
y
Luis Bou García
Prof. Jefe de Estudios del Instituto Nacional de Enseñanza Media de Zalaeta
La Coruña

Revisada por
Dr. Enrique Linés Escardó
Catedrático de la Facultad de Ciencias
de la Universidad de Madrid

Propiedad de EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Encarnación, 86 Barcelona (24)

Impreso en España Printed in Spain
ISBN - 84 - 291 - 5115 - X

Dep. Leg. B.9.326
IMPRESO POR SORPAMA C/ Paraguay, 12-14 Barcelona

Indice analítico

Prólogo

El Análisis Funcional se propone estudiar ciertas estructuras topológico-algebraicas y los métodos que el conocimiento de estas estructuras permite aplicar a los problemas analíticos.

Un buen texto de carácter introductorio a este tema debería contener una exposición de su axiomática (es decir, de la teoría general de espacios vectoriales topológicos), debería tratar con cierta profundidad unos cuantos aspectos de la teoría y, asimismo, debería mostrar varios ejemplos interesantes de aplicación a otras ramas de la Matemática. Espero que el presente libro satisfaga dichos requisitos.

El tema es ya muy amplio y continúa creciendo con rapidez. (La bibliografía en el volumen I de [4] sólo llega hasta 1957 y ocupa 96 páginas.) Por consiguiente para poder escribir un libro de tamaño razonable ha sido necesario seleccionar ciertas áreas e ignorar totalmente otras. Soy consciente de que prácticamente todos los iniciados que ojeen el índice echarán en falta algunos de sus (y mis) temas favoritos; tal situación es, al parecer, inevitable. No ha sido mi intención escribir una obra enciclopédica, sino un libro que abriera el camino para una exploración posterior más amplia.

Por esta razón se han omitido muchos temas de carácter especialmente esotérico, que podrían hallar lugar en la presentación de la teoría general de espacios vectoriales topológicos. Por ejemplo, no se exponen los espacios uniformes, ni la convergencia Moore-Smith, ni las teorías de redes o de filtros. La noción de completitud aparece tan sólo en relación con los espacios métricos. No se mencionan ni los espacios bornológicos ni los tonelados. Se expone la teoría de la dualidad, pero no en toda su extensión. La integración de funciones vectoriales tiene un trata-

miento puramente instrumental que se concreta al considerar solamente integrandos continuos con valores en un espacio de Fréchet.

No obstante, el contenido de la parte I es perfectamente suficiente para casi todas las aplicaciones a problemas concretos. Al tomar este rumbo es preciso subrayar que la estrecha interacción entre lo abstracto y lo concreto es no sólo la característica más útil de toda esta teoría, sino también la más fascinante.

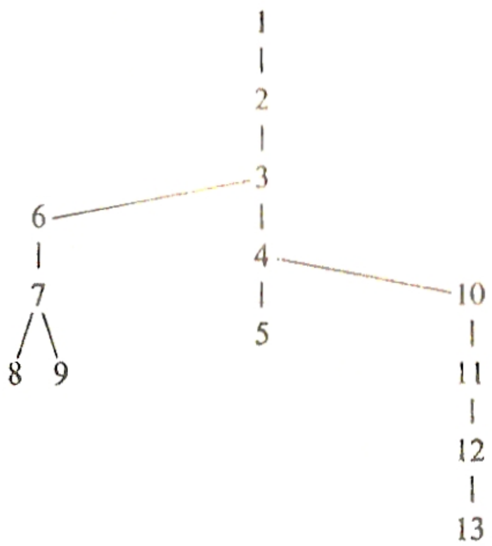
He aquí algunas características de los temas seleccionados. Se presenta gran parte de la teoría general de espacios topológicos sin introducir la hipótesis de convexidad local. Las propiedades fundamentales de los operadores compactos se obtienen de la teoría de dualidad en espacios de Banach. En el capítulo 5 se utiliza de varias formas el teorema de Krein-Milman sobre existencia de puntos extremales. La teoría de distribuciones y la transformación de Fourier han sido expuestas

con bastante detalle, y se aplican (en dos capítulos muy breves) a dos problemas de ecuaciones en derivadas parciales, así como al teorema tauberiano de Wiener y dos de sus aplicaciones. El teorema espectral se deduce de la teoría de álgebras de Banach (concretamente, de la caracterización de Gelfand-Naimark de las B^*-álgebras conmutativas); probablemente no sea éste el camino más breve, pero, sin duda, es fácil. Se discute con considerable detalle el cálculo simbólico en álgebras de Banach; lo mismo se hace con las involuciones y los funcionales positivos. Se incluyen también varios resultados muy recientes sobre álgebras de Banach que todavía no han hallado lugar en otros textos.

Se presupone al lector familiarizado con la teoría de la medida y con la integración de Lebesgue (incluidos hechos tales como la completitud de los espacios L^p), con ciertos conocimientos básicos de las funciones holomorfas (tales como la forma general del teorema de Cauchy y el teorema de Runge) y con la formación topológica exigida por los temas anteriores. Otros requisitos topológicos se exponen brevemente en el Apéndice A. Practicamente no se precisa más álgebra que la implícita en la noción de homomorfismo.

El Apéndice B reúne las referencias de carácter histórico. Algunas dan las fuentes originales; otras, libros, trabajos y artículos expositivos en los que se pueden encontrar referencias más amplias. Evidentemente, hay muchos puntos de los que no se da documentación alguna. La ausencia de referencia explícita no implica, en ningún caso, pretensión alguna de originalidad por mi parte.

La mayor parte de las aplicaciones se hallan en los capítulos 5, 8 y 9. Existen también algunas en el capítulo 11 y en los ejercicios, que superan los 250, en muchos de los cuales se dan orientaciones al lector. La interdependencia de capítulos se muestra en el diagrama siguiente:



El libro procede de un curso que el autor expuso en la Universidad de Wisconsin. He tenido fructíferas conversaciones con algunos de mis colegas, especialmente con Patrick Ahern, Paul Rabinowitz, Daniel Shea y Robert Turner. Es un placer expresarles aquí mi agradecimiento.

Walter Rudin

Bibliografía

1 AGMON, S.: "Lectures on Elliptic Boundary Value Problems," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1965.

2 BANACH, S.: "Théorie des Opérations linéaires," Monografje Matematyczne, vol. 1, Varsovia, 1932.

3 BROWDER, A.: "Introduction to Function Algebras," W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

4 DUNFORD, N. y J. T. SCHWARTZ: "Linear Operators," Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, Inc., New York, pt. I, 1958; pt. II, 1963.

5 EDWARDS, R. E.: "Functional Analysis," Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1965.

6 GAMELIN, T. W.: "Uniform Algebras," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1969.

7 GELFAND, I. M., D. RAIKOV y G. E. SHILOV: "Commutative Normed Rings," Chelsea Publishing Company, New York, 1964. (Original ruso, 1960.)

8 GELFAND, I. M. y G. E. SHILOV: "Generalized Functions," Academic Press, Inc., New York, 1964. (Original ruso, 1958.)

9 HALMOS, P. R.: "Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity," Chelsea Publishing Company, New York, 1951.

10 HALMOS, P. R.: "A Hilbert Space Problem Book," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1967.

11 HEWITT, E. y K. A. ROSS: "Abstract Harmonic Analysis," Springer-Verlag OHG, Berlin, vol. 1, 1963; vol. 2, 1970.

12 HILLE, E. y R. S. PHILLIPS, "Functional Analysis and Semigroups," Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 31, Providence, R.I., 1957.

1936. Véase también [4], cap. XII.

Definición 13.34. La condición de continuidad que hemos impuesto puede debilitarse: Si (*a*) y (*b*) se cumplen y si $Q(t)x \to x$ *débilmente*, cuando $t \to 0$, para todo $x \in X$, entonces (*c*) es válida. Véase [33], pp. 233-234. La demostración utiliza más resultados de teoría de integración vectorial que los que contiene este libro.

El teorema 13.35 está probado en [4], [12], [22] y [33].

Teorema 13.37. M. H. Stone, *Ann. Math.*, vol. 33, pp. 643-648, 1932; B. Sz.-Nagy, *Math. Ann.*, vol. 112, pp. 286-296, 1936.

Apéndice A

Sección A2. J. W. Alexander, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 25, pp. 296-298, 1939.

Sección A3. A. Tychonoff probó esto para productos cartesianos de intervalos (*Math. Ann.*, vol. 102, pp. 544-561, 1930) y lo utilizó para construir lo que ahora se conoce como la compactificación de Čech (o de Stone-Čech) de un espacio completamente regular. E. Čech (*Ann. Math.*, vol. 38, pp. 823-844, 1937; especialmente p. 830) probó el caso general del teorema y estudió propiedades de la compactificación. Por tanto, parece que Čech probó el teorema de Tychonoff, mientras que Tychonoff encontró la compactificación del Čech; una buena ilustración de la fiabilidad histórica de la nomenclatura matemática.